Riešené úlohy z Mirochovej zbierky (v0.6)

(Kombinatorická analýza, 2i)

0.1 Nové v tejto verzii

- pokračovanie konvolúcii
- začaté Newtonove rady

0.2 End User Licence Agreement

Tento tekst obsahuje chyby. Ďalej môžeš čítať, len ak nahlas povieš: "Áno, som si vedomý, že tento tekst obsahuje chyby." Ak bude šírený, chyby sa šíria spolu s ním (a ako vraví Vanda, pri šírení ďalšie vznikajú). Takže tak. Use with caution. A keď nejaké chyby nájdete, dajte vedieť. Možno opravím.

Ináč "Nové v tejto verzii" sa samozrejme vždy po zverejnení verzie zo zdrojáku maže, preto treba čítať postupne všetky verzie, ak chcete vedieť, čo pribudlo od poslednej, ktorú máte. Cool, nie?

1.1 Matická indukcia

1. 1...5 sú trápne, musí každý so zavretými očami, v 6. treba dokázať, že $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n+1}$, v 7. sa výraz na ľavej strane s rastúcim n zväčšuje, lebo $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > \frac{1}{n+1}$

2. Never tried.

3. 1. je easy, 2. ide bez MI:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1} \Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

$$\text{a preto } \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

3. indukčný krok

$$(2n+2)! < 2^{2n}(n!)^2(2n+1)(2n+2) < 2^{2n}(n!)^2(2n+2)^2 = 2^{2n+2}((n+1)!)^2$$

4. ide bez MI:

$$k(n-k-1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

lebo výraz na ľavej strane nadobúda maximum pre $k = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ a to je zjavne rovné pravej strane. No a $n!$ môžeme rozpísať ako

$$n! = (1.n).(2.(n-1)).\ \ldots$$

pričom ak n je párne, tak dostaneme $n/2$ dvojíc, o každej vieme z predchádzajúceho tvrdenia, že jej súčin je ostro menší (kedže činitele sú rôzne) ako $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, ak je n nepárne, ostane nám na konci jeden člen rovný $\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Z toho už dokazované tvrdenie priamo vyplýva. 5. analogicky ako 4., ľahko nahliadneme napr. rozpísaním členov, že

$$(2n-2k)!(2k+2)! \geq ((n+1)!)^2$$

6. predelíme obe strany n^n, dostaneme

$$n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

a zaspomíname na analýzu, podľa ktorej je výraz na pravej strane rastúci a má limitu e.

4. 1. Úpravou $(x_1-1)(x_2-1)<0$.
2. Indukcia, prvý krok priamo vyplýva z bodu 1, indukčný krok: Nech $x_1 \dots x_n x_{n+1} = 1$. Potom z IP $x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n$ BUNV nech x_n je najmenšie, x_{n+1} najväčšie z nich. Ak sú obe 1, tvrdenie platí, ak nie, je $x_{n+1} > 1 > x_n$, a teda $x_n x_{n+1} < x_n + x_{n-1} - 1$.
3. Čísla $\frac{x_1}{x_2}, \dots, \frac{x_n}{x_1}$ spĺňajú predpoklady predch. bodu.
4. Čísla $\frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$ tiež spĺňajú podmienku z bodu 2, načo nám bol bod 3?

5. 1. Jedna možnosť je odhadnúť sumu integrálom:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \int_{x=1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 2$$

Iné riešenie: uhádneme, o koľko sa suma líši od 2 v závislosti od n. Hľadáme teda takú kladnú funkciu $f(n)$, aby platilo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{f(n)}$$

a zároveň, aby sa ľahko dokazovalo pri indukcii tvrdenie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{f(n)} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{f(n+1)}$$

odkiaľ dostávame, že pre hľadanú $f(n)$ by malo platiť

$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{f(n)} + \frac{1}{f(n+1)} \leq 0$$

alebo ináč

$$(n+1)^2 f(n+1) \geq f(n)f(n+1) + (n+1)^2 f(n)$$

Tomuto vyhovuje napríklad $f(n) = n$, tvrdenie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ naozaj ľahko dokážeme indukciou. 2. analogicky nájdeme, že vhodný odhad je napríklad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

najtesnejší je pre n=2, takže po 2 treba spraviť prvý krok indukcie, od 2 ďalej sa dá dokázať druhý. Dokazovaný odhad je **dosť** voľný, takže funkciu sme mohli zvoliť takmer akokoľvek. V podstate ide v odboch prípadoch o to, že máme postupnosť čiastočných súčtov a aby sme dokázali, že sú všetky jej členy menšie ako nejaká konštanta, ukážeme to tak, že nájdeme postupnosť, ktorej každý člen je väčší od príslušného členu našej a jej limita je $\leq$ konštante zo zadania. Pomôže to hlavne v prípadoch, keď limitu postupnosti zo zadania (v našom prípade sumu do nekonečna) nevieme explicitne porátať.

