Matematycká analýza - druhý semester rok 2000

1: L´Hospital

Veta 102 (prvé L´Hospitalovo pravidlo). Nech $a \in R'$ je hromadný bod intervalu I, nech diferencovateľné funkcie $f, g : I \setminus \{a\} \to R$ spĺňajú nasledujúce predpoklady :

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

(ii) $(\forall x \in I \setminus \{a\})\ (g(x) \neq 0)$

(iii) $(\forall x \in I \setminus \{a\})\ (g'(x)=0 \Rightarrow f'(x) \neq 0)$.

Potom platí : ak existuje (vlastná, alebo nevlastná) $\lim_{x \to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x \to a}(f'(x)/g'(x))$.

Veta 103 (druhé L´Hospitalovo pravidlo). Nech $a \in R'$ je hromadný bod intervalu I, nech diferencovateľné funkcie $f, g : I \setminus \{a\} \to R$ spĺňajú predpoklady :

(i) $\lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$,

(ii) $(\forall x \in I \setminus \{a\})\ (g'(x)=0 \Rightarrow f'(x) \neq 0)$.

Potom platí : ak existuje (vlastná, alebo nevlastná) $\lim_{x \to a}(f'(x)/g'(x))$, tak existuje aj $\lim_{x \to a}(f(x)/g(x))$ a $\lim_{x \to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x \to a}(f'(x)/g'(x))$.

2:Taylorove polynómi

Lema1 Nech funkcie f,g sú definované na okolí bodu $a \in R$ a sú tam (n-1) krát diferencovatelné a majú v bode a n-tú deriváciu

ak $f(a)=g(a)=f'(a)=g'(a)=.....=f^{(n-1)}=g^{(n-1)}=f^{(n)}=0$, a $g^{(n)} \neq 0$ tak na niektorom prstencovom okolí bodu a platí $\forall x \in P(a), |f(x)| < |g(x)|$

Lema2 Nech P je polynóm stupňa najviac n, nech $a \in R$, potom sa dá napísať ako

$P(x)= P(a)+P'(a)(x-a)+(P^{(2)}(a)/2!)*(x-a)^2+...+(P^{(n)}(a)/n!)*(x-a)^n$.

Def Nech funkcia f: $I \to R$ je n-krát diferencovateľná v bode $a \in I$. Polynóm

$Tn(x)= f(a)+f'(a)(x-a)+(f^{(2)}(a)/2!)*(x-a)^2+...+(f^{(n)}(a)/n!)*(x-a)^n$ sa nazýva Taylorov polynóm rádu n funkcie f v bode a. Ak a=0 hovoríme o M´C Laurenovom polynóme.

Veta (o lokálne najlepšej aproximácií funkcie f v bode a Taylorovými polynomami) Nech f: $I \to R$ je n-krát diferencovateľná v bode $a \in I$ nech R je polynóm stupŇa najviac n rôzny od Taylorovho polynómu Tn rádu n funkcie f v bode a, potom existuje P(a) s vlastnosťou $(\forall x \in P(a) \cap I)(\ |f(x)-Tn(x)| < |f(x)-P(x)|\ )$

Veta Nech f: $I \to R$ je n-krát spojite diferencovateľná a nech $a \in I$. Nech T je polynóm stupňa najviac n, potom T je Taylorov polynóm rádu n funkcie f v bode a práve vtedy keď $\lim_{x \to a}(f(x)-T(x))/(x-a)^n$, f(x)-T(x) - je chyba ktorej sa dopustíme ak namiesto f(x) uvažujeme polynóm T. $f(x)-T(x) = O((x-a)^n)$, $O((x-a)^n)$ je nejaká funkcia (nmožina všetkých funkcíí) pre ktorú platí že je to po dosadení to číslo ktoré je vzhladom na našu presnosť neodlíšitelné od nuly.

Veta (o zvyšku) Nech funkcia f je n-1 krát diferencovateľná na intervale I nech $a \in I$, $x \neq 0$, $x \in I$. Potom

a) (Cauchyho veta o zvyšku) existuje c ležiace v otvorenom intervale s koncovými bodmi a,x také, že
$f(x) - Tn(x) = (f^{(n+1)}(c)/n!)*((x-c)^n)*(x-a)$

b) (Lagrangeova veta o zvyšku) existuje c ležiace v otvorenom intervale s koncovými bodmi a,x také, že
$f(x) - Tn(x) = (f^{(n+1)}(c)/(n+1)!)*((x-a)^{n+1})$

3: Neurčitý integrál

3.1: Hľadanie primitývnej funkcie

Def Funkcia F: $I \to R$ sa nazýva primitývna funkcia k funkcií f: $I \to R$ ak $F'(x)=f(x)$ $x \in I$.

Veta (Dôkaz v kap. určitý integrál) Ak f: $I \to R$ je spojiá funkcia, tak k nej existuje primitývna funkcia.

Veta Nech F: $I \to R$ je primitývna funkcia k funkcií f: $I \to R$ potom funkcia G: $I \to R$ je primitývna funkcia f funkcií f práve vtedy keď F-G=konštanta.

Def: Množina všetkých primitývnych funkcií k funkii f: $I \to R$ sa nazýva neurčtý integrál.. Označuje sa $\int f(x)dx = \{F(x)+c, c \in R\}$

3.2: Metódy integrovania

Veta (Metóda rozkladu) $\int (c1.f1(x)+c2.f2(x)+...+cn.fn(x))dx = c1\int f1(x)dx + c2\int f2(x)dx + c3\int f3(x)dx+...+ cn\int fn(x)dx$

Veta (Metóda pre partes) Nech f,g : $I \to R$ sú diferencovateľné funkcie a nech existuje primitývna funkcia k funkcii fg´ potom existuje primitývna funkcia k funkcii f´g a platí $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$

Veta (o substitúcií) Nech F: $I \to R$ je primitývna funkcia k funkcii f: $I \to R$. Nech g: $J \to I$ je fiferencovateľná, potom primitývna funkcia k funkcii f(g(x)).g´(x) je funkcia F(g(x)), tj.
$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = |\ g(x)=t,\ g'(x)dx=dt\ | = \int f(t)\,dt = F(t)+c = F(g(x))+c$.

Veta (druhá veta o substitúcií) Nech f: $I \to R$ je spojitá funkcia, nech g: $J \to I$ je surj. Je diferencovateľná funkcia, nech F: $J \to R$ je primitývna funkcia k funkcii f(g(x)g´(x) potom $F(g^{-1}(t))$ (kde $g(g^{-1}(t))=t$ $\forall t \in I$) je primitývna funkcia k funkcii f , potom $\int f(t)\,dt = |\ t=g(x),\ dt=g'(x)\,dx\ | = \int f(g(x))g'(x)dx = F(x)+c = F(g^{-1}(t))+c$.