Bohumil Půža

Matematická analýza

Zápisy z přednášky zpracovali:

Dušan Chromý a Jan Šerák

23. května 1995

Obsah

Seznam obrázků

1 Úvodní slovo

Zápisky z přednášky Bohumila Půži *Matematická analýza* zpracovali dva autoři, což je unikát v dějinách ZKUSTO. První dvě části zpracoval Dušan Chromý. Já jsem byl posléze požádán o dokončení rozpracovaného díla. Dodal jsem tedy těmto zápiskům výsledný tvar, aby měly podobné členění a tvar jako zápisky [7], a dopsal třetí část těchto zápisků.

Tyto zápisky a zápisky [7] tvoří kompletní soubor znalostí z matematické analýzy (s výjimkou triviálních, které jsou probírány na středních školách[1]) požadovaných ke státní závěrečné zkoušce z matematické informatiky.

Jan Šerák

[1] Jedná se o celý úvod do diferenciálního počtu jedné proměnné, kde jsou definovány číselné obory a pojmy jako *limita funkce*, *spojitost funkce*, *derivace* atd.

Část I
Diferenciální počet jedné proměnné

2 Taylorova věta

Definice 2.1
Buď f funkce, která má v bodě x_0 konečné derivace až do řádu n včetně ($n \in N$). *Taylorovým polynomem* n-tého řádu funkce f v bodě x_0 rozumíme:

$$T_n(f,x_0)(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Věta 2.2
Je-li $T_n(f,x_0)(x)$ Taylorův polynom funkce f n-tého řádu, pak:

$$\begin{aligned} T_n(f,x_0)(x_0) &= f(x_0) \\ T_n'(f,x_0)(x_0) &= f'(x_0) \\ &\vdots \\ T_n^{(k)}(f,x_0)(x_0) &= f^{(k)}(x_0) \quad (k=0,1,\ldots,n) \end{aligned}$$

Důkaz:

1) dosazením $T_n(f,x_0)(x_0) = f(x_0)$
2) derivací a dosazením $T_n'(f,x_0)(x_0) = f'(x_0)$ a dále indukcí.

□

Definice 2.3
Buď f funkce s konečnou derivací až do řádu n včetně v bodě x_0, $T_n(f,x_0)(x_0)$ Taylorův polynom této funkce. Položme $R_n(f,x_0)(x) = f(x) - T_n(f,x_0)(x)$. Potom formule $f(x) = T_n(f,x_0)(x) + R_n(f,x_0)(x)$ se nazývá *Taylorův vzorec* a funkce $R_n(f,x_0)(x)$ je tzv. *Taylorův zbytek* funkce f po n-tém členu (zbytek n-tého řádu).

Věta 2.4 Taylorova
Nechť f má vlastní derivaci až do řádu $n+1$ včetně v bodě x_0 a jeho jistém okolí $\sigma(x_0)$, funkce $\varphi(t)$ je v $\sigma(x_0)$ spojitá a má zde vlastní derivaci různou od nuly. Potom $\forall x \in \sigma(x_0)$ $\exists \xi$ ležící mezi body x, x_0 tak, že

$$R_n(f,x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\frac{(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)}[\varphi(x) - \varphi(x_0)]$$

Volbou $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ dostaneme

$$R_n(f,x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \text{(Lagrangeův tvar)}$$

volbou $\varphi(t) = t$

$$R_n(f,x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0) \qquad \text{(Cauchyho tvar)}$$

Důkaz: Zvolme $x \in \sigma(x_0)$ libovolné, ale pevné a položme

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)\frac{x-t}{1!} - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} - \ldots - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$$

Zřejmě $F(x) = 0, F(x_0) = f(x) - T_n(f,x_0)(x)$, dále F má derivaci,

$$F'(t) = -f'(t) - [f^n(t)\frac{x-t}{1!} - f'(t)] - \ldots = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Tedy fce F a φ splňují na intervalu x, x_0 předpoklady věty. Tedy existuje číslo ξ mezi body x, x_0 tak, že

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \Rightarrow R_n(f,x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\frac{(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)}[\varphi(x)-\varphi(x_0)]$$

□

Poznámka 2.5

1) $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, kde $\theta \in (0,1)$

2) je-li $x_0 = 0$, hovoříme o tzv. *MacLaurinově polynomu*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \underbrace{R_n(f,0)(x)}_{R_n(f)(x)}$$

kde

$$R_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{(Lagrangeův tvar)}$$

$$R_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} \qquad \text{(Cauchyho tvar)}$$

3)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + R_n(f,x_0)(x)$$

Věta 2.6 T-polynomy některých elementárních funkcí

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \qquad R_n(x) = \frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}(x) \quad R_{2n-1}(x) = (-1)^n \frac{\sin\theta x}{(2n)!}x^{2n}\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x) \qquad R_{2n}(x) = (-1)^{n+1}\frac{\sin\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x) \qquad R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n(1+\theta x)^{n+1}}\\
(1+x)^k &= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)\\
&\qquad R_n(x) = \frac{k(k-1)\cdots(k-n)(1+\theta x)^{k-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}\\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + R_{2n-1}(x)
\end{aligned}$$

Důkaz: Přímým dosazením. □

Věta 2.7 O vlastnostech T-zbytku

Nechť f splňuje předpoklady Taylorovy věty, potom

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(f,x_0)(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$$

Důkaz: Několikanásobnou aplikací Cauchyho věty. □

Příklad 2.1

1) Vypočtěte číslo e s chybou menší než 10^{-3}

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \qquad R_n(x) = \frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}$$

$\theta \in (0,1)$ a přitom požadujeme $0 < |R_n(x)| < 10^{-3}$, tj.

$$0 < R_n(x) < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Rightarrow n \geq 6$$

2) Najděte MacLaurinův polynom nejmenšího stupně, který na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ aproximuje funkci $\log(1+x)$ s přesností 10^{-2}.

Řešení ponecháváme čtenáři k procvičení.

3 Parametricky zadané funkce

Definice 3.1

Nechť φ, ψ jsou funkce spojité na $\langle\alpha, \beta\rangle$. Pak množinu všech bodů $[x, y] = [\varphi(t), \psi(t)]$ pro $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ v rovině o kartézské soustavě souřadnic nazýváme *spojitou křivkou*. Rovnice

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t), \quad t \in \langle\alpha, \beta\rangle \end{aligned}$$

jsou tzv. *parametrické rovnice* této křivky.

Jestliže $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ a $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$, nazýváme křivku *uzavřenou*. Bod $[\varphi(\alpha), \psi(\alpha)] \equiv [\varphi(\beta), \psi(\beta)]$ se nazývá *uzlový* (resp. *větvení* nebo *násobný*). Vzniká řada úskalí — např. Peanova křivka, která vyplňuje jednotkový čtverec.

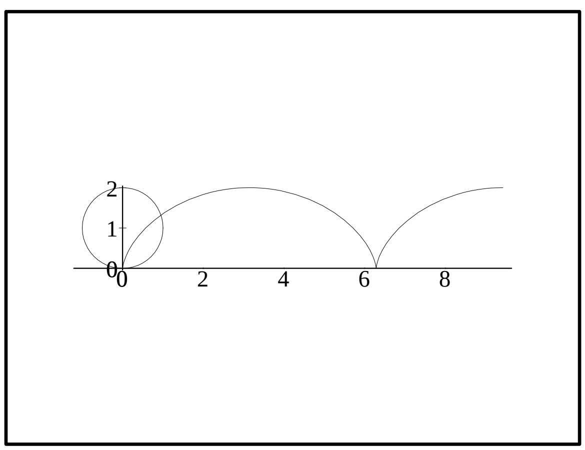
Příklad 3.1

(a) kružnice

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos t \\ y &= y_0 + r\sin t, \quad x_0, y_0 \in \mathbf{R},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle \end{aligned}$$

(b) cykloida — křivka opisovaná bodem na kružnici valící se po přímce (viz obr. 1)[2].

$$\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t), \quad x_0, y_0 \in \mathbf{R},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle \end{aligned}$$

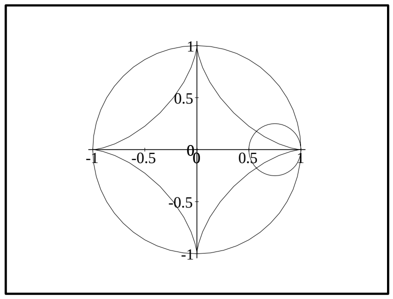


Obrázek 1: *Cykloida*

(c) asteroida — křivka opisovaná bodem na kružnici o poloměru $r/4$, valící se zevnitř po obvodu kružnice o poloměru r (viz obr. 2).

$$\begin{aligned} x &= r\cos^3 t \\ y &= r\sin^3 t, \quad x_0, y_0 \in \mathbf{R},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle \end{aligned}$$

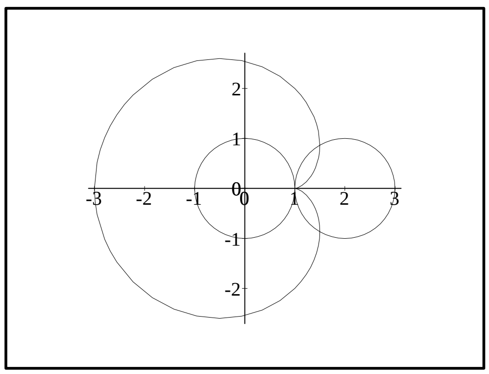
[2] Všechny obrázky k tomuto příkladu byly kresleny s volbou $r = 1$, resp. $a = 1$



Obrázek 2: *Asteroida*

(d) kardioida — dráha bodu na kružnici o poloměru r, valící se zvnějšku po obvodu kružnice téhož poloměru (viz obr. 3).

$$\begin{aligned} x &= r(2\cos t - \cos 2t) \\ y &= r(2\sin t - \sin 2t), \quad x_0, y_0 \in \mathbf{R},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle \end{aligned}$$



Obrázek 3: *Kardioida*

(e) Descartův list — asymptotou této křivky je přímka $y = -x - a$ (viz obr. 4).

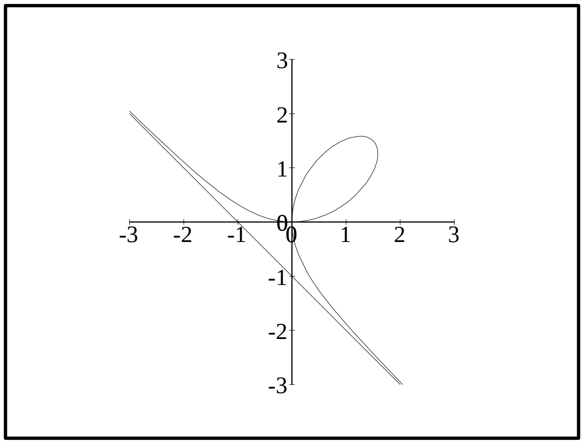
$$\begin{aligned} x &= \frac{3at}{1+t^3} \\ y &= \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Věta 3.2 O derivaci parametrické funkce

Buď $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$ (J je interval) parametrické vyjádření grafu funkce $y = f(x)$. Jestliže φ, ψ mají v J derivaci, přičemž $\varphi' \neq 0\ \forall t \in J$, potom funkce f má v J derivaci

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Důkaz: Podle věty je buď $\varphi' > 0$ nebo $\varphi' < 0$ v J, tedy φ je ryze monotónní na J. Lze tedy sestrojit inverzní funkci $\varphi^{-1} : t = \varphi^{-1}(x)$. Potom $f(x) = y = \psi(t) = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ a z předpokladu o φ, ψ plyne existence derivace f a podle věty



Obrázek 4: *Descartův list*

o derivaci složení funkcí a derivace inverzní funkce platí:

$$f'(x) = \psi'[\varphi^{-1}(x)][\varphi^{-1}(x)]' = \psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}$$

□

Poznámka 3.3 Výpočet 2.derivace parametricky zadané funkce

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ nechť je parametrické vyjádření grafu funkce $y = f(x)$. Za předpokladů předchozí věty platí

$$y' = f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Jestliže existuje dokonce 2.derivace funkcí φ, ψ, pak

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\frac{1}{\varphi'(t)}$$

Příklad 3.2

Sestrojte graf funkce f:

$$x = \frac{t^2}{t-1},\ y = \frac{t}{t^2-1}$$

1) Dostáváme

$$t \neq 1,\ \varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \ldots = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

čímž je interval $(-\infty, \infty)$ rozdělen na čtyři části $\overbrace{(-\infty,0)}^{I} \cup \overbrace{(0,1)}^{II} \cup \overbrace{(1,2)}^{III} \cup \overbrace{(2,\infty)}^{IV}$ v nichž je $\varphi' \neq 0$ a tedy dělí graf funkce $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ na čtyři samostatné větve, ve kterých je φ pro příslušné t ryze monotónní, a sice rostoucí pro t v $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$ a klesající pro t v $(0, 1)$ a $(1, 2)$.

2)

$$\frac{dy}{dt} = \ldots = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}, \quad \frac{df}{dt} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \ldots = -\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2}$$

Tedy f je rostoucí pro $t \in (0, 2)$, klesající pro $t \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

3) I:

$$\begin{aligned} t \to -\infty \quad &\Rightarrow \quad x \to -\infty,\ y \to 0 \\ t \to -1_- \quad &\Rightarrow \quad x \to -1/2,\ y \to -\infty \\ t \to -1_+ \quad &\Rightarrow \quad x \to -1/2,\ y \to \infty \\ t = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0,\ y = 0 \end{aligned}$$

II:

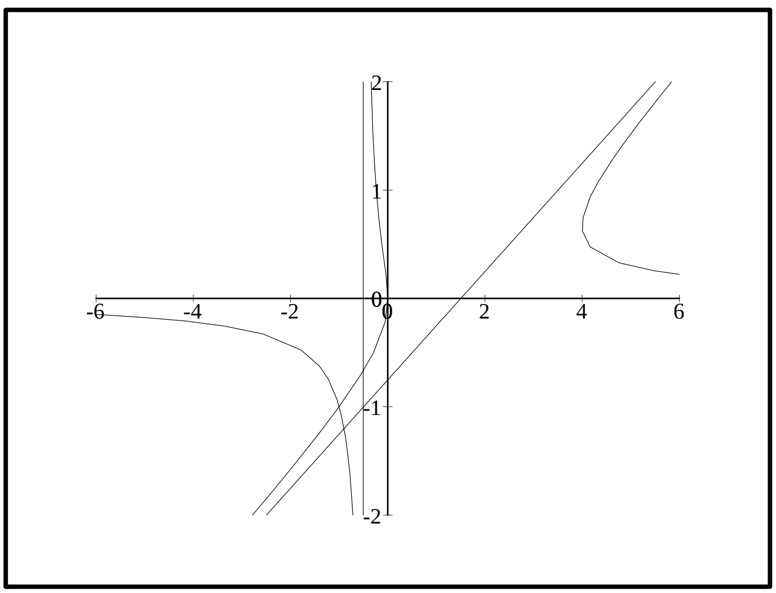
$$t \to 1_- \quad \Rightarrow \quad x \to -\infty,\ y \to -\infty$$

III:

$$\begin{aligned} t \to 1_+ \quad &\Rightarrow \quad x \to \infty,\ y \to \infty \\ t = 2 \quad &\Rightarrow \quad x = 4,\ y = 2/3 \end{aligned}$$

IV:

$$t \to \infty \quad \Rightarrow \quad x \to \infty,\ y \to 0$$



Obrázek 5: graf funkce $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$

Část II
Integrální počet jedné proměnné

4 Určitý Riemannův integrál

4.1 Konstrukce Riemanova integrálu

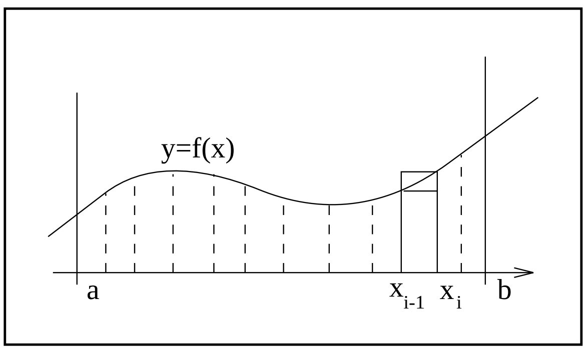
Definice 4.1
Buď f funkce, $f \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$, f omezená na $\langle a, b \rangle$. Pak posloupnost $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ nazveme *dělení* D intervalu $\langle a, b \rangle$, $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ $i = 1, \ldots, n$ je i-tý *dělící interval*, x_i jsou *dělící body* dělení D. Dále označíme

$$m_i = \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_{i-1}, x_i) \qquad \text{dolní součet příslušný funkci } f \text{ a dělení } D$$

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_{i-1}, x_i) \qquad \text{horní součet příslušný funkci } f \text{ a dělení } D$$

Je-li D dělení takové, že každý bod dělení D je i bodem dělení D_1, pak se D_1 nazývá *zjemnění* dělení D, píšeme $D \subseteq D_1$.



Obrázek 6: *Konstrukce Riemmanova integrálu*

Lemma 4.2 Vlastnosti horních a dolních součtů
Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b \rangle$, např. $c \leq f(x) \leq d \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$ a D_1, D_2 jsou libovolná dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom

$$c(b - a) \leq s(D_1, f) \leq S(D_2, f) \leq d(b - a)$$

Důkaz:

1) Nejdříve dokážeme, že $c(b - a) \leq s(D, f) \leq S(D, f) \leq d(b - a)$ pro libovolné dělení D. Předně

$$c \leq f(x) \leq d \quad \forall x \in \langle a, b \rangle \Rightarrow c \leq m_i \leq M_i \leq d \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

kde D je $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Vynásobením (x_{i-1}, x_i):

$$c(x_{i-1}, x_i) \leq m_i (x_{i-1}, x_i) \leq M_i (x_{i-1}, x_i) \leq d(x_{i-1}, x_i)$$

a sečtením

$$c \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1}, x_i) \leq s(D, f) \leq S(D, f) \leq d \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1}, x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1},x_i) = (x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_{n-1}-x_{n-2})+(x_n-x_{n-1}) = x_n-x_0 = b-a$$

tedy

$$c(b-a) \le s(D,f) \le S(D,f) \le d(b-a)$$

2) Dokážeme, že

$$\begin{aligned} s(D,f) &\le s(D_*,f) \\ S(D,f) &\ge S(D_*,f) \end{aligned}$$

kde D je libovolné dělení a D_* jeho libovolné zjemnění, tj. $D \subseteq D_*$. Označíme

$$D: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$D_*: a = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b$$

a dále $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je i-tý dělící interval D. Protože D_* je zjemněním D, pak existují body $y_r, y_s \in D_*$ tak, že $y_r = x_{i-1}, y_s = x_i$. Zřejmě $r < s$. Dále označme

$$m_i = \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$$

$$m'_k = \inf_{x\in\langle x_{k-1},x_k\rangle} f(x), \quad M'_k = \sup_{x\in\langle x_{k-1},x_k\rangle} f(x)$$

přičemž $k = r+1,\ldots,s$; $m_i \le m'_k$, $M_i \ge M'_k$. Odtud

$$\sum_{k=r+1}^{s} m'_k(y_k-y_{k-1}) \ge \sum_{k=r+1}^{s} m_i(y_k-y_{k-1}) = m_i(y_s-y_r) = m_i(x_i-x_{i-1})$$

Tedy příspěvek dělícího intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ k $s(D,f)$ je menší nebo roven příspěvku téhož intervalu ve zjemněném dělení, tj. $s(D,f) \le s(D_*,f)$. Analogicky $S(D,f) \ge S(D_*,f)$.

3) Buďte nyní D_1, D_2 libovolná dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a $D \supseteq D_1 \cup D_2$ (společné zjemnění). Potom z předchozích částí důkazu plyne

$$c(b-a) \le s(D_1,f) \le s(D,f) \le S(D,f) \le S(D_2,f) \le d(b-a)$$

□

Definice 4.3

Množinu všech dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ označíme $\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$. Podle lemmatu 4.2 jsou množiny $\{s(D,f) \mid D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\}$, $\{S(D,f) \mid D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\}$ ohraničené.

Z axiomu supréma (resp. infima) plyne, že

$$\begin{aligned}
\inf\{s(D,f) \mid D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\} &= c(b-a), \quad c = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \\
\sup\{s(D,f) \mid D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\} &= \underline{\int_{a}^{b}} f(x)\,dx \qquad \textit{dolní Riemannův integrál} \text{ funkce } f \text{ na } \langle a,b\rangle \\
\inf\{S(D,f) \mid D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\} &= \overline{\int_{a}^{b}} f(x)\,dx \qquad \textit{horní Riemannův integrál} \text{ funkce } f \text{ na } \langle a,b\rangle \\
\sup\{S(D,f) \mid D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\} &= d(b-a), \quad d = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)
\end{aligned}$$

Věta 4.4 O vztahu dolního a horního Riemannova integrálu

$$c(b-a) \le \underline{\int_{a}^{b}} f(x)\,dx \le \overline{\int_{a}^{b}} f(x)\,dx \le d(b-a), \qquad c \le f(x) \le d\ \forall x \in \langle a,b\rangle$$

Důkaz: Plyne bezprostředně z definice dolního a horního R-integrálu a z lemmatu 4.2. □

Definice 4.5

Jestliže $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, říkáme, že funkce f má na intervalu $\langle a,b\rangle$ *určitý Riemannův integrál* a hodnotu tohoto integrálu klademe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Takovou funkci nazýváme *R-integrabilní* na $\langle a,b\rangle$, značíme $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Jestliže $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, říkáme, že funkce f není na $\langle a,b\rangle$ R-integrabilní a její R-integrál nedefinujeme.

Příklad 4.1

1) Konstantní funkce $f(x) = c$ ($c \in \mathbf{R}$) je na libovolném intervalu $\langle a,b\rangle$ R-integrabilní.

$$m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), \quad M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

Podle věty 4.4 (o vztahu dolního a horního R-integrálu):

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Protože $c = m, c = M$

$$c(b-a) \le \underline{\int_a^b} c\,dx \le \overline{\int_a^b} c\,dx \le c(b-a) \Rightarrow \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

2) Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá na $\langle 0,1\rangle$ R-integrál.

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0,1\rangle \setminus \mathbf{Q} \\ 1, & x \in \mathbf{Q} \cap \langle 0,1\rangle \end{cases}$$

Označme $D : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ libovolné dělení intervalu $\langle 0,1\rangle$.

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} \chi(x) = 0 \\ M_i &= \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} \chi(x) = 1 \end{aligned}$$

a odtud

$$s(D,\chi) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 \qquad \underline{\int_0^1} \chi(x)\,dx = 0$$

$$S(D,\chi) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \qquad \overline{\int_0^1} \chi(x)\,dx = 1$$

Definice 4.6

Číslo $\max_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1})$, kde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou dělící body nějakého dělení D, se nazývá *norma dělení* D, značíme $\nu(D)$.

Lemma 4.7

Nechť f je funkce ohraničená na $\langle a,b\rangle$. Potom $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že pro každé dělení $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ takové, že $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(D,f) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

Důkaz: Viz [1, 4]. □

Definice 4.8

Buď $D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ nějaké dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak

$$\Xi = \{\xi_i \,|\, x_{i-1} \le \xi_i \le x_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

je *výběr reprezentantů* dělení D, ξ_i je *reprezentant i-tého dělícího intervalu* a

$$\sigma(D, \Xi, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

je *integrální suma* příslušná funkci f, dělení D a výběru reprezentantů Ξ.

Zřejmě

$$s(D, f) \le \sigma(D, \Xi, f) \le S(D, f) \quad \forall D \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)$$

Jestliže $\forall n \in N$ je dáno dělení $D_n \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)$, říkáme, že je dána posloupnost $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže dokonce $\nu(D_n) \to 0$ pro $n \to \infty$, pak se tato posloupnost nazývá *nulová*.