6. 1. a 2. ľahká indukcia s využitím definície Fib. čísel. V 3. indukčný krok:

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = F_{n+1}^2 - (F_{n+1} + F_n)F_n = F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 =$$

$$= F_{n+1}^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_{n-1}) - F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}$$

V 4. stačí v indukčnom kroku použiť $F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2}$ 5. som neskúšal, ale mala by ísť podobne easy.

7. Z 1. a 2. minulej úlohy triviálne vyplýva $\sum_{k=0}^{n} F_n = F_{n+2} - 1$.

1.2 Rekurencie

8. Ako hádať substitúcie: Step one. Máme rekurenciu tvaru $y(n) = k.y(n-1) + c, k > 1$, radi by sme sa zbavili toho $+c$, ktoré tam zavadzia. Ako na to? Položme $y(n) = z(n) + d$, dostaneme $z(n) + d = k.z(n-1) + kd - c$. Keby sme teraz na pravej strane mali d a nie $kd - c$, vyhrali sme. Ale veď stačí zvoliť vhodné d, menovite $d = c/(k-1)$.

Príklad použitia v praxi: 1. $y(1) = 5,\ y(n+1) = 2y(n) - 3$. Substitúcia $y(n) = z(n) + 3$, dostávame $z(1) = 2,\ z(n+1) + 3 = 2(z(n) + 3) - 3 = 2z(n) + 3 \Longrightarrow z(n) = 2^n \Longrightarrow y(n) = 2^n + 3$.

Step two. Čo ak nám tam nevadí konštanta, ale polynóm? Možnosť 1 – postupne mu znižovať rád. Ak máme rekurenciu tvaru $y(n) = k.y(n-1) + c.n^m + P(n), k > 1, deg(P) < m$, stačí vziať substitúciu $y(n) = z(n) + d.n^m$, kde d je to isté v minulom odstavci. V rekurencii pre $z(n)$ už budeme mať polynóm nižšieho rádu. Takto po pár krokoch dostaneme konštantu. A s tou už vieme, čo máme robiť. Druhá možnosť je rovno hľadať riešenie tvaru $y(n) = z(n) + Q(n)$, kde $Q(n)$ je polynóm rovnakého stupňa ako ten na pravej strane. Dosadením dostaneme $z(n) + Q(n) = k.z(n-1) + k.Q(n-1) + c.n^m + P(n)$, no a aby sa nám tie polynómy vymlátili, chceme, aby sa ľavá a pravá strana rovnali. Porovnaním koeficientov dostaneme sústavu $deg(Q) + 1$ rovníc pre koeficienty Q, tú vyriešime a vyhrali sme.

Opäť príklad použitia v praxi: 3. $z_1 = 3,\ z(n) = 2(z(n-1) + n) - n^2 + 1$. Hľadáme riešenie v tvare $z(n) = x(n) + a.n^2 + b.n + c$, dosadením máme $x(n) + an^2 + bn + c = 2.x(n-1) + 2a(n-1)^2 + 2bn + 2c + 2n - n^2 + 1$, a aby sa oba polynómy rovnali, musí platiť:

$$\begin{aligned} -a &= -1 \\ 2a - b &= 2 \\ a + b - c &= 1 \end{aligned}$$

Odtiaľ $a = 1, b = c = 0$, keďže $x(1) = z(1) - 1.1^2 = 2$, je $x(n) = 2^n$, a teda $z(n) = 2^n + n^2$.

Step three. Čo ak máme vpravo nie jeden, ale dva posledné členy postupnosti? Tu sú (ako obvykle) dve možnosti. Buď je to úplne triviálne, alebo to nejako súvisí s Fibonacciho číslami. (Čokoľvek horšie, čo sa dá vymyslieť, priemerný druhák nezvláda spočítať `:-)`) V takomto prípade nám teda po zbavení sa nadbytočných vecí z pravej strany zostanú Fibonacciho čísla. Nadbytočné veci podobne ako v predchádzajúcich krokoch prerozdelíme medzi predchádzajúce členy, nech sa nám vymlátia.

