

# Predslov

„Prosím Vás, čo to vysielajú? Už chvíľu počúvam, a vôbec ničomu nerozumiem.“

„Ale, pán profesor, to je predsa polhodinka pre deti.“

Tieto skriptá, obsahujúce príklady k neurčitému a určitému (Riemannovmu) integrálu, číselným radom a postupnosťami a radom funkcií jednej premennej, sú zostavené podľa rovnakých zásad ako CVIČENIA Z MATEMATICKEJ ANALÝZY I, na ktoré nadväzujú. Na jednotlivé príklady sa budeme odvolávať ich číslom, pri odvolávaní sa na príklad z CVIČENÍ Z MATEMATICKEJ ANALÝZY I bude pred jeho číslom číslica I; teda pr. 41.3 označuje tretiu úlohu príkladu 41 v týchto skriptách, pr. I.41.3 tretiu úlohu príkladu 41 z CVIČENÍ Z MATEMATICKEJ ANALÝZY I.

Našu predstavu o používaní takejto zbierky úloh sme vyložili v predslove k CVIČENIAM Z MATEMATICKEJ ANALÝZY I; zostala nezmenená a dopĺňame ju len dvoma zásadami, jednou na utíšenie hnevu zúriacich, druhou na ochladenie nadšenia jasajúcich:

1. Ak Vám vyšiel iný výsledok, než je uvedený vzadu, neznamená to, že ten Váš je nesprávny.
2. Ak Vám vyšiel rovnaký výsledok ako je uvedený vzadu, neznamená to, že ten Váš je správny.

Chceme tým povedať, že za kritérium správnosti výsledku nepovažujeme jeho zhodu s výsledkom uvedeným v poslednej časti skript (kam sa iste dostali rôzne chyby a nepresnosti), ale jeho overenie či už „skúškou správnosti“ (ak sa pri výpočte postupovalo „hlava nehlava“) alebo zdôvodnením korektnosti jednotlivých krokov riešenia.

Ďakujeme všetkým, ktorí prispeli k dotvoreniu rukopisu týchto skript: recenzentom doc. RNDr. Igorovi Bockovi, CSc. a doc. RNDr. Jozefovi Venckovi, CSc., ďalej RNDr. Ivete Kundracikovej a Ing. Jiřímu Kubáčkovi, CSc. Za pomoc pri príprave predlôh pre tlač sme zaviazaní RNDr. Jane Chlebíkovej.

A napokon jedno skromné želanie: Na Demidovičovú zbierku úloh reagovala kedysi istá študentka precíteným výkrikom: „Dvoch matematikov by som zavraždila: Lagrangea a Demidoviča!“ Kiež by sa tieto skriptá dočkali aspoň takej odozvy.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Neurčitý integrál</b> .....	<b>7</b>
1.1	Definícia primitívnej funkcie a neurčitého integrálu. Základné metódy integrovania .....	7
1.1.1	Definícia primitívnej funkcie a neurčitého integrálu. Metóda rozkladu .....	7
1.1.2	Metóda substitúcie .....	10
1.1.3	Metóda per partes .....	14
1.1.4	Rekurentné vzťahy. Metóda neurčitých koeficientov .....	17
1.2	Integrovanie racionálnych funkcií .....	18
1.3	Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií .....	24
1.4	Integrovanie niektorých goniometrických funkcií .....	31
1.5	Ďalšie príklady .....	36
<b>2</b>	<b>Riemannov určitý integrál</b> .....	<b>40</b>
2.1	Definícia a základné vlastnosti .....	40
2.2	Výpočet určitého integrálu pomocou neurčitého .....	45
2.3	Integrál ako funkcia hornej (dolnej) hranice .....	54
2.4	Vety o strednej hodnote .....	56
2.5	Niektoré aplikácie Riemannovho určitého integrálu .....	59
2.6	Ďalšie príklady .....	64
<b>3</b>	<b>Číselné rady</b> .....	<b>71</b>
3.1	Základné pojmy .....	71
3.2	Rady s nezápornými (nekladnými) členmi .....	73
3.3	Absolútne a relatívne konvergentné rady .....	83
3.4	Cauchyho súčin radov .....	90
3.5	Ďalšie príklady .....	91
<b>4</b>	<b>Postupnosti a rady funkcií</b> .....	<b>97</b>
4.1	Bodová a rovnomerná konvergenca postupností a radov funkcií .....	97
4.2	Niektoré vlastnosti rovnomerne konvergentných postupností a radov funkcií .....	107
4.3	Mocninové rady .....	113
4.3.1	Polomer a interval konvergenie mocninového radu. Základné vlastnosti mocninových radov .....	113
4.3.2	Taylorove rady .....	120
4.4	Niektoré výpočty pomocou radov .....	125
4.5	Ďalšie príklady .....	129
	<b>Dodatok. Krivky a funkcie dané parametricky</b> .....	<b>137</b>
	<b>Riešenia, návody, poznámky</b> .....	<b>152</b>
	<b>Literatúra</b> .....	<b>251</b>

