<u>PART 1.</u> Limita funkcie 1.Definícia limity: Def 2 Množinu R^*:=R∪{-∞,∞} budeme nazývať rozšírená reálna os a jej prvky budeme volať body (pričom pre označenie prvkov množiny R budeme okrem toho nadalej používať aj pomenovanie čísla). Def 4 Bod b∈ R^*sa nazýva hromadný bod množiny M⊂R, ak v každom jeho prstencovom okolí leží aspoň jeden prvok množiny M. Veta 6 Nech a∈R´ je hromadný bod definičného oboru funkcie f , nech b∈R´. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné (a) pre každú postupnosť {an}n=1 do ∞ ⊂ D(f)\{a} takú, že $\lim_{n\to\infty}$an=a, platí $\lim_{n\to\infty}$f(an)=b, (b) (∀ O(b)) (∃P(a)) (∀ x∈P(a)∩D(f)) (f(x)∈O(b)). Def 7 Nech a∈ R^* je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu (b∈ R^*) (a zapisujeme $\lim_{x\to a}$f(x)=b alebo f(x)→b pre x→a), ak (∀O(b)) (∃P(a))(∀ x∈P(a) ∩ D(f)) (f(x)∈O(b)). Veta 9 Funkcia má v každom hromadnom bode svojho definičného oboru najviac jednu limitu (t. j. ak a∈ R^* je hromadný bod definičného oboru funkcie f a r= $\lim_{x\to a}$f(x), s= $\lim_{x\to a}$f(x), tak r=s). Lema 10 Nech b= $\lim_{x\to a}$f(x). Potom (a)ak b∈R^* ,tak funkcia f je ohraničená v niektorom prstencovom okolí P(a) bodu a (tj. na množine P(a)∩D(f)). (b) ak b>0 alebo b=∞, tak f je v niektorom prstencovom okolí bodu a ohraničená zdola kladnou konštantou, tj. (∃ P(a)) (∃ M>0) (∀ x∈P(a)∩D(f)) (f(x)≥M). (c) ak b<0 alebo b=-∞, tak f je v niektorom prstencovom okolí bodu a ohraničená zhora zápornou konštantou. Lema 11 (a) Nech funkcia g je zúžením funkcie f na množinu M. Ak a je hromadný bod množiny M a existuje $\lim_{x\to a}$f(x), tak existuje aj $\lim_{x\to a}$g(x) a platí $\lim_{x\to a}$g(x)= $\lim_{x\to a}$f(x). (b)Nech funkcie f, g sa zhodujú na niektorom prstencovom okolí bodu a∈R´, tj. nech D(f)∩P=D(g)∩P a (∀ x∈P∩D(f)) (f(x)=g(x)). Potom platí: ak existuje jedna z limít $\lim_{x\to a}$f(x), $\lim_{x\to a}$g(x), tak existuje aj druhá a obidve limity sa rovnajú. Veta 12 (a) Ak f je elementárna funkcia a číslo a∈D(f) je hromadným bodom množiny D(f), tak $\lim_{x\to a}$f(x)=f(a). (b) $\lim_{x\to 0}$(sin x /x)=1, $\lim_{x\to 0}$(ln(1+x)/x)=1, $\lim_{x\to 0}$(e^x/x)=1. **2. Limita funkcií f+g, f-g, fg, f/g, fºg:** Veta 14 Nech funkcie f, g sú definované na množine M.Ak $\lim_{x\to a}$f(x)=0 a funkcia g je ohraničená, tak $\lim_{x\to a}$(f(x).g(x))=0. Veta 15 Nech funkcie f, g sú definované na množine M, nech $\lim_{x\to a}$f(x)=r∈R, $\lim_{x\to a}$g(x)=s∈R. Potom (a) $\lim_{x\to a}$(f(x)+g(x))=r+s= $\lim_{x\to a}$f(x) + $\lim_{x\to a}$g(x), (b) $\lim_{x\to a}$(f(x)-g(x))=r-s= $\lim_{x\to a}$f(x) - $\lim_{x\to a}$g(x), (c)$\lim_{x\to a}$(f(x).g(x))=r.s= $\lim_{x\to a}$f(x).