Príklad použitia v praxi: 2. úloha. Zoberme substitúciu $T(n) = y(n) + 1$, dostaneme $y(n+2)+1 = y(n+1)+1+y(n)+1-1$, teda $y(n+2) = y(n+1)+y(n)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, teda $y(n) = F_n$ a $T(n) = F_n + 1$.

Step four. Keď všetko ostatné zlyhá, uhádnuť z prvých pár členov riešenie a dokázať matickou indukciou. Pri hádaní riešenia prudko pomáha prax s podobnými úlohami. A keby v štvrtej úlohe nemal Miroch chybu v zadaní (chcelo tam byť $+1$, nie -1), tak by bol ešte 4. príklad na to, že zoberieme substitúciu $R(n+2) = y(n+2) + an + b$, dorátame $a = 1$, $b = 0$, dostaneme $R(n+2) = F_n + n$.

9. Napíše sa zakaždým taká rekurencia, že čo sa stane, keď sa ich napr. polovica vyzabíja (To je prvý prípad, pre párne n sa zabijú ľudia $1, 3, \ldots, 2n-1$, na rade je 2, ten, ktorý ostane, má teda dvojnásobné číslo ako ten, čo by ostal pre $n/2$ ľudí. Pre nep. n analogicky.) Pri riešení rekurencie pomôže zapísať si n v dvojkovej sústave.

10. Koho zabilo? Jozefa???

11. 1. Kreslime priamky postupne, i-ta z nich pretne max. $i-1$ priamok, tie ju rozdelia na max. i častí, každá časť priamky rozdelila jednu časť roviny na dve, preto je častí najviac $1 + \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n+2}{2}$. Pre ľubovoľné rozloženie n rôznobežných priamok také, že žiadne 3 nemajú spoločný bod, sa táto hodnota nadobúda.

2. Každá neohraničená časť leží medzi dvoma susednými priamkami, odtiaľ ľahko nahliadneme, že neohraničených častí je $2n$. Max. je teda ohraničených o $2n$ menej ako v 1. úlohe.

3., 4. analogicky, spočítame, koľko najviac priesečníkov môže vzniknúť na kružnici, každý oblúk medzi dvoma susednými priesečníkmi delí pôvodnú jednu časť roviny na 2, teda pribudne ich toľko, koľko je týchto oblúkov. No a ďalšie príklady sú stále na jedno kopyto, len pri tých 3D to už chce trochu priestorovej predstavivosti... (i-ta rovina pretne prvých $i-1$ v max. $i-1$ priamkach, tie na nej vytnú max. $\frac{i^2+i+2}{2}$ oblastí, takže max. toľko častí priestoru nám pribudne... Ľahko zovšeobecníme úlohu pre vyššie dimenzie.)

12. 1. Čo potrebujeme na presunutie celej veže? Aspoň presunúť všetky menšie disky zo spodného disku, presunúť spodný disk na správnu tyč a všetky ostatné presunúť naň. Na prvý aj tretí krok potrebujeme aspoň a_{n-1} krokov, na druhý 1 krok. Zjavne toľko krokov stačí (presunieme vežu z prvých $n-1$ diskov na 2. tyč, preložíme spodný disk na 3. a presunieme vežu z 2. na 3. tyč). Preto $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $a_1 = 1$, odkiaľ $a_n = 2^n - 1$.

2. Zjavne $b_1 = 2$. Zopakovaním úvahy dostávame $b_n = 2b_{n-1} + 2$, odkiaľ $b_n = 2^{n+1} - 2$.

3. viď zbierka KSP, nechce sa mi vymýšľať a písať.

