MatAlýza – testíky z derivácií

©MišoF. 1999/00

Disclaimer. Toto je zbierka príkladov z Kubáčkovych testíkov. Sú k nim uvedené moje riešenia. TEX-ovský zdroják môžte voľne šíriť, dopĺňať a opravovať, to všetko pod podmienkou, že vo výslednej verzii zostane moje meno aspoň spomenuté (predsa len s tým trochu roboty bolo). V mojich riešeniach sú určite napriek mojej snahe chyby. Preto sa na ne nespoliehajte, prípadne ak sa spoľahnete, potom sa nesťažujte. Ak ma po prečítaní/absolvovaní analýzy budete chcieť na niečo pozvať, nebránim sa... Ak chcete vytlačiť verziu, kde nebudú riešenia, stačí zakomentovať jeden riadok v zdrojákoch a preTEXovať.

1. Derivácia fcie $\operatorname{sgn}^3 x$ v 0 je:
☐ vlastná ☐ nevlastná ☐ neexistuje

Riešenie.
Je:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{\operatorname{sgn}^3 x - \operatorname{sgn}^3 0}{x - 0} \right) = \lim_{x\to 0+} \frac{1-0}{x} = \infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \left(\frac{\operatorname{sgn}^3 x - \operatorname{sgn}^3 0}{x - 0} \right) = \lim_{x\to 0-} \frac{-1-0}{x} = \infty$$

teda $f'_-(0) = f'_+(0)$, preto existuje $f'(0)$ a je $f'(0) = f'_-(0) = f'_+(0) = \infty$.

2. Má fcia $f(x) = \left\{ {x^{1/2} \leftarrow x \notin Q \atop x^{3/2} \leftarrow x \in Q} \right.$ v 0 vlastnú alebo nevlastnú deriváciu?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Nie, lebo príslušná limita neexistuje. Dôkaz: pre $x \in Q_+$ je $\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{3/2}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ a pre $x \in R_+ - Q$ je $\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$. Keby hľadaná limita existovala, obe limity pre tieto zúženia by sa jej rovnali. Keďže sú ale rôzne, limita neex., q.e.d.

3. Nech $f : (0,1) \to R$ je neohraničená diferencovateľná fcia. Je potom f' neohraničená?
☐ áno ☐ nie ☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
Zjavne sú len dve možnosti, ako môže vyzerať f, keď je neohraničená, diferencovateľná a má def. obor $(0,1)$ – buď $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$, alebo naopak. BUNV nech je to takto. Ukážeme, že f' nie je zhora ohraničená, zdola sa ukáže rovnako.
Sporom. Nech je h horné ohraničenie f', zoberme ľubovoľné $x \in (0,1)$, nech $f(x) = y$. Určite existuje dosť malé x' také, že $f(x') > y + h$. Ale podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote existuje $c \in (x', x)$ také, že $f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} > \frac{h}{x'-x} > h$, čo je spor.

4. Tvrdenie: "Nech $f : R \to R$ je neohraničená diferencovateľná fcia taká, že $\forall x \in R; f''(x) > 0$ a $f'(0) = f(0) = 1$. Potom $\forall x \neq 0; f(x) > x + 1$" je:
☐ pravdivé ☐ nepravdivé

Riešenie.
Z druhej derivácie vidíme, že f je rýdzo konvexná a podmienka $f(x) > x+1$ je ekvivalentná s tým, že graf f leží celý nad dotyčnicou v bode 0. Táto skutočnosť ale z rýdzej konvexnosti a diferencovateľnosti f vyplýva pre všetky dotyčnice, teda aj pre dotyčnicu v 0, preto tvrdenie platí.

5. Nech $f : R \to R$ je 3x diferencovateľná fcia taká, že $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$ a $\forall x; f^{(4)}(x) < 0$. Potom:
☐ f' má v 0 lokálne maximum ☐ f' má v 0 lokálne minimum
☐ f' rastie ☐ f' klesá
☐ f' je rýdzokonvexná ☐ f' je rýdzokonkávna
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
$\forall x; f^{(4)}(x) < 0 \Rightarrow f^{(3)}(x)$ klesá $\Rightarrow \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(f^{(3)}(x)) \Rightarrow$ na $(-\infty, 0)$ f'' rastie, na $(0, \infty)$ klesá $\Rightarrow \forall x \neq 0; f''(x) < 0 \Rightarrow f'$ klesá.

6. Nech 2x diferencovateľná fcia $f : R \to R$ má lokálne maximum v bode 0, pričom $\forall x \in R; f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$ Potom :
☐ $f(0) \geq 0$ ☐ $f(0) \leq 0$
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Keďže je tam maximum, je $f'(x) = 0$, $f''(x) \leq 0$, preto $f(x) \geq 0$.

7. Nájdite 127. deriváciu funkcie $\frac{x^2+3x-4}{2x+1}$ a jej hodnotu v 0.

Riešenie.
Použijeme Leibnitzov vzorec, treba len tri sčítance tej sumy a vedieť vzorec pre deriváciu podielu. S tým si už ľahko odvodíme vzorce postupne $\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{(n)} = 2^n.n! \cdot (\frac{1}{2x+1})^{n+1}$ (uhádneme z prvých 3 derivácii a dokážeme indukciou) a následne $f^{(100)} = \frac{2^{99}.98!}{(2x+1)^{101}} \cdot (20200x^2 + 60196x - 78902)$.

8. Nájdite všetky lokálne extrémy fcie $(x+1)^{10}.e^{-x}$.

Riešenie.
Lokálny extrém môže byť len v bodoch, kde je prvá derivácia nulová a kde neexistuje. Prvá derivácia fcie zo zadania je $e^{-x}.(x+1)^9.(9-x)$, tá je všade definovaná a nulová je pre $x = -1$ a $x = 9$. Čo je kde? Spravíme druhú deriváciu, tá je $e^{-x}.(x+1)^8.(71 - 18x + x^2)$, pre $x = -1$ je teda kladná, pre $x = 9$ záporná. Preto má daná fcia v 1 lok. minimum a v 9 lok. maximum.

9. Do voľného priestoru nakreslite graf fcie $\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$.

Riešenie.
Treba spraviť prvé dve derivácie, z prvej vidíme rastúcosť, z druhej konvexnosť, a navyše zrátať body, v ktorých pretína osi.

10. Nájdite 27. deriváciu funkcie $x^2 \ln x$ a jej hodnotu v 1.

Riešenie.
To isté ako o pár uloh skôr, len (podľa môjho skromného názoru) ľahšie.

11. Nájdite vzorec pre $(f^{-1})''$.

Riešenie.
Postupnými úpravami dostávame:

$$(f^{-1})'' = \left(\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\right)' = \frac{(f'(f^{-1}(x)))'}{(f'(f^{-1}(x)))^2} =$$

$$= \frac{f''(f^{-1}(x)).(f^{-1}(x))'}{(f'(f^{-1}(x)))^2} = \frac{f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3}$$

12. Má fcia $f(x) = \left\{ \begin{smallmatrix} x^{5/3} \leftarrow x \notin Q \\ x^{7/3} \leftarrow x \in Q \end{smallmatrix} \right.$ v 0 vlastnú alebo nevlastnú deriváciu?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Podobne ako už bolo, s tým rozdielom, že v tomto prípade príslušná limita existuje, je rovná 0, teda f má vlastnú deriváciu a odpoveď znie áno.

13. Nech $f : [a, b] \to R$ je diferencovateľná fcia. Existuje $\max_{x \in [a,b]} f(x)$?
☐ áno ☐ nie ☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
Toto je priamo veta z prednášky. Existuje.

14. Nech $f : R \to R$ je dif. fcia, nech $f'_+(0) = \infty$, $f'_-(0) = -\infty$. Má f v 0 lokálne maximum?
☐ áno ☐ nie ☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
???
Keď $f'_+(0) = \infty$ a $f'_-(0) = -\infty$, znamená to, že neexistuje $f'(0)$, čo je ale spor s tým, že f je diferenc., preto taká fcia vôbec neexistuje.

15. Nech $f, g : R \to R$ sú dif. konkávne fcie, f je klesajúca, g je rastúca, potom $g \circ f$, t.j. $g(f(x))$ je:
☐ klesajúca konkávna ☐ klesajúca konvexná
☐ rastúca konkávna ☐ rastúca konvexná
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Zo zadania máme $\forall x, y \in R,\ x < y$:
(v1) $f(x) > f(y)$
(v2) $g(x) < g(y)$
(v3) $0 \geq f'(x) \geq f'(y)$ (z klesania a z konkávnosti)
(v4) $g'(x) \geq g'(y) \geq 0$ (z konkávnosti a rastu)
odtiaľ dostávame:

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow g(f(x)) > g(f(y))$$

Teda $g(f(x))$ je klesajúca, chceme ešte zistiť, či je $g \circ f$ konvexná, prípadne konkávna. To je ekvivalentné s tým, či je jej derivácia neklesajúca, resp. nerastúca.
Je $(g(f(x)))' = g'(f(x)).f'(x)$. Majme $x < y$. Z (v1) $\Rightarrow f(x) > f(y)$ a následne z (v4) $\Rightarrow g'(f(y)) \geq g'(f(x)) \geq 0$. Z (v3) máme $0 \geq f'(x) \geq f'(y)$.
Nuž a dokopy to dáva:

$$g'(f(y)) \geq g'(f(x)) \wedge f'(y) \leq 0 \Rightarrow g'(f(y)).f'(y) \leq g'(f(x)).f'(y)$$
$$f'(y) \leq f'(x) \wedge g'(f(x)) \geq 0 \Rightarrow g'(f(x)).f'(y) \leq g'(f(x)).f'(x)$$

no a z oboch dokopy dostávame:
$x < y \Rightarrow g'(f(y)).f'(y) \leq g'(f(x)).f'(x) \Rightarrow$ derivácia je nerastúca, teda $g \circ f$ je konkávna.

16. Nech $f : R \to R$ je rýdzokonvexná 2x dif. fcia, nech $f'(0) = f''(0) = 0$. Potom f:
☐ f' má v 0 lokálne maximum ☐ f' má v 0 lokálne minimum
☐ f' rastie ☐ f' klesá
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Z toho, že je rýdzokonvexná, vyplýva, že $\forall x \in R; f''(x) \geq 0$ a zároveň že f' je rastúca. Keďže $f'(0) = 0$, je pre $x > 0$ $f'(x) > 0$ a pre $x < 0$ $f'(x) < 0$. Preto f na $(-\infty, 0\rangle$ klesá, na $\langle 0, \infty)$ rastie a teda má globálne minimum, či chce, či nechce.

17. Tvrdenie: "Ak fcie $f, g : [0, \infty) \to R$ sú diferenc. na $(0, \infty)$, pričom $f(0) > g(0)$ a $\forall x \in (0, \infty); f'(x) > g'(x)$, tak $\forall x \in (0, \infty); f(x) > g(x)$." je:
☐ pravdivé ☐ nepravdivé

Riešenie.
Protipríklad:

$$f(x) = 2x, g(x) = \begin{cases} -100 & \leftarrow x = 0 \\ x + 10 & \leftarrow x \neq 0 \end{cases}$$

18. Existuje prostá dif. fcia $f : R \to R$ taká, že jej inverzná fcia nie je diferencovateľná?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Ako vraví veta, ľubovoľná, ktorá má v nejakom bode deriváciu = 0, triviálny príklad (už to vyzerá ako Kubáčkove skriptá :) je x^3.

19. Nech $f: R \to R$ je 2x spojite dif. fcia, pričom $f'(0) = 0$ a f'' má ostré lokálne maximum v 0. Potom:

☐ f má ostrý lokálny extrém v bode 0
☐ f' ma ostrý lok. extrém v bode 0
☐ f je rýdzomonotónna na niektorom okolí bodu 0
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
f'' je podľa zadania spojitá, t.j. existuje také ε, že na $(-\varepsilon, \varepsilon)$ má f'' všade rovnaké znamienko. To ale znamená, že f' na tomto intervale buď rastie, alebo klesá. V každom prípade ale z $f'(0) = 0$ vieme, že na jednej strane od 0 je kladná a na druhej záporná. Na jednej strane teda f rastie, ne druhej klesá, preto tam má lokálny extrém.

20. Nech $f: R \to R$ je dif. a nech $\forall x \in R; f(x)f'(x) < 0$, potom:

☐ f má v $+\infty$ vlastnú limitu
☐ f má v $+\infty$ nevlastnú limitu
☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
Ak pre nejaké x je $f(x) > 0$, je $\forall x; f(x) > 0$, lebo keby pre nejaké nebolo, z vety o medzihodnote vieme, že existuje c také, že $f(c) = 0$, preň ale potom nie je $f(c).f'(c) < 0$. Analogicky pre záporné. Preto je f buď kladná a klesajúca alebo záporná a rastúca. A keďže nemôže prekročiť nulu a ujsť do nekonečna, vidíme, že limita je vlastná. (tomu sa hovorí formálny dôkaz :)

21. Tvrdenie: “Nech je $f: R \to R$ klesajúca a konkávna. Potom f má v $+\infty$ limitu $-\infty$.” je:

☐ pravdivé ☐ nepravdivé

Riešenie.
Keďže je konkávna, leží celá pod alebo na svojej ľubovoľnej dotyčnici, keďže je klesajúca, existuje bod, v ktorom má zápornú deriváciu. Keď zoberieme funkciu g určenú touto priamkou, tá má limitu $-\infty$ a je $\forall x; f(x) \leq g(x)$, vsio jasno.

22. Nech pre $f, g, h: R \to R$ platí $\forall x \in R; f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a $f'(0) = h'(0) = 1$. Potom:

☐ g nemá v 0 nevlastnú deriváciu
☐ g je diferenc. v 0 a je $g'(0) = 1$
☐ g je rastúca v 0, ale nemusí byť diferenc. v 0
☐ g jr spojitá v 0, ale nemusí byť rastúca ani diferenc.
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Všetko sú blbosti. Nech $f(x) = x + 1, h(x) = x - 1$, g je niekde v tom páse a môže si robiť čo len sa jej zachce. Láskavý čitateľ (opäť inšpirácia skriptami :) si ľahko nájde kontrapríklady.

23. Nech má spojitá $f: R \to R$ v 0 globálne maximum. Musí potom existovať také ε, že f je rastúca na $(-\varepsilon, 0)$ a klesajúca na $(0, \varepsilon)$?

☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Tentokrát niečo zo skrípt. Zoberme fciu

$$f(x) = \begin{cases} -x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) \leftarrow x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad \leftarrow x = 0 \end{cases}$$

Tá je diferencovateľná, lebo

$$f'(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} - 2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) & \leftarrow x \neq 0 \\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(x.\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\right) = 0 & \leftarrow x = 0 \end{cases}$$

a teda f je spojitá a ľahko sa presvedčíme, že také ε nenájdeme – ľubovoľne blízko k 0 vieme nájsť bod, v ktorom je derivácia kladná aj v ktorom je záporná. (Napríklad v $x = \frac{1}{2n\pi}$ je kladná, v $x = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ záporná.)

24. Nech $f : R \to R$ je dif. fcia taká, že $\forall x \in R; (f'(x))^2 < 1$. Existuje potom $c \in R$ také, že $\forall x \in R; |f(x)| < |x| + c$?
☐ áno ☐ nie ☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
Položme $c = |f(0)| + 1$. Zoberme funkciu $x + c$ na $< 0, \infty$, ukážme, že f leží pod ňou, ostatné tri kvadranty analogicky. Označme $g(x) = f(x) - x - c$, z $f'(x) < 1, (x + c)' = 1 \Rightarrow g'(x) < 0$, teda g je klesajúca, a keďže je záporná v 0, je záporná všade, q.e.d.

25. Nech dif. fcia $f : R \to R$ má v každom bode nenulovú deriváciu. Musí byť potom f rýdzomonotónna?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Keď nie je rýdzomonotónna, existujú $a, b, a \neq b$ také, že $f(a) = f(b)$, z Rolleho vety existuje $c \in (a, b); f(c) = 0$. Takže musí.

26. Nech $f : R \to R$ nemá v 0 limitu sprava ani zľava, pričom $\forall \varepsilon \in (0, 1); f(-\varepsilon) + 1 < f(0) < f(\varepsilon) - 1$. Potom $f'(0)$:
☐ neexistuje ☐ je nevlastná ☐ je vlastná
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Nevlastná, konkrétne ∞, ako pre $\operatorname{sgn} x$.

27. Nech $f : R \to R$ je 3x dif. fcia, pričom $f'(0) = f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$. Potom:
☐ f má v 0 lok. maximum ☐ f má v 0 lok. minimum
☐ f je v 0 rastúca ☐ f je v 0 klesajúca
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
f'' je v 0 klesajúca, preto je napravo od 0 záporná, naľavo kladná, preto f' napravo klesá, naľavo rastie a keďže v 0 je 0, je mimo nuly záporná, preto f klesá.

28. Nech $f : R \to R$ je dif. fcia, nech spojitá fcia $g : R \to R$ nie je diferencovateľná. Môže byť potom fcia $f + g$ diferencovateľná?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Keby v bode, kde g nie je diferencovateľná, bola diferencovateľná $f+g$, je tam diferencovateľná aj $(f+g)+(-f)=g$, spor.

29. Tvrdenie: "Dirichletova funkcia $\chi(x) = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \leftarrow x \notin Q \\ 1 \leftarrow x \in Q \end{smallmatrix} \right.$ má nevlastnú deriváciu v aspoň jednom bode $x \in R$." je:
☐ pravdivé ☐ nepravdivé

Riešenie.
Dirichletová fcia nemá nikde deriváciu.
Dôkaz: ukážeme, že neexistuje $\lim_{y \to x+} \chi(y)$ pre žiadne x. Ak totiž zoberieme zúženia na $Q_x = \{y; y \in Q \wedge y > x\}$ a na $I_x = \{y; y \notin Q \wedge y > x\}$, pre $x \in Q$ nám vyjde 0, resp. ∞ (podľa toho, či $x \in Q$), pre $x \notin Q$ vyjde $-\infty$, resp. 0, čiže rôzne hodnoty. Keby tá limita existovala, limity pre obe zúženia by sa jej rovnali.

30. Nech $f : [a, b] \to R$ je dif. fcia, potom f je ohraničená.
☐ áno ☐ nie ☐ nemožno rozhodnúť

Riešenie.
Priamo z prednášky. Platí.

31. Nech $f, g : R \to R$ sú dif. fcie také, že $f(0) = f'(0) = 0$, $g(0) = 0$ a $g'(0) > 0$. Potom existuje okolie O bodu 0 také, že:
☐ $\forall x \in O; f(x) \neq g(x)$
☐ $\forall x \in O; x \neq 0; |f(x)| < |g(x)|$
☐ $\forall x \in O; f(x) \leq g(x)$
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Tu sa mi nedarí nájsť protipríklad, ale som presvedčený o tom, že ani jedno neplatí, lebo f' môže byť aj niečo divne oscilujúce typu $\sin \frac{1}{x} \ldots$ Asi by som to ale nechal nezaškrtnuté :)

32. Nech $f : R \to R$ je 2x dif. a nech má f'' záporné maximum. Vyplýva z existencie konečnej $lim_{x \to \infty} f(x)$ existencia konečnej $lim_{x \to \infty} f'(x)$?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Keďže f'' je záporná, f' je klesajúca. Vieme, že f je rastúca, lebo keby nebola, môže byť buď klesajúca, vtedy ale z konkávnosti má v ∞ limitu $-\infty$, alebo nie je prostá, vtedy existujú $a < b$ také, že $f(a) = f(b)$, teda z Rollovej vety existuje c, v ktorom $f'(c) = 0$, od neho ďalej je z konkávnosti klesajúca a sme, kde sme boli. No a keď je f rastúca, konkávna a má konečnú limitu, má f' zjavne limitu 0. Presný dôkaz nechávam na čitateľa, vyplýva to z faktov, že f' klesá, je kladná a vieme sa dostať ľubovoľne blízko k 0.

33. Nech 2x dif. fcia $f : R \to R$ je nezáporná na $R - \{0\}$ a nech $f(0) = 0$. Potom:
$\square$ $f'(0) = 0 \wedge f''(0) \geq 0$ $\square$ $f'(0) = 0 \wedge f''(0) \leq 0$
$\square$ $f'(0) < 0 \wedge f''(0) \geq 0$ $\square$ $f'(0) < 0 \wedge f''(0) \leq 0$
$\square$ $f'(0) > 0 \wedge f''(0) \geq 0$ $\square$ $f'(0) > 0 \wedge f''(0) \leq 0$
$\square$ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Keďže je dif., je spojitá, keďže je nezáporná na $R - \{0\}$, je $f'(0) = 0$ (limita sprava je limita výrazu, ktorý je určite nezáporný, zľava nekladný, preto $f'_+(0) \geq 0 \wedge f'_-(0) \leq 0$ a keďže V 0 je zjavne lokálne minimum. Keby bolo $f''(0) < 0$, bola by f' v 0 klesajúca. Z toho, že v 0 má f lok. minimum ale vyplýva, že f' je v 0 neklesajúca. Takže $f'(0) = 0 \wedge f''(0) \geq 0$.

34. Nech diferenc. fcia $f : (0, 1) \to R$ má ohraničenú f'. Vyplýva z toho, že f je ohraničená?
$\square$ áno $\square$ nie

Riešenie.
Áno. Dôkaz: Zoberieme hodnotu $c = f\left(\frac{1}{2}\right)$, položíme $d = \sup f', e = \inf f'$, ukážeme, že celý graf napravo leží pod $d(x - \frac{1}{2}) + c$, nad $e(x - \frac{1}{2}) + c$, naľavo pod $e(x - \frac{1}{2}) + c$, nad $d(x - \frac{1}{2}) + c$.
Že časť napravo leží pod $d(x - \frac{1}{2}) + c$: Zoberme funkciu $g(x) = d(x - \frac{1}{2}) + c - f(x)$, tá má v každom bode z $\left\langle \frac{1}{2}, 1\right)$ deriváciu nekladnú, teda je nerastúca, v $\frac{1}{2}$ je 0, preto je na $\left\langle \frac{1}{2}, 1\right)$ nekladná. Ostatné analogicky.
Potom ale vidíme, že funkčné hodnoty sú zhora ohraničené $\max(\frac{d}{2} + c, -\frac{e}{2} + c)$ a zdola $\min(-\frac{d}{2} + c, \frac{e}{2} + c)$.

35. Prvá derivácia funkcie $x^2.(\mathrm{sgn}\ x)^3$ v bode 0:
$\square$ je vlastná $\square$ je nevlastná $\square$ neexistuje

Riešenie.
Intuitívne je to 0. Kto neverí, nech si nakreslí, kto stále neverí, nech si zráta.

36. Existuje spojitá $f : R \to R$, ktorá má v každom bode z R nevlastnú deriváciu?
$\square$ áno $\square$ nie

Riešenie.
Neexistuje. Zoberme ľubovoľné $a, b \in R, a < b$. Z Lagrangeovej vety existuje c také, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, takže derivácia v c je vlastná.

37. Tvrdenie: "Ak $f : R \to R$ je 3x diferenc. fcia, $\forall x \in R; f^{(3)}(x) < 0$, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 2$, tak $\forall x \in R - \{0\}; f(x) \leq x^2 + 2x + 2$." je:
$\square$ pravdivé $\square$ nepravdivé

Riešenie.
Zoberme funkciu $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x + 2$, je $f'(x) = -3x^2 + 2x + 2, f''(x) = -6x + 2, f^{(3)}(x) = -6$, takže $f(0) = f'(0) = f''(0) = 2$ a $\forall x; f^{(3)}(x) < 0$, teda f spĺňa podmienky zo zadania. Je ale $f(-1) = 2 > 1 = (-1)^2 + 2.(-1) + 2$, preto tvrdenie neplatí. Pozn.: keby bolo v zadaní o deriváciu viac, tak by to platilo.

38. Nech $f : (-1,1) \to R$ je dif. fcia taká, že $f'(0) = 0$ a $\forall x \in (-1,1) - \{0\}; f'(x) < 0$. Potom:
☐ f je klesajúca v bode 0
☐ f nie je klesajúca v bode 0
☐ žiadna z predchádzajúcich možností nie je správna

Riešenie.
Existuje okolie 0, na ktorom f klesá, a teda f je klesajúca v 0.

39. Existuje spojitá fcia $f : R \to R$, ktorá má v bode svojho lokálneho extrému nevlastné jednostranné limity opačných znamienok?
☐ áno ☐ nie

Riešenie.
Napríklad $f(x) = \sqrt{|x|}$.

40. Nájdite vzorec pre $(g^3)''$, kde $g = f^{-1}$, pomocou derivácii f.

Riešenie.
Nech existuje nenulová $f'(f^{-1}(x))$. Potom:

$$\left((f^{-1}(x))^3\right)^{(3)} = \left(3(f^{-1}(x))^2 \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\right)' =$$

$$= 3 \cdot \left(2f^{-1}(x) \cdot \left(\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\right)^2 \ + \ (f^{-1}(x))^2 \cdot \frac{(f'(f^{-1}(x)))'}{(f'(f^{-1}(x)))^2}\right) =$$

$$= 3 \cdot \left(2f^{-1}(x) \cdot \left(\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\right)^2 \ + \ (f^{-1}(x))^2 . f''(f^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{(f'(f^{-1}(x)))^3}\right) =$$

$$= \frac{3f^{-1}(x)}{(f'(f^{-1}(x)))^2} \cdot \left(2 \ + \ \frac{f^{-1}(x).f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))}\right)$$

Prípad, keď je $f'(f^{-1}(x)) = 0$, si láskavý čitateľ (keďže nemá na výber) doplní sám.