$\lim_{x\to a}$g(x), (d) ak s= $\lim_{x\to a}$g(x) je rôzne od 0, tak $\lim_{x\to a}$(f(x)/g(x))=r/s= $\lim_{x\to a}$f(x)/ $\lim_{x\to a}$g(x). Veta 17 Nech a∈R´ je hromadný bod definičného oboru funkcie f∘g, nech $\lim_{x\to a}$f(x)=b∈R´, $\lim_{x\to a}$g(y)=c∈R´. Ak je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok (a) (∀ x∈D(f)\{a}) (f(x)≠b), (b) b∉D(g), (c) g(b)=c, tak $\lim_{x\to a}$(f∘g)(x)= c. Veta 18 (a) Nech $\lim_{x\to a}$|f(x)|=∞. Potom $\lim_{x\to a}$1/f(x)=0, (b) Nech $\lim_{x\to a}$f(x)=0. Ak funkcia f je nezáporná (nekladná) na niektorom prstencovom okolí P bodu a a bod a je hromadný bod množiny D(1/f), tak $\lim_{x\to a}$1/f(x)=∞ ($\lim_{x\to a}$1/f(x)=-∞). Lema 19 Nech M je definičný obor funkcií f, g. Ak $\lim_{x\to a}$f(x)=∞ a (∀ x∈M\{a}) (f(x)≤g(x)), tak existuje aj $\lim_{x\to a}$g(x) a rovná sa ∞. Veta 20 Nech funkcie f, g sú definované na množine M.(a) ak $\lim_{x\to a}$f(x)=∞ a funkcia g je zdola ohraničená na niektorom prstencovom okolí P bodu a, tak $\lim_{x\to a}$(f(x)+g(x))=∞. (b) ak $\lim_{x\to a}$f(x)=∞ a funkcia g je na niektorom prstencovom okolí P bodu a zdola ohraničená kladnou konštantou, tak $\lim_{x\to a}$(f(x).g(x))=∞. **3. O nerovnostiach a limitách:** Veta 24 Nech funkcie f, g sú definované na MNOžINE m. Ak existujú limity $\lim_{x\to a}$f(x)=r∈R´, $\lim_{x\to a}$g(x)=s∈R´ a pre niektoré prstencové okolie P bodu a platí (∀ x∈P∩M) (f(x)≤g(x)), tak platí aj nerovnosť r≤s, tj. $\lim_{x\to a}$f(x)≤ $\lim_{x\to a}$g(x). Veta 25 Nech funkcie f, g, h sú definované na množine M. Ak $\lim_{x\to a}$f(x)= $\lim_{x\to a}$h(x)=b∈R a pre niektoré prstencové okolie P bodu a platí (∀ x∈P∩M) (f(x)≤g(x)≤h(x)), tak existuje aj $\lim_{x\to a}$g(x) a rovná sa b. **4. Limity monotónnych funkcií** Def 27 Nech f je funkcia definovaná na M. Ak bod a∈R∪{-∞} je hromadný bod množiny M+ =M∩(a,∞) a existuje $im_{x\to a}$f1(x)=b∈R, kde f1=f/M+, nazýva sa číslo b limita funkcia f v bode a sprava a označuje sa $\lim_{x\to a+}$f(x). Veta 29 Ak f je monotónna funkcia definovaná na M a a∈R∪{∞} je hromadný bod množiny m- = M∩(-∞,a), tak existuje $\lim_{x\to a-}$f(x). Pritom platí(A) ak f je neklesajúca a na množine M- zhora ohraničená, tak $\lim_{x\to a-}$f(x)=$\sup_{x\in M-}$f(x), (B) ak f je neklesajúca a na množine M- zhora neohraničená, tak $\lim_{x\to a-}$f(x)=∞.(c)ak f je nerastúca a na množine M- zdola ohraničená, tak $\lim_{x\to a-}$f(x)= $\inf_{x\in M-}$f(x), (d) ak f je nerastúca a na množine M- zdola neohraničená, tak $\lim_{x\to a-}$f(x)=-∞. Veta Ak a je vnútorný bod intervalu I (tj. pre niektoré ε>0 platí inklúzia O(α,ε)⊂I) a f: I\{a}→R je neklesajúca funkcia, tak existujú konečné $\lim_{x\to a-}$f(x), $\lim_{x\to a+}$f(x) a pltí $\lim_{x\to a-}$f(x)≤ $\lim_{x\to a+}$f(x). Veta 36 (Princíp do seba vložených intervalov) Nech {In}n=1 do ∞ je postupnosť uzavretých (ned generovaných alebo degenerovaných) ohraničených intervalov s vlastnosťou (a) 1⊃I2⊃...⊃In⊃In+1⊃.... Potom ∩n=1 do ∞ In ≠ ∅. Ak naviac platí (B) $\lim_{n\to\infty}$|In|=0 tak ∩n=1 do ∞ In je jednoprvková množina, tj. existuje práve jedno číslo c∈R s vlstnosťou (∀n∈N) (c∈In). **5. Späť k postupnostiam (a nielen k nim):** Def 37 Nech je daná postupnosť {an}n=1 do ∞ a rastúca postupnosť {nk}k=1 do ∞ prirodzených čísel. Potom postupnosť {ank}k=1 do ∞ sa nazýva podpostupnosť (alebo vybraná postupnosť z) postupnosti {an}n=1 do ∞.Veta 39 Nech a∈R´je hromadný bod definičného oboru funkcie f, nech b∈R´. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:(A) pre každú postupnosť {xn}n=1 do ∞ ⊂ D(f)\{a} s limitou a platí $\lim_{n\to\infty}$f(xn)=b, (b) $\lim_{x\to a}$f(x)=b. Veta 40 Z každej ohraničenej postupnosti možno vybrať konvergentnú podpostupnosť. Def 41 Hovoríme, že postupnosť {an}n=1 do ∞ je fundamentálna (alebo cauchyovská), ak (∀ ε>0) (∃ N∈N) (∀ n,p∈N, n,p>N) (|an-ap|<ε). Lema 42 Každá konvergentná postupnosť je fundamentálna. Veta 43 (Cauchy, Bolzano) Každá fundamentálna postupnosť je konvergentná. **6. Niektoré topologické pojmy: <u>PART 2.</u> Spojité funkcie 7. Definícia spojitosti:** Def 52 Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a∈D(f), ak platí (∀ O(f(a))) (∃ O(a)) (∀ x∈O(a)∩D(f)) (f(x) ∈ O(f(a))), okolia bodou a, f(a) môžeme popísať ich polomermi δ a ε - (∀ ε >0) (∃δ > 0) (∀ x∈D(f)) (|x-a|<δ⇒|f(x)-f(a)|<ε). -odlišnosti od definície limity 1.neperedpokladáme že a je hromadný bod D(f) 2. nepodstatná: z prvého vzťahu vidno že nehladáme prstencové okolie bodu a, ale okolie toho bodu. Def 53 Číslo a∈R sa nazýva izolovaný bod množiny M⊂R, ak a∈M, ale a nie je hromadný bod množiny M, tj. ak platí (∃ O(a)) (M∩O(a) = {a}). Lema Nech je daná funkcia f, nech a∈D(f). Potom (a) ak a je izolovanýbod množiny D(f), tak f je spojitá v bode a, (b) ak a je hromadný bod množiny D(f), tak f je spojitá v bode a práve vtedy, keď $\lim_{x\to a}$f(x)=f(a). Def Funkcia f sa nazýva spojitá ak je spojitá v každom bode svojho definičného oboru. Def Funkcia f:M→R sa nazýva spojitá na množine K⊂M ak je spojitá funkcia f/K (pozor neplatí to ak je spoijitá v každom bode množiny K). Veta 54 Nech a je prvok deiničného oboru funkcie f. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné: (a) pre každú postupnosť {xn}n=1 do ∞ ⊂ D(f) s limitou a platí $\lim_{x\to a}$f(xn)=f(a), (b) funkcia f je spojitá v bode a. Veta 55 (a) Ak funkcie f a g s definičným oborom M sú spojité v bode a, tak aj funkcie f+g, f-g, f.g sú spojité v s. Ak naviac g(a)≠0, tak aj funkcia f/g je spoitá v bode a. (b) Ak funkcia f je spoitá v bode a a funkcia g v bode f(a), tak funkcia g∘f je spojitá v bode a. Def 56 Číslo a∈R sa nazýva bod nespojitosti funkcie f, ak a je hromadný bod množiny D(f), ktorý spĺňa jednu z nasledujúcich podmienok 1.a∉D(f), 2. a∈D(f), ale $\lim_{x\to a}$f(x) buď neexistuje, alebo - ak existuje - je rôzna do f(a). **8. Vlatnosti spojitých funkcií definovaných na intervale:** Veta 66 Nech f je spojitá funkcia definovaná na intervale I. Ak eyistujú body a, b∈I, a<b, tak, že f(a).f(b)<0, tak pre niektoré c∈(a,b) platí f(c)=0. Veta Monotónnafunkcia f :i→R je spojitá⇔jej obor hodnôt je interval alebo jednoprvková množina. Veta Inverzná funkcia k rýdzomonotónnej funkcií je spojitá. Veta Spojitá funkcia f definovaná na intervale I je prostá ⇔ je rýdzomonotónna.