13. Bolo na prednáške, je to o tom, že zapíšeme číslo v jednej sústave a fcia nám ho akoby po cifrách prepíše do druhej.

14. Všetky podúlohy v tejto úlohe riešime repertoárovou metódou. Predvediem na prvej z nich: Vidíme, že riešenie má tvar $g(n) = A(n).\alpha + B(n).\beta + C(n).\gamma + D(n).\delta$. Toto riešenie je všeobecné, teda platí pre všetky hodnoty α, β, γ, δ. To ale znamená, že platí aj pre $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$. Po dosadení dostávame $A(0) = 1$, $A(n) = 2A(n-1)$, teda $A(n) = 2^n$. Podobným spôsobom dostaneme rekurencie pre B, C, D: $B(0) = 0$, $B(n) = 2B(n-1)+1$, $C(0) = 0$, $C(n) = 2C(n-1) + n$, $D(0) = 0$, $D(n) = 2D(n-1) + 2^n$. Rekurencie pre B a C už vieme riešiť, dostávame z nich $B(n) = 2^n - 1$, $C(n) = 2^{n+1} - n - 2$. Rekurenciu pre D som rátal metódou, ktorú Miroch spomína na začiatku ďalšej kapitoly (je $s_n = 2^{-n}$, zavedieme substitúciu $g(n) = s(n)D(n).$), vyjde

$D(n) = n2^n$. Tento postup sa dá použiť na všetky takéto rekurencie, len samozrejme to nemusí vždy byť najjednoduchšie riešenie.

15. Tou rep. metódou sa asi myslelo, že sa napíše rekurencia podobná 14.4, miesto konštánt parametre a ide sa.

1.3 Vzťah súm a rekurencií

16. Len si treba uvedomiť, že čo tá podmienka kladená na s_n znamená. Tá hovorí toľko, že s_i spĺňajú rekurenciu $s_n = \frac{a_{n-1}}{b_n} \cdot s_{n-1}$, s_1 môžeme zvoliť ľubovoľne, ničomu neuškodí, ak ho položíme rovné 1 (občas môže iná konštanta trochu zjednodušiť medzivýsledok, ale to je všetko). Preto

$$s_n = \frac{a_{n-1} \dots a_1}{b_n \dots b_2}$$

No a s tým už 16. ide easily.

17. Hľadáme také s_n, aby

$$s_n = \frac{s_{n-1}}{n} = \frac{s_{n-2}}{n(n-1)}$$

Takéto s_n našťastie existuje, najlepšie je vziať $s_n = 1/n!$ a je to.

1.4 Ďalšie úlohy

18. Postupnosť je periodická, vyjde $Q_5 = \alpha$, $Q_6 = \beta$.

19. V podstate jediná rozumná metóda na takéto úlohy je vypísať si prvých niekoľko členov, z nich uhádnuť, čo je tá postupnosť zač a dokázať to. V tomto prípade máme: $1 = 1^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, $64 = 8^2$, tu nás už napadne, že asi $u_n = F_n^2$. Tak to dokážeme indukciou. Ja som pri tom potreboval ako pomocnú lemu tvrdenie 3. z príkladu s Fibonacciho číslami ($F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$)

20. No idea.

21. Keď už študent nemôže, Concrete Mathematics od Knutha pomôže.

22. Didn't try, ale takéto úlohy sa dokazujú sporom, teda predpokladáme, že má periódu dĺžky d a povedzme nájdeme ľubovoľne ďaleko dva členy a_k a a_{k+d}, ktoré sú rôzne.

23. Opäť obľúbená metóda – vypíšeme prvých pár členov, vyriešime zábavnosúťažnú úlohu "doplňte ďalší člen postupnosti", uhádneme, že členy postupnosti spĺňajú rekurentný vzťah $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$. Dôkaz indukciou v tomto prípade zlyháva (aspoň o pol jednej prvý pokus oň zlyhal), preto brute-force. Nájdeme explicitné vyjadrenie tipnutej rekurencie a ukážeme o ňom, že spĺňa rekurenciu zo zadania. Explicitný vzťah vyjde

$$a_n = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6}\sqrt{3}\right)(2+\sqrt{3})^n \ + \ \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{3}\right)(2-\sqrt{3})^n$$

No a je

$$a_n a_{n-2} = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6}\sqrt{3}\right)^2 \left(2+\sqrt{3}\right)^{2n-2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{3}\right)^2 \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n-2} +$$

$$+\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{n-2}\left(2-\sqrt{3}\right)^{n-2}\cdot$$

$$\cdot\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{2}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2}\right)=\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)^{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n-2}+$$

$$+\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)^{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n-2}+\frac{1}{6}\cdot 1^{n-2}.14$$

$$a_{n-1}^2+2=\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)^{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n-2}+\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)^{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n-2}+$$

$$+\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{n-2}\left(2-\sqrt{3}\right)^{n-2}\cdot$$

$$\cdot\left(2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right)+2=\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)^{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n-2}+$$

$$+\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)^{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n-2}++\frac{1}{6}\cdot 1^{n-2}.2+2$$

čím sme napriek zlým poveternostným okolnostiam vyhrali.

