Rozširujúce axiómy pre propozičnú logiku

Ekvačné axiómy.

Axióm reflexivity :

$$X = X$$

Axióm symetrie :

$$X = Y \rightarrow Y = X$$

Axióm tranzitivity :

$$X = Y \wedge Y = Z \rightarrow X = Z$$

Axióm funkčnej substitúcie :

$$X_1 = Y_1 \wedge X_2 = Y_2 \wedge \ldots \wedge X_n = Y_n \rightarrow f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

(pre ľubovoľnú n-árnu funkciu *f*)

Axióm predikátovej substitúcie :

$$X_1 = Y_1 \wedge X_2 = Y_2 \wedge \ldots \wedge X_n = Y_n \wedge p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \rightarrow p(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

(pre ľubovoľný n-árny predikát *p*)

Axiómy pre kvantifikátory.

Univerzálny substitučný axióm :

$$\forall x\ \Phi(x) \rightarrow \Phi(\tau)$$

(τ je ľubovoľný term)

Vysvetlenie: ak Φ platí pre všetky konštanty univerza, potom platí pre ľubovoľnú, nami zvolenú a teda aj pre ľubovoľný term, pretože jeho vyhodnotením dostaneme opäť len konštantu univerza.

Existenčný substitučný axióm :

$$\Phi(\tau) \rightarrow \exists x\ \Phi(x)$$

(τ je ľubovoľný term)

Vysvetlenie: ak Φ platí pre nejaký term, platí aj pre nejakú konštantu (ktorá je vyhodnotením tohto termu), a teda tvrdenie $\exists x\ \Phi(x)$ platí, lebo taká konštanta x skutočne existuje. Je napríklad tá, ktorá vznikne vyhodnotením termu τ.

Henkinov svedecký axióm :

$$\exists x\ \Phi(x) \rightarrow \Phi(\sigma)$$

(σ je nová, doteraz v dôkaze ešte nepoužitá konštanta)

Vysvetlenie: ak existuje nejaká konštanta, pre ktorú Φ platí, potom si túto konštantu pomenujme σ. Pretože predpoklad tvrdenia ($\exists x\ \Phi(x)$) nehovorí o tejto konštante nič bližšie (napríklad ako ju získať), musíme si ju zaviesť ako novú, doteraz ešte nepoužitú konštantu, pretože o nej nič bližšie nevieme.

Henkinov protipríkladový axióm :

$$\Phi(\sigma) \rightarrow \forall x\ \Phi(x)$$

(σ je nová, doteraz v dôkaze ešte nepoužitá konštanta)

Prídavok: dôkaz platnosti Henkinovho protipríkladového axiómu.

Vyjdime z nasledujúceho tvrdenia (T1) : $(\exists x\ \neg\Phi(x)) \vee (\forall x\ \Phi(x))$, ktoré hovorí, že buď existuje nejaká konštanta, pre ktorú predikát Φ neplatí, alebo (teda keď taká neexistuje, potom) Φ platí pre každú konštantu. Na prvú časť tvrdenia ($\exists x\ \neg\Phi(x)$) použijeme Henkinov svedecký axióm, teda $\exists x\ \neg\Phi(x) \rightarrow \neg\Phi(\sigma)$, kde σ je nová, doteraz nepoužitá konštanta. Je to práve tá konštanta, pre ktorú Φ neplatí, v prípade, že platí prvá časť tvrdenia T1. Tvrdenie T1 teda možno prepísať nasledovne (T2) : $\neg\Phi(\sigma) \vee (\forall x\ \Phi(x))$. Toto je ale iba inak zapísaná implikácia $\Phi(\sigma) \rightarrow (\forall x\ \Phi(x))$ čo je presne Henkinov protipríkladový axióm.