Lema Inverzná funkcia k rastúcej (klesajúcej) funkcií je rastúca (klesajúca) Veta Inverzná funkcia k prostej spojitej funkcii f definovanej na intervale I je spojitá.**9. Vlastnosti spojitých funkcií na kompaktných množinách: <u>PART 3.</u> Diferenciálny počet funkcií jednej reálnej premennej 10. Definícia vlastnej a nevlastnej derivácie v bode. Vety o derivácií súčtu, súčinu, zloženej a inverznej funkcie:** Def 81 Nech a∈R je hromadný bod definičného oboru D(f) funkcie f, pričom a∈D(f). Ak existuje limita $\lim_{x\to a}$<u>f(x)-f(a)/</u> x-a označujeme ju f´(a) a hovoríme, že funkcia f má v bode a vlastnú, alebo nevlastnú deriváciu. Ak je uvedená limita konečná, nazýva sa číslo f´(a) derivácia funkcie f v bode a (hovoríme tiež, že funkcia f je **<u>diferencovatľná</u>** v bode a), ak je táto limita nevlastná, hovoríme o nevlastnej derivácií funkcie f v bode a. f+(a), f-(a)...Def 82 Hovoríme, že funkcia f:M→R je rastúca v bode a∈M , resp, lesajúca v bode a∈M, ak existuje prstencové okolie bodu a P(a)=P také, že (∀x∈P∩D(f)) (((f(x)-f(a)) / (x-a))>0), resp (∀x∈P∩D(f)) (((f(x)-f(a)) / (x-a))<0). Hovoríme, že funkcia f:M→R má v bode a∈M lokálne maximum, ak existuje prstencové okolie P bodu a také, že (∀x∈M∩P) (f(x)≤f(a)). (lok min. ≥)(ostré lok max <)(ostré lok min >). Lema (a) Ak je funkcia f v bode a diferencovateľná, tak je tam aj spojitá. (b) Nech funkcia f má v bode a vlastnú, alebo nevlastnú deriváciu. Ak f´(a)>0 alebo f´(a)=∞, tak je v bode a rastúca. Ak f´(a)<0 alebo f´(a)=-∞, tak je v bode a klesajúca. (c) Nech funkcia f:M→R nadobúda lokálny extrém v bode a∈M. Potom platí: (c1) ak f nadobúda v bode a lokálne maximum (lokálne minimum) a existuje $f´_+(a)$, tak $f´_+(a)$≤0(=-∞) ($f´_+(a)$≥0(=∞)), (c2) ak f nadobúda v bode a lokálne maximum (lokálne minimum) a existuje $f´_-(a)$, tak $f´_-(a)$≥0(=∞) ($f´_-(a)$≤0(=-∞)), (c3) ak a je hromadný bod množín M+ aj M- (špeciálne ak M je interval a a je jeho vnútorný bod) a existuje f´(a), tak f´(a)=0. Veta 83 (o derivávií skalárneho násobku, súčtu, súčinu a podielu). Nech funkcie f, g : M→R sú diferencovateľné v bode a∈M, nech k∈R. Potom (a) (k.f)´(a)=k.f´(a), (B) (f+g)´(a)=f´(a)+g´(a), (c) (f.f)´(a)= f´(a).g(a)+f(a).g´(a), (d) ak g(a)≠0, tak (f/g)´(a)=(.g(a)+f(a).g´(a))/g^2(a). Veta 84 (o derivácií zloženej funkcie, reťazcové pravidlo) . Nech funkcia f je diferencovaťeľná v bode a, funkcia g v bode f(a). Ak a∈D(g∘f) je hromadný bod množiny D(g∘f), tak je v bode a diferencovatľná aj funkcia g∘f a platí (g∘f)´(a)=f´(a).g´(f(a)). Veta 85 (o derivácií inverznej funkcie) Nech prostá funkcia f : M→R je diferencovateľná v bode f^{-1}(a), kde a∈f(M). Ak inverzná funkcia je v bode a spojitá, tak tam má aj vlastnú, alebo nevlastnú deriváciu, prčom platí (a) ak f´(f^{-1}(a))∈R\{0}, tak (f^{-1})´(a)=1/ f´(f^{-1}(a)),(b) ak f´(f^{-1}(a))=0 a f je bode f^{-1}(a) rastúca, tak (f^{-1}(a))´(a)=∞, (c) ak f´(f^{-1}(a))=0 a f je bode f^{-1}(a) klesajúca, tak (f^{-1}(a))´(a)=-∞, **11. Derivácia jako funkcia. Derivácie vyšších rádov. Derivácie elementárnych funkcií.