24. Čo písať k neriešeným úlohám? Kaleráby! Aby sa to v tej hŕŕbe textu blbo potom hľadalo!

25. Sporom, nech $n > 1$ je najmenšie také, že F_n a F_{n+1} majú spoločného deliteľa $d > 1$. Potom $F_n = d.a$, $F_{n+1} = d.b$, $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n = d(b-a)$, čo je spor s tým, že n je najmenšie.

26.-27. Viď 24.

28. $b_0 = 1/2$, $b_n = 2(b_0 + \ldots + b_{n-1})$, vyjde, že pre $n > 0$ je $b_n = 3^{n-1}$, if I'm not mistaken...

29. Vcelku elegantne zapísaná konštantná postupnosť, nie?

2.1 Jednoduché sumy

30. Easy.

31. Všetky sú teleskopické, robíme zábavné úpravy typu $k.k! = (k+1)! - k!$.

32. Prevádzame na teleskopické. Finta na 2. a 3. – platí:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

33. Upravujeme na známe sumy z predch. cvičení, ideálny postup je niečo prirátať a odrátať v čitateli, teda

$$\sum\frac{a_i}{b_i}=\sum\frac{a_i+c_i-c_i}{b_i}=\sum\frac{a_i+c_i}{b_i}-\sum\frac{c_i}{b_i}$$

34. A nezabúdame čiastočne vydeliť, rozkladať na parciálne zlomky ($9x^2+9x+2 = (3k+1)(3k+2)$, $6k+3 = (3k+1)+(3k+2)$) a hrať sa s harmonickými číslami. Aspoň základné operácie typu $\frac{1}{3}H_n = \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3n}$.

35. Easy, 5. je súčet 2. a 4.

36. Tfuj, to vyzerá (aj podľa výsledku) na nejakého MacLaurina... To som nikdy poriadne nevedel... Ale je to nejak uťapkané $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

37. No buď som ja blbý, alebo to už pre $n = 2$ neplatí...

2.2 Viacnásobné sumy

38. Zmena poradia sumácie. 2. je o tom istom ako 1. Riešenie 3:

$$\sum_{k=1}^{n} k.H_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} \frac{k}{l} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n} \frac{k}{l} = \sum_{l=1}^{n} \frac{(n^2+n)-(l^2-l)}{2l} =$$

$$= \frac{n^2+n}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(l-1) = \frac{n^2+n}{2}H_n - \frac{n^2-n}{4}$$

Ostatné analogicky.

39. Prvé dve sú easy, viď finta v 34. Tretia podobne ako v 38., treba rozlíšiť paritu n pri rátaní vnútornej sumy. Štvrtá je $\sum_{k=1}^{2n-1} H_k - H_n$. Piata je $\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^{2n} H_k - \sum_{k=1}^{n-1} H_k\right)$. Šiesta sa dá cez fintu s polovicou symetrickej tabuľky $n \times n$ členov vyjadriť ako

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right)$$

40. Bŕŕŕŕŕŕ.

41. V prvej vyjde $n.H_n^2$. Prečo? Lebo v druhej časti sa nám výraz $\frac{1}{k}$ pre $(l-1)^2 < k \leq l^2$ nasčíta $(n-l)$-krát, v prvej časti l-krát. Pre dobrý pocit dokážeme indukciou podľa n a keď sme už takí rozbehnutí, tak druhá suma je presne o tom istom, len s faktoriálmi a s bledomodrým odtieňom. Tretia je pekná, bez zmeny poradia sumácie, vyjde H_n^2. Štvrtá je priamočiara s tým istým výsledkom (len prehádzané členy definície).

42. Bŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕŕ. Fuj.

2.3 Integrálna a iné metódy

43. Na úvod toľko, že metóda expand-contract znamená, že jednoduchú sumu nahradíme dvojitou, čo sa ľahšie ráta. Ja som to z toho názvu nevymyslel, musel som si nájsť, čo to vlastne znamená. Označme hľadaný súčet S_n. Je $S_{n+1} = S_n + (n+1)2^{n+1}$ a zároveň $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(k+1).2^{k+1} = 2S_n + \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}$, odtiaľ $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.