Věta 4.9

(a) Je-li f ohraničená na $\langle a, b\rangle$, $\{D_n\}$ nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a Ξ_n příslušný výběr reprezentantů dělení D_n, pak

$$\begin{aligned} s(D_n, f) &\to \underline{\int_{\underline{a}}^{b}} f(x)\,dx \\ S(D_n, f) &\to \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx \end{aligned}$$

(b) Jestliže f je R-integrabilní na $\langle a, b\rangle$, pak

$$\sigma(D_n, \Xi_n, f) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

Důkaz:

(a) Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle lemmatu 4.7 $\exists \delta > 0$ tak, že $\forall D \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle) : \nu(D) < \delta$ platí

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx \le S(D, f) < \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx + \varepsilon$$

tedy

$$\left| S(D, f) - \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Protože $\nu(D_n) \to 0, \exists n_0 \in bfN : \forall n \ge n_0, n \in \mathbf{N}$ platí $\nu(D_n) < \delta$ a tedy pro tato n platí předchozí nerovnost, tj.

$$S(D_n, f) \to \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx$$

analogicky

$$s(D_n, f) \to \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$$

(b) Z předpokladu R-integrability funkce f na $\langle a,b\rangle$:

$$S(D_n,f) \to \int_a^b f(x)\,dx$$
$$s(D_n,f) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

Zbytek vyplývá z věty o třech limitách.

□

Věta 4.10 Newton-Leibnitzova formule, Základní věta integrálního počtu
Nechť f je R-integrabilní na $\langle a,b\rangle$ a F je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a primitivní k f. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Důkaz: Nechť $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, $D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Protože F splňuje na každém $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1,\ldots,n$ předpoklady Lagrangeovy věty (diferenciální počet I), $\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tak, že

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Sečtením

$$\sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sigma(D,\Xi,f)$$

Především

$$\sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + [F(x_n) - F(x_{n-1})] = F(b) - F(a)$$

Dále, z předpokladu R-integrability f na $\langle a,b\rangle$

$$\sigma(D_n,\Xi_n,f) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

kde $\{D_n\}$ je libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a Ξ_n je příslušný výběr reprezentantů. Tedy celkem

$$F(b) - F(a) = lim_{n\to\infty}\sigma(D_n,\Xi_n,f) \stackrel{V4.9(b)}{=} \int_a^b f(x)\,dx$$

□

4.2 Vlastnosti Riemanova integrálu a R-integrabilních funkcí

Lemma 4.11 Nutná a postačující podmínka R-integrability
Buď f funkce ohraničená na $\langle a,b\rangle$. Pak f je R-integrabilní na $\langle a,b\rangle$ právě, když

$$\forall\varepsilon\ \exists D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle) : S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon$$

Důkaz: Předpokládejme nejprve $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. $\varepsilon > 0$ volíme libovolné konstantní. Podle lemmatu 4.7 existuje k číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ dělení $D_1 \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, resp. $D_2 \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ tak, že

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,d(x) \le S(D_1,f) < \int_a^{\overline{b}} f(x)\,d(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,d(x) - \frac{\varepsilon}{2} < s(D_2,f) \le \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,d(x)$$

Odtud a z předpokladu R-integrability f plyne (s použitím lemmatu 4.2): $\forall D \supseteq D_1 \cup D_2$ (společné zjemnění)

$$\int_a^b f(x)\,dx \le S(D,f) \le S(D_1,f) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(D_2,f) \le s(D,f) \le \int_a^b f(x)\,dx$$

a tedy

$$S(D,f) - s(D,f) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} - \left[\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}\right] = \varepsilon$$

Nechť naopak $\forall \varepsilon > 0\ \exists D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle) : S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon$ tj.

$$S(D,f) < s(D,f) + \varepsilon \Rightarrow \int_a^{\overline{b}} f(x)\,d(x) < \int_{\underline{a}}^b f(x)\,d(x) + \varepsilon \Rightarrow \int_a^{\overline{b}} f(x)\,d(x) \le \int_{\underline{a}}^b f(x)\,d(x)$$

a protože současně platí i opačná nerovnost, nutně

$$\int_{\underline{a}}^b f(x)\,d(x) = \int_a^{\overline{b}} f(x)\,d(x)$$

tj. f je R-integrabilní na $\langle a,b\rangle$. □

Věta 4.12 O třídách R-integrabilních funkcí

(a) Nechť funkce f je na intervalu $\langle a,b\rangle$ monotónní. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

(b) Nechť funkce f je na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz:

(a) Buď f neklesající na $\langle a,b\rangle$ (případ, kdy f je nerostoucí — analogicky). Zřejmě $f(a) \le f(x) \le f(b)\ \forall x \in (a,b)$, tedy f je na $\langle a,b\rangle$ ohraničená. Buď $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, $D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\nu(D) < \delta$. Protože

$$\begin{aligned} m_i(f) &= inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) = f(x_{i-1}) \\ M_i(f) &= sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) = f(x_i) \quad i = 1,\ldots,n \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} S(D,f) - s(D,f) &= \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \le \delta \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \le \delta[f(b) - f(a)] \end{aligned}$$

Je-li $f(a) = f(b)$, pak f je na $\langle a,b\rangle$ konstantní a tedy i R-integrabilní (podle příkladu 4.1). Nechť $f(a) < f(b)$. Zřejmě $\forall \varepsilon > 0\ \exists D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ s normou $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, pro něž platí

$$S(D,f) - s(D,f) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}[f(b) - f(a)] = \varepsilon$$

Ostatní z lemmatu 4.11.

(b) Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože f je spojitá na $\langle a,b\rangle$, je na $\langle a,b\rangle$ spojitá dokonce stejnoměrně (Heine-Cantorova věta — diferenciální počet I). Tj. $\forall \frac{\varepsilon}{b-a}\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle : |x_1 - x_2| < \delta$ je $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Buď $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, $D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\nu(D) < \delta$. Podle 2.Weierstrassovy věty z DP I $\exists \xi_i^*, \xi_i^{**} \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$ tak, že

$$m_i(f) = inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) = f(\xi_i^*), \qquad M_i(f) = sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) = f(\xi_i^{**})$$

Protože

$$|\xi_i^* - \xi_i^{**}| < \delta, \quad f(\xi_i^{**}) - f(\xi_i^*) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

tedy

$$\begin{aligned} S(D,f) - s(D,f) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{**})(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \ldots < \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Ostatní z lemmatu 4.11.

□

Definice 4.13

Řekneme, že bodová množina M ($\subset \mathbf{R}$) má *míru nula* (podle *Jordana*), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet uzavřených intervalů $h_1, h_2, \ldots, h_k$ tak, že platí

1) $m(h_1) + m(h_2) + \ldots + m(h_k) < \varepsilon$, kde $m(h_i)$ je délka intervalu h_i
2) $\forall x \in M$ $\exists h_i$ tak, že x je vnitřním bodem intervalu h_i

Příklad 4.2

1) $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ... konečně-prvková bodová množina

$$k = n, \ \forall\varepsilon > 0 : h_i = \langle a_i - \frac{\varepsilon}{3n}, a_i + \frac{\varepsilon}{3n}\rangle$$

   Množina M má tedy míru 0.

2) $M = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ nekonečná konvergentní. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ leží skoro všechny body (všechny body až na konečný počet) v intervalu $\langle -\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\rangle$, zbývající body (jejich počet označme m) leží v intervalech o délce $\frac{\varepsilon}{3m}$. M má tedy míru 0.

Věta 4.14

Buď f ohraničená ohraničená na $\langle a,b\rangle$ a nechť množina bodů nespojitosti této funkce má Jordanovskou míru nula. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz: Důkaz je zřejmý, uvědomíme-li si, že pokud má množina bodů nespojitosti Jordanovu míru 0, pak ji lze rozdělit v těchto bodech na spojité intervaly. Výslené tvrzení je pak důsledkem lemmatu 4.11. □

Poznámka 4.15 LEBESGUEOVA VĚTA

Buď f ohraničená ohraničená na $\langle a,b\rangle$. $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle) \Leftrightarrow f$ je skoro všude spojitá (tj. množina bodů, na nichž je nespojitá, má Lebesgueovskou míru nula)

Důsledek 4.16

1) Je-li funkce f ohraničená na $\langle a,b\rangle$ a množina jejích bodů nespojitosti je konečná, pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.
2) Je-li funkce f ohraničená na $\langle a,b\rangle$ a posloupnost jejích bodů nespojitosti konverguje v $\langle a,b\rangle$, pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.
3) Nechť f, g jsou funkce ohraničené na $\langle a,b\rangle$ a takové, že $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$ s výjimkou množiny o Jordanovské míře nula. Pak nastává právě jedna z možností:

(a) $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

(b) ani jedna z nich není R-integrabilní na $\langle a, b\rangle$

Důkaz: Dokážeme pouze tvrzení 3. Buď $K > 0$ takové, že $|f(x)| \le K$, $|g(x)| \le K$ $\forall x \in \langle a, b\rangle$, $\varepsilon > 0$ volme libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{2K} > 0$ existuje $h_1, \dots, h_r$ tak, že

$$\sum_{i=1}^{r} m(h_i) < \frac{\varepsilon}{2K}$$

a každý bod $x \in \langle a, b\rangle$, v němž $f(x) \neq g(x)$ leží v nějakém h_i, $i = 1, \dots, r$.

Buď $D \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)$ dělení, jehož dělícími body jsou mimo jiné i krajní body intervalů h_i, $i = 1, \dots, r$. Dělící intervaly různé od h_i mají k $S(D, f)$ i k $S(D, g)$ týž příspěvek a v $S(D, f) - S(D, g)$ se zruší (analogicky v $s(D, f) - s(D, g)$). Označme

$$M_i(f) = \sup_{x \in h_i} f(x), \quad M_i(g) = \sup_{x \in h_i} g(x)$$

$$m_i(f) = \inf_{x \in h_i} f(x), \quad m_i(g) = \inf_{x \in h_i} g(x)$$

Tedy

$$\begin{aligned} |S(D,f) - S(D,g)| + |s(D,f) - s(D,g)| &\le \dots \le \sum_{i=1}^{r} |M_i(f) - M_i(g)|\, m(h_i) + \sum_{i=1}^{r} |m_i(f) - m_i(g)| m(h_i) \le \\ &\le 2K \sum_{i=1}^{r} m(h_i) < 2K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon \end{aligned}$$

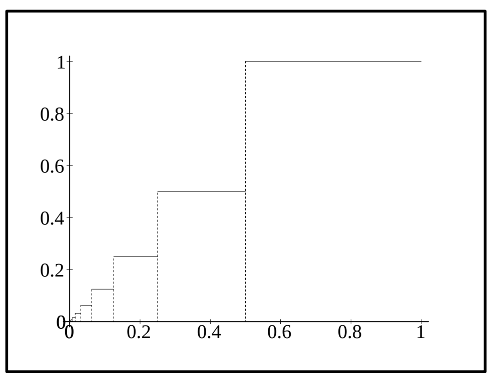
Odtud

$$|S(D,f) - s(D,g)| \le |S(D,f) - S(D,g)| + |s(D,f) - s(D,g)| < \varepsilon$$

Ostatní z lemmatu 4.11. $\square$

Příklad 4.3

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n+1}} < x \le \frac{1}{2^n} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



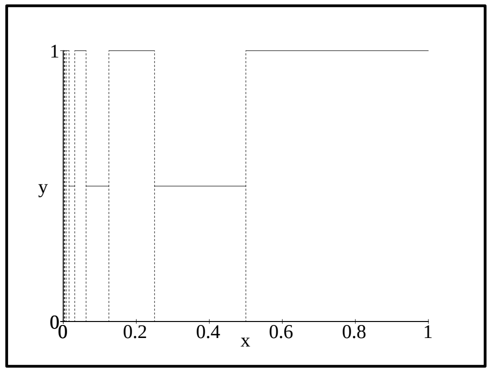
$f \in \mathcal{R}(\langle 0, 1\rangle)$ neboť

- f je neklesající na $\langle 0, 1\rangle$
- f je na $\langle 0, 1\rangle$ ohraničená a skoro spojitá (ve smyslu Jordanově)

(každá z uvedených podmínek je postačující)

Příklad 4.4

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

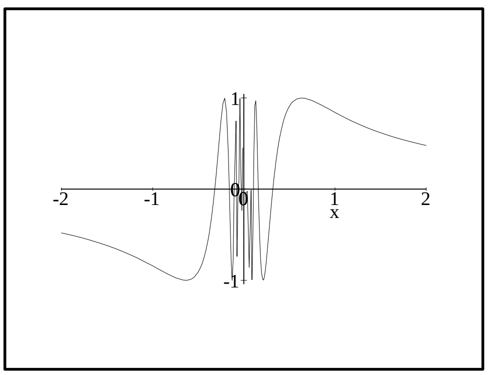


$f \in \mathcal{R}(\langle 0, 1\rangle)$ neboť f je ohraničená na $\langle 0, 1\rangle$ a množina jejích bodů nespojitosti má míru nula.

Příklad 4.5

$$f(x) = \begin{cases} sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ neboť je na $\langle a, b\rangle$ ohraničená a skoro spojitá (jediným bodem nespojitosti této funkce je bod 0). Viz obr. 7.



Obrázek 7: Graf funkce $y = sin\frac{1}{x}$

Věta 4.17 Pravidla pro počítání R-integrálu

Nechť $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$, $c \in \mathbf{R}$ libovolná konstanta. Pak platí

(a)

$$f + g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle), \quad \int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

(b)

$$c \cdot f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle), \quad \int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

(c)

$$f \cdot g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$$

(d) Jestliže funkce g má na $\langle a,b\rangle$ stále totéž znaménko a $\inf_{x\in\langle a,b\rangle} g(x)\neq 0$, $\sup_{x\in\langle a,b\rangle} g(x)\neq 0$, pak

$$\frac{f}{g}\in\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$$

(e) Označme $m(f)=\inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, $M(f)=\sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Pak

$$m(f)(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(f)(b-a)$$

Důkaz: Dělení $D\in\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, $D: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ buď libovolné, dále označme

$$m_i(y)=\inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} y(x),\quad M_i(y)=\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} y(x)$$

(a) V každém $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ platí

$$m_i(f)+m_i(g)\leq f(x)+g(x)\leq M_i(f)+M_i(g)\qquad\forall x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$m_i(f)+m_i(g)\leq m_i(f+g)\leq M_i(f+g)\leq M_i(f)+M_i(g)$$

Násobením této nerovnosti výrazem $(x_i-x_{i-1})>0$ a sečtením přes všechna $i=1,\ldots,n$ dostáváme

$$s(D,f)+s(D,g)\leq s(D,f+g)\leq S(D,f)+S(D,g)$$

Buď nyní $\{D_n\}$ nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Z předchozí nerovnosti a při $n\to\infty$ plyne (s použitím věty 4.9):

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\leq\int_{\underline{a}}^b(f+g)(x)\,dx\leq\int_a^{\overline{b}}(f+g)(x)\,dx\leq\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

Odtud tedy $f+g\in\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, $\displaystyle\int_a^b(f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

(b) Pro $c=0$ je tvrzení zřejmé. Nechť tedy $c\neq 0$, například $c>0$. Pak

$$m_i(c\cdot f)=c\cdot m_i(f),\quad M_i(c\cdot f)=c\cdot M_i(f)$$

Analogicky s důkazem části (a) násobíme výrazem (x_i-x_{i-1}) a sečteme přes všechna i:

$$s(D,c\cdot f)=c\cdot s(D,f),\quad S(D,c\cdot f)=c\cdot S(D,f)$$

Opět použitím $\{D_n\}$ — nulové posloupnosti dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ — dostaneme pro $n\to\infty$:

$$\int_{\underline{a}}^b c\cdot f(x)\,dx=c\int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx,\quad\int_a^{\overline{b}} c\cdot f(x)\,dx=c\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx$$

Z předpokladu R-integrability f je $\displaystyle\int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx=\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx$, tedy celkem $\displaystyle\int_a^b c\cdot f(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx$.

(c) Předpokládejme $f(x)>0$, $g(x)>0$ na $\langle a,b\rangle$. Zřejmě

$$m(f)=inf_{x\in\langle a,b\rangle}f(x)\geq 0,\qquad m(g)=inf_{x\in\langle a,b\rangle}g(x)\geq 0$$

$$M(f)=sup_{x\in\langle a,b\rangle}f(x)>0,\qquad M(g)=sup_{x\in\langle a,b\rangle}g(x)>0$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{2M(g)} > 0$ existuje podle lemmatu 4.11 dělení $D_1 \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)$ tak, že

$$S(D_1, f) - s(D_1, f) < \frac{\varepsilon}{2M(g)}$$

Stejně tak k číslu $\frac{\varepsilon}{2M(f)} > 0$ existuje dělení $D_2 \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)$ takové, že

$$S(D_2, g) - s(D_2, g) < \frac{\varepsilon}{2M(f)}$$

Buď nyní $D \supseteq D_1 \cup D_2$ (společné zjemnění). Pak

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &< \frac{\varepsilon}{2M(g)} \\ S(D, g) - s(D, g) &< \frac{\varepsilon}{2M(f)} \end{aligned}$$

Přitom v i-tém dělícím intervalu platí

$$m_i(f)m_i(g) \leq f(x)g(x) \leq M_i(f)M_i(g)$$

$$\Downarrow$$

$$m_i(f)m_i(g) \leq m_i(f \cdot g) \leq M_i(f \cdot g) \leq M_i(f)M_i(g)$$

Opět násobíme $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme přes všechna i s použitím:

$$\begin{aligned} M_i(f \cdot g) - m_i(f \cdot g) &\leq M_i(f)M_i(g) - m_i(f)m_i(g) + \overbrace{m_i(f)M_i(g) - m_i(f)M_i(g)}^{=0} = \\ &= M_i(g)[M_i(f) - m_i(f)] + m_i(f)[M_i(g) - m_i(g)] \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} S(D, f \cdot g) - s(D, f \cdot g) &\leq M(g)[S(D, f) - s(D, f)] + m(f)[S(D, g) - s(D, g)] < \\ &< M(g)\frac{\varepsilon}{2M(g)} + M(f)\frac{\varepsilon}{2M(f)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jsou-li nyní f, g libovolné, volíme M_1, M_2 takové, že $|f(x)| \leq M_1$, $|g(x)| \leq M_2$ $\forall x \in \langle a, b\rangle$. Pak funkce $M_1 - f(x)$, $M_2 - g(x)$ jsou na $\langle a, b\rangle$ nezáporné a R-integrabilní a tedy podle první části důkazu (c) je funkce

$$F := [M_1 - f(x)][M_2 - g(x)] \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$$

tj.

$$M_1M_2 - M_2f(x) - M_1g(x) + f(x)g(x) \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$$

Odtud

$$f(x)g(x) = F(x) - M_1M_2 + M_2f(x) + M_1g(x) \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$$

(d) Stačí dokázat, že za uvedených předpokladů je funkce $\dfrac{1}{g} \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle lemmatu 4.11 existuje k číslu $m^2(g)\varepsilon > 0$, kde $m(g) = \inf_{x \in \langle a,b\rangle} g(x)$, dělení $D \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)$, $D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ tak, že

$$S(D, g) - s(D, g) < m^2(g)\varepsilon$$

Zřejmě na i-tém dělícím intervalu platí

$$m_i\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{M_i(g)}, \quad M_i\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{m_i(g)} \qquad g > 0,\ i = 1, \ldots, n$$

Odtud

$$\begin{aligned} S\left(D,\frac{1}{g}\right)-s\left(D,\frac{1}{g}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left[M_i\left(\frac{1}{g}\right)-m_i\left(\frac{1}{g}\right)\right](x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{m_i(g)}-\frac{1}{M_i(g)}\right](x_i-x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i(g)-m_i(g)}{m_i(g)M_i(g)}(x_i-x_{i-1}) \le \frac{1}{m^2(g)}\sum_{i=1}^{n}[M_i(g)-m_i(g)](x_i-x_{i-1}) = \\ &= \frac{1}{m^2(g)}[S(D,g)-s(D,g)] < \frac{1}{m^2(g)}m^2(g)\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

(e) Plyne bezprostředně z věty 4.4.

□

Důsledek 4.18

1) Nechť funkce $f_i \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, $c_i \in \mathbf{R}$ je libovolné konstantní pro $i=1,\dots,n$. Pak

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle), \qquad \int_a^b \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b f_i(x)\,dx$$

2) Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a $f \ge 0$ na $\langle a,b\rangle$. Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

3) Nechť $f,g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a $f \ge g$ na $\langle a,b\rangle$. Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

4) Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Pak

$$|f| \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle), \qquad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Věta 4.19 První věta o střední hodnotě

Nechť $f,g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, g je na $\langle a,b\rangle$ stále nezáporná nebo nekladná,

$$m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), \qquad M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

Pak existuje $u:\ m \le u \le M$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = u\int_a^b g(x)\,dx$$

Důkaz: Předpokládejme $g \ge 0$ na $\langle a,b\rangle$ (opačná nerovnost — analogicky). Podle předpokladů také funkce $f\cdot g$ je R-integrabilní na $\langle a,b\rangle$ (věta 4.17). Zřejmě též platí

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx \tag{1}$$

Jestliže $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, pak podle předpokladů o g nutně $g(x)=0\ \forall x\in\langle a,b\rangle$ a tedy $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, takže tvrzení věty platí ($u=1$). Předpokládejme tedy $\int_a^b g(x)\,dx \ne 0$. Pak u zvolíme takto:

$$u = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

a stačí dokázat, že toto číslo u má požadované vlastnosti, což plyne z nerovnosti (1) (dělíme ji integrálem $\int_a^b g(x)\,dx$) a z dosazení do formule věty. □

Poznámka 4.20

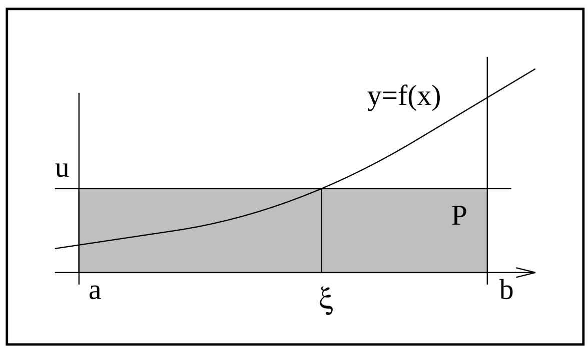
1) Jestliže funkce f je dokonce spojitá na $\langle a,b\rangle$, pak tvrzení věty lze za uvedených předpokladů formulovat takto:

$$\exists \xi \in \langle a,b\rangle: \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

2) Geometrický význam (funkce g konstantní, $g(x) = 1 \ \forall x \in \langle a,b\rangle$):

$$\int_a^b f(x)\,dx = u(b-a) = f(\xi)(b-a)$$

tj. plocha vymezená grafem funkce f a osou x na intervalu $\langle a,b\rangle$ odpovídá velikostí ploše P obdélníka o stranách délky $(b-a)$ a u (viz obr. 8).



Obrázek 8: *Geometrický význam první věty o střední hodnotě*

Věta 4.21

(a) Nechť $a,b,c \in \mathbf{R}: \ a<b<c, \ f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle) \wedge f \in \mathcal{R}(\langle b,c\rangle)$. Pak

$$f \in \mathcal{R}(\langle a,c\rangle), \qquad \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

(b) Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle c,d\rangle)$ pro každý $\langle c,d\rangle \subseteq \langle a,b\rangle$

Důkaz:

(a) Buď

- D'_n nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$
- D''_n nulová posloupnost dělení intervalu $\langle b,c\rangle$
- D_n posloupnost dělení intervalu $\langle a,c\rangle$, přičemž dělící body dělení D_n odpovídají na intervalu $\langle a,b\rangle$ dělení D'_n a na $\langle b,c\rangle$ dělení D''_n. Zřejmě i D_n je nulová posloupnost dělení.