** Def 86 Ak je daná funkcia f : M→R, nazýva sa funkcia, definovaná na množine D všetkých tých x∈M, v ktorých je funkcia f diferencovateľná, a priraďujúca každému prvku x∈D hodnotu f´(x), derivácia funkcie f a označuje sa f´. Ak D=M, nazýva sa funkcia f diferencovateľná. Ak naviac f´je spojitá, nazýva sa f spojito diferencovaťeľná. Funkcia f sa nazýva diferencovateľná, resp. spojito diferencovateľná na množine M (∅≠M⊂D(f)), ak je diferencovateľná resp. spojito diferencovateľná funkcia f/M. Derivácie vyšších rádov funkcie f : M→R definujeme indukciou : pre n=0 položíme $f^{(0)}$=f a pre n∈N potom definujeme $f^{(n)}$=($f^{(n-1)}$)´. Lema 87 (Leibnizova formula). Nech funkcie f : M→R, g : M→R sú (i) (n-1)-krát diferencovateľné (n∈N) a (ii) majú n-tú deriváciu v bode a. Potom je v bode a n-krát diferencovateľná aj funkcia f.g a platí (g.f)´(a) = suma (k=0...n)(n nad k). $f^{(k)}$ $g^{(n-k)}$(a). Vety 88 Derivácie základných elementárnych funkcií. **12. Vety o strednej hodnote:** Veta 89 (Rolleho veta o strednej hodnote). Nech funkcia f je spojitá na intervale <a,b> a má v každom bode x∈(a,b) vlastnú, alebo nevlastnú deriváciu.Ak f(a)=f(b), tak pre niektoré c∈(a,b) platí f ´(c)=0.Veta 90 (Lagrangeova veta o strednej hodnote). Nech funkcia f je spojitá na intervale <a,b> a má v každom jeho vnútornom intervale vlastnú, alebo nevlastnú deriváciu. Potom pre niektoré c∈(a,b) platí rovnosť f ´(c)=(f(b)-f(a))/(b-a), f(b)-f(a) = f ´(c)(b-a). Veta 91 (Cauchyho veta o strednej hodnote). Nech funkcie f, g sú spojité na intervale <a,b>, pričom f má v každom bode x∈(a,b) vlastnú, alebo nevlastnú deriváciu a g je diferencovateľná na (a,b). Potom pre niektoré c∈(a,b) platí rovnosť f ´ (c)(g(b)-g(a))=g ´(c)(f(b)-f(a)). Ak sú naviac splnené podmienky (i) g(b)≠g(a) a (ii) (∀x∈(a,b))(g´(x)=0 ⇒ f´(x)≠0), tak f ´ (c)(g(b)-g(a))=g ´(c)(f(b)-f(a)) možno prepísať do podoby f ´(c)/g´ (c)=(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a)). **Vyšetrovanie priebehu funkcií: 13.1 Monotónnosť:** Veta 92 Nech spojitá funkcia f : I→R má v každom vnútornom bode intervalu I vlastnú, alebo nevlastnú deriváciu. Potom (a) f je neklesjúca (resp. nerastúca) práve vtedykeď platí (∀x∈int I)(f´(x)≥0∞) (resp. (∀x∈int I)(f´(x)≤0∞)) (b) f je klesjúca (resp. rastúca) práve vtedykeď platí (∀x∈int I)(f´(x)≥0∞) (resp. (∀x∈int I)(f´(x)≤0∞)) a množina M={x∈I, f´(x)=0} neobsahuje žadny nedegenerovaný interval (tj. špeciálne: ak pre všetky x∈int I platí f´(x)>0∞, resp. f´(x)<0∞) . **13.2 Lokálne a globálne extrémy:** Def 94. Ak f :<a,b> →R je spojitá funkcia, stačí namiesto $\max_{x\in\langle a,b\rangle}$f(x)nájsť $\max_{x\in K}$f(x) kde K={a,b}∪D1∪D2D2={x∈(a,b), f ´ (x)=0} a D1={x∈(a,b), v ktorých f nemá ani vlastnú ani nevlastnú deriváciu}. Veta 96 Nech funkcia f je n-krát (n∈N) diferencovateľná na niektorom okolí O bodu a (tj. O⊂D($f^{(m)}$)) a má vlastnú, alebo nevlastnú (n+1)-vú deriváciu v bode a a nech f´(a)=f´´(a)=... = $f^{(n)}$(a)=0, $f^{(n+1)}$(a)≠0. Potom (A)ak n+1 je párne a $f^{(n+1)}$(a)<0∞ ($f^{(n+1)}$(a)>0∞), tak f má v bode a ostré lokálne maximum (ostré lokálne minimum) (b) ak n+1 je nepárne, tak f nenadobúda v bode a lokálny extrém.**13.3 Konvexnosť a konkávnosť. Inflexné body:** ef 97 Hovoríme, že f je konvexná na intervale I⊂D(f), ak (∀ x, y, z ∈I, x< z < y) (f(z)≤f(x)+((f(y)-f(x))/(y-x))*(z-x)) (tj. ak na každom intervale <x,y>⊂I všetky body grafu funkcie f1=f/<x,y> ležia pod alebo na spojnici krajiných bodov tohoto grafu). (konk.≥) (rýdzo kovex <) (rýdzo konkáv. >) Def 100. Hovoríme, že bod a je inflexný bod funkcie f, ak existuje ε >0 tak, že (a-ε,a+ε)⊂D(f), pričom funkcia f má v bode a vlastnú, alebo nevlastnú deriváciu a je rýdzo konvexná na jednom z intervalov (a-ε,a>,<a,a+ε) a rýdzo konkávna na druhom z nich. Veta (a) Ak funkcia g´´ zmení v bode a znamienko, tak a je inflexný bod funkcia g. (b) Nech funkcia g je (n+1)-krát (n∈N) diferencovateľná na niektorom okolí O bodu a a má v bode a vlastnú, alebo nevlastnú (n+2)-hú deriváciu, pričom g´´(a)=g´´´(a)=... = $g^{(n+1)}$(a)= 0, $g^{(n+2)}$(a)≠0. Potom je a inflexný bod funkcia g práve vtedy, keď n je nepárne. 14. **L´Hospitalovo pravidlo:** Veta 102 (prvé L´Hospitalovo pravidlo). Nech a∈R´ je hromadný bod intervalu I, nech diferencovateľné funkcie f, g :

$I\setminus\{a\}\to R$ spĺňajú nasledujúce predpoklady : (i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (ii) $(\forall x\in I\setminus\{a\})\ (g(x)\neq 0)$ (ii) $(\forall x\in I\setminus\{a\})\ (g'(x)=0 \Rightarrow f'(x)\neq 0)$. Potom platí : ak existuje (vlastná, alebo nevlastná) $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x))$.

Veta 103 (druhé L´Hospitalovo pravidlo). Nech $a\in R'$ je hromadný bod intervalu I, nech diferencovateľné funkcie $f, g : I\setminus\{a\}\to R$ spĺňajú predpoklady : (i) $\lim_{x\to a}|g(x)|=\infty$, (ii) $(\forall x\in I\setminus\{a\})\ (g'(x)=0 \Rightarrow f'(x)\neq 0)$. Potom platí : ak existuje (vlastná, alebo nevlastná) $\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x))$, tak existuje aj $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))$ a $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x))$.