# Literatúra

- [1] BARNOVSKÁ, M., SMÍTALOVÁ, K.: Matematická analýza III. Skriptum. Bratislava, UK 1989.
- [2] BECKENBACH, E., BELLMAN, R.: Neravenstva. Moskva. Mir 1965.
- [3] BERMAN, G. N.: Zbierka úloh z matematickej analýzy. Bratislava, SVTL 1957.
- [4] BRABEC, J., MARTAN, F., ROZENSKÝ, Z.: Matematická analýza I. Praha, SNTL 1985.
- [5] BUTUZOV, V. F., KRUTICKAJA, N. Č., MEDVEDEV, G. N., ŠIŠKIN, A. A.: Matematičeskij analiz v voprosach i zadačach. Moskva. Vysšaja škola 1984.
- [6] ČERNÝ, I.: Analýza v komplexním oboru. Praha, Academia 1983.
- [7] ČERYCH, J., AKSAMIT, P., JOHN, O., STARÁ, J.: Příklady z matematické analýzy V. Skriptum. Praha, SPN 1987.
- [8] DAVYDOV, N. A., KOROVKIN, P. P., NIKOĽSKIJ, V. N.: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Moskva. Prosveščeniye 1973.
- [9] DEMIDovič, B. P.: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu. Moskva, Nauka 1977.
- [10] FICHTENGOĽC, G. M.: Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija. Tom II. Moskva, Nauka 1970.
- [11] GELBAUM, B. R., OLMSTED, J. M. H.: Kontrprimery v analize. Moskva, Mir 1967.
- [12] GREBENČA, M. K., NOVOSELOV, S. I.: Učebnice matematické analyzy I. Praha, NČSAV 1955.
- [13] JARNÍK, V.: Diferenciální počet (II). Praha, Academia 1976.
- [14] JARNÍK, V.: Integrální počet (I). Praha, Academia 1974.
- [15] KUDRJAVCEV, L. D., KUTASOV, A. D., ČECHLOV, V. I., ŠABUNIN, M. I.: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Predel. Nepreryvnost. Differencirujemost. Moskva, Nauka 1984.
- [16] KUDRJAVCEV, L. D., KUTASOV, A. D., ČECHLOV, V. I., ŠABUNIN, M. I.: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Integraly. Rjady. Moskva, Nauka 1986.
- [17] LEFORT, G.: Algèbre et analyse. Exercices. Paris, Dunod 1964.
- [18] LEHNING, H.: Intégration et sommation avec exercices. Paris, Masson 1985.
- [19] LJAŠKO, I. I., BOJARČUK, A. K., GAJ, JA. G., GOLOVAČ, G. P.: Spravočnoje posobije po matematičeskomu analizu. Časť pervaja. Kijev. Višča škola 1978.
- [20] LJAŠKO, I. I., BOJARČUK, A. K., GAJ, JA. G., GOLOVAČ, G. P.: Spravočnoje posobije po matematičeskomu analizu. Rjady, funkciji vektornogo argumenta, kratnyje i krivolinejnyhe integraly. Kijev. Višča škola 1986.
- [21] MARON, I. A.: Differencialnoje i integralnoje isčislenije v primerach i zadačach. Moskva, Nauka 1970.

- [22] NETUKA, I., VESELÝ, J.: Příklady z matematické analýzy III. Cvičení pro 1. ročník. Skriptum. Praha, SPN 1986.
- [23] NEUBRUNN, T., VENCKO, J.: Matematická analýza I. Skriptum. Bratislava, UK 1989.
- [24] NEUBRUNN, T., VENCKO, J.: Matematická analýza II. Skriptum. Bratislava, UK 1989.
- [25] RIVKIND, J. I.: Differencialnoje i integralnoje isčislenije v zadačach. Minsk, Vyšejšaja škola 1971.
- [26] SADOVNIČIJ, V. A., GRIGORJAN, A. A., KONJAGIN, S. V.: Zadači studenčeskich matematičeskich olimpiad. Moskva, Izdatelstvo Moskovskogo universiteta 1987.
- [27] VILENKIN, N. JA.:
- [28] VILENKIN, N. JA., BOCHAN, K. A., MARON, I. A., MATVJEJEV, I. V., SMOLJANSKIJ, M. L., CVETKOV, A. T.: Zadačnik po kursu matematičeskogo analiza. Moskva. Prosveščeniye 1971.
- [29] VINOGRADOVA, I. A., OLECHNIK, S. N., SADOVNIČIJ, V. A.: Zadači i upražnenija po matematičeskomu analizu. Moskva, Izdatelstvo Moskovskogo universiteta 1988.
- [30] VIRČENKO, N. A., LJAŠKO, I. I., ŠVECOV, K. I.: Grafiki funkcij. Spravočnik. Kijev, Naukova dumka 1979.
- [31] ZORIČ, V. A.: Matematičeskij analiz. Časť I. Moskva, Nauka 1981.

$$\boxed{2\vartheta} \boxed{\varphi} \boxed{\varphi} \boxed{\varphi} \boxed{\varphi} \boxed{\vartheta - \varphi}$$

$$\boxed{2\vartheta} \boxed{\varphi} \boxed{\varphi} \boxed{\varphi} \boxed{\varphi} \boxed{\vartheta - \varphi}$$