Odtud
$$s(D'_n, f) + s(D''_n, f) = s(D_n, f)$$
a limitním přechodem pro $n \to \infty$ a s využitím věty 4.9
$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx + \int_{\underline{b}}^{c} f(x)\,dx = \int_{\underline{a}}^{c} f(x)\,dx$$
Analogicky
$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx + \int_{b}^{\overline{c}} f(x)\,dx = \int_{a}^{\overline{c}} f(x)\,dx$$
Odtud tvrzení.

(b) Podle předpokladů $a \le c < d \le b$. Předpokládejme navíc $a < c$, $d < b$. Buď

D'_n nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a, c\rangle$

D''_n nulová posloupnost dělení intervalu $\langle c, d\rangle$

D'''_n nulová posloupnost dělení intervalu $\langle d, b\rangle$

D_n posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, dělení D_n je určeno dělícími body dělení D'_n, D''_n a D'''_n. Zřejmě i D_n je nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak opět platí
$$s(D'_n, f) + s(D''_n, f) + s(D'''_n, f) = s(D_n, f)$$
a limitním přechodem
$$\int_{a}^{\overline{c}} f(x)\,dx + \int_{c}^{\overline{d}} f(x)\,dx + \int_{d}^{\overline{b}} f(x)\,dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$
Analogicky
$$\int_{\underline{a}}^{c} f(x)\,dx + \int_{\underline{c}}^{d} f(x)\,dx + \int_{\underline{d}}^{b} f(x)\,dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$
Odečtením
$$\underbrace{\left(\int_{a}^{\overline{c}} f(x)\,dx - \int_{\underline{a}}^{c} f(x)\,dx\right)}_{\ge 0} + \underbrace{\left(\int_{c}^{\overline{d}} f(x)\,dx - \int_{\underline{c}}^{d} f(x)\,dx\right)}_{\ge 0} + \underbrace{\left(\int_{d}^{\overline{b}} f(x)\,dx - \int_{\underline{d}}^{b} f(x)\,dx\right)}_{\ge 0} = 0$$
Protože z vlastností dolního a horního R-integrálu je každý ze sčítanců větší nebo roven nule, je každý z nich nutně roven nule, tj. f je na všech třech uvedených intervalech R-integrabilní.

$\square$

Poznámka 4.22

Přirozeně z tvrzení předchozí věty doplníme pravidla pro počítání s určitým R-integrálem.
$$\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0 \qquad \text{protože } \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$
Pro $a > b$
$$\int_{b}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad \text{protože } \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Věta 4.23 Vlastnosti R-integrálu jakožto funkce horní meze

(a) Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, potom funkce
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
je na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá.

(b) Je-li f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, potom funkce $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ má na $\langle a,b\rangle$ derivaci a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 4.24

Analogické tvrzení platí i pro
$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt = -\int_b^x f(t)\,dt$$

Důkaz:

(a) Z předpokladů plyne existence čísla $K > 0 : \ |f(x)| \le K \ \ \forall x \in \langle a,b\rangle$. Buď $x_0 \in (a,b)$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme ukázat, že existuje $\delta(\varepsilon)$ tak[3], že
$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b) : \ |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$$
Tedy
$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \le \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \le K\left|\int_{x_0}^x dx\right| = K|x-x_0| < K\cdot\delta$$
Zřejmě stačí volit $\delta \le \frac{\varepsilon}{K}$.

Analogicky lze dokázat spojitost f v bodě a zprava a v bodě b zleva.

(b) Dokážeme, že funkce F je za uvedených předpokladů diferenciovatelná v libovolném vnitřním bodě intervalu $\langle a,b\rangle$. Analogicky by byl veden důkaz existence jednostranných derivací v krajních bodech intervalu $\langle a,b\rangle$.

Buď $x_0 \in (a,b)$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože f je spojitá v bodě x_0, tedy k číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že
$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b) : \ |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
Současně pro každé $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ platí
$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt - \frac{f(x_0)}{x-x_0}\int_{x_0}^x dx\right| \le \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,dt\right| \le \\ &\le \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x \frac{\varepsilon}{2}\,dt\right| = \frac{\varepsilon}{2|x-x_0|}|x-x_0| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$
V limitě pro $x \to x_0$ odtud plyne, že $F'(x_0)$ existuje a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

□

Věta 4.25 O existenci primitivní funkce

Ke každé funkci spojité na uzavřeném intervalu J existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

Důkaz: Zvolme $a \in J$ a položme $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Ostatní z věty 4.23(b). □

Věta 4.26 Druhá věta o střední hodnotě

Je-li $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, g monotónní na $\langle a,b\rangle$, pak
$$\exists \xi \in \langle a,b\rangle : \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

Důkaz: Příliš dlouhý, nepříliš významný. Viz [1, 4]. □

[3] Zápis $\delta(\varepsilon)$ znamená: δ je závislé právě na ε

4.3 Metody výpočtu

Věta 4.27 Metoda „per partes'' pro určitý integrál

Nechť funkce u, v mají na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité první derivace. Pak

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

kde $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Důkaz: Zřejmě (z věty 4.17(ac) a 4.12(b)) funkce $u, v, u', v', u'v, uv', \ldots, (u+v)$ jsou R-integrabilní na $\langle a, b\rangle$. Dokonce funkce uv je na $\langle a, b\rangle$ primitivní k funkci $u'v + uv'$. Podle věty 4.17(a) a 4.10

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Odtud

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

□

Věta 4.28 O substituci v určitém integrálu

Nechť funkce φ má na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ spojitou první derivaci a nechť pro každé $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ je $A \le \varphi(t) \le B$, funkce f buď spojitá na $\langle A, B\rangle$. Pak

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

Důkaz: Položme

$$F(x) = \int_A^x f(u)\,du$$

Pak F má na intervalu $\langle A, B\rangle$ derivaci a je primitivní k f. Protože i φ má na $\langle \alpha, \beta\rangle$ derivaci a $\forall t \in \langle \alpha, \beta\rangle : \varphi(t) \in \langle A, B\rangle$ tedy i funkce $F[\varphi(t)]$ má na $\langle \alpha, \beta\rangle$ derivaci.

$$\{F[\varphi(t)]\}' = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

tedy $F[\varphi(t)]$ je na $\langle \alpha, \beta\rangle$ spojitá a primitivní k $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Přitom $f[\varphi(t)]\varphi'(t) \in \mathcal{R}(\langle \alpha, \beta\rangle)$ a tedy podle věty 4.10

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = [(F\circ\varphi)(t)]_\alpha^\beta = \ldots = \int_A^{\varphi(\beta)} f(u)\,du - \int_A^{\varphi(\alpha)} f(u)\,du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

□

4.4 Aplikace

Geometrické aplikace Tabulka 1 shrnuje geometrické aplikace určitého integrálu. Uvedené vzorce lze přitom užít za předpokladu spojitosti funkcí f, u, ψ, φ' a ϱ.

Metody odvození

1. **Obsah rovinného obrazce**

   (a) Odpovídá konstrukci Riemannova integrálu.

	kartézská soustava souřadnic		polární s. s.
	(a)	(b)	(c)
	$\mathcal{K}: y = f(x),\ x \in \langle a, b\rangle$	$\mathcal{K}: \begin{array}{rcl} x &=& \varphi(t) \\ y &=& \psi(t),\ x \in \langle \alpha, \beta\rangle \end{array}$	$\mathcal{K}: \varrho = \varrho(\varphi),\ x \in \langle \alpha, \beta\rangle$
1)	$P = \int_a^b f(x)\,dx$	$P = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt$	$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2(\varphi)\,d\varphi$
2)	$L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$	$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\psi'^2(t)+\varphi'^2(t)}\,dt$	$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho^2(\varphi)+\varrho'^2(\varphi)}\,d\varphi$
3)	$V = \int_a^b u(x)\,dx$	—	—
	$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$	$V_x = \pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)+\varphi'^2(t)\,dt$	$V_\varrho = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \varrho^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$
4)	$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$	$S = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\psi'^2(t)+\varphi'^2(t)}\,dt$	$S = 2\pi\int_\alpha^\beta \varrho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\varrho^2(\varphi)+\varrho'^2(\varphi)}\,d\varphi$

Tabulka 1: *Geometrické aplikace určitého integrálu*

(b) Pro parametricky zadanou křivku $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K}: \begin{array}{rcl} x &=& \varphi(t) \\ y &=& \psi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta\rangle \end{array}$$

$$P = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt$$

Z případného předpokladu $\varphi' \neq 0$ na $\langle \alpha, \beta\rangle$ je buď $\varphi > 0$ nebo $\varphi < 0$ na $\langle \alpha, \beta\rangle$. φ je tedy na $\langle \alpha, \beta\rangle$ ryze monotónní, takže k ní existuje na tomto intervalu funkce inverzní φ^{-1}. Tedy funkce $\psi[\varphi^{-1}(x)]$ je definovaná na $\langle a, b\rangle$ a $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ pro $\varphi' > 0$, resp. $a = \varphi(\beta)$, $b = \varphi(\alpha)$ pro $\varphi' < 0$. Dosadíme tedy tuto funkci do vzorce 1a a podle věty o substituci:

$$P = \int_a^b \psi[\varphi^{-1}(x)]\,dx \quad \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \\ a \to \alpha,\ b \to \beta \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt$$

(c) Pro křivku $\mathcal{K}: \varrho = \varrho(\varphi)$, $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$ v polární soustavě souřadnic platí

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2(\varphi)\,d\varphi$$

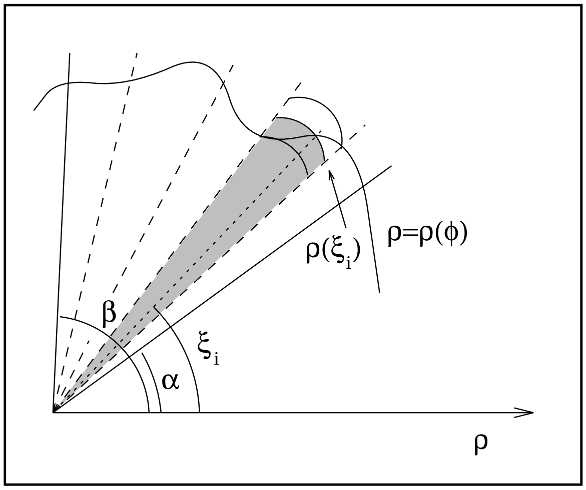
Máme dělení intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ s dělícími body

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$$

Pak v i-tém dělícím intervalu je obsah kruhové výseče roven $1/2\varrho^2(\xi_i)(\varphi_i - \varphi_{i-1})$ (viz obrázek 9) a tedy pro cely obsah platí

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\varrho^2(\xi_i)(\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \sigma\left(D_n, \Xi_n, \frac{1}{2}\varrho^2\right)$$

Za předpokladu R-integrability funkce $1/2\varrho^2$ a při limitě v $\{D_n\}$ nulové dostáváme přislušný vzorec.



Obrázek 9: *Odvození obsahu obrazce, omezeného funkcí v polární s.s.*

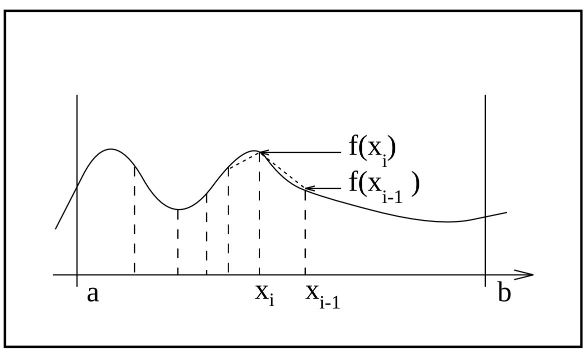
2. Délka rovinné křivky

(a) Pro funkci f v kartézské soustavě souřadnic platí

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

Přitom délka křivky v i-tém dělícím intervalu je (viz obrázek 10)

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \underbrace{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}_{f'^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1})^2}} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}(x_i - x_{i-1})$$



Obrázek 10: *K odvození délky rovinné křivky*

a tedy

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}(x_i - x_{i-1}) = \sigma\left(D_n, \Xi_n, \sqrt{1 + f'^2}\right)$$

Opět pro $\{D_n\}$ nulovou a $n \to \infty$ dostáváme příslušný vzorec

(b) Délka parametricky zadané křivky se odvodí analogicky jako předchozí případ, uvedeme tedy pouze rozšíření vzorce pro výpočet délky parametrické křivky ve 3-rozměrném prostoru (odvození je rovněž analogické jako pro základní vzorec)

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \\ z &= \omega(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle \end{aligned} \qquad L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}\, dt$$

(c) Křivku $\mathcal{K}$ lze transformovat z polární soustavy souřadnic do kartézské:

$$\mathcal{K}: \quad \varrho = \varrho(\varphi), \; \varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} x &= \varrho(\varphi)\cos\varphi \\ y &= \varrho(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle \end{aligned}$$

Dosazením do vzorce pro předchozí případ (2b) dostáváme po troše počítání příslušný vzorec.

3. Objem tělesa

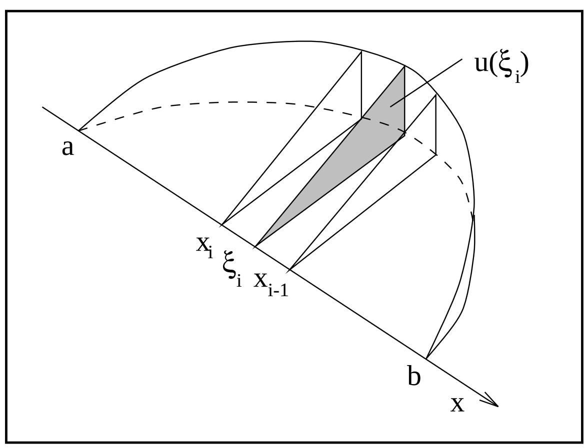
- **pomocí příčných řezů**

  (a) Objem tělesa aproximujeme (viz obrázek 11)

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} u(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sigma\left(D_n, \Xi_n, u\right)$$

Díky spojitosti funkce u na $\langle a, b \rangle$ je u na tomto intervalu R-integrabilní a tedy

$$\sigma\left(D_n, \Xi_n, u\right) \to \int_a^b u(x)\, dx$$



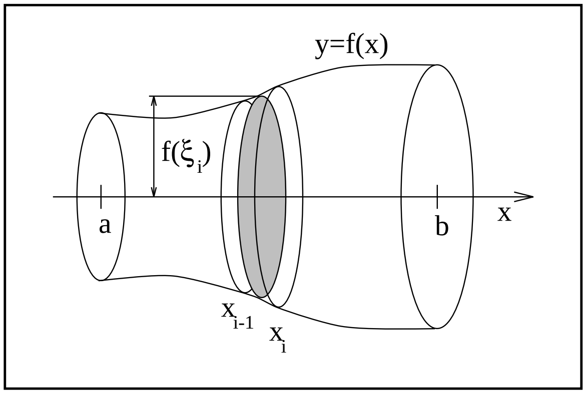
Obrázek 11: *Odvození objemu tělesa pomocí příčných řezů*

- **vzniklého rotací**

  (a) Plocha řezu v i-tém dělícím intervalu je (viz obrázek 12)

$$u(x) = \pi f^2(x) \quad \Longrightarrow \quad V_x = \int_a^b u(x)\, dx = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

  (b) Za předpokladu, že φ' je buď kladná nebo záporná v celém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, můžeme opět přechodem k funkci φ^{-1} a použitím věty o substituci v integrálu z (3a) odvodit příslušný vzorec.



Obrázek 12: *Odvození objemu rotačního tělesa*

(c) K odvození lze použít například vzorec pro výpočet objemu kulového vrchlíku:

$$V = \frac{2\pi}{3}\frac{R^2}{3}h$$

Pomocí zjemňování vrchlíků pak dostáváme příslušný vzorec.

4. Plocha pláště rotačního tělesa

(a) Plochu aproximujeme

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \underbrace{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}_{(f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}))^2}}\,(f(x_i) + f(x_{i-1})) = \sigma\left(D_n, \Xi_n, \pi\sqrt{1+f'^2}\,2f\right)$$

přičemž uvedená rovnost platí z 2.věty o střední hodnotě. Z tohoto vztahu se již odvodí příslušný vzorec.

(b) Odvození se provede opět transformací na případ (4a), za předpokladu ryzí monotónnosti a definovanosti funkce φ.

(c) Odvození ponecháváme čtenáři k procvičení

Fyzikální aplikace Uvažujme množinu n hmotných bodů, každý bod i je charakterizován svojí polohou $[x_i, y_i]$ a hmotností m_i. Dále označme

$$H = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad S_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$
$$S_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

Pak můžeme vypočítat polohu těžiště T této množiny bodů

$$T = \left(\frac{S_y}{H}, \frac{S_x}{H}\right)$$

Dále pro množinu bodů, která je grafem funkce f, zavádíme funkci „hustoty” s — hodnota $s(x)$ udává hmotnost bodu $[x, f(x)]$.

Fyzikální aplikace určitého integrálu shrnuje tabulka 2.

kartézská soustava souřadnic		polární s. s.
(a)	(b)	(c)
$\mathcal{K}: y = f(x),\ x \in \langle a, b\rangle,\ s(x)$	$\mathcal{K}: \begin{array}{rcl} x & = & \varphi(t) \\ y & = & \psi(t),\ x \in \langle \alpha, \beta\rangle,\ s(x) \end{array}$	$\mathcal{K}: \varrho = \varrho(\varphi),\ x \in \langle \alpha, \beta\rangle,\ s(x)$
$H = \int_a^b s(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$	$H = \int_\alpha^\beta s(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$	$H = \int_\alpha^\beta s(\varphi)\sqrt{\varrho^2(\varphi)+\varrho'^2(\varphi)}\,d\varphi$
$S_x = \int_a^b s(x)f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$	$S_x = \int_\alpha^\beta s(t)\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$	$S_x = \int_\alpha^\beta s(\varphi)\varrho(\varphi)\sin(\varphi)\sqrt{\varrho^2(\varphi)+\varrho'^2(\varphi)}\,d\varphi$
$S_y = \int_a^b s(x)x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$	$S_y = \int_\alpha^\beta s(t)\varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$	$S_y = \int_\alpha^\beta s(\varphi)\varrho(\varphi)\cos(\varphi)\sqrt{\varrho^2(\varphi)+\varrho'^2(\varphi)}\,d\varphi$
$H = \int_a^b s(x)f(x)\,dx$	$H = \int_\alpha^\beta s(t)\psi(t)\varphi'(t)\,dt$	$H = \int_\alpha^\beta s(\varphi)\varrho^2(\varphi)\,d\varphi$
$S_x = \frac{1}{2}\int_a^b s(x)f^2(x)\,dx$	$S_x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta s(t)\psi^2(t)\varphi'(t)\,dt$	$S_x = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \varrho^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$
$S_y = \frac{1}{2}\int_a^b s(x)xf(x)\,dx$	$S_y = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta s(t)\varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)\,dt$	$S_y = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \varrho^3(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$

Tabulka 2: *Fyzikální aplikace určitého integrálu*

Metody odvození

1. Těžiště rovinné křivky

(a) Nechť D je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Hmotnost pak aproximujeme

$$H \approx \sum_{i=1}^{n} s(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_i - x_{i-1}) = \sigma\left(D_n, \Xi_n, s\sqrt{1+f'^2}\right)$$

Za předpokladu spojitosti f' a s a při D_n nulové dostáváme vzorec pro výpočet hmotnosti rovinné křivky. Podobně odvodíme i vzorce pro výpočet S_x, S_y:

$$S_x \approx \sum_{i=1}^{n} s(\xi_i)f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_i - x_{i-1}) = \sigma\left(D_n, \Xi_n, sf\sqrt{1+f'^2}\right)$$

$$S_y \approx \sum_{i=1}^{n} s(\xi_i)\xi_i\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_i - x_{i-1}) = \sigma\left(D_n, \Xi_n, sx\sqrt{1+f'^2}\right)$$

Polohu těžiště pak získáme podle již uvedeného vztahu

$$T = \left(\frac{S_y}{H}, \frac{S_x}{H}\right)$$

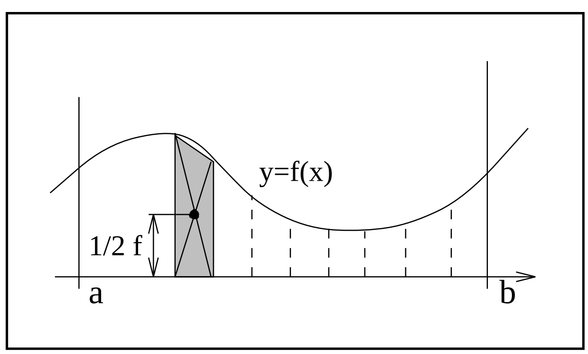
Odvození pro případ (b) a (c) se provede již analogicky s odvozením pro geometrické aplikace.

2. Těžiště rovinného obrazce

(a) Pro množinu bodů rovinného obrazce, ohraničeného na intervalu $\langle a, b\rangle$ osou x a grafem funkce f, zřejmě platí (viz obrázek 13):

$$H(D) = \sigma(D, \Xi, sf) \qquad \begin{aligned} S_x(D) &= \sigma(D, \Xi, \tfrac{1}{2}sf^2) \\ S_y(D) &= \sigma(D, \Xi, sxf) \end{aligned}$$

Je-li nyní $\{D_n\}$ nulová posloupnost dělení, a opět za předpokladu spojitosti s, f, dostáváme příslušný vzorec.



Obrázek 13: *Odvození polohy těžiště rovinného obrazce*

Odvození vzorců pro případ (b) a (c) ponecháváme na zvídavém čtenáři.

4.5 Nevlastní Riemannův integrál

Definice 4.29

(a) Nechť f je definovaná na intervalu $\langle a, \infty)$ (resp. $(-\infty, b\rangle$) a R-integrabilní na každém intervalu $\langle a, c\rangle$ (resp. $\langle c, b\rangle$). Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)\,dx \qquad (\text{resp. } \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)\,dx\ )$$

říkáme, že existuje *nevlastní integrál 1. druhu* funkce f na intervalu $\langle a, \infty)$ (resp. $(-\infty, b\rangle$) a označujeme jej

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad (\text{resp. } \int_{-\infty}^b f(x)\,dx\ )$$

(b) Nechť f je funkce definovaná v nějaké podmnožině množiny $\mathbf{R}$ a taková, že pro každé okolí $o^*(x_0)$ (zápisem $o^*(x_0)$ rozumíme $o(x_0)\backslash\{x_0\}$) bodu x_0 (resp. pro pravé nebo levé okolí $o^{*+}(x_0), o^{*-}(x_0)$ bodu x_0) je funkce f v $o^*(x_0)\cap \mathrm{Dom}f$ (resp. $o^{*+}(x_0)\cap\mathrm{Dom}f$, $o^{*-}(x_0)\cap\mathrm{Dom}f$) neohraničená. Potom říkáme, že f má v bodě x_0 singularitu (x_0 je *singulární bod* funkce f).

