Chapter 1

Neurčitý integrál

1. Neurčitý integrál

1.1 Definícia primitívnej funkcie a neurčitého integrálu. Základné metódy integrovania

1.1.1 Definícia primitívnej funkcie a neurčitého integrálu. Metóda rozkladu

Nech je daná funkcia f definovaná na otvorenej množine $G \subset \mathbf{R}$. Diferencovateľná funkcia $F : G \to \mathbf{R}$ sa nazýva *primitívna funkcia k funkcii f*, ak pre každé $x \in G$ platí $F'(x) = f(x)$.

Spravidla sa pojem primitívnej funkcie zavádza aj pre niektoré funkcie, ktorých definičným oborom nie je otvorená množina: diferencovateľná funkcia $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ sa nazýva primitívna funkcia k funkcii $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, ak pre každé $x \in [a,b]$ platí $F'(x) = f(x)$, pričom $F'(a)$, $F'(b)$ sú hodnoty príslušných jednostranných derivácií funkcie F. Analogicky možno zaviesť pojem primitívnej funkcie v prípade funkcií s definičnými obormi typu $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,a] \cup [b,\infty)$ a pod.

Ak funkcia $F : M \to \mathbf{R}$ je primitívna k funkcii $g : M \to \mathbf{R}$ a $g = f|M$, hovoríme, že *funkcia F je primitívna k funkcii f na množine M*.

Množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f sa nazýva *neurčitý integrál funkcie f* a označuje sa $\displaystyle\int f(x)\,dx$ (tento symbol sa však niekedy používa aj na označenie primitívnej funkcie k funkcii f; výraz $f(x)$ v symbole $\int f(x)\,dx$ sa nazýva *integrand*).

Veta 1. *Nech I je interval, nech funkcia $F : I \to \mathbf{R}$ je primitívna k funkcii $f : I \to \mathbf{R}$. Potom funkcia $G : I \to \mathbf{R}$ je primitívna k funkcii f práve vtedy, keď existuje konštanta $C \in \mathbf{R}$ taká, že*

$$G(x) = F(x) + C, \qquad x \in I\,.$$

Ak sú teda splnené predpoklady vety 1, tak

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\,;\, C \in \mathbf{R}\}\,.$$

Je zvykom písať túto rovnosť bez množinových zátvoriek, tj. v podobe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

Veta 1'. *Nech funkcia f je definovaná na zjednotení intervalov I a J, pričom $I \cup J$ nie je interval. Potom platí:*

a) *Funkcia $F : I \cup J \to \mathbf{R}$ je primitívna k funkcii f práve vtedy, keď funkcia $F|I$, resp. $F|J$ je primitívna k funkcii $f|I$, resp. $f|J$.*

b) *Funkcia $G : I \cup J \to \mathbf{R}$ je primitívna k funkcii f práve vtedy, keď existujú konštanty $c, d \in \mathbf{R}$ tak, že*

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + c\,, & ak \quad x \in I \\ F(x) + d\,, & ak \quad x \in J \end{cases} . \tag{1.1}$$

Poznámky. 1. Ak zavedieme symbol C nasledovne

$$C = C(x) = \begin{cases} c\,, & \text{ak} \quad x \in I \\ d\,, & \text{ak} \quad x \in J \end{cases} ,$$

môžeme rovnosť (1.1) písať v tvare

$$G(x) = F(x) + C$$

a tvrdenie b) vety 1' má potom podobu

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C\,.$$

2. Tvrdenia analogické vete 1' možno vysloviť aj pre funkciu f definovanú na konečnom, prípadne spočítateľnom zjednotení intervalov. Ak v takom prípade použijeme zápis $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, treba si uvedomiť, že C označuje diferencovateľnú funkciu, ktorá je konštantná na každom intervale $I \subset D(f)$ a ktorej definičným oborom je množina $D(f)$.

3. Pretože primitívnu funkciu k funkcii f možno nájsť tak, že nájdeme primitívne funkcie k zúženiu funkcie f na jednotlivé intervaly jej definičného oboru, sú nasledujúce vety formulované len pre prípad funkcií definovaných na intervaloch.

Veta 2. *Nech f je spojitá funkcia definovaná na intervale I. Potom existuje primitívna funkcia k funkcii f.*

O platnosti nasledujúcich vzťahov (nazývame ich *tabuľkové integrály*) sa možno presvedčiť derivovaním:

1. $\displaystyle\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$ [1] $\displaystyle = \ln|x| + C$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$;
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$;
7. $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1),$ špeciálne
8. $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C$;
9. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;
10. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$;
11. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C$;
12. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$;
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

Poznámky. 1. Definičné obory funkcií $x^{-p/q}$ pre $p, q \in \mathbf{N}$ nesúdeliteľné a q nepárne a funkcií $\dfrac{1}{1-x^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ nie sú intervalmi, na symbol C vo vzorcoch 1, 2, 4, 6, 13, 14 a 15 sa teda vzťahujú poznámky za vetou 1'.

---

[1] namiesto $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}\, dx