Pekná metóda:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Zderivujme obe strany podľa x, prenásobme obe strany x a máme:

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

A stačí dosadiť $x = 2$.

44.,45. Buď si easy, alebo nie si.

46. Prvá viď koniec tejto úlohy, využíva predchádzajúce. Druhá ide perturbačnou metódou, ak už vieme $\sum 2^k$ a $\sum k2^k$. Neuškodí posunúť spodnú hranicu na 0. Dostávame

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 2^k = 2^n \left(n^2 - 4n + 6\right) - 6$$

Tretiu som nerátal, ale 4 pred sumu a dosadiť do finty zo 43. Štvrtá na prekvapenie perturbáciou. Vyjde

$$\sum_{k=0}^{n} k2^{-k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$$

No a sľúbená prvá:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \left(2.\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1} - n - 2}{2^{n-1}} - 2 + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+2} - 2n - 4 - 2^{n+1} + 1}{2^n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1} - 2n - 3}{2^n} \right) = 2$$

2.4 Konečný kalkul zvaný tiež neurčité sumy

47. Warmup problem. Definícia diferencie je pár riadkov predtým. Tak dosadím.

48. 1996!, všetky členy až na posledný sú nulové.

49. a) $\frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}$ b) H_k c) 2^k d) -2^{-k+1} e) $\frac{c^{n+1}}{c-1}$ f) F_{k+1} Vždy hľadáme takú funkciu $g(k)$, aby $g(k+1) - g(k) = f(k)$ Napr. v e) podľa vzorca na súčet geom. postupnosti by sme dostali $\frac{c^{n+1}-1}{c-1}$, čo je síce dobre, ale posunuté o konštantu to je krajšie.

50. Porátame určitú sumu, z nej neurčitú. Per partes s 1, ako pri $\ln x$ v analýze.

$$\sum_{k=0}^{n-1} H_k = \sum\nolimits_0^n 1.H_x \delta x = \left| \begin{array}{l} \Delta u = 1,\ v = H_x \\ u = x,\ \Delta v = x^{\underline{-1}} \end{array} \right| = [xH_x]_0^n - \sum\nolimits_0^n Ex.x^{\underline{-1}}\,\delta x =$$

$$= [xH_x]_0^n - \sum\nolimits_0^n (x+1).x^{\underline{-1}}\,\delta x = nH_n - n$$

Je teda $\sum H_k \delta k = kH_k - k$.

51.

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \sum\nolimits_0^n x^{\underline{m}} \delta x = \left[\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} \right]_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(x^{\underline{2}} + x\right) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

Štvrtá analogicky, piatu a šiestu rozpísaním klesajúcej mocniny prevedieme na známu sumu.

52. 1. rozpíšeme cez def. kles. mocniny, prevedieme na sumu harmonických čísel, dostaneme $H_{2n} - H_n$. V 2. $0^{\underline{-k+1}} = \frac{1}{(k-1)!}$ a potom už je to trapas. Podobne tretia – rozpíšeme, máme $H_n - H_{2n}$. Štvrtá je teleskopická, vyjde $2^{n^2} - 1$. Posledná sa upraví na tvar $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(k! + (k-1)!) = (-1)^n n! - 1$.

53. 1.-4. per partes, derivujeme H_k. 5.-7. tiež per partes, derivujeme k, resp. k^2. Všeobecne keď chceme robiť per partes, derivujeme to, čo sa ťažšie integruje (resp. čo nevieme integrovať).

54. a) priamo, ostatné ako ináč — per partes, derivujeme H_k, integrujeme $k^{\underline{m}}$.

55. Rozpíšeme H_k ako $H_{k-1} + \frac{1}{k}$, čím dostaneme predch. prípad a nejaké harmonické číslo 2. rádu.

3. $\lfloor$ časti $\rfloor$

Všeobecný pokec: platí rovnosť $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Preto zvykneme značiť $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in Z$, $x_1 \in \langle 0, 1)$, vcelku to pomáha. Väčšina dôkazov sa potom zvrhne na rozoberanie prípadov.

