Konjunktívna normálna forma

Definícia 1.

Klauzulou nazveme formulu tvaru $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \to y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_m$, kde $x_1 \ldots x_n$ a $y_1 \ldots y_m$ sú propozičné atómy, tzn. konštanty *True, False* alebo propozičné premenné.

Poznámka 1.

Klauzulu $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \to y_1 \vee \ldots \vee y_m$ možno písať aj v tvare $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \ldots \vee \neg x_n \vee y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_m$.

Definícia 2.

Hovoríme, že formula F je v **konjunktívnej normálnej forme**, ak je zapísaná ako *konjunkcia klauzúl*, $F = [\, x_{11} \wedge \ldots \wedge x_{1\,n1} \to y_{11} \vee \ldots \vee y_{1\,m1} \,] \wedge [\, x_{21} \wedge \ldots \wedge x_{2\,n2} \to y_{21} \vee \ldots \vee y_{2\,m2} \,] \wedge \ldots \wedge [\, x_{k1} \wedge \ldots \wedge x_{k\,nk} \to y_{k1} \vee \ldots \vee y_{k\ mk} \,]$. Formula v konjunktívnej normálnej forme sa niekedy zapisuje len ako zoznam klauzúl.

Veta 1.

Ku každej formule F obsahujúcej len propozičné atómy a logické spojky ($\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$), existuje formula F' v konjunktívnej normálnej forme, ktorá je s ňou ekvivalentná, tzn. platí $F \equiv F'$.

Dôkaz.

Konštrukčne. Ukážeme postup, ako možno ľubovoľnú formulu F pretransformovať na F' v konjunktívnej normálnej forme. Budeme používať nasledujúce transformačné pravidlá :

Pravidlo 1. sa nazýva inicializačné.

1. $f \equiv True \to f.$

Pravidlá 2. a 3. odstraňujú nadbytočné logické konštanty – sú len kozmetického charakteru.

2. $f \wedge True \to g \equiv f \to g.$
3. $f \to g \vee False \equiv f \to g.$

Pravidlá 4. – 7. eliminujú negácie.

4. $\neg f \wedge g \to h \equiv g \to f \vee h$,
5. $f \to \neg g \vee h \equiv g \wedge f \to h$

Pravidlá 4. a 5. možno odvodiť s použitím zápisu implikácie podľa poznámky 1. Špeciálnymi prípadmi predchádzajúcich dvoch pravidiel sú pravidlá 6. a 7.

6. $\neg f \to g \equiv True \to f \vee g.$
7. $f \to \neg g \equiv g \wedge f \to False.$

Nasledujúce pravidlá eliminujú disjunkcie z predpokladov a konjunkcie zo záverov implikácie.

8. $f \vee g \to h \equiv [\, f \to h \,] \wedge [\, g \to h \,]$ (vznikajú dve klauzuly).
9. $f \to g \wedge h \equiv [\, f \to g \,] \wedge [\, f \to h \,]$ (opäť vznikajú dve klauzuly).

Implikácie a ekvivalencie v pôvodnej formule najprv nahradíme ich ekvivalentným zápisom pomocou negácií, konjunkcií a disjunkcií, a ďalej postupujeme uvedenými pravidlami.

Ľahko sa možno presvedčiť, že uvedené pravidlá postupne znižujú mieru pôvodnej formuly až kým nezostane len jedna veľká konjunkcia klauzúl zložených len z propozičných atómov, ktorá je teda v konjunktívnej normálnej forme. QED.

Príklad 1.

$F = (x_2 \vee \neg((x_5 \wedge \neg x_1) \vee \neg x_3)) \wedge \neg(x_1 \vee x_3) \equiv$ (1.)
$True \to \underline{(x_2 \vee \neg((x_5 \wedge \neg x_1) \vee \neg x_3)) \wedge \neg(x_1 \vee x_3)} \equiv$ (9.) (vznikajú dve klauzuly, redukujem obe paralelne)
$[\, True \to x_2 \vee \underline{\neg((x_5 \wedge \neg x_1) \vee \neg x_3)} \,] \wedge [\, True \to \underline{\neg(x_1 \vee x_3)} \,] \equiv$ (5.) (7.)
$[\, ((x_5 \wedge \neg x_1) \vee \neg x_3) \wedge \underline{True} \to x_2 \,] \wedge [\, (x_1 \vee x_3) \wedge \underline{True} \to False \,] \equiv$ (2.) (2.)
$[\, \underline{(x_5 \wedge \neg x_1) \vee \neg x_3} \to x_2 \,] \wedge [\, \underline{x_1 \vee x_3} \to False \,] \equiv$ (8.) (8.)
$[\, x_5 \wedge \underline{\neg x_1} \to x_2 \,] \wedge [\, \underline{\neg x_3} \to x_2 \,] \wedge [\, x_1 \to False \,] \wedge [\, x_3 \to False \,] \equiv$ (4.) (6.)
$[\, x_5 \wedge \to x_1 \vee x_2 \,] \wedge [\, True \to x_3 \vee x_2 \,] \wedge [\, x_1 \to False \,] \wedge [\, x_3 \to False \,] = F'.$
Výsledná formula F' je v konjunktívnej normálnej forme a obsahuje štyri klauzuly.