Nechť nyní f je definovaná na intervalu $(a, b\rangle$ (resp. $\langle a, b)$), přičemž bod a (resp. b) je singulárním bodem funkce f, a nechť f je R-integrabilní na každém intervalu $\langle c, b\rangle \subset (a, b\rangle$ (resp. $\langle a, c\rangle \subset \langle a, b)$). Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx \qquad (\text{resp. } \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx\ )$$

říkáme, že funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ *nevlastní integrál 2. druhu* a označujeme jej

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Příklad 4.6

1)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}[\arctan x]_0^b = \frac{\pi}{2}$$

2)

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \lim_{b\to\infty}[\ln x]_a^b \text{ diverguje}, & \lambda = 1\\ \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]_a^b = \begin{cases}\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda > 1\\ \text{diverguje}, & \lambda < 1\end{cases} \end{cases}$$

Věta 4.30 CAUCHYHO, CAUCHY-BOLZANOVA

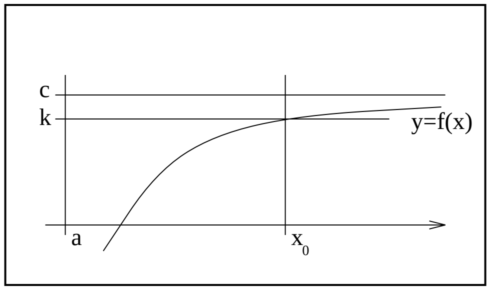
(a) Integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ (resp. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$) konverguje, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $c < b$ (resp. $c > a$) tak, že pro každé $c_1, c_2 < c$ (resp. $c_1, c_2 > c$) platí $\displaystyle\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

(b) Je-li a (resp. b) singulárním bodem funkce f, pak $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ konverguje, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $c_1, c_2 \in o_\delta^+(a)$ (resp. $c_1, c_2 \in o_\delta^-(a)$) platí $\displaystyle\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Věta 4.31 Nutná podmínka konvergence

Jestliže integrál $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje a existuje $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, pak $c = 0$.

Důkaz: Sporem: předpokládejme, že $c \neq 0$, např. $c > 0$. Buď $k \in (0, c)$. Pak existuje $x_0 \geq a$ tak, že $f(x) > k\ \forall x \geq x_0$ (viz obrázek 14).



Obrázek 14: *K důkazu nutné podmínky konvergence*

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, pak existují $x, y \geq x_0,\ y > x$ tak, že $k(y - x) > \varepsilon$, tedy

$$\left|\int_x^y f(x)\,dx\right| \geq \left|\int_x^y k\,dx\right| = k(y - x) > \varepsilon$$

což je spor s předpokladem konvergence $\int_a^\infty f(x)\,dx$. □

Poznámka 4.32

Důkaz věty 4.30 plyne bezprostředně z Cauchyho (Cauchy-Bolzanova) kritéria existence limity funkce f v bodě x_0.

Věta 4.33 Srovnávací kritérium

(a)
- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konverguje a na intervalu $\langle a, \infty)$ platí $|f(x)| \leq g(x)$. Pak $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje.
- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverguje (k $+\infty$) a na intervalu $\langle a, \infty)$ platí $f(x) \leq g(x)$. Pak $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverguje.

(b)
- $\int_a^b g(x)\,dx$ konverguje a na intervalu $\langle a, b)$ platí $|f(x)| \leq g(x)$, přičemž v bodě b má f singularitu. Pak $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje.
- $\int_a^b g(x)\,dx$ diverguje (k $+\infty$) a na intervalu $\langle a, b)$ platí $f(x) \leq g(x)$, přičemž v bodě b má f singularitu. Pak $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverguje.

Důkaz:

(a) Nechť $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konverguje. Protože $|f| \leq g$, platí

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx = c$$

a tedy i $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje.

(b) Analogicky.

□

Poznámka 4.34

1) Uvažujme $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, kde b je singulární bod funkce f. Pro $\varepsilon \to 0$ dostáváme nevlastní integrál 2. druhu: $\int_a^b f(x)\,dx$. Následující substitucí v uvažovaném integrálu

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \left| \begin{array}{c} x = b - \frac{1}{t} \\ dx = \frac{dt}{t^2} \end{array} \right| = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2}\,dt$$

a opět pro $\varepsilon \to 0$ dostáváme naopak nevlastní integrál 1. druhu. To znamená, že můžeme libovolně přejít od nevlastního integrálu 1. druhu k integrálu 2. druhu a zpět, takže všechna tvrzení platí pro oba druhy nevlastního integrálu.

2) Ve spojení s příkladem 4.6 vede věta 4.33 ke konkrétním srovnávacím kritériím.

Věta 4.35 Dirichletovo-Abelovo kritérium

(a) Funkce f nechť je spojitá na $\langle a, \infty)$ a má na tomto intervalu omezenou primitivní funkci. Funkce g nechť je na intervalu $\langle a, \infty)$ definovaná a nerostoucí, nechť $lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ a g' je na $\langle a, \infty)$ spojitá. Pak

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx \text{ konverguje}$$

(b) Analogicky pro integrál 2. druhu.

Důkaz: Buďte $c_1, c_2 \in \langle a, \infty),\ c_1 < c_2$ libovolné. Platí

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)g(x)\,dx \quad \left| \begin{array}{cc} u' = f & u = F \\ v = g & v' = g' \end{array} \right| = [F(x)g(x)]_{c_1}^{c_2} - \int_{c_1}^{c_2} F(x)g'(x)\,dx$$

Protože F je omezená, existuje $K > 0 : |F(x)| \le K\ \forall x \in \langle a, \infty)$ a protože g je nerostoucí a $g \to 0$ pro $x \to \infty$, je $g(x) \ge 0$ a $g'(x) \le 0$ na nějakém intervalu $\langle a', \infty)$. Tedy

$$\begin{aligned} \int_{c_1}^{c_2} f(x)g(x)\,dx &= [F(x)g(x)]_{c_1}^{c_2} - \int_{c_1}^{c_2} F(x)g'(x)\,dx \le K[g(c_2) - g(c_1)] + K\int_{c_1}^{c_2} -g'(x)\,dx \le \\ &\le K[g(c_2) - g(c_1)] + [g(c_1) - g(c_2)] \le 2Kg(c_1) \end{aligned}$$

Odtud: $\forall \varepsilon > 0\ \exists c$ tak, že pro $\forall c_1, c_2 > c,\ g(c) < \frac{\varepsilon}{2K}$ platí:

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)g(x)\,dx \right| < 2K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon,$$

tedy podle Chauchy – Bolzanova kritéria příslušný integrál konverguje. □

4.6 Doplněk

Newtonův integrál

Definice 4.36

Určitý integrál lze zavést s použitím znalosti primitivní funkce a Newton-Leibnizovy formule takto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Takto získaný integrál se nazývá *Newtonův*, množinu všech funkcí, které mají na intervalu $\langle a, b\rangle$ Newtonův integrál značíme $\mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$.

Poznámka 4.37

Neplatí $\mathcal{R}(\langle a,b\rangle) \subseteq \mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$ ani $\mathcal{N}(\langle a,b\rangle) \subseteq \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz:

1. sgn $x \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)\backslash\mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$
2. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x \in (-1,1) \\ 0 & x = -1, 1 \end{cases} \in \mathcal{N}(\langle -1,1\rangle)\backslash\mathcal{R}(\langle -1,1\rangle)$$

□

Riemann-Stierjenův integrál

Definice 4.38

Zavedeme následující rozšíření R-integrálu na R-Stierjenův integrál: Nechť f, α jsou funkce, pro R-integrál jsme zavedli integrální sumu

$$\sigma(D, \Xi, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

pro RS-integrál zavedeme tuto sumu takto:

$$\sigma(D, \Xi, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$$

a takto získaný integrál zapisujeme

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

množinu všech RS-integrabilních funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$ značíme $\mathcal{RS}(\langle a,b\rangle)$.

Pro tento integrál platí analogická tvrzení jako pro R-integrál a navíc např:

Tvrzení 4.1

Je-li $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a $\alpha' \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, pak $f \in \mathcal{RS}(\langle a,b\rangle)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx$$

Tedy funkce f a α mohou být například spojité.

Tvrzení 4.2

Nechť funkce f je spojitá na $\langle a,b\rangle$, funkce α, α' nechť jsou na tomto intervalu po částech spojité. Pak integrál $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ existuje a označíme-li body nespojitosti funkcí α, α': $a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_p = b$ a skoky funkce α:

$$\begin{aligned} s_k &= \lim_{x\to\xi_k^+} \alpha(x) - \lim_{x\to\xi_k^-} \alpha(x) \qquad k = 1,\ldots,p-1 \\ s_0 &= \lim_{x\to a^+} -\alpha(a) \\ s_p &= \alpha(b) - \lim_{x\to b^-} \end{aligned}$$

pak

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx + \sum_{k=0}^{p} f(\xi_k)s_k$$

5 Nekonečné řady

5.1 Úvod

Definice 5.1

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel. Definujeme posloupnost

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= s_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= s_{n-1} + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tato posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *posloupnost částečných součtů* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Pokud $\lim_{n\to\infty} s_n$

- je konečná a rovna s, říkáme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a jejím součtem je s.
- je rovna $\pm\infty$, říkáme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *určitě diverguje* k $\pm\infty$.
- neexistuje, říkáme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Poslední dva případy často nerozlišujeme a říkáme pouze, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 5.1

1) Geometrická řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$$

Pro její posloupnost částečných součtů platí

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}, \quad |q| \neq 1 \\ \lim_{n\to\infty} s_n &= \begin{cases} \frac{a_1}{1-q}, & |q| < 1 \\ \text{diverguje pro } |q| \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2) Harmonická řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

V této posloupnosti vybereme podposloupnost

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2} \\ s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{2}{2} + 4\cdot\frac{1}{8} = 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ s_{2^n} &> 1+\frac{n}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tedy v posloupnosti $\{s_n\}$ částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ existuje shora neohraničená podposloupnost $\{s_{2^n}\}$, tudíž $\{s_n\}$ není konvergentní. Dokonce lze dokázat, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \infty$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

3) Oscilující Grandiho řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1-1+1-1+\dots$$

Její částečné součty jsou

$$\begin{aligned} s_{2n-1} &= 1 \\ s_{2n} &= 0 \end{aligned}$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

Věta 5.2 Nutná podmínka konvergence

Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz: Předpokládejme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Protože $a_n = s_n - s_{n-1}$, platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

□

Věta 5.3 Cauchy-Bolzanova podmínka konvergence

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0,\ m \in \mathbf{N} : |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$

Důkaz: $\sum a_n$ konverguje $\iff$ $\{s_n\}$ konverguje $\iff$ $\{s_n\}$ je cauchyovská $\iff$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0,\ m \in \mathbf{N}$: $|s_n - s_{n+m}| < \varepsilon$ — odtud tvrzení. □

Věta 5.4 O invarianci charakteru řady

Konvergence nebo divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nezmění, jestliže konečný počet jejích členů vynecháme, změníme nebo přidáme.

Důkaz: Nechť se řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ liší pouze v konečném počtu členů, tj. $\exists n_0 \in \mathbf{N} : a_n = b_n\ \forall n > n_0$.
Označme dále

s_n — posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$

s'_n — posloupnost částečných součtů řady $\sum b_n$

a $r = s_{n_0} - s'_{n_0}$

Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$s'_n = s'_{n_0} + b_{n_0+1} + \dots + b_n = (s'_{n_0} - s_n) + s_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n = r + s_n$$

Pokud $\sum a_n$ konverguje $\Rightarrow$ existuje $\lim_{n\to\infty} s_n$ $\Rightarrow$ existuje $\lim_{n\to\infty} s'_n$ $\Rightarrow$ $\sum b_n$ konverguje. Naopak, pokud $\sum a_n$ diverguje $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ nebo neexistuje $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s'_n = \pm\infty$ nebo neexistuje $\Rightarrow \sum b_n$ diverguje. □

Definice 5.5

Je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada, pak řadu

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

nazveme *zbytkem* řady $\sum a_n$ po n-tém členu (n-tý zbytek).

Věta 5.6 O vlastnostech zbytku R_n

Konverguje-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, pak konverguje i každý její zbytek a platí

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Konverguje-li alespoň jeden zbytek řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, pak konverguje i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz: Pokud $\sum a_n$ konverguje, pak každý její zbytek konverguje podle věty 5.4 (vynecháváme konečný počet členů) a

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (s - s_n) = s - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

Druhá implikace vyplývá rovněž z věty 5.4. □

Věta 5.7 Pravidla pro počítání s konvergentními řadami

(a) Nechť $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$. Pak řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ buď obě konvergují nebo obě divergují a v případě konvergence platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(b) Pokud řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(c) (Asociativní zákon) Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\{n_k\}_0^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že $n_0 = 0$. Označme $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}$. Pak řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Důkaz:

(a) Označme

$\{s_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum a_n$
$\{s'_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum k \cdot a_n$

Tedy $s'_n = k \cdot a_1 + \dots + k \cdot a_n = k(a_1 + \dots + a_n) = k \cdot s_n$. Řada $\sum a_n$ konverguje $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n$ je konečná $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} k \cdot s_n$ je konečná $\Rightarrow$ posloupnost $\{k \cdot s_n\}$ konverguje $\Rightarrow$ řada $\sum k \cdot a_n$ konverguje. Pro případ divergence se tvrzení dokáže analogicky.

(b) Označme

$\{s_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum a_n$
$\{s'_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum b_n$
$\{s^*_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum (a_n + b_n)$

Pak
$$s^*_n = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) = s_n + s'_n$$
Z předpokladu konvergence navíc platí
$$\lim_{n\to\infty} s^*_n = \lim_{n\to\infty}(s_n + s'_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s'_n = s + s'$$

(c) Označme

$\{s_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum a_n$
$\{s'_k\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum b_k$

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{n_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}}_{b_2} + \ldots + \underbrace{a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}}_{b_k}$$

Zřejmě $\{s'_k\}$ je podposloupnost $\{s_n\}$, tvrzení pak plyne z věty o vlastnostech vybrané posloupnosti.

□

Poznámka 5.8
Tvrzení věty 5.7(c) nelze obrátit: viz divergentní Grandiho řada a konvergentní řada
$$\underbrace{(1-1)}_{0} + (1-1) + (1-1) + \ldots$$

Definice 5.9

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ taková, že $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n \geq 0$ (resp. $a_n > 0$) se nazývá *řada s nezápornými (*resp. *kladnými) členy.*

Věta 5.10 O vlastnostech řad s nezápornými členy
Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo určitě diverguje k $+\infty$.
Řada s nezápornými členy konverguje, právě když posloupnost jejích částečných součtů je ohraničená.
Důkaz: Pro řadu s nezápornými členy je posloupnost jejích částečných součtů $\{s_n\}$ neklesající a $\forall n \in \mathbf{N}\ s_n \geq 0$. Proto $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ nebo $\lim_{n\to\infty} s_n = s,\ s \in \mathbf{R}$. □

Věta 5.11 Kritéria konvergence řad s nezápornými členy

1. (první srovnávací kritérium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbf{N}$. Pak platí
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje}$$

2. (DRUHÉ SROVNÁVACÍ KRITÉRIUM)

   Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

   Pak platí

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje} \end{aligned}$$

3. (LIMITNÍ SROVNÁVACÍ KRITÉRIUM)

   Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \qquad L \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

   Pak platí

$$\begin{aligned} L < \infty \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \\ L > 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \end{aligned}$$

4. Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

   - (ODMOCNINOVÉ — CAUCHYOVO KRITÉRIUM)

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \\ \sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \end{aligned}$$

   - (LIMITNÍ ODMOCNINOVÉ — CAUCHYOVO KRITÉRIUM)
     Nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \quad \begin{cases} < 1 & \text{pak } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \\ > 1 & \text{pak } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \\ = 1 & \text{pak } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ může konvergovat i divergovat} \end{cases}$$

5. Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

- (PODÍLOVÉ — D'ALEMBERTOVO KRITÉRIUM)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

- (LIMITNÍ PODÍLOVÉ — D'ALEMBERTOVO KRITÉRIUM)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad \begin{cases} < 1 & \text{pak } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \\ > 1 & \text{pak } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \\ = 1 & \text{pak } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ může konvergovat i divergovat} \end{cases}$$

6. Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

- (RAABOVO KRITÉRIUM)

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq q > 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

- (LIMITNÍ RAABOVO KRITÉRIUM)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L \quad \begin{cases} < 1 & \text{pak } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \\ > 1 & \text{pak } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \\ = 1 & \text{pak } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ může konvergovat i divergovat} \end{cases}$$

7. (INTEGRÁLNÍ — CAUCHY-MACLAURINOVO KRITÉRIUM)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť existuje nerostoucí funkce $f : \langle 1, \infty) \to (0, \infty)$, pro kterou platí $a_n = f(n)\ \forall n \in \mathbf{N}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \int_1^{\infty} f(x)\, dx \text{ konverguje}$$

Důkaz:

1. Označme

$\{s_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum a_n$
$\{s'_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum b_n$

Z předpokladu $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbf{N}$ máme

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n \leq b_1 + \ldots + b_n = s'_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Pokud $\sum b_n$ konverguje $\stackrel{V5.10}{\Longrightarrow}$ $\{s'_n\}$ je ohraničená $\Rightarrow$ $\{s_n\}$ je ohraničená $\stackrel{V5.10}{\Longrightarrow}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Pokud $\sum a_n$ diverguje $\stackrel{V5.10}{\Longrightarrow}$ $\{s'_n\}$ není shora ohraničená $\Rightarrow$ $\{s_n\}$ není shora ohraničená $\stackrel{V5.10}{\Longrightarrow}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

2. Z předpokladů
$$0<\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1},\quad 0<\frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2},\ \ldots,\ 0<\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}$$
Násobením a úpravou
$$\frac{a_1}{b_1}\ge\frac{a_2}{b_2}\ge\ldots\ge\frac{a_n}{b_n}$$
a
$$\frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_n}{b_1}\qquad \text{tj. } a_n\le\frac{a_1}{b_1}b_n\quad\forall n\in\mathbf{N}$$
Podle věty 5.7(a) má řada $\sum\frac{a_1}{b_1}b_n$ stejný charakter jako $\sum b_n$, takže z poslední uvedené nerovnosti, na kterou aplikujeme 1. srovnávací kritérium, plyne tvrzení.

3. Nechť $L<\infty$. Pak $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\ge n_0 : L-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<L+\varepsilon$ (z definice limity). Tedy $a_n<(L+\varepsilon)b_n\ \forall n\ge n_0$. Zbytek se dokáže analogicky s důkazem předchozí části a s použitím věty 5.4 (vynecháváme prvních n_0-1 členů).

   Buď $L>0$ (vlastní nebo nevlastní), $\varepsilon>0$ libovolné takové, že $L-\varepsilon>0$. Pak $\exists n_0\ \forall n\ge n_0 : L-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<L+\varepsilon$, tedy $a_n>(L-\varepsilon)b_n\ \forall n\ge n_0$. Pokud $\sum b_n$ diverguje, diverguje dle věty 5.7(a) a 1. srovnávacího kritéria i $\sum a_n$.

4.
   - Z předpokladů: $\sqrt[n]{a_n}\le q$, tedy $a_n\le q^n$ — výraz na pravé straně nerovnosti je vyjádřením n-tého členu geometrické řady, která je konvergentní, takže podle 1. srovnávacího kritéria konverguje i $\sum a_n$.
     Nechť $\sqrt[n]{a_n}\ge 1$, tj. $a_n\ge 1\ \forall n\in\mathbf{N}$ a tedy podle věty 5.2 řada $\sum a_n$ diverguje.
   - Nechť $L<1,\varepsilon>0$ takové, že $L+\varepsilon<1$. Pak $\exists n_0\ \forall n\ge n_0 : L-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<L+\varepsilon=q<1$, tvrzení pak plyne z odmocninového kritéria a věty 5.4.
     Nechť $L>1,\varepsilon>0$ takové, že $L-\varepsilon>1$. Pak $\exists n_0\ \forall n\ge n_0 : L-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<L+\varepsilon$, tedy $a_n>1\ \forall n\in\mathbf{N}$ a dle věty 5.2 řada diverguje.

5.
   - $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q=\frac{q^{n+1}}{q^n}$, tj. výraz na pravé straně nerovnosti udává podíl dvou po sobě jdoucích členů geometrické řady (podle předpokladu s kvocientem $q<1$), takže podle 2. srovnávacího kritéria konverguje i $\sum a_n$.
     $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1\implies a_{n+1}\ge a_n\implies\{a_n\}$ je neklesající $\implies\lim_{n\to\infty}a_n\ne 0$ a podle věty 5.2 řada $\sum a_n$ diverguje.
   - Nechť $L<1,\varepsilon>0$ takové, že $L+\varepsilon<1$. Pak $\exists n_0\ \forall n\ge n_0 : L-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<L+\varepsilon=q<1$, tvrzení pak plyne z podílového kritéria a věty 5.4.
     Nechť $L>1,\varepsilon>0$ takové, že $L-\varepsilon>1$. Pak $\exists n_0\ \forall n\ge n_0 : L-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<L+\varepsilon=q<1$, tedy $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1\forall n\ge n_0$, zbytek se dokáže analogicky s důkazem pro nelimitní podílové kritérium.

6.
   - Z předpokladů plyne, že $\exists n_0\ \forall n\ge n_0 : n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})\ge q>1$, $q=1+r$, $r>0$. Tj. $n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})\ge 1+r$, tedy $n(a_n-a_{n+1})\ge(1+r)a_n\ \forall n\ge n_0$. Odtud $(n-1)a_n-n\,a_{n+1}\ge r\,a_n\ \forall n\ge n_0$. Platí tedy
$$\begin{array}{ccccl}
n_0+1 & : & n_0\,a_{n_0+1}-(n_0+1)a_{n_0+2} & \ge & r\,a_{n_0+1}\\
n_0+2 & : & (n_0+1)\,a_{n_0+2}-(n_0+2)a_{n_0+3} & \ge & r\,a_{n_0+2}\\
\vdots & & & & \\
n-1 & : & (n-2)a_{n-1}-(n-1)a_n & \ge & r\,a_{n-1}\\
n & : & (n-1)a_n-n\,a_{n+1} & \ge & r\,a_n\\
\sum & : & n_0\,a_{n_0+1}-n\,a_{n+1} & \ge & r(a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\ldots+a_n)\ =\ r(s_n-s_{n_0})
\end{array}$$
     Tedy $r(s_n-s_{n_0})\le n_0\,a_{n_0+1}-n\,a_{n+1}<n_0\,a_{n_0+1}$, tj. $s_n<s_{n_0}+\frac{n_0}{r}a_{n_0+1}=K$, tedy $\{s_n\}$ je shora ohraničená a tedy podle věty 5.10 konvergentní.
     V případě, že $n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})\le 1$, pak
$$1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{1}{n}\quad\implies\quad\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge\frac{n-1}{n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$
     Protože řada $\sum\frac{1}{n}$ je divergentní (viz příklad 5.1(2)), tvrzení plyne z 2. srovnávacího kritéria.

- Nechť $L > 1, \varepsilon > 0$ takové, že $L - \varepsilon > 1$. Pak $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) > L - \varepsilon = q > 1$ a tvrzení plyne z důkazu nelimitního Raabova kritéria.

  Nechť $L < 1, \varepsilon > 0$ takové, že $L + \varepsilon < 1$. Pak $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : L - \varepsilon < n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) < L + \varepsilon$, tedy $n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) < 1\ \forall n \geq n_0$, zbytek se dokáže analogicky jako pro nelimitní Raabovo kritérium.