56. Use všeobecný pokec<ESC> Cut $x_1 = 0$<ESC> Proved.

57. Use všeobecný pokec<ESC> Cut $x_1 = 0$<ESC> Case Trich; x_0,0<ESC> Proved.

58. Nakresliť si číselnú os.

59.,60. vyzerá škaredo, tvárim sa, že tam nie sú, nechce sa mi ich

61. Nech $n = km + l$, $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, cut $l = 0$.

62. Use všeobecný pokec a užite si rozbor prípadov podľa toho, aká je celá a aká necelá časť.

63.-72. Fíííha, toľko za sebou som toho ešte nevynechal, mám rekord. Ale ináč tam nie je nič zaujímavé. Fakt. Verte mi to...

73. 1. Sčitovaný výraz je 0 alebo 1, 0 je to len vtedy, keď je k mocnina dvoch, tých je po n $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, preto výsledok je $n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$. V druhom prvých niekoľko sčítancov bude $\lfloor x \rfloor$, ostatné potom budú $\lfloor x \rfloor + 1$, len treba zistiť, koľko je tých druhých, to by malo byť fairly simple.

74. Všetky rátame tak, že si ich rozdelíme na úseky, na ktorých má príslušná celá časť logaritmu rovnakú hodnotu, to je medzi dvomi po sebe idúcimi mocninami 2, pozor na hranice (podľa druhu celej časti), no a zosumujeme to po tých úsekoch. Napríklad keď je tá hodnota 2× 1, potom 4× 2, 8× 3 a tak ďalej, rátame vlastne $\sum k2^k$ s vhodnými hranicami. Pozor na posledný úsek, ak nekončíme pri mocnine 2!

75.-77. Pokračovanie úspešného seriálu na tému "ignorujeme úlohy, ktoré sa nám nechce". Ale 77.5 som skoro porátal. Uťapká sa, prepíše sa necelá časť na x mínus celá časť a rozbije sa na dva integrály, jeden porátame, druhý je v podstate suma.

78. Z prvých členov uhádneme $T_{2n} = 2$, $T_{2n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$, this property is proved by induction. A nezľaknite sa toho T_0, skúste si zrátať T_1, pochopíte.

79. A nedokážeme, just!

4.1 Základné vzťahy s komb. sumami

80. 3. je easy, 1. a 2. pre celé čísla tiež, a keďže sú to polynómy od a a zhodujú sa v nekonečne veľa bodoch, sú rovnaké, teda to platí aj pre necelé a.

81. Ľahké rozcvičkové sumy, prvá je $(1+1)^n$, druhá cez $k\binom{n}{k} = k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}$, tretia je lin. kombinácia prvých 2, štvrtá pre $n = 0$ je 1, ináč je to $(1-1)^n$. Piata analogicky ako druhá, len použijeme absorpčnú formulu až dvakrát, šiesta je súčet druhej a piatej.

82. Ľahké sumy verzia dva. Prvé dve vynásobíme $\frac{n+1}{n+1}$ a absorbujeme, tretia je $(2+1)^n$, štvrtá sa poskladá z minulého cvičenia, piata je $((m-1)+1)^n$.

83. Trochu zahumusené sumy. V prvých dvoch rozpíšeme to škaredé komb. číslo podľa definície kým to len ide, a potom sa nestačíme diviť, ako nám skoro všetko vypadne. Tretiu som neskúšal, štvrtá je a bit tricky:

$$\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k+1}}}{(k+1)!} = \binom{n}{k+1}$$

V piatej a šiestej sa vrátime k osvedčenému postupu – rozpísať podľa definície a skoro všetko vykrátiť. Siedma a ôsma sú súčty polovice riadku Pascalovho trojuholníka. Keďže $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ten je rovnaký, ako súčet druhej polovice, no a súčet celého riadku je 2^n. Pri párnom n sme dvakrát zarátali stredný člen, tak ho netreba zabudnúť odrátať. Deviatej popárujeme členy od krajov (teda prvý s posledným, druhý s predposledným, atď.), súčet každej dvojice je 0, takže celá suma bude mať výsledok 7. Či nie?

84. Prvá je polovica z $(1+1)^n + (1-1)^n$, druhá je polovica z $(1+1)^n - (1-1)^n$, tretia je štvrtina z $(1+1)^n + (1-1)^n + (1+i)^n + (1-i)^n$

85. A ja som si naivne myslel, že to predtým boli humusy. Ach jaj. Toto som si ešte stále ani prečítať netrúfol.

86. Neskúšal som, ale chce to nejak dokopať binomickú vetu, podobne ako v 84.

87. No, keby tam bolo $\binom{n}{m}$ miesto $\binom{m}{n}$, tak tomu začnem aj veriť. Rozpíšeme cez faktoriály a je. (Pozor na okrajové prípady, sme síce v celých číslach, ale niečo sa aj tu nájde!)

4.2 Konvolúcie, negácie a iní pokémoni

88. Prvá je Van der Mond s inými chrobáčikmi, druhá je special case keď sa všetky konštanty rovnajú n, tretiu prenásobíme $\frac{(n!)^2}{(n!)^2}$ a upravíme na druhú, v štvrtej vyberieme $\binom{n}{k}$ pred vnútornú sumu, v piatej $\binom{n}{k+j} = \binom{n}{n-k-j}$ a sme doma, v šiestej k vopcháme do jedného $\binom{n}{k}$ cez absorpčnú formulu, v siedmej použijeme identitu z 87., tým dostaneme jedno z komb. čísel konštantné a už aj letí von pred sumu.

89. Spím už alebo sa mi sníva? Déjà vu? Reštartujú Matrix? Toto tu už bolo! Len to malo číslo 84...

90. Ták, táto suma dala zabrať. Takže trochu podrobnejšie môj postup: Označme tento súčet $S(n)$. Zjavne $S(0) = 0$, nech teraz $n > 0$, je:

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n} + S(n-1)$$

A preto $S(n) = H_n$. Aké ľahké, keď to už vieme, že?

91. V prvom $\Delta f(k) = \binom{x+k+1}{m} - \binom{x+k}{m} = \binom{x+k}{m-1}$ a odtiaľ logicky $\sum f(x)\delta x = \binom{x+k}{m+1}$. V druhom $\Delta f(k) = \binom{x+k+1}{m+k+1} - \binom{x+k}{m+k} = \binom{x+k}{m+k+1}$, a potom nutne $\sum f(k)\delta k = \binom{x+k}{m+k-1}$.

92. Prvé dve: dosadíme do neurčitých súm z 91. Druhé dve sú sumy polynómu od k, robíme obe per partes, kombinačné číslo integrujeme podľa 91., druhý činiteľ derivujeme. (Sorry za terminológiu, ale najlepšie sa to tak pamätá... a keď už to má byť analógia, tak nech.)

93. Rozpíšeme podľa definície, sú to tie isté súčiny, len v jednom sú naopak znamienka, odtiaľ to $(-1)^k$.

94. V prvej znegujeme horný index a použijeme 91.2. V druhej sumujeme od opačného konca (subst. $l = n - k$), v tretej takisto, štvrtej znegujeme horný index a piatu opäť sumujeme od opačného konca.

95. Všetky sú o úprave na Van der Monda, v prvej negujeme horný index druhému komb. číslu. V druhej negujeme horný index prvému, dostaneme výsledok $(-1)^n\binom{\text{niečo}}{n}$, negujeme horný index aj tomu. V tretej znegujeme horné indexy postupne obom a výsledku. V štvrtej negujeme horný index druhému komb. číslu a nezabudneme upraviť výsledok z $\binom{-1}{n}$ na $(-1)^n$. V piatej negujeme horný index prvému, výsledok $(-1)^n\binom{n-1}{n}$ je pre všetky n okrem 0 nulový. V šiestej sa vrátime k obľúbenému postupu, teda negujeme oba sčítance a na koniec aj výsledok. V siedmej už sme nad celými číslami, preto použijeme na prvý sčítanec formulu symetrie ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$), druhému znegujeme horný index. V ôsmej sume pre $n > 0$ môžeme použiť absorpčnú formulu a vopchať každé k do jedného činiteľa. Vznikne nám suma, ktorá je special case Van der Monda pre všetko rovné $n - 1$.

96.-97. Zatiaľ som nerátal.

4.3 Newtonove rady

98. Zatiaľ som tiež nerátal. Ani asi nebudem.

99. Posunieme spodnú hranicu na m, použijeme m-krát absorbčnú formulu, tým sa zbavíme $k^{\underline{m}}$, vyjde $n^{\underline{m}}2^{n-m}$

100. Pre $m = n$ je to zrejmé. Pre $m > n$ je $k^{\underline{m}} = 0$, preto sú všetky sčítance nulové. Pre $m < n$ použijeme m-krát absorpciu, zbavíme sa tým $k^{\underline{m}}$ a sme hotoví.

101.-107. Nerátané. No comment so far.