Ručné dokazovanie tautológií
(s využitím konjunktívnej normálnej formy)

Klauzuly tvaru $f_1 \wedge f_2 \wedge .... \wedge f_n \rightarrow g_1 \vee g_2 \vee ... \vee g_m$ (kde f_i a g_i sú buď atómy alebo formuly) budeme zapisovať ako množiny formúl s tým, že formuly z pravej strany implikácie (g_i) budeme navyše označovať hviezdičkou (g_i*). Uvedená klauzula bude mať teda zápis : *{* $f_1, f_2, ..., f_n, g_1{*}, g_2{*}, ..., g_m{*}$ *}*.
Je zrejmá ekvivalencia medzi klauzulou a množinou v uvedenom tvare. Klauzula, ako vieme, je **tautológiou**, ak množiny formúl z ľavej a pravej strany implikácie majú neprázdny prienik. Ak totiž existuje *j* a *k* také, že $f_j \equiv g_k$ v zápise klauzuly, potom je implikácia vždy splnená, pretože splnenie predpokladov vyžaduje priradenie pravdivostnej hodnoty *True* formule f_j a z $f_j \equiv g_k$ vyplýva, že ohodnotenie g_k je tiež *True* čo spôsobí pravdivosť celej disjunkcie na pravej strane implikácie, preto je celá klauzula pravdivá.
Uvedené platí pre ľubovoľné formuly, my sa však obmedzíme len na propozičné atómy, tzn. neprázdnosť prieniku budeme zisťovať len pre propozičné atómy. Toto nie je obmedzením, pretože sme si ukázali, že každú zloženú formulu možno rozložiť na propozičné atómy dodržujúc pritom tvar konjunktívnej normálnej formy (na spomínanú vetu sa budem ďalej odkazovať). V množinovom zápise na zistenie neprázdnosti prieniku stačí nájsť dvojicu f_j, g_k* propozičných atómov takú, že $f_j \equiv g_k$.
Teraz si ukážeme postup (pravidlá), ktorým možno o ľubovoľnej formule rozhodnúť, či je alebo nie je tautológiou. Každá formula *f* je ekvivalentná s formulou $True \rightarrow f$, v množinovom zápise *{ True, f* }*, čo je ekvivalentné *{ f* }*. To bude pre nás **východisková množina**. Zložitejšie formuly tejto množiny budeme ďalej rozkladať na jednoduchšie až po propozičné atómy nasledujúcimi pravidlami :

1. **Rozpísanie (flatten)** (dôsledky pravidiel sa pridávajú do množiny)

Základné :

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}} \qquad \frac{(A \vee B)^*}{\begin{array}{c}A^*\\ B^*\end{array}}$$

Rozšírené :

$$\frac{(A \rightarrow B)^*}{\begin{array}{c}A\\ B^*\end{array}} \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{\begin{array}{c}A \rightarrow B\\ B \rightarrow A\end{array}}$$

2. **Rozdelenie (split)** (vznikajú vždy dve kópie pôvodnej množiny s tým, že do prvej sa pridá prvý a do druhej druhý z dôsledkov pravidla – obe treba dokázať)

Základné (zodp. pravidlám 9. a 8.) :

$$\frac{(A \wedge B)^*}{A^* \quad B^*} \qquad \frac{A \vee B}{A \quad B}$$

Rozšírené :

$$\frac{A \rightarrow B}{A^* \quad B} \qquad \frac{(A \leftrightarrow B)^*}{(A \rightarrow B)^* \quad (B \rightarrow A)^*}$$

3. **Inverzia (inversion)** (dôsledok sa pridáva do množiny, zodp. pravidlám 6. a 7.)

$$\frac{\neg A}{A^*} \qquad \frac{\neg A^*}{A}$$

4. **Zoslabovanie (weakening)** = odstránenie formuly z množiny (pre zachovanie ekvivalencie pôvodnej formuly a výslednej množiny sa zoslabovanie môže aplikovať len na prvky množiny (formuly), ktoré už boli spracovávané).
5. **Uzavretie (close)** = ak v množine existujú propozičné atómy *A* a *A**, znamená to, že formula zodpovedajúca tejto množie je tautológiou, a teda možno túto vetvu dôkazu uzavrieť.

Príklad.

Dokážeme, že formula $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$ je tautológia. V množinách budeme zapisovať len ešte nepoužité formuly, tzn. zoslabovacie medzikroky budeme prevádzať automaticky.

Množinovo	Pravidlo	Formula v CNF
$\{ ((A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B)^* \}$	Flatten na implikáciu	$True \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B)$
$\{ (A \rightarrow B) \wedge A, B^* \}$	Flatten na konjunkciu	$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$
$\{ A \rightarrow B, A, B^* \}$	Split na implikáciu	$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$
$\{ A, B^*, A^* \}$ $\{ A, B, B^* \}$	Close na *A**	$[A \rightarrow B \vee A] \wedge [A \wedge B \rightarrow B]$
$\{ A, B, B^* \}$	Close na B*	$[A \wedge B \rightarrow B]$
	Dokázané.	