7. Z předpokladů plyne, že konstruovaná funkce je R-integrabilní, neboť je monotónní. Označme

$$J_n = \int_1^n f(x)\,dx$$

Nechť $i \in \mathbf{N}$, na intervalu $\langle i, i+1\rangle$ platí

$$f(i+1) = a_{i+1} \leq f(x) \leq f(i) = a(i)$$

Integrací

$$\int_i^{i+1} f(i+1)\,dx \leq \int_i^{i+1} f(x)\,dx \leq \int_i^{i+1} f(i)\,dx$$

přičemž

$$\int_i^{i+1} f(i+1)\,dx = a_{i+1}, \qquad \int_i^{i+1} f(i)\,dx = a_i$$

a tedy z předchozí nerovnosti platí

$$a_{i+1} \leq \int_i^{i+1} f(x)\,dx \leq a_i$$

Platí tedy

$$\begin{array}{ccccc} a_2 & \leq & \int_1^2 f(x)\,dx & \leq & a_1 \\ a_3 & \leq & \int_2^3 f(x)\,dx & \leq & a_2 \\ & & \vdots & & \\ a_n & \leq & \int_{n-1}^n f(x)\,dx & \leq & a_{n-1} \end{array}$$

Sečtením dostáváme

$$s_n - a_1 \ \leq\ \int_1^n f(x)\,dx \ \leq\ s_{n-1}$$

Nyní musí nastat jedna z možností:

- $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konverguje, pak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} J_n$, tedy $\{s_n\}$ je shora ohraničená a konverguje podle věty 5.10.
- $\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverguje, tedy $\lim_{n\to\infty} J_n = \infty$, tedy $\{s_n\}$ není shora ohraničená a diverguje podle věty 5.10.

□

5.2 Absolutně a relativně konvergentní číselné řady, násobení řad

Věta 5.12

Pokud konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz: $\sum a_n$ konverguje $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0,\ m \in \mathbf{N} : |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+m}| < \varepsilon$ (viz Cauchy-Bolzanova podmínka — věta 5.3).

Potom pro každé $n \geq n_0$, $m \in \mathbf{N}$ platí

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+m}| < \varepsilon$$

a tedy podle Cauchy-Bolzanovy podmínky $\sum a_n$ konverguje. □

Definice 5.13

Řekneme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Řekneme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje relativně*, jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Příklad 5.2

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konverguje relativně.

Věta 5.14 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI ABSOLUTNÍ KONVERGENCE ŘAD

(a) Pokud $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak $|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

(b) Pokud $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně a $\{c_n\}$ je ohraničená posloupnost, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot a_n$ konverguje absolutně.

Důkaz:

(a) Označme

$\{s_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum a_n$

$\{s'_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum |a_n|$

Pak

$$|s_n| = |a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n| = s'_n$$

a při $n \to \infty$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| = |\lim_{n\to\infty} s_n| \leq \lim_{n\to\infty} s'_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

(b) Z předpokladu ohraničenosti $\{c_n\}$ existuje $K \in \mathbf{R}^+ : |c_n| \leq K\ \forall n \in \mathbf{N}$, dále $\sum a_n$ konverguje absolutně, tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0,\ m \in \mathbf{N} : |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+m}| < \frac{\varepsilon}{K}$ (podle Cauchy-Bolzanovy podmínky) a tedy $\forall n \geq n_0,\ m \in \mathbf{N}$:

$$|c_{n+1} \cdot a_{n+1} + \dots + c_{n+m} \cdot a_{n+m}| \leq |c_{n+1}| \cdot |a_{n+1}| + \dots + |c_{n+m}| \cdot |a_{n+m}| \leq K(|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+m}|) < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

A tedy podle Cauchy-Bolzanovy podmínky $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n \cdot a_n|$ konverguje.

□

Poznámka 5.15

Pro řešení otázky konvergence $\sum a_n$ lze tedy využít všechna kritéria uvedená ve větě 5.11 s tím, že budou aplikována na $|a_n|$ a výsledek bude interpretován jako absolutní konvergence $\sum a_n$ (viz věta 5.12).

Definice 5.16

Řekneme, že posloupnost $\{\nu_n\}$ přirozených čísel je *přeřazením* posloupnosti $\{n\}$, jestliže každé přirozené číslo se vyskytuje v posloupnosti $\{\nu_n\}$ právě jednou.

Řekneme, že pro konvergentní řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí komutativní zákon, jestliže každá řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\nu_n}$ vzniklá přeřazením $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ rovněž konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\nu_n}$.

Věta 5.17 Komutativní zákon pro absolutní konvergenci

Pro každou absolutně konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí komutativní zákon.

Důkaz: Řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, tedy $\sum |a_n|$ konverguje. Nechť $\sum a_{\nu_n}$ je řada vzniklá přeřazením z $\sum a_n$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Z předpokladu absolutní konvergence $\sum a_n : \exists n_0\ \forall n \geq n_0,\ m \in \mathbf{N} : |a_{n+1} + \ldots + |a_{n+m}| < \varepsilon$. Indexy $1, 2, \ldots, n_0$ se přitom musí v $\{\nu_n\}$ vyskytovat tak, že existuje $n_1 \in \mathbf{N}$ takové, že tyto indexy leží mezi čísly $\nu_1, \ldots, \nu_{n_1}$ (tj. $\{1, 2, \ldots, n_0\} \subseteq \{\nu_1, \ldots, \nu_{n_1}\}$). Označme

$\{s_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum a_n$

$\{s'_n\}$ — posloupnost částečných součtů $\sum |a_{\nu_n}|$

Potom pro každé $n > n_1$ platí

$$\begin{aligned} |s_n - s'_n| &= |a_1 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n - (a_{nu_1} + \ldots + a_{\nu_{n_1}} + a_{\nu_{n_1}+1} + \ldots + a_{\nu_n})| \leq \\ &\leq |a_{n_0+1}| + \ldots + |a_{n_0+m}| < \varepsilon \end{aligned}$$

a tedy $\lim_{n\to\infty}(s_n - s'_n) = 0$, tudíž

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{nu_n} = \lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} (s_n + (s'_n - s_n)) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} (s_n - s'_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

□

Věta 5.18 Vlastnosti relativně konvergentní řady

(a) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ relativně konvergentní, pak obě řady, sestavené z jejích kladných, resp. záporných členů určitě divergují.

(b) (Riemannova věta) Z libovolné relativně konvergentní řady lze vhodným přeřazením získat řadu

- konvergující k libovolnému předem danému číslu
- určitě divergující (k $+\infty$ nebo $-\infty$)
- oscilující (v daných mezích)

Důkaz:

(a) Označme

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ — řadu sestavenou z kladných členů $\sum a_n$

$-(q_1 + q_2 + \ldots + q_n + \ldots)$ — řadu sestavenou ze záporných členů $\sum a_n$

$\{s_n\}$ — posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$

$\{s_n(p)\}$ — posloupnost částečných součtů řady $\sum p_n$

$\{s_n(q)\}$ — posloupnost částečných součtů řady $\sum -q_n$

Platí: $s_n = s_n(p) - s_n(q)$. Protože existuje konečná $\lim_{n\to\infty} s_n$ (z předpokladu relativní konvergence), existuje i $\lim_{n\to\infty}\Big(s_n(p) - s_n(q)\Big)$ a je konečná.

Jsou-li nyní obě limity $\lim_{n\to\infty} s_n(p), \lim_{n\to\infty} s_n(q)$ konečné, pak je konečná i limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n(|a_n|) = \lim_{n\to\infty} s_n(p) + \lim_{n\to\infty} s_n(q)$$

kde $s_n(|a_n|)$ je posloupnost částečných součtů $\sum |a_n|$, tedy řada $\sum |a_n|$ konverguje, což je spor s předpokladem pouze relativní konvergence $\sum a_n$. Zbývá tedy pouze možnost, že obě limity jsou nevlastní.

(b) $\sum a_n$ konverguje relativně, platí tedy tvrzení (a) a současně nutná podmínka konvergence (věta 5.2). Odtud:

- Nechť $s \in \mathbf{R}$, např. $s > 0$. Pak existují čísla $n_1, n_2, \ldots \in \mathbf{R} : n_1 < n_3 < \ldots,\ n_2 < n_4 < \ldots$ tak, že platí

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1}}_{>s} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{n_2}}_{<s} + p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_3}}_{>s} - q_{n_2+1} - \ldots - q_{n_4}}_{<s} + \ldots$$

  přičemž tato řada, vzniklá přeřazením řady $\sum a_n$, konverguje k s.

- Sestavme nyní řadu divergující k $-\infty$. Za uvedených předpokladů existují čísla $n_1 < n_2 < \ldots \in \mathbf{R}$ tak, že platí

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{p_1 - q_1 - \ldots - q_{n_1}}_{<-1} + p_2 - q_{n_1+1} - \ldots - q_{n_2}}_{<-2} + p_3 - q_{n_2+1} - \ldots - q_{n_3}}_{<-3} + \ldots$$

  a získali jsme tak řadu, která je přeřazením řady $\sum a_n$ a diverguje k $-\infty$.

- Nechť $A, B \in \mathbf{R}, A < B$. Pak opět existují čísla $n_1, n_2, \ldots \in \mathbf{R} : n_1 < n_3 < \ldots,\ n_2 < n_4 < \ldots$ tak, že platí

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1}}_{<B} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{n_2}}_{>A} + p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_3}}_{<B} - q_{n_2+1} - \ldots - q_{n_4}}_{>A} + \ldots$$

  takže jsme získali řadu, vzniklou přeřazením z $\sum a_n$ a oscilující v zadaných mezích.

$\square$

Definice 5.19

Řada s pravidelně se střídajícími znaménky, tj. řada tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$$

se nazývá *alternující řada.*

Věta 5.20 Leibnizovo kritérium

Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje, právě když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Důkaz: Implikace „$\Longrightarrow$" je přímo nutná podmínka konvergence — věta 5.2. Zbývá tedy dokázat implikaci opačnou. Uvažujme následující řady a jim příslušné posloupnosti částečných součtů:

$$\begin{array}{ll}
a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + \ldots & \{s_n\} \\
(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + \ldots & \{s_{2n}\} \\
a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1} - \ldots & \{s_{2n+1}\}
\end{array}$$

Platí:

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \ldots \geq s_{2n+1} \geq \ldots$$

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \implies s_{2n+1} > s_{2n}$$

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq s_{2n} < s_{2n+1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1$$

Odtud $\{s_{2n}\}$ je neklesající, shora ohraničená (hodnotou s_1), tedy $\lim_{n\to\infty} s_{2n}$ existuje. Analogicky $\{s_{2n+1}\}$ je nerostoucí, zdola ohraničená (hodnotou s_2), tedy i $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$ existuje. Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\to 0}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$

tedy $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$

. □

Příklad 5.3

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konverguje relativně.

Věta 5.21 SPECIÁLNÍ KRITÉRIA KONVERGENCE

(a) (DIRICHLETOVO KRITÉRIUM) Nechť $\{c_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ a nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má ohraničené částečné součty (tj. existuje $K > 0$ tak, že $|s_n| = |a_1 + \ldots + a_n| \leq K \; \forall n \in \mathbf{N}$). Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\, a_n$ konverguje.

(b) (ABELOVO KRITÉRIUM) Nechť $\{c_n\}$ je monotónní a ohraničená posloupnost a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\, a_n$ konverguje.

Důkaz: Viz literatura. □

Poznámka 5.22
Volbou $a_n = (-1)^{n-1}$ v Dirichletově kritériu dostáváme Leibnizovo kritérium.

Definice 5.23
Mějme řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Jejich součinem je řada

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i\, b_j$$

a zavádíme

- součin po vedlejší diagonále (*Cauchyův součin*)

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = a_1\, b_1 + a_2\, b_1 + a_1\, b_2 + a_3\, b_1 + a_2\, b_2 + a_1\, b_3 + a_1\, b_4 + a_2\, b_3 + a_3\, b_2 + a_4\, b_1 + \ldots$$

- součin do čtverce

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = a_1\, b_1 + a_2\, b_1 + a_2\, b_2 + a_2\, b_1 + a_3\, b_1 + a_3\, b_2 + a_3\, b_3 + a_3\, b_2 + a_3\, b_1 + \ldots$$

Věta 5.24 VLASTNOSTI SOUČINU ČÍSELNÝCH ŘAD

(a) Nechť řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

konverguje absolutně a její součet je roven $s \cdot t$.

(b) (Mertenzova věta) Nechť řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní, alespoň jedna z nich absolutně, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$. Pak Cauchyův součin $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ těchto řad konverguje a je roven $s \cdot t$.

(c) (Abelova věta) Nechť řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní, Cauchyův součin $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ těchto řad konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = s \cdot t$

Důkaz:

(a) Označme $\sum |a_n| = S$, $\sum |b_n| = T$. Odhadněme $|p_1| + \ldots + |p_n|$: každé p_i je vyjádřeno jako $|p_i| = |a_j\, b_k|$ a přitom indexů j, k pro vyjádření $p_1, \ldots, p_n$ je pouze konečný počet. Z toho plyne, že $\exists n_1, n_2 : \forall j \geq n_1\ \forall k \geq n_2$:

$$|p_1| + \ldots + |p_n| \leq (|a_1| + \ldots + |a_n|)\,(|b_1| + \ldots + |b_n|) \leq S \cdot T$$

Tedy $\sum |p_n|$ má ohraničené částečné součty $\Longrightarrow$ $\sum |p_n|$ konverguje (podle věty 5.10) $\Longrightarrow$ $\sum p_n$ konverguje absolutně a lze tedy použít komutativní zákon (věta 5.17). Vezměme v $\sum p_n = (\sum a_n)\,(\sum b_n)$ například součin do čtverce a označme

s_n — posloupnost částečných součtů $\sum a_n$
t_n — posloupnost částečných součtů $\sum b_n$
ϱ_n — posloupnost částečných součtů $\sum p_n$

Potom

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= a_1\, b_1 \ = \ s_1\, t_1 \\
\varrho_2 &= a_1\, b_1 + (a_1\, b_2 + a_2\, b_2 + a_2\, b_1) \ = \ (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \ = \ s_2\, t_2 \\
&\ \vdots \\
\varrho_n &= \ \ldots \ = \ s_n\, t_n \quad \forall n \in \mathbf{N}
\end{aligned}$$

(to dokážeme matematickou indukcí) a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \varrho_n = \lim_{n\to\infty} s_n\, t_n = \lim_{n\to\infty} s_n \cdot \lim_{n\to\infty} t_n = s \cdot t$$

Důkaz tvrzení (b), (c) viz [2]. □

Poznámka 5.25

Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_n + R_n, \qquad \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Součet řady tedy můžeme aproximovat

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx s_n \iff |R_n| < \varepsilon$$

kde ε je přesnost vyjádření $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s použitím s_n.

Věta 5.26 O chování zbytku $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(a) Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s nezápornými členy a nechť $\forall n \in \mathbf{N} : |a_n| \leq b_n$. Označíme-li

r_n — n-tý zbytek řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

R_n — n-tý zbytek řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

pak platí

$$|r_n| \leq R_n$$

(b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada s kladnými členy a nechť

$$\forall n \in \mathbf{N} : \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$$

Pak

$$|r_n| \leq |a_n| \frac{q}{1-q}$$

(c) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a $\forall n \in \mathbf{N} : a_n = f(n)$, kde f je nezáporná a nerostoucí funkce definovaná na $\langle 1, \infty)$. Pak

$$r_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\, dx$$

(d) Nechť r_n je n-tý zbytek řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, kde $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak

$$|r_n| < a_{n+1}, \quad \operatorname{sgn}\, r_n = (-1)^n$$

Důkaz:

(a)

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \\ R_n &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n - t_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n+k} \end{aligned}$$

Označme

s'_k — posloupnost částečných součtů n-tého zbytku r_n

t'_k — posloupnost částečných součtů n-tého zbytku R_n

Platí

$$|s'_k| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+k}| \leq b_{n+1} + \ldots + b_{n+k} = t'_k$$

Při $k \to \infty : |r_n| \leq R_n$.

(b) Platí

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leq |a_n|\, q \\ |a_{n+2}| &\leq |a_{n+1}|\, q \leq |a_n|\, q^2 \\ &\vdots \\ |a_{n+k}| &\leq |a_n|\, q^k \end{aligned}$$

Odtud

$$|r_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots \leq |a_n| \cdot (q + q^2 + \ldots) = |a_n| \frac{q}{q-1}$$

(c) Připomeňme, že s'_k značí posloupnost částečných součtů n-tého zbytku $r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$.

Platí

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad |s'_k| \leq \ldots \leq \int_n^{n+k} f(x)\,dx \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

a v limitě pro $k \to \infty$:

$$|r_n| \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

(d) Důkaz ponecháváme snaživému čtenáři k procvičení.

□

5.3 Posloupnosti a řady funkcí

Definice 5.27

Uvažujme posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (zapisujeme také úsporněji jako $\{f_n(x)\}$ nebo $\{f_n\}$), kde $\forall n f_n$ je funkce definovaná na intervalu J ($J = \cap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Dom} f_n$).

Množinu všech $x \in J$, v nichž $\{f_n\}$ konverguje (jakožto číselná posloupnost, nikoliv řada) nazveme *oborem bodové konvergence* posloupnosti $\{f_n\}$ a označíme D.

Jestliže tedy $x_0 \in D$, pak existuje $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$, označíme ji $f(x_0)$, tedy pro $x \in D$ označíme

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

případně píšeme $f_n \to f$ v D (bodově).

Definice 5.28

Přiřaďme řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v J posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ v J. Pokud $\{s_n\}$ v J (bodově) konverguje k s, říkáme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje (bodově)* k s v oboru konvergence D.

Poznámka 5.29

1) Pro $x \in D$ zápisem $f_n(x) \to f(x)$ říkáme

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon, x)\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

2) Obor bodové konvergence lze konstruovat s využitím všech kritérií konvergence číselných řad.

Příklad 5.4

Zjistěte obor konvergence D pro zadané řady funkcí:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$

Pro každé x je to geometrická řada s kvocientem $q = \ln x$ a tedy konverguje, právě když $|\ln x| < 1$, tj.

$$-1 < \ln x < 1 \Longrightarrow e^{-1} < x < e \Longrightarrow D = (1/e, e)$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

Platí

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

a protože řada $\sum 1/n^2$ konverguje, podle 1. srovnávacího kritéria konverguje i $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ pro každé $x \in \mathbf{R}$ (dokonce konverguje absolutně (bodově) v $\mathbf{R}$).

Definice 5.30

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ *konverguje stejnoměrně* na intervalu J k funkci f, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

a budeme psát $f_n \rightrightarrows f$ na J (v literatuře se lze setkat i s jinými značeními, např $f_n \xrightarrow{\text{st.}} f$ a podobně).

Jestliže posloupnost částečných součtů s_n řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje k s na J, říkáme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje k součtu s na J a píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = s$ na J stejnoměrně ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ na J stejnoměrně).

Poznámka 5.31

Pokud $f_n \rightrightarrows f$, pak $f_n \longrightarrow f$ (bodově) na J, obrácená implikace ale neplatí.

Věta 5.32 CAUCHY-BOLZANOVO KRITÉRIUM

(a) $f_n \rightrightarrows f$ na $J \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall p \in \mathbf{N} \ \forall x \in J : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na J, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall p \in \mathbf{N} \ \forall x \in J : |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

Důkaz:

(a) „$\Longrightarrow$": Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na J a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak k číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje číslo n_0 tak, že $\forall n \geq n_0 \ \forall x \in J$: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Odtud $\forall n \geq n_0 \ \forall p \in \mathbf{N}$, $\forall x \in J$:

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| = |(f_n(x) - f(x)) - (f_{n+p}(x) - f(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

„$\Longleftarrow$": Nechť $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall p \in \mathbf{N} \ \forall x \in J : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$. Buď $x_0 \in J$ libovolné, pak $\{f_n(x_0)\}$ je Cauchyovská, tedy i konvergentní, tedy existuje $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ a vzhledem k libovolnosti $x_0 \in J$ existuje $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, tj. $f_n \to f$ na J (bodově). Dokážeme, že f je „stejnoměrnou limitou" f_n na J:

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall p \in \mathbf{N} \ \forall x \in J : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a volíme-li n pevně a při $p \to \infty : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, tj. podle definice $f_n \rightrightarrows f$ na J.

(b) $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na J k $s \iff s_n \rightrightarrows s$ na $J \overset{\text{podle (a)}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbf{N}\ \forall x \in J$: $|s_n(x) - s_{n+p}(x)| < \varepsilon$, tj.

$$|(f_1(x) + \ldots + f_n(x)) - (f_1(x) + \ldots + f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x))| = |f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

□

Věta 5.33 Pravidla pro počítání se stejnoměrně konvergentními řadami

(a) Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(1)}(x), \ldots, \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(n)}(x)$ jsou stejnoměrně konvergentní řady na J, $c_1, \ldots, c_k$ jsou libovolná reálná čísla (konstanty) a položme

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \forall f_n^{(i)}(x)$$

Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ stejnoměrně konverguje na J.

(b) Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na J, g je funkce ohraničená na J. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(x)\, f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na J.

Důkaz:

(a) Předpokládejme $c_1, \ldots, c_k \neq 0$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak ke každému číslu $\frac{\varepsilon}{k \cdot |c_i|} > 0\ \exists n_i : \forall n \geq n_i\ \forall p \in \mathbf{N}\ \forall x \in J$:

$$|f_{n+1}^{(i)}(x) + \ldots + f_{n+p}^{(i)}(x)| < \frac{\varepsilon}{k \cdot |c_i|}$$

Buď nyní $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Pak $\forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbf{N}\ \forall x \in J$:

$$\begin{aligned}
|F_{n+1}(x) + \ldots + F_{n+p}(x)| &= |\underbrace{c_1\, f_{n+1}^{(1)}(x) + \ldots + c_k\, f_{n+1}^{(k)}(x)}_{F_{n+1}(x)} + ::: + |\underbrace{c_1\, f_{n+p}^{(1)}(x) + \ldots + c_k\, f_{n+p}^{(k)}(x)}_{F_{n+p}(x)}| = \\
&= |c_1(f_{n+1}^{(1)}(x) + \ldots + f_{n+p}^{(1)}(x)) + ::: + c_k(f_{n+1}^{(k)}(x) + \ldots + c_k\, f_{n+p}^{(k)}(x))| \leq \\
&\leq |c_1| \cdot |f_{n+1}^{(1)}(x) + \ldots + f_{n+p}^{(1)}(x)| + ::: + |c_k| \cdot |f_{n+1}^{(k)}(x) + \ldots + c_k\, f_{n+p}^{(k)}(x)| < \\
&< |c_1| \frac{\varepsilon}{k \cdot |c_1|} + \ldots + |c_k| \frac{\varepsilon}{k \cdot |c_k|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ostatní z věty 5.32 (Cauchy-Bolzanovo kritérium).

(b) Z předpokladů: $\exists K > 0 : |g(x)| \leq K\ \forall x \in J$, zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné, k $\frac{\varepsilon}{k} > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbf{N}\ \forall x \in J$: $|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{k}$. Odtud

$$|g(x)\, f_{n+1}(x) + \ldots + g(x)\, f_{n+p}(x)| \leq |g(x)| \cdot |f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq k\, \frac{\varepsilon}{k} = k$$

ostatní z věty 5.32.

□

Věta 5.34 Weierstrassovo kritérium

Nechť $\forall n \in \mathbf{N}\ \forall x \in J : |f_n(x)| \leq a_n$ a nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na J.

Důkaz: Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak $\exists n_0 : \forall n \geq n_0\ \forall m \in \mathbf{N} : |a_{n+1} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$. Odtud a z předpokladů věty:

$$\forall n \geq n_0\ \forall m \in \mathbf{N}\ \forall x \in J : |f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq a_{n+1} + \ldots + a_{n+m} \leq |a_{n+1} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

ostatní z věty 5.32. □

Věta 5.35 Dirichletovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ má na J stejně ohraničené částečné součty (tj. $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbf{N}\ \forall x \in J : |s_n(x)| = |f_1(x) + \ldots + f_n(x)| \leq M$) a nechť $\{\alpha_n(x)\}$ je posloupnost funkcí nezáporných na J a taková, že $\forall x \in J : \alpha_1(x) \geq \alpha_2(x) \geq \ldots \geq \alpha_n(x) \geq \ldots$, která na J stejnoměrně konverguje k nule (tj. $\alpha_n(x) \rightrightarrows 0$ na J).

Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\, f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na J.

Důkaz: Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. K $\frac{\varepsilon}{2M} > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0,\ x \in J : \alpha_n(x) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Odtud $\forall n \geq n_0,\ m \in \mathbf{N},\ x \in J :$

$$|\alpha_{n+1}(x)\, f_{n+1}(x) + \ldots + \alpha_{n+m}(x)\, f_{n+m}(x)| = |\alpha_{n+1}(x)\,(s_{n+1}(x) - s_n(x)) + \ldots + \alpha_{n+m}(x)\,(s_{n+m}(x) - s_{n+m-1}(x))| \leq$$

$$\leq | - \alpha_{n+1}(x)\, s_n(x) + (\alpha_{n+1}(x) - \alpha_{n+2}(x))\, s_{n+1}(x) + \ldots + (\alpha_{n+m-1}(x) - \alpha_{n+m}(x))\, s_{n+m-1}(x) + \alpha_{n+m}(x)\, s_{n+m}(x)| \leq$$

$$\leq \alpha_{n+1}(x)\, M + (\alpha_{n+1}(x) - \alpha_{n+2}(x))\, M + \ldots + (\alpha_{n+m-1}(x) - \alpha_{n+m}(x))\, M + \alpha_{n+m}(x)\, M =$$

$$= M(\underbrace{\alpha_{n+1}(x) + \alpha_{n+1}(x)}_{2}\underbrace{-\alpha_{n+2}(x) + \alpha_{n+2}(x)}_{0} - \ldots \underbrace{-\alpha_{n+m}(x) + \alpha_{n+m}(x)}_{0}) = 2\alpha_{n+1}(x)\, M < 2M\, \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

$\square$

Příklad 5.5

Zjistěte obor stejnoměrné konvergence zadaných řad funkcí.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$

Platí

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

a protože řada $\sum 1/n^2$ konverguje, podle Weierstrassova kritéria zadaná řada stejnoměrně konverguje v $\mathbf{R}$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$

Rozlišíme dva případy:

- $x \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{1+nx} \geq 1 \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$ konverguje
- $x < 0$: pro dostatečně velké n nemá smysl $(1 + nx < 0)$.

Zadaná řada tedy podle Weierstrassova kritéria konverguje v $\mathbf{R}_0^+$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{1+nx}$

Tato řada konverguje stejnoměrně na $\langle \delta, 2\pi - \delta \rangle$, kde $\delta \in (0, \pi)$:

V Dirichletově kritériu volíme:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sin nx \\ \alpha_n(x) &= \frac{1}{1+nx} \end{aligned}$$

a přesvědčíme se, že jsou splněny požadované předpoklady:

$$|s_n(x) = |\sin x + \ldots + \sin nx| \leq \frac{1}{|\sin x/2|} \leq \frac{1}{|\sin \delta/2|}$$

tedy $\sum f_n$ má na uvedeném intervalu stejně ohraničené částečné součty, navíc na tomto intervalu platí

$$\alpha_1(x) \geq \alpha_2(x) \geq \ldots \geq \alpha_n(x) \geq \ldots$$

$$\alpha_n(x) \leq \frac{1}{1+n\delta} \rightrightarrows 0$$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$

Také tato řada konverguje stejnoměrně na $\langle \delta, 2\pi - \delta \rangle$, $\delta \in (0, \pi)$ podle Dirichletova kritéria, ve kterém volíme

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sin nx \\ \alpha_n(x) &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Věta 5.36 Vlastnosti stejnoměrné konvergence posloupností a řad

(a)
- Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na J a $\forall n \in \mathbf{N}$ je f_n spojitá v bodě $x_0 \in J$.
  Potom f je spojitá v bodě x_0.
- Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ na J stejnoměrně a $\forall n \in \mathbf{N}$ je f_n spojitá v bodě $x_0 \in J$.
  Potom s je spojitá v bodě x_0.

(b)
- Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí spojitých na $\langle a, b \rangle$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a, b \rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \qquad \left(\text{tj. } \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

- Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ na $\langle a, b \rangle$ stejnoměrně a $\forall n \in \mathbf{N}$ je f_n spojitá na $\langle a, b \rangle$. Potom

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \qquad \left(\text{tj. } \int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

(c) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ na J stejnoměrně a $\forall n \in \mathbf{N}$ je f_n spojitá na $\langle a, b \rangle$, bod $x_0 \in \langle a, b \rangle$ je libovolný. Potom

$$\int_{x_0}^{x} s(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

a řada na pravé straně stejnoměrně konverguje na $\langle a, b \rangle$.

(d) Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ na $\langle a, b \rangle$ (stejnoměrně), $\forall n \in \mathbf{N}$ má f_n spojitou první derivaci na $\langle a, b \rangle$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na $\langle a, b \rangle$.

Pak s má na $\langle a, b \rangle$ spojitou první derivaci a platí

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

Důkaz:

(a)
- brr

(b)
- brrrr

□

Část III
Diferenciální počet funkcí více proměnných

6 Úvod

Označení Pod označením R^n budeme v závislosti na kontextu rozumět

- metrický prostor n-tic reálných čísel $x \in R^n$ s metrikou

$$\varrho_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$$

  kde $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$.

  Speciálně:

  $p = 2$ ... Euklidovská metrika,
  $p = 1$ ... $\varrho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$,
  $p = \infty$ ... $\varrho_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$.

- normovaný lineární prostor nad tělesem $\mathbf{R}$ s normou:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

- prostor se skalárním (vnitřním) součinem:

$$(x,y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

  Z toho plynou následující vztahy:

  - $\star$ $\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x}$
  - $\star$ $\varrho_p(x,y) = \|x - y\|_p$

  V R^n lze definovat ortonormální bázi

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$$

  (tedy jednotkové vektory prostoru R^n), tj. můžeme R^n chápat jako lineární vektorový prostor.

Z teorie množin si jistě pamatujeme vlastnosti zobrazení metrických prostorů $f:\ (M_1, \varrho_1) \longrightarrow (M_2, \varrho_2)$ a pojmy *linearita*, *spojitost* a další. Položíme-li $M_1 = R^n$ a $M_2 = R^1$, dostáváme[4] $f:\ R^n \longrightarrow R$.

Ze základního kursu matematické analýzy si také jistě vzpomínáme na pojmy *okolí*, *limita* a *spojitost* funkce $f:\ R \longrightarrow R$. Pro naše nynější potřeby není nic snazšího, než pojmy rozšířit na náš případ funkcí více proměnných. Tedy

- limita $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L$, právě když pro libovolné okolí $O(L)$ existuje $\delta(x_0)$ takové, že pro $\forall x \in O^*(x_0)$ platí $f(x) \in O(L)$.
- funkce f je spojitá v bodě x_0, právě když $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Z těchto definic plyne, že charakteristiky limity a spojitosti a pravidla pro počítání s limitami a spojitými funkcemi (mimo inverzní a složené funkce[5]) lze převzít od funkcí jedné proměnné.

[4] **Označení** R bude pro nás znamenat totéž jako R^1.
[5] Inverzní a složené funkce nelze jaksi „napasovat" na typ funkcí $f:\ R^n \longrightarrow R$. Toto lze učinit až u zobrazení (viz [7]).

Poznámky

1. Lze pracovat i s nevlastními limitami v nevlastních bodech.
2. Lze studovat i podmnožiny poruch spojitosti funkcí více proměnných.
3. Máme-li funkci $f:\ R^n \longrightarrow R$, pak budeme značit:
   - D(f), Def(f), Dom(f) a $\Re(f)$ definiční obor funkce f.
   - I(f), Im(f), Img(f) a $\Im(f)$ obor hodnot funkce f.
   - $\mathrm{G}(f) = \mathrm{Gr}(f) = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \Re(f),\ x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}$ je graf funkce f.

   Na tomto místě považuji za vhodné vyslovit čtenáři omluvu za to, že tato označení nejsou v tomto textu jednotná, což je způsobeno také značnou nejednotností v literatuře. Sjednotit značení v matematické analýze znamená srovnatelně obtížný problém, jako přepsat všechny provozované cobolovské programy do nějakého modernějšího programovacího jazyka.
4.
   - Je-li $M \subset R^n$ kompaktní[6] a f je spojitá na M, pak f je na M ohraničená (1. Weierstrassova věta).
   - Je-li $M \subset R^n$ kompaktní a f je spojitá na M, pak $f(M)$ obsahuje nejmenší a největší prvek (2. Weierstrassova věta).
   - Je-li $M \subset R^n$ kompaktní a souvislá a f je spojitá na M, pak $f(M)$ je souvislá kompaktní množina.
   - Je-li $M \subset R^n$ kompaktní a f spojitá na M, pak f je stejnoměrně spojitá (Heine – Cantorova věta).

7 Derivace 1. řádu

7.1 Parciální a směrová derivace

Definice 7.1

Buď funkce f n reálných proměnných, $x \in \Re(f)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ a označme $\varphi(t) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Má-li φ derivaci v bodě x_i, pak ji nazýváme *první parciální derivací* funkce f podle i-té proměnné v bodě x a značíme ji

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \qquad f'_{x_i}(x) \qquad f'_i(x)$$

Poznámky

1. $f'_i(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$
2. Je-li $M \subseteq \Re(f)$ množina všech x, v nichž existuje $f'_i(x)$, pak $f'_i:\ M \longrightarrow R$ je opět funkce n proměnných s $\Re(f'_i) = M$.
3. Stejně jako derivace funkce jedné proměnné je geometrickou reprezentací parciální derivace směrnicí tečny grafu funkce f v rovině rovnoběžné s rovinou $(x_i x_{n+1})$.
4. Definice a zavedení parciální derivace f podle i-té proměnné určuje způsob výpočtů i pravidla pro počítaní parciálních derivací (mimo inverzní a složené funkce).
5. Pokud existuje $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, pak to ještě neznamená, že existuje $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, kde $i \neq j$.
6. Pokud existuje $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, pak to ještě neznamená, že f je v bodě x spojitá. Mějme například funkci f definovanou

   $$f(x, y) = \begin{cases} 1 & xy = 0 \\ 0 & xy \neq 0 \end{cases}$$

   Zřejmě existují derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$ a přitom f není spojitá v bodě $(0,0)$ (f je souřadný kříž roviny (xy) z ní vytržený).

[6] Kompaktní množina je ohraničená a uzavřená.

Věta 7.2 O STŘEDNÍ HODNOTĚ

Nechť $f:\ R^n \longrightarrow R$ je funkce, která má všechny první parciální derivace na nějakém n-dimenzionálním intervalu $\mathcal{I} \subseteq \Re(f)$, $x, y \in \mathcal{I}$ ($x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$). Pak existují konstanty $\Theta_1, \ldots, \Theta_n \in (0,1)$ takové, že

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(\xi_i)(x_i - y_i),$$

kde $\xi_i = (y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i + \Theta_i(y_i - x_i), x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Důkaz:

$$\begin{aligned}
f(y) - f(x) &= \underbrace{f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}_{[\varphi_1(t)]_{x_1}^{y_1}} + \underbrace{f(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n)}_{[\varphi_2(t)]_{x_2}^{y_2}} + \cdots \\
&\quad \cdots + \underbrace{f(y_1, \ldots, y_n) - f(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n)}_{[\varphi_n(t)]_{x_n}^{y_n}} = \\
&= \varphi_1'(\xi_1)(y_1 - x_1) + \varphi_2'(\xi_2)(y_2 - x_2) + \cdots + \varphi_n'(\xi_n)(y_n - x_n),
\end{aligned}$$

protože všechny funkce φ_i splňují podmínku Lagrangeovy věty z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné. □

Věta 7.3 O SPOJITOSTI A PARCIÁLNÍ DERIVACI

Nechť má f ohraničené všechny parciální derivace 1. řádu na otevřené množině $M \subset \Re(f)$. Pak f je spojitá na M.

Důkaz: Nechť $x \in M$ libovolné. Protože M je otevřená, pak pro $\delta > 0$ existuje okolí $O_\delta(x) \subseteq M$. Bez újmy na obecnosti přitom můžeme předpokládat, že δ-okolí bodu x je n-dimenzionální otevřený interval (tj. $O_\delta(x)$ interpretujeme v metrice ϱ_∞).

Buď $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(x_{k1}, \ldots, x_{kn})\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z množiny $\Re(f)$ taková, že $x_k \longrightarrow x$. Zřejmě existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $k \geq k_0$ je $x_k \in O_\delta(x)$. Podle věty 7.2 pro tato $k \geq k_0$ platí, že

$$f(x_k) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(\xi_i)(x_{ki} - x_i).$$

Z předpokladu ohraničenosti parciálních derivací platí, že existuje $m \geq 0$ takové, že $|f_i'(x)| \leq m$ pro $\forall x \in M$ a $\forall i = 1, \ldots, n$. Tedy:

$$|f(x_k) - f(x)| \leq m \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - x_i).$$

Vzhledem k tomu, že $x_k \longrightarrow x$, víme, že $x_{ki} \longrightarrow x_i$. Tedy platí implikace $x_k \longrightarrow x \Longrightarrow f(x_k) \longrightarrow f(x)$ a podle Heineho věty to znamená, že f je spojitá v bodě x. □

Věta 7.4

Nechť má f na otevřené souvislé množině $M \subseteq \Re(f)$ všechny první parciální derivace nulové. Pak f je na M konstantní.

Důkaz:

1. Je-li M otevřený interval, pak podle věty 7.2 platí $f(x) = f(y)$ pro $\forall x, y \in M$. Z toho plyne, že

   $$f(x) - f(y) = \sum \underbrace{f_{x_i}'(\xi_i)}_{0}(x_i - y_i) = 0$$

   pro $\forall x, y \in M$ a tedy je f konstantní na M.

2. Buď M libovolná otevřená souvislá množina a $x, y \in M$ libovolné. Pak existuje konečný řetězec otevřených n-dimenzionálních intervalů v M spojující x a y, např. $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_m$. Zřejmě lze $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_m$ konstruovat tak, že $x \in \mathcal{I}_1$ a $y \in \mathcal{I}_m$ a $\mathcal{I}_i \cap \mathcal{I}_{i+1} \neq \emptyset$ pro $\forall i = 1, \ldots, m-1$. Podle první části důkazu je f konstantní na všech $\mathcal{I}_i$, tj. $f = c_i$ v intervalu $\mathcal{I}_i$. Protože však současně $\mathcal{I}_i \cap \mathcal{I}_{i+1} \neq \emptyset$, máme, že $c_1 = c_2 = \cdots = c_m$, tj. $f = c$ ($c = c_i\ \forall i$) na množině M.

□

Důsledek 7.5

Jestliže f a g mají na otevřené souvislé množině $M \subseteq \Re(f,g)$[7] totožné parciální derivace, pak existuje $c \in R$ tak, že $f(x) = g(x) + c$ pro $\forall x \in M$.

Důkaz: Položíme $h = f - g$ a ostatní už plyne z věty 7.4. □

Definice 7.6

Nechť $f: R^n \longrightarrow R$, $x \in \Re(f)$, $\vec{u} \in V_n$ a $\varphi(t) = f(x+t\vec{u})$. Má-li funkce φ v bodě 0 první derivaci, pak ji nazýváme *první derivace* funkce f v bodě x *ve směru* $\vec{u}$. Značíme ji

$$f'_{\vec{u}}(x) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x)$$

Poznámky

1. $f'_{\vec{u}}(x) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(x+t\vec{u})-f(x)}{t}$
2. Je-li $\vec{u} = \vec{e}_i$, pak $f'_{\vec{u}}(x) = f'_{x_i}(x)$.
3. Protože $f'_{\vec{u}}(x)$ je totožná s obyčejnou derivací funkce $\varphi(t) = f(x+t\vec{u})$, pak pro směrovou derivaci platí stejná pravidla pro její výpočet jako v případě obyčejné (i parciální) derivace.
4. Má-li funkce f konečnou (ohraničenou) směrovou derivaci $f'_{\vec{u}}(x)$, pak f je v bodě x spojitá ve směru vektoru $\vec{u}$ (tj. je spojitá na přímce procházející bodem x ve směru $\vec{u}$).

Příklad 7.1

Vypočtěte $f'_{\vec{u}}(1,1)$ pro $\vec{u} = (2,1)$, je-li

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Řešení:

$$\varphi(t) = f(x+t\vec{u}) = \frac{(x+2t)^2-(y+t)^2}{(x+2t)^2+(y+t)^2}$$

Dále výpočtem $\varphi'(t)$ a $\varphi'(0)$ (který ponecháváme laskavému čtenáři) získáme výsledek $\varphi'(0) = f'_{\vec{u}}(1,1) = 1$.

Příklad 7.2

Mějme funkci

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^k$$

Vypočtěmež $f'_{\vec{u}}(1,\ldots,1)$, je-li $\vec{u} = (1,3,\ldots,2n-1)$.

Výpočet opět ponecháme na čtenáři. Pro kontrolu uvádíme:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=1}^{n} [1+t(2k-1)]^k \\ \varphi'(0) &= \sum_{k=1}^{n} k(2k-1) \end{aligned}$$

Věta 7.7 O STŘEDNÍ HODNOTĚ

Nechť funkce f má ve všech bodech úsečky $\{x+t\vec{u} \mid t \in \langle 0,t_0\rangle\}$ derivace ve směru vektoru $\vec{u}$ (tj. existuje v těchto bodech směrová derivace). Pak existuje číslo $\Theta \in (0,1)$ takové, že

$$f(x+t_0\vec{u}) - f(x_0) = t_0 \cdot f'_{\vec{u}}(x+\Theta t_0\vec{u}).$$

Důkaz: Důkaz je zcela analogický s důkazem věty 7.2 pro funkci $\varphi(t) = f(x+t\vec{u})$. □

[7] Symbolem $\Re(f,g)$ rozumíme společný definiční obor funkcí f a g, tj. $\Re(f,g) = \Re(f) \cap \Re(g)$.

Věta 7.8
Nechť $x \in \Re(f)$ a $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$. Pak

(a) Existuje-li $f'_{\vec{u}}(x)$, pak $\forall c \in R\ \exists f'_{c\vec{u}}(x)$ a platí:

$$f'_{c\vec{u}}(x) = c \cdot f'_{\vec{u}}(x).$$

(b) Existuje-li $f'_{\vec{u}}$ na nějakém okolí $O(x)$ a je v bodě x spojitá a existuje-li $f'_{\vec{v}}(x)$, pak existuje $f'_{\vec{u}+\vec{v}}(x)$ a platí:

$$f'_{\vec{u}+\vec{v}}(x) = f'_{\vec{u}}(x) + f'_{\vec{v}}(x).$$

Důkaz:

(a) Nechť $c \neq 0$. Označme $\psi(t) = f(x + tc\vec{u})$. Pak

$$\begin{aligned} f'_{c\vec{u}} = \psi'(0) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x + tc\vec{u}) - f(x)}{t} = \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} c \frac{f(x + tc\vec{u}) - f(x)}{ct} = \left| \begin{array}{c} h = ct \\ h \longrightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{h \longrightarrow 0} c \frac{f(x + h\vec{u}) - f(x)}{h} = \\ &= c \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x + h\vec{u}) - f(x)}{h} = c f'_{\vec{u}}(x). \end{aligned}$$

Nechť $c = 0$. Označme $\psi(t) = f(x + tc\vec{u}) = f(x)$. Pak

$$\begin{aligned} f'_{0\vec{u}}(x) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(x)}{t} = 0 \\ c f'_{\vec{u}}(x) &= 0 f'_{\vec{u}}(x) = 0 \end{aligned}$$

(b) Označme $\varphi(t) = f(x + t(\vec{u} + \vec{v}))$. Pak

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{1}{t} \left[f(x + t(\vec{u} + \vec{v})) - f(x + t\vec{v}) + f(x + t\vec{v}) - f(x) \right]$$

a podle věty o střední hodnotě 7.7 existuje $\Theta \in (0, 1)$ a máme tedy

$$f(x + t(\vec{u} + \vec{v})) - f(x + t\vec{v}) = t f'_{\vec{u}}(x + t\vec{v} + \Theta t\vec{u})$$

a tedy

$$\begin{aligned} f'_{\vec{u}+\vec{v}}(x) &= \varphi'(0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \\ &= \frac{1}{t} \left[t f'_{\vec{u}}(x + t\vec{v} + \Theta t\vec{u}) + f(x + t\vec{v}) - f(x) \right] = \\ &= f'_{\vec{u}}(x) + \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \left[f(x + t\vec{v}) - f(x) \right] = f'_{\vec{u}}(x) + f'_{\vec{v}}(x). \end{aligned}$$

□

7.2 Diferenciály

Definice 7.9 Gâteauxův diferenciál
Mějme f funkci n proměnných a $x \in \Re(f)$. Řekneme, že f má v bodě x *Gâteauxův diferenciál,* právě když existuje směrová derivace $f_{\vec{u}}$ pro $\forall \vec{u} \in V_n$.
Zobrazení $\delta f(x) : V_n \longrightarrow R$ dané vztahem

$$\delta f(x)(\vec{u}) = f'_{\vec{u}}(x) \tag{2}$$

se nazývá *Gâteauxův diferenciál* funkce f v bodě x.

Poznámky

1. $\delta f: V_n \longrightarrow R$ se též nazývá *slabý diferenciál.*
2. Má-li f v bodě x Gâteauxův diferenciál, pak má v bodě x směrové derivace $f'_{\vec{u}}$ pro $\forall \vec{u} \in V_n$ a tedy je f spojitá v bodě x ve všech směrech $\vec{u} \in V_n$.
3. V moderní literatuře je s použitím slabého diferenciálu zaváděn pojem tzv. *derivace* funkce f v bodě x $(f'(x))$, která bývá nazývána *slabá derivace* funkce f v bodě x.

   Má-li f v x derivaci $f'(x)$, pak $f'(x) = (f'_1(x), \ldots, f'_n(x))$, kde $f'_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Potom platí, že existuje-li $f'(x)$, pak existují $f'_{\vec{u}}(x)$ pro $\forall \vec{u} \in V_n$ a zároveň

   $$f'_{\vec{u}}(x) = \sum_{i=1}^{n} f'_i(x) \cdot u_i = (f'(x), \vec{u})$$

   Ve starší literatuře se slabá derivace $f'(x)$ označuje jako *gradient* a značí se $\mathrm{grad}(f)$.

   Existence slabé derivace přitom ještě nezaručuje spojitost funkce f v bodě x.
4. O lineárních formách Nechť $\varphi: V_n \longrightarrow R$ je reálná funkce definovaná na V_n. φ nazýváme:
   - *aditivní,* jestliže $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$,
   - *homogenní,* jestliže $\varphi(c\vec{u}) = c\varphi(\vec{u})$ pro $\forall c \in R$ a $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_n$,
   - *lineární forma,* jestliže je aditivní a homogenní.

   Lze dokázat, že φ je lineární forma, právě když platí $\varphi(\vec{u}) = (\vec{a}, \vec{u})$, kde $\vec{a} \in V_n$ je vhodný vektor. Je-li $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ báze vektorového prostoru V_n, pak stačí brát $\vec{a} = (\varphi(\vec{e}_1), \ldots, \varphi(\vec{e}_n))$.

Definice 7.10 Totální diferenciál
Nechť f je funkce n proměnných, $x \in \Re(f)$. Říkáme, že f je *diferencovatelná* v bodě x, jestliže je definována na nějakém okolí $O(x)$ a existuje-li lineární forma $\varphi: V_n \longrightarrow R$ taková, že platí:

$$\lim_{\vec{u} \longrightarrow \vec{0}} \frac{f(x + \vec{u}) - f(x) - \varphi(\vec{u})}{\|\vec{u}\|} = 0.$$

V tomto případě se φ nazývá *totální (Fréchetův) diferenciál* funkce f v bodě x a označuje se $\mathrm{d}\, f(x)$.

Poznámky

1. Totální diferencovatelnost se někdy nazývá *silná* diferencovatelnost.
2. Označíme-li

   $$\frac{f(x + \vec{u}) - f(x) - \varphi(\vec{u})}{\|\vec{u}\|} = \tau(\vec{u}),$$

   pak $\tau: V_n \longrightarrow R$ je definována na jistém okolí $O^*(0)$ a $\lim_{\vec{u} \longrightarrow \vec{0}} \tau(\vec{u}) = 0$. Definiční vztah totálního diferenciálu lze tedy přepsat na tvar

   $$f(x + \vec{u}) - f(x) = \varphi(\vec{u}) + \|\vec{u}\|\tau(\vec{u}).$$
3. Funkce f má v bodě x totální diferenciál, jestliže existuje lineární forma φ a funkce τ definovaná na nějakém okolí $O^*(0)$ tak, že $\lim_{\vec{u} \longrightarrow \vec{0}} \tau(\vec{u}) = 0$ a platí:

   $$f(x + \vec{u}) - f(x) = \varphi(\vec{u}) + \|\vec{u}\|\tau(\vec{u}).$$

Věta 7.11 O spojitosti diferencovatelné funkce
Jestliže funkce f má v bodě $x \in \Re(f)$ totální diferenciál, pak f je v bodě x spojitá.

Důkaz: Označíme-li $y = x + \vec{u}$, pak $f(y) = f(x) + \varphi(y-x) + \|y-x\|\tau(y-x)$. Zřejmě platí vztahy:

$$\begin{aligned} \lim_{y \longrightarrow x} \varphi(y-x) &= 0 \\ \lim_{y \longrightarrow x} \|y-x\|\tau(y-x) &= 0 \end{aligned}$$

To značí, že

$$\lim_{y \longrightarrow x} f(y) = f(x) + 0,$$

a tedy f je spojitá v bodě x. □

Poznámka Z definice lze dokázat tvrzení o diferencovatelnosti funkcí $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ a f/g na základě diferencovatelnosti funkcí f a g, včetně příslušných formulí.

Věta 7.12 O výpočtu totálního diferenciálu

Je-li f diferencovatelná v bodě x ($x \in \Re(f)$), pak f má v bodě x derivaci $f'(x)$ a platí:

$$\mathrm{d}\, f(x)(\vec{u}) = (f'(x), \vec{u}) = (\mathrm{grad}(f), \vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{\vec{e}_i}(x) u_i$$

Důkaz: Buď $\vec{u} \in V_n$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ pevně zvolený. Uvažujme množinu $\{t\vec{u} \mid t \in \mathbf{R} - \{0\}\}$. Zřejmě $t\vec{u} \longrightarrow \vec{0}$ pokud $t \longrightarrow 0$. Dále víme, že $\|t\vec{u}\| = |t| \cdot \|\vec{u}\|$.

Podle předpokladu platí:

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{|t| \cdot \|\vec{u}\|} [f(x+t\vec{u}) - f(x) - \varphi(t\vec{u})] = 0$$

tj.

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x+t\vec{u}) - f(x) - \varphi(t\vec{u})] = 0$$

a protože φ je lineární forma, máme $\varphi(t\vec{u}) = t \cdot \varphi(\vec{u})$. Potom tedy:

$$\underbrace{\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x+t\vec{u}) - f(x)]}_{= f'_{\vec{u}}(x)} = \varphi(\vec{u})$$

Tedy f má v bodě x derivaci ve směru $\vec{u} \in V_n$, přičemž $\vec{u} \in V_n - \{\vec{0}\}$ je libovolný, a tedy f má v bodě x Gâteauxův diferenciál a současně

$$\delta f(x)(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}),$$

kde φ je lineární forma. Odtud plyne

$$\mathrm{d}\, f(x)(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}) = (f'(x), \vec{u}).$$

□

Důsledek 7.13

1. Jestliže f má v bodě x totální diferenciál, pak f má v bodě x Gâteauxův diferenciál a platí: $\mathrm{d}\, f(x) = \delta f(x)$.
2. Totální diferenciál je dán jednoznačně.
3. $\mathrm{d}\, f(x) : V_n \longrightarrow R$ se v literatuře též nazývá *silný* diferenciál.

Věta 7.14 Postačující podmínka diferencovatelnosti

Mějme f funkci n reálných proměnných a $x \in \Re(f)$. Jestliže všechny parciální derivace funkce f existují v nějakém okolí $O(x)$ a jsou spojité v x, pak f je diferencovatelná v x.

Důkaz: Nechť f má v okolí $O(x)$ všechny parciální derivace (tj. f je definováno v $O(x)$). Buď $\vec{u} \in V_n - \{\vec{0}\}$ libovolný. Položme $\varphi(\vec{u}) = (f'(x), \vec{u})$. Pak $\varphi : V_n \longrightarrow R$ je lineární forma. Dále položme

$$\tau(\vec{u}) = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\left[f(x+\vec{u}) - f(x) - \varphi(\vec{u})\right],$$

tj. $\tau : V_n \longrightarrow R$.

Podle věty o střední hodnotě 7.2 je

$$f(x+\vec{u}) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} f'_i(\xi_i) \cdot u_i,$$

kde $\xi_i = (x_1 + u_1, \dots, x_{i-1} + u_{i-1}, x_i + \Theta_i u_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, pro $i = 1, \dots, n$, přičemž $\Theta_i \in (0,1)$ pro $i = 1, \dots, n$.

Tedy

$$|\tau(\vec{u})| = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\left|\sum_{i=1}^{n} f'_i(\xi_i) \cdot u_i - \sum_{i=1}^{n} f'_i(x) \cdot u_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{|u_i|}{\|\vec{u}\|}\left|f'_i(\xi_i) - f'_i(x)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|f'_i(\xi_i) - f'_i(x)\right|.$$

Protože pro $\vec{u} \longrightarrow \vec{0}$ je $\xi_i \longrightarrow x$, plyne ze spojitosti parciálních derivací f'_i v bodě x $\lim_{\vec{u}\longrightarrow\vec{0}} \tau(\vec{u}) = 0$. Odtud plyne, že f je v x diferencovatelná a $\mathrm{d}\, f(x) = \varphi$. □

Poznámky

1. Má-li funkce f spojité všechny první parciální derivace na množině G, pak $\forall x \in G$ je f diferencovatelná a z toho plyne:
   - f je na G spojitá,
   - f má na G Gâteauxův diferenciál.
2. Výše uvedený předpoklad (že f má všechny první parciální derivace na G spojité) se zapisuje $f \in \ell(G)$ (f patří do třídy funkcí ℓ na množině G).
3. Označíme-li $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k)$ posloupnost vzájemně různých indexů z množiny $\{1, \dots, n\}$ a $\underline{j} = (j_1, \dots, j_{n-k})$ posloupnost vzájemně různých zbývajících indexů z množiny $\{1, \dots, n\}$. Interpretujme $E_n = E_k \times E_{n-k}$. Potom $\forall x \in E_n$ platí, že $x = (y, z)$, kde $y = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, $z = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}})$. y, z jsou tzv. *projekce* x do E_k, resp. E_{n-k}.

   Je-li $f : E_n \longrightarrow E$ ($R^n \longrightarrow E$), pak máme nové dvě funkce $f(\bullet, z)$ a $f(y, \bullet)$. Má-li funkce $f(\bullet, z)$, resp. $f(y, \bullet)$ totální diferenciál v bodě y, resp. z, pak tento totální diferenciál nazýváme *parciálním diferenciálem funkce f podle $\underline{i}$-tých*, resp. *$\underline{j}$-tých, proměnných v bodě x*. Tyto diferenciály se označují $\mathrm{d}_{\underline{i}}\, f(x)$ a $\mathrm{d}_{\underline{j}}\, f(x)$.

   Zřejmě platí:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{\underline{i}}\, f(x)(\vec{u}) &= \sum_{i\in\underline{i}} (f'_i(x), \vec{u}) \\ \mathrm{d}_{\underline{j}}\, f(x)(\vec{u}) &= \sum_{j\in\underline{j}} (f'_j(x), \vec{u}) \\ \mathrm{d}\, f(x)(\vec{u}) &= \mathrm{d}_{\underline{i}}\, f(x)(\vec{u}) + \mathrm{d}_{\underline{j}}\, f(x)(\vec{u}) \end{aligned}$$

   Jestliže:
   - $\underline{i} = (1, \dots, n)$, pak $\mathrm{d}_{\underline{i}}\, f(x) \equiv \mathrm{d}\, f(x)$,
   - $\underline{i} = (1)$, pak $\mathrm{d}_{\underline{i}}\, f(x)(\vec{u}) \equiv (f'_i(x), \vec{u})$.

4. Volbou $g(x) = x_i$ (pro libovolné $i \in \{1, \ldots, n\}$) dostaneme: g je diferencovatelná a platí:

$$\mathrm{d}\, g(x)(\vec{u}) = \mathrm{d}\, x_i(\vec{u}) = ([0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0], \vec{u}) = u_i,$$

tedy $[u_1, \ldots, u_n] = [\mathrm{d}\, x_1, \ldots, \mathrm{d}\, x_n]$, z čehož plyne:

$$\mathrm{d}\, f(x)(\vec{u}) = (f'(x), \vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)\, \mathrm{d}\, x_i.$$

5. Geometrická reprezentace existence totálního diferenciálu: je-li f funkce n proměnných, $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in \Re(f)$. Existuje-li nadrovina v R^{n+1} o rovnici $y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$, jdoucí bodem $[x_0, f(x_0)]$ a navíc taková, že

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - y(x)}{\|x - x_0\|} = 0,$$

pak se nazývá *tečná nadrovina* ke grafu funkce f v bodě x_0.

Uvedené geometrické požadavky vedou k následujícím podmínkám: Rovnice tečné nadroviny je tvaru

$$y = f(x_0) + a_1(x_1 - x_{01}) + \cdots + a_n(x_n - x_{0n}),$$

přičemž $\vec{a} = [a_1, \ldots, a_n]$. Označíme-li $\vec{u} = [x_1 - x_{01}, \ldots, x_n - x_{0n}]$, splňuje rovnice podmínku

$$\lim_{\vec{u} \longrightarrow \vec{0}} \frac{1}{\|\vec{u}\|} [f(x_0 - \vec{u}) - f(x_0) - (\vec{a}, \vec{u})] = 0.$$

Tato podmínka je ekvivalentní s existencí totálního diferenciálu funkce f v bodě x_0 a platí:

$$(\vec{a}, \vec{u}) = \mathrm{d}\, f(x_0)(\vec{u}) \Longrightarrow \vec{a} = [f_1'(x_0), \ldots, f_n'(x_0)] = f'(x_0).$$

Tedy rovnice tečné nadroviny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 se spočítá podle vzorce:

$$y = f(x_0) + (f'(x_0), (x - x_0))$$

6. Numerická aplikace: Z předchozích informací plyne, že

$$sf = f(x) - f(x_0) \approx \mathrm{d}\, f(x_0)(x - x_0),$$

kde sf je diference. Tedy

$$f(x_0 + \vec{u}) \approx f(x_0) + \mathrm{d}\, f(x_0)(\vec{u})$$

neboli

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}\, f(x_0)(x - x_0).$$

8 Derivace 2. řádu

8.1 Parciální a směrová derivace 2. řádu

Definice 8.1

Nechť f je funkce n proměnných, $i,j \in \{1,\dots,n\}$ a nechť $x \in \Re(f_i')$. Má-li funkce f_i' v bodě x parciální derivaci podle j-té proměnné, nazýváme ji *druhou parciální derivací* funkce f *(parciální derivace 2. řádu)* a to v bodě x podle i-té a j-té proměnné a označuje se:

$$f''_{i,j}(x) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad f''_{x_i,x_j}(x)$$

Poznámky

1. $i \neq j$ ... *smíšená* parciální derivace
   $i = j$ ... *dvojnásobná* parciální derivace

2. Funkce $f(x_1,\dots,x_n)$ může mít až n parciálních derivací 1. řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

   Tatáž funkce však může mít až n^2 parciálních derivací 2. řádu (každá parciální derivace 1. řádu má n parciálních derivací):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1},\dots,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n},\dots,\dots,\dots,\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1},\dots,\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}$$

Definice 8.2

Nechť f je funkce n proměnných, $\vec{u},\vec{v} \in V_n$ a $x \in \Re(f'_{\vec{u}})$. Má-li $f'_{\vec{u}}$ v bodě x derivaci ve směru vektoru $\vec{v}$, nazýváme ji *druhou derivací* funkce f v bodě x *ve směrech* $\vec{u},\vec{v}$. Značíme ji

$$f''_{\vec{u},\vec{v}}(x).$$

Poznámka Analogicky s parciálními derivacemi: $f(x) \longrightarrow f'_{\vec{u}}(x) \longrightarrow f''_{\vec{u},\vec{v}}(x)$. Obecně platí

$$f''_{\vec{u},\vec{v}} \neq f''_{\vec{v},\vec{u}}.$$

Příklad 8.1

Mějme funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & x \neq 0 \neq y \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

Parciální derivace (ale i směrové derivace v jednotkových směrech) budou vypadat takto:

$$\begin{aligned} f_1'(x,y) &= \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ -y, & (x,y) \neq (0,0) \wedge y \neq 0 \end{cases} \\ f_2'(x,y) &= \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ x, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

Výpočet druhých derivací ponecháme na čtenáři jako cvičení. Pro kontrolu jen uveďme:

$$f''_{1,2}(0,0) = -1 \qquad f''_{2,1}(0,0) = 1$$

Věta 8.3 SCHWARZOVA VĚTA O ZÁMĚNĚ DERIVACÍ

Buď f funkce n proměnných, $\vec{u},\vec{v} \in V_n$. Existují-li $f''_{\vec{u},\vec{v}}$ a $f''_{\vec{v},\vec{u}}$ v nějakém okolí $O(x)$ a jsou spojité v bodě x, pak

$$f''_{\vec{u},\vec{v}}(x) = f''_{\vec{v},\vec{u}}(x)$$

Důkaz: Položme
$$g(t)=\frac{1}{t^2}[f(x+t\vec{u}+t\vec{v})-f(x+t\vec{u})-f(x+t\vec{v})-f(x)]$$
pro $t\neq 0$. Zřejmě funkce g je definována alespoň v nějakém okolí $O^*(0)$. Označme dále
$$\begin{aligned}\varphi(y)&=f(y+t\vec{v})-f(y),\\ \psi(y)&=f(y+t\vec{u})-f(y).\end{aligned}$$
Můžeme tedy přepsat
$$g(t)=\frac{1}{t^2}[\varphi(x+t\vec{u})-\varphi(x)]=\frac{1}{t^2}[\psi(x+t\vec{v})-\psi(x)].$$

Podle věty o střední hodnotě je
$$\varphi(x+t\vec{u})-\varphi(x)=t[f'_{\vec{u}}(x+\Theta_1t\vec{u}+t\vec{v})-f'_{\vec{u}}(x+\Theta_1t\vec{u})],$$
kde $\Theta_1\in(0,1)$. Novou aplikací této věty na $f'_{\vec{u}}$ získáváme
$$f'_{\vec{u}}(x+\Theta_1t\vec{u}+t\vec{v})-f'_{\vec{u}}(x+\Theta_1t\vec{u})=t\cdot f''_{\vec{u},\vec{v}}(x+\Theta_1t\vec{u}+\Theta_2t\vec{v}),$$
kde $\Theta_2\in(0,1)$.

Tedy
$$g(t)=f''_{\vec{u},\vec{v}}(x+\Theta_1t\vec{u}+\Theta_2t\vec{v}).$$
Analogicky
$$g(t)=f''_{\vec{v},\vec{u}}(x+\Theta_3t\vec{u}+\Theta_4t\vec{v}),$$
kde $\Theta_3,\Theta_4\in(0,1)$.

Ze spojitosti $f''_{\vec{u},\vec{v}}$ a $f''_{\vec{v},\vec{u}}$ plyne rovnost
$$f''_{\vec{u},\vec{v}}(x)=f''_{\vec{v},\vec{u}}(x).$$
□

Poznámky

1. Lze dokázat, že spojitost jedné z uvedených druhých derivací funkce f v bodě x indukuje i spojitost druhé z nich.
2. Podmínky věty lze také oslabit např. tím, že požadujeme diferencovatelnost $f'_{\vec{u}}$, resp. $f'_{\vec{v}}$, v bodě x.
3. V klasické literatuře se Schwarzovou větou rozumí tvrzení o záměnnosti parciálních derivací:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0),$$
tj. pro vektory $\vec{u},\vec{v}$ v jednotkových směrech.

8.2 Co v lineární algebře nebylo

Nechť A,B jsou matice téhož typu (m,n) nad $\mathbf{R}$. *Skalárním součinem* matic A,B se rozumí reálné číslo[8]
$$AB=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ik}.$$

[8]Čtenáře, který v lineární algebře není natolik sběhlý, upozorňujeme na fakt, že skalární součin matic je něco jiného než maticový součin. Ten je definován pro matice A typu (m,n) a B typu (n,p) takto:
$$A\cdot B=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}}$$

Tenzorovým součinem vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, $\vec{u} \in V_m$, $\vec{v} \in V_n$ se rozumí matice[9] typu (m, n), definovaná:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_i v_j)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Buď $\varphi: \ V_n^2 \longrightarrow R$ (tj. reálná funkce definovaná na $V_n \times V_n$). Jestliže platí současně obě následující podmínky

(i) $\forall \vec{u} \in V_n$ je $\varphi(\vec{u}, \bullet)$ lineární forma na V_n,

(ii) $\forall \vec{u} \in V_n$ je $\varphi(\bullet, \vec{u})$ lineární forma na V_n,

pak φ je *bilineární forma* na V_n^2.

O pojmech, které jsme právě nadefinovali, platí následujících několik tvrzení (nebudeme je dokazovat).

Tvrzení O reprezentaci bilineární formy
Zobrazení $\varphi: \ V_n^2 \longrightarrow R$ je bilineární formou, právě když $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = A(\vec{u} \times \vec{v})$ (tj. skalární součin matice A a matice, vzniklé jako tenzorový součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$) pro $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$, kde A je matice typu (n, n), jejíž koeficienty jsou:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = (\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j))_{i,j=1,\dots,n},$$

kde $\vec{e}_i, \vec{e}_j$ jsou jednotkové vektory prostoru V_n.

□

Označíme $A = [\varphi]$ je matice bilineární formy. Bilineární forma se nazývá *symetrická,* právě když $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{v}, \vec{u})$ pro $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_n$.

Tvrzení O symetrii bilineární formy
Bilineární forma $\varphi: \ V_n^2 \longrightarrow R$ je symetrická, právě když matice $A = [\varphi]$ je symetrická.

□

Je-li φ symetrická bilineární forma, pak zobrazení $\psi: \ V_n \longrightarrow R$ takové, že $\psi(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}, \vec{u})$, se nazývá *kvadratická forma* na V_n.

Tvrzení O reprezentaci kvadratické formy
Zobrazení $\psi: \ V_n \longrightarrow R$ je kvadratická forma, právě když $\psi(\vec{u}) = A\vec{u}^2$, kde A je symetrická čvercová matice řádu n a $\vec{u}^2 = \vec{u} \times \vec{u}$.

□

8.3 Diferenciály 2. řádu

Definice 8.4 Druhý Gâteauxův diferenciál
Mějme f funkci n reálných proměnných, $x \in \Re(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě x *druhý Gâteauxův diferenciál,* jestliže $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_n$ existuje $f''_{\vec{u},\vec{v}}(x)$. Zobrazení $\delta^2 f(x): \ V_n^2 \longrightarrow R$ dané vztahem

$$\delta^2 f(x)(\vec{u}, \vec{v}) = f''_{\vec{u},\vec{v}},$$

nazýváme *druhý Gâteauxův diferenciál* funkce f v bodě x.

[9] Na tomto místě opět pozor! Tenzorový součin je opět něco zcela jiného než skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, který je definován takto:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

a je tedy reálným číslem.

Poznámky

1. Analogicky k úvahám o prvním Gâteauxově diferenciálu nemusí být druhý Gâteauxův diferenciál aditivní.
2. Je-li $\delta^2 f(x)$ bilineární forma, pak existuje čtvercová matice $A = [\delta^2 f(x)]$ řádu n taková, že
$$\delta^2 f(x)(\vec{u},\vec{v}) = A(\vec{u}\times\vec{v}),$$
navíc
$$[\delta^2 f(x)] = \left(f''_{\vec{e}_i,\vec{e}_j}(x)\right)_{i,j=1,\dots,n}.$$
Tuto matici nazýváme *druhou derivací (tzv. slabá druhá derivace)* funkce f v bodě x a značíme ji $f''(x)$.
3. Existuje-li $f''(x)$, pak
$$f''(x) = [\delta^2 f(x)] = (f''_{i,j}(x))_{i,j=1,\dots,n} = A.$$
A se také nazývá *Hessova matice* funkce f v bodě x.
4. Existuje-li $f''(x)$ a $\vec{u},\vec{v}\in V_n$, pak
$$f''_{\vec{u},\vec{v}}(x) = \delta^2 f(x)(\vec{u},\vec{v}) = \underbrace{[\delta^2 f(x)]}_{A}(\vec{u}\times\vec{v}) = f''(x)(\vec{u}\times\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(f''_{i,j}(x)u_i v_j\right).$$

Definice 8.5 Druhý totální diferenciál

Nechť f je funkce n proměnných, $x\in\Re(f)$. Řekneme, že f má v bodě x *druhý totální diferenciál (druhý Fréchetův, druhý silný diferenciál)*, existuje-li okolí $O(x)$, v němž má funkce f totální diferenciál a existuje-li bilineární forma $\varphi:\ V_n^2 \longrightarrow R$ taková, že
$$\lim_{\vec{u}\longrightarrow\vec{0}}\frac{1}{\|\vec{u}\|}\cdot\|f'(x+\vec{u}) - f'(x) - [\varphi(\vec{u},\bullet)]\| = 0.$$
Tuto formu φ nazýváme *druhý totální diferenciál* funkce f v bodě x a označujeme ji $\mathrm{d}^2 f(x)$.

Poznámka $\varphi(\vec{u},\bullet)$ je lineární forma, tedy $[\varphi(\vec{u},\bullet)]$ je vektor téže dimenze jako f'. Normu $\|\vec{u}\|$ vzhledem k jejich ekvivalenci na V_n lze použít libovolně.

Věta 8.6 Nutná a postačující podmínka existence $\mathrm{d}^2 f(x)$

Funkce f má v bodě $x\in\Re(f)$ druhý totální diferenciál, právě když jsou splněny obě následující podmínky:

(i) f je diferencovatelná v nějakém okolí bodu x.

(ii) Všechny první parciální derivace funkce f jsou diferencovatelné v bodě x.

Důkaz:

$\Longrightarrow$ Nechť existuje $\mathrm{d}^2 f(x)$, pak podle definice je f diferencovatená v okolí $O(x)$. Označme $\varphi = \mathrm{d}^2 f(x)$ a můžeme psát
$$\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i v_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i\right)v_j$$
pro $\forall\vec{u},\vec{v}\in V_n$.

To znamená, že $\varphi(\vec{u},\bullet)(\vec{v}) = (\vec{a},\vec{v})$, kde
$$\vec{a} = (a_k)_{k=1,\dots,n} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}u_i\right)_{k=1,\dots,n}$$

Z toho plyne ekvivalence
$$\lim_{\vec{u}\longrightarrow\vec{0}}\frac{1}{\|\vec{u}\|}\cdot\|f'(x+\vec{u}) - f'(x) - [\varphi(\vec{u},\bullet)]\| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\vec{u}\longrightarrow\vec{0}}\frac{1}{\|\vec{u}\|}\cdot\mathrm{pr}_j\left[f'(x+\vec{u}) - f'(x) - [\varphi(\vec{u},\bullet)]\right] = 0 \qquad (3)$$
pro $j = 1,\dots,n$. Tím jsme získali druhé tvrzení věty.

$\Longleftarrow$ Položme nejdříve

$$\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_i v_j,$$

kde $a_{ij} = f''_{i,j}(x)$ a $\vec{u},\vec{v} \in V_n$. φ je tedy bilineární forma. Nyní dokážeme, že $\varphi = \mathrm{d}^2 f(x)$.

Podle první části důkazu je

$$[\varphi(\vec{u},\bullet)] = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}u_i\right)_{k=1,\ldots,n}.$$

Vzhledem k diferencovatelnosti f'_i v bodě x a ekvivalenci mezi limitami (3) je $\varphi : V_n^2 \longrightarrow R$, a odtud okamžitě podle definice tvrzení věty.

□

Důsledek 8.7

1. Jestliže f má v bodě $x \in \Re(f)$ druhý totální diferenciál, pak f má v bodě x všechny druhé parciální derivace.
2. (podle věty 8.6:) Z existence druhého totálního diferenciálu funkce f v bodě x automaticky plyne

   $$f''_{i,j}(x) = f''_{j,i}(x),$$

   jinými slovy platí Schwarzova věta pro $\forall i,j = \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$.

Věta 8.8 Postačující podmínka existence $\mathrm{d}^2 f(x)$
Má-li funkce f v okolí $O(x) \subseteq \Re(f)$ všechny parciální derivace 2. řádu a v bodě x jsou spojité, pak existuje $\mathrm{d}^2 f(x)$.

Důkaz: Podle věty 7.14 (postačující podmínka diferencovatelnosti 1. řádu) jsou všechny parciální derivace 1. řádu funkce f v nějakém okolí $O(x)$ diferencovatelné a vzhledem ke spojitosti všech prvních parciálních derivací podle téže věty je $\mathrm{d} f(x)$ diferencovatelný v bodě x. □

Důsledek 8.9

1. Splňuje-li f předpoklady věty 8.8, pak existuje $f''(x)$ a příslušná matice je symetrická (platí Schwarzova věta).
2. Splňuje-li f předpoklady věty 8.8 a $\vec{u},\vec{v} \in V_n$, pak

   $$\mathrm{d}^2 f(x)(\vec{u},\vec{v}) = f''(x)(\vec{u}\times\vec{v}) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{i,j}(x)u_i v_j\right),$$

   kde $f''(x)$ je Hessova matice.

Poznámky

1. $\mathrm{d}^2 f(x)$, $\delta^2 f(x)$ a $f''(x)$ pro $x \in \Re(f)$ jsou dány jednoznačně.
2. Existuje-li $\mathrm{d}^2 f(x)$, pak je bilineární symetrickou formou na V_n^2.
3. Existuje-li $\mathrm{d}^2 f(x)$, pak $f''_{\vec{u},\vec{v}}(x) = f''_{\vec{v},\vec{u}}(x)$ pro libovolné $\vec{u},\vec{v} \in V_n$.
4. Existuje-li $\mathrm{d}^2 f(x)$, pak existuje $\delta^2 f(x)$ a jsou si rovny.
5. Množina $\ell^2(G)$ je množinou všech funkcí, které mají na množině G spojité všechny druhé parciální derivace.
6. Někteří autoři definují druhý totální diferenciál jako kvadratickou formu $\mathrm{D}^2 f : V_n \longrightarrow R$, tj.

   $$\mathrm{D}^2 f(x)(\vec{u}) = \mathrm{d}^2 f(x)(\vec{u},\vec{u}).$$

7. Existuje-li $\mathrm{d}^2 f(x)$ a $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ jsou libovolné, pak[10]

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2 f(x)(\vec{u}) &= f''_{1,1}u_1^2 + f''_{1,2}u_1u_2 + \dots + f''_{1,n}u_1u_n + \dots + \dots + \dots + f''_{n,1}u_nu_1 + \dots + f''_{n,n}u_n^2 = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}u_n\right)^2 f(x) \\
\mathrm{d}^2 f(x)(\vec{u}, \vec{v}) &= f''_{1,1}u_1v_1 + f''_{1,2}u_1v_2 + \dots + f''_{1,n}u_1v_n + \dots + \dots + \dots + f''_{n,1}u_nv_1 + \dots + f''_{n,n}u_nv_n = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}u_n\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}v_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}v_n\right) f(x)
\end{aligned}$$

[10] Toto jsem opálil ze zápisků, aniž bych věděl, co to přesně znamená. Je to založeno (jediné na co jsem přišel) na vztahu

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u_i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}u_j\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u_iu_j,$$

který si nedokážu nijak rozumově vysvětlit. Jestli někdo přijdete na to, co to *sémanticky* znamená, dejte mi vědět.

9 Derivace a diferenciály vyšších řádů

9.1 Parciální a směrové derivace vyšších řádů

Definice 9.1
Nechť f je funkce n proměnných, $m \in \mathbf{N}$, $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in \Re\left(f^{(m-1)}_{i_1,\dots,i_{m-1}}\right)$. Má-li $f^{(m-1)}_{i_1,\dots,i_{m-1}}$ v bodě x parciální derivaci podle i_m-té proměnné, pak ji nazveme *m-tou parciální derivací* funkce f v bodě x podle proměnných $i_1, \dots, i_m$ a značíme ji $f^{(m)}_{i_1,\dots,i_m}$.

Věta 9.2 Zobecněná Schwarzova věta
Nechť f má v bodě x na nějakém okolí $O(x) \subseteq \Re(f)$ všechny parciální derivace m-tého řádu a tyto derivace jsou v x spojité. Pak f má v bodě x všechny parciální derivace řádu $k \le m$ záměnné (nezáleží při výpočtu na pořadí, v jakém derivace provádíme).

Důkaz: Provedeme matematickou indukcí:

- Pro $k = 2$ tvrzení platí (viz věta 8.3).
- Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k-1$ a dokažme, že tedy platí i pro $k \le m$. Označme $i_1, \dots, i_k$, resp. $j_1, \dots, j_k$ posloupnost indexů podle nichž proběhlo k-té derivování lišící se v pořadí členů. Je-li $i_k = j_k$, pak podle indukčního předpokladu tvrzení platí ($k-1$-ní derivace jsou stejné).

  Jestliže $i_k \neq j_k$, pak číslo j_k se jistě vyskytuje mezi čísly $i_1, \dots, i_{k-1}$. Vzhledem k indukčnímu předpokladu můžeme zaměnit pořadí derivování tak, že v obou skupinách se naposledy derivuje podle těchto proměnných. Tím tedy předchozí derivace $k-2$. řádu jsou derivace, kde se zachovalo derivování s výjimkou i_k, j_k a podle indukčního předpokladu jsou tyto derivace záměnné. Označme společnou hodnotu $k-2$-ých derivací $g(x)$. Pak samozřejmě podle věty 8.3

  $$f^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}(x) = g''_{i_{k-1},i_k}(x) = g''_{i_k,i_{k-1}}(x) = g''_{j_{k-1},j_k}(x) = g''_{j_k,j_{k-1}}(x)$$

  a tedy tvrzení naší věty je dokázáno.

□

Definice 9.3
Má-li funkce $f^{(m-1)}_{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_{m-1}}$ derivaci ve směru $\vec{u}_m$ v bodě x, nazýváme tuto derivaci *m-tou derivací funkce f ve směrech* $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ v bodě x a značí se $f^{(m)}_{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m}(x)$.

Poznámka Lze dokázat, že platí pro směrové derivace tvrzení o záměnnosti.

9.2 Co v lineární algebře už vůbec nebylo

Mějme $m \in \mathbf{N}$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbf{N}$. Nechť je P množina všech posloupností $(i_1, \dots, i_m)$ takových, že $i_j \in \{1, \dots, k_j\}$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$.
Dále mějme zobrazení $A: P \longrightarrow R$. Je-li $A(i_1, \dots, i_m) = a_{i_1,\dots,i_m}$, pak můžeme psát

$$A = (a_{i_1,\dots,i_m})_{i_1=1,\dots,k_1,\dots,i_m=1,\dots,k_m}$$

Zřejmě je A maticí typu $(k_1, \dots, k_m)$, která má celkem $k_1 k_2 \cdots k_m$ členů.

$m = 1$ ... jedná se o k_1-rozměrný vektor.

$m = 2$ ... klasický pojem matice typu (k_1, k_2).

$m = 3$ ... krychlová matice (vektor matic, případně matice vektorů) typu (k_1, k_2, k_3).

Je-li $k_1 = \cdots = k_m = n$, pak A nazýváme n-rozměrnou m-indexovou maticí. Jestliže $a_{i_1,\ldots,i_m} = a_{j_1,\ldots,j_m}$ pro všechny permutace $(j_1,\ldots,j_m)$ množiny $\{i_1,\ldots,i_m\}$, pak říkáme, že A je *symetrická*.

Pro obecný případ platí analogická pravidla jako pro případ $m = 2$. Máme-li $A = (a_{i_1,\ldots,i_m})$, $B = (b_{i_1,\ldots,i_m})$ téhož typu a $c \in \mathbf{R}$ libovolné, pak:

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{i_1,\ldots,i_m} + b_{i_1,\ldots,i_m}) = B + A \\ cA &= (c \cdot a_{i_1,\ldots,i_m}) \\ c(A+B) &= cA + cB \end{aligned}$$

Skalární součin m-rozměrných matic je definován:

$$AB = \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in P} a_{i_1,\ldots,i_m} b_{i_1,\ldots,i_m}$$

Norma A je definována jako odmocnina skalárního čtverce, tj.

$$\|A\| = \sqrt{AA} = \sqrt{\sum a^2_{i_1,\ldots,i_m}}$$

Přitom platí Cauchy – Bugnacovského nerovnost $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

Označme $\vec{u}_1 = (u_{11},\ldots,u_{1n}),\ldots,\vec{u}_m = (u_{m1},\ldots,u_{mn})$. Jejich *tenzorovým součinem* budeme rozumět

$$\vec{u}_1 \times \cdots \times \vec{u}_m = (u_{1i_1} \cdots u_{mi_m})_{i_1,\ldots,i_m = 1,\ldots,n}.$$

Např. pro $n = 2$ a $m = 3$ mějme vektory $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$, $\vec{w} = [w_1, w_2]$ je tenzorovým součinem těchto vektorů 3-dimenzionální matice

$$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} = (u_i v_j w_k)_{i=1,2,\ j=1,2,\ k=1,2}$$

Pokud $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \cdots = \vec{u}_m = \vec{u}$, pak tenzorový součin

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \times \cdots \times \vec{u}_m = \vec{u}^m$$

nazýváme *tenzorovou m-tou mocninou*.

Mějme matici $A = (a_{i_1,\ldots,i_m})$ a $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m \in V_n$, pak

$$A(\vec{u}_1 \times \cdots \times \vec{u}_m) = \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in P} a_{i_1,\ldots,i_m} \cdot u_{1i_1} \cdots u_{mi_m}$$

Buď $m \in \mathbf{N}$. Uvažujme zobrazení $\varphi :\ V_n^m \longrightarrow R$. Jestliže je φ lineární formou vzhledem ke všem komponentám, pak φ se nazývá *m-lineární forma*.

Opět bez důkazu uvedeme některá tvrzení.

Tvrzení Zobrazení $\varphi :\ V_n^m \longrightarrow R$ je m-lineární forma, právě když $\varphi(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m) = A(\vec{u}_1 \times \cdots \times \vec{u}_m)$, kde $A = (a_{i_1,\ldots,i_m})$ je n-rozměrnou m-indexovou maticí a přitom platí $a_{i_1,\ldots,i_m} = \varphi(\vec{e}_{i_1},\ldots,\vec{e}_{i_m})$. Výše uvedená matice přidružená k m-lineární formě φ se označuje $[\varphi]$, tj. $A = [\varphi]$.

□

m-lineární forma φ se nazývá *symetrická*, jestliže $\varphi(\vec{u}_{i_1},\ldots,\vec{u}_{i_m}) = \varphi(\vec{u}_{j_1},\ldots,\vec{u}_{j_m})$ pro všechny m-prvkové permutace $(j_1,\ldots,j_m)$ množiny $\{i_1,\ldots,i_m\}$.

Tvrzení m-lineární forma φ je symetrická, právě když $A = [\varphi]$ je symetrická.

□

Je-li $\varphi :\ V_n^m \longrightarrow R$ symetrická m-lineární forma, pak zobrazení $\psi :\ V_n \longrightarrow R$ definované tak, že $\psi(\vec{u}) = \varphi(\vec{u},\ldots,\vec{u})$ se nazývá forma stupně m. Zřejmě platí, že $\psi(c \cdot \vec{u}) = c^m \cdot \psi(\vec{u})$ pro $\forall c \in \mathbf{R}$ a $\forall \vec{u} \in V_n$.

Tvrzení Zobrazení $\psi :\ V_n \longrightarrow R$ je forma stupně m, právě když $\psi(\vec{u}) = A\vec{u}^m$, kde A je symetrická n-rozměrná m-indexová matice.

9.3 Diferenciály vyšších stupňů

Definice 9.4 m-TÝ GÂTEAUXŮV DIFERENCIÁL

Funkce f má v bodě $x \in \Re(f)$ *m-tý Gâteauxův diferenciál,* jestliže existuje derivace $f^{(m)}_{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m}(x)$ pro všechny vektory $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m \in V_n$. Zobrazení $\delta^m f(x) :\ V_n^m \longrightarrow R$ dané předpisem

$$\delta^m f(x)(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m) = f^{(m)}_{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m}(x)$$

se nazývá *m-tý Gâteauxův diferenciál* funkce f v bodě x.

Je-li $\delta^m f(x)$ m-lineární formou, pak n-rozměrná m-indexová matice $A = [\delta^m f(x)]$ taková, že

$$\delta^m f(x)(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m) = A(\vec{u}_1 \times \cdots \times \vec{u}_m)$$

se nazývá *derivací m-tého řádu* funkce f v bodě x a značí se $f^{(m)}(x)$.

Poznámky

1. Existuje-li derivace $f^{(m)}(x)$, pak $f^{(m)}(x)$ je n-rozměrná m-indexová matice a platí:

$$f^{(m)}(x) = [\delta^m f(x)] = A = (a_{i_1,\dots,i_m})_{i_1,\dots,i_m=1,\dots,n} = \left(f^{(m)}_{i_1,\dots,i_m}(x)\right)_{i_1,\dots,i_m=1,\dots,n}.$$

   Derivace $f^{(m)}(x)$ je tedy maticí všech parciálních derivací funkce f.

2. Existuje-li $f^{(m)}(x)$, pak pro $\forall \vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m \in V_n$ platí:

$$\begin{aligned} f^{(m)}_{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m}(x) &= \delta^m f(x)(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m) = [\delta^m f(x)](\vec{u}_1 \times \cdots \times \vec{u}_m) = f^{(m)}(x)(\vec{u}_1 \times \cdots \times \vec{u}_m) = \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_m=1,\dots,n} f^{(m)}_{i_1,\dots,i_m}(x) \cdot u_{1i_1} \cdots u_{mi_m} \end{aligned}$$

Definice 9.5 m-TÝ TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

Řekneme, že funkce f má v bodě $x \in \Re(f)$ *totální diferenciál m-tého řádu* $(m \geq 2)$ *(Fréchetův, silný diferenciál),* jestliže v nějakém okolí $O(x)$ má f totální diferenciál $m-1$-ního řádu a existuje m-lineární forma $\varphi :\ V_n^m \longrightarrow R$ taková, že platí

$$\lim_{\vec{u}\longrightarrow\vec{0}} \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \left\| f^{(m-1)}(x+\vec{u}) - f^{(m-1)}(x) - [\varphi(\vec{u},\bullet)] \right\| = 0.$$

Tato forma se nazývá *m-tý totální diferenciál* funkce f v bodě x a označuje se $\mathrm{d}^m f(x)$.

Věta 9.6 NUTNÁ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE $\mathrm{d}^m f(x)$

Funkce f má v bodě x totální diferenciál m-tého řádu $(m \geq 2)$, právě když jsou splněny obě následující podmínky:

(i) Všechny parciální derivace řádu menšího nebo rovného $m-2$ funkce f jsou diferencovatelné v nějakém okolí $O(x)$.

(ii) Všechny parciální derivace řádu $m-1$ funkce f jsou diferencovatelné v bodě x.

Důkaz: Důkaz této věty se provede analogicky s důkazem věty 8.6. □

Důsledek 9.7

1. Existuje-li $\mathrm{d}^m f(x)$, pak existují všechny parciální derivace funkce f řádu menšího nebo rovného m v bodě x a jsou záměnné.

2. Existuje-li $\mathrm{d}^m f(x)$, pak existuje $f^{(m)}(x)$ a navíc je tato derivace symetrickou m-indexovou maticí.

3. Existuje-li $\mathrm{d}^m f(x)$, pak pro $\forall \vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m \in V_n$ platí

$$\mathrm{d}^m f(x)(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m) = [\mathrm{d}^m f(x)](\vec{u}_1 \times \cdots \times \vec{u}_m) = f^{(m)}(x)(\vec{u}_1 \times \cdots \times \vec{u}_m) = \delta^m f(x)(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m).$$

4. Existuje-li $\mathrm{d}^m f(x)$, pak existují všechny směrové derivace řádů menších nebo rovného m a jsou záměnné.

Věta 9.8 POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE $\mathrm{d}^m f(x)$

Má-li funkce f v nějakém okolí $O(x)$ $(x \in \Re(f))$ všechny parciální derivace m-tého řádu a tyto derivace jsou spojité v samotném bodě x, pak existuje $\mathrm{d}^m f(x)$.

Důkaz: Důkaz se provede analogicky s větou 8.8. □

Poznámky

1. Množinu všech funkcí f takových, že všechny jejich parciální derivace řádu m jsou spojité ve všech bodech $x \in G$ označujeme $\ell^m(G)$.
2. Jestliže $f \in \ell^m(G)$, pak pro f platí všechny čtyři části důsledku 9.7.
3. Někteří autoři definují totální diferenciál řádu m jako zobrazení $\mathrm{D}^m f(x) : V_n \longrightarrow R$ předpisem

$$\mathrm{D}^m f(x)(\vec{u}) = \mathrm{d}^m f(x)(\vec{u}, \dots, \vec{u}),$$

   tj. $\mathrm{D}^m f(x)$ je forma stupně m a platí $\mathrm{D}^m f(x)(\vec{u}) = f^{(m)}(x)\vec{u}^m$ pro $\forall \vec{u} \in V_n$.
4. Existuje-li $\mathrm{d}^m f(x)$ a $\vec{u}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \in V_n$ jsou libovolné, pak[11]

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^m f(x)(\vec{u}) &= \dots = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}u_n\right)^m f(x) \\ \mathrm{d}^m f(x)(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m) &= \dots = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_{11} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}u_{1n}\right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_{m1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}u_{mn}\right) f(x) \end{aligned}$$

[11] Znění této poznámky je vícerozměrný případ mysterického vztahu, který byl zmíněn v minulém odstavci také pod čarou. Následující vztahy jsou tedy také pouze opsány ze zápisků a nejsem z nich vůbec moudrý.

10 Aplikace

10.1 Taylorova věta

Věta 10.1 TAYLOROVA VĚTA

Nechť f je funkce n reálných proměnných, $G \subseteq \Re(f)$ otevřená podmnožina, $m \in \mathbf{N}$ a derivace $f^{(m+1)}_{\vec{u},\ldots,\vec{u}}$ existuje v G pro nějaký vektor $\vec{u} \in V_n$. Potom pro $\forall x, x+\vec{u} \in G$ existuje $\Theta \in (0,1)$ tak, že

$$f(x+\vec{u}) = f(x) + \frac{1}{1!} f'_{\vec{u}}(x) + \frac{1}{2!} f''_{\vec{u},\vec{u}}(x) + \cdots + \frac{1}{m!} f^{(m)}_{\vec{u},\ldots,\vec{u}}(x) + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}_{\vec{u},\ldots,\vec{u}}(x+\Theta\vec{u})$$

Důkaz: Položíme $\varphi(t) = f(x+t\vec{u})$, kde t je skalár a $\vec{u}$ je směr. $t \in (0,1)$. Aplikací Taylorovy věty z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné na φ získáme tvrzení věty. □

Důsledek 10.2

Má-li f totální diferenciál $m+1$-ho řádu na G, pak platí

$$f(x+\vec{u}) = f(x) + \frac{1}{1!}\mathrm{D}f(x)(\vec{u}) + \frac{1}{2!}\mathrm{D}^2 f(x)(\vec{u}) + \cdots + \frac{1}{m!}\mathrm{D}^m f(x)(\vec{u}) + \underbrace{\frac{1}{(m+1)!}\mathrm{D}^{m+1} f(x+\Theta\vec{u})(\vec{u})}_{R_{m+1}}$$

10.2 Extrémy funkcí

S extrémy funkcí více proměnných je to takřka stejné jako s extrémy funkcí jedné proměnné.

Existuje-li okolí bodu x_0 takové, že pro $\forall x \in O(x_0)$ platí $f(x) \le f(x_0)$, pak x_0 nazveme *lokální maximum*. Pokud to platí pro $\forall x \in G$, pak x_0 je *absolutní maximum*. Analogicky pro lokální a absolutní minimum.

Bod $x \in \Re(f)$, pro nějž platí $f'_i(x) = 0$ pro $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ se nazývá *stacionární bod*.

Platí

1. Je-li f diferencovatelné v bodě x a má-li v bodě x lokální extrém, pak x je stacionárním bodem (opačný směr obecně neplatí).
2. x je stacionární bod, právě když $f'(x) = 0$.

Věta 10.3 O CHARAKTERU OBECNÉHO BODU

Nechť $m \in \mathbf{N} - \{1\}$, $G \subseteq \mathbf{R}_n$ je otevřená množina, $f \in \ell^m(G)$ a $x \in G$. Dále nechť $f'(x) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(x) = 0$ a $f^{(m)}(x) \neq 0$. Pak platí:

- je-li m liché, pak f nemá v bodě x extrém.
- je-li m sudé a:
  - ⋆ $f^{(m)}$ je pozitivně definitní, pak f má v bodě x ostré lokální minimum.
  - ⋆ $f^{(m)}$ je negativně definitní, pak f má v bodě x ostré lokální maximum.
  - ⋆ $f^{(m)}$ je indefinitní, pak f nemá v bodě x extrém.

Literatura

[1] Vítězslav Novák: *Integrální počet v R*, SPN, Praha, 1986

[2] Vítězslav Novák: *Nekonečné řady*, skripta UJEP, Brno, 1981

[3] Vítězslav Novák: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, skripta UJEP, Brno, 1983

[4] Vojtěch Jarník: *Integrální počet* , ???, Praha, ???

[5] Vojtěch Jarník: *Diferenciální počet* , 3.vydání, Academia, Praha, 1984

[6] Roman Sikorski: *Diferenciální a integrální počet, funkce více proměnných*, 2.změněné a doplněné vydání, Academia, Praha, 1973

[7] Jan Šerák: *Matematická analýza*, ZKUSTO 1995, nepublikováno