

# Konjunktívna normálna forma

## Definícia 1.

**Klauzulou** nazveme formulu tvaru  $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \rightarrow y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_m$ , kde  $x_1 \dots x_n$  a  $y_1 \dots y_m$  sú propozičné atómy, tzn. konštanty *True*, *False* alebo propozičné premenné.

## Poznámka 1.

Klauzulu  $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \rightarrow y_1 \vee \dots \vee y_m$  možno písať aj v tvare  $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots \vee \neg x_n \vee y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_m$ .

## Definícia 2.

Hovoríme, že formula  $F$  je v **konjunktívnej normálnej forme**, ak je zapísaná ako *konjunkcia klauzúl*,  $F = [x_{11} \wedge \dots \wedge x_{1n_1} \rightarrow y_{11} \vee \dots \vee y_{1m_1}] \wedge [x_{21} \wedge \dots \wedge x_{2n_2} \rightarrow y_{21} \vee \dots \vee y_{2m_2}] \wedge \dots \wedge [x_{k1} \wedge \dots \wedge x_{kn_k} \rightarrow y_{k1} \vee \dots \vee y_{km_k}]$ . Formula v konjunktívnej normálnej forme sa niekedy zapisuje len ako zoznam klauzúl.

## Veta 1.

Ku každej formule  $F$  obsahujúcej len propozičné atómy a logické spojky ( $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ), existuje formula  $F'$  v konjunktívnej normálnej forme, ktorá je s ňou ekvivalentná, tzn. platí  $F \equiv F'$ .

## Dôkaz.

Konstruktívne. Ukážeme postup, ako možno ľubovoľnú formulu  $F$  pretransformovať na  $F'$  v konjunktívnej normálnej forme. Budeme používať nasledujúce transformačné pravidlá:

Pravidlo 1. sa nazýva inicializačné.

$$1. f \equiv True \rightarrow f.$$

Pravidlá 2. a 3. odstraňujú nadbytočné logické konštanty – sú len kozmetického charakteru.

$$2. f \wedge True \rightarrow g \equiv f \rightarrow g.$$

$$3. f \rightarrow g \vee False \equiv f \rightarrow g.$$

Pravidlá 4. – 7. eliminujú negácie.

$$4. \neg f \wedge g \rightarrow h \equiv g \rightarrow f \vee h,$$

$$5. f \rightarrow \neg g \vee h \equiv g \wedge f \rightarrow h$$

Pravidlá 4. a 5. možno odvodiť s použitím zápisu implikácie podľa poznámky 1. Špeciálnymi prípadmi predchádzajúcich dvoch pravidiel sú pravidlá 6. a 7.

$$6. \neg f \rightarrow g \equiv True \rightarrow f \vee g.$$

$$7. f \rightarrow \neg g \equiv g \wedge f \rightarrow False.$$

Nasledujúce pravidlá eliminujú disjunkcie z predpokladov a konjunkcie zo záverov implikácie.

$$8. f \vee g \rightarrow h \equiv [f \rightarrow h] \wedge [g \rightarrow h] \text{ (vznikajú dve klauzuly).}$$

$$9. f \rightarrow g \wedge h \equiv [f \rightarrow g] \wedge [f \rightarrow h] \text{ (opäť vznikajú dve klauzuly).}$$

Implikácie a ekvivalencie v pôvodnej formule najprv nahradíme ich ekvivalentným zápisom pomocou negácií, konjunkcií a disjunkcií, a ďalej postupujeme uvedenými pravidlami.

Ľahko sa možno presvedčiť, že uvedené pravidlá postupne znižujú mieru pôvodnej formuly až kým nezostane len jedna veľká konjunkcia klauzúl zložených len z propozičných atómov, ktorá je teda v konjunktívnej normálnej forme. QED.

## Príklad 1.

$$F = (x_2 \vee \neg((x_5 \wedge \neg x_1) \vee \neg x_3)) \wedge \neg(x_1 \vee x_3) \equiv (1.)$$

$$True \rightarrow (x_2 \vee \neg((x_5 \wedge \neg x_1) \vee \neg x_3)) \wedge \neg(x_1 \vee x_3) \equiv (9.) \text{ (vznikajú dve klauzuly, redukovujeme obe paralelne)}$$

$$[True \rightarrow x_2 \vee \neg((x_5 \wedge \neg x_1) \vee \neg x_3)] \wedge [True \rightarrow \neg(x_1 \vee x_3)] \equiv (5.) (7.)$$

$$[((x_5 \wedge \neg x_1) \vee \neg x_3) \wedge True \rightarrow x_2] \wedge [(x_1 \vee x_3) \wedge True \rightarrow False] \equiv (2.) (2.)$$

$$[(x_5 \wedge \neg x_1) \vee \neg x_3 \rightarrow x_2] \wedge [x_1 \vee x_3 \rightarrow False] \equiv (8.) (8.)$$

$$[x_5 \wedge \neg x_1 \rightarrow x_2] \wedge [\neg x_3 \rightarrow x_2] \wedge [x_1 \rightarrow False] \wedge [x_3 \rightarrow False] \equiv (4.) (6.)$$

$$[x_5 \wedge \neg x_1 \rightarrow x_2] \wedge [True \rightarrow x_3 \vee x_2] \wedge [x_1 \rightarrow False] \wedge [x_3 \rightarrow False] = F'$$

Výsledná formula  $F'$  je v konjunktívnej normálnej forme a obsahuje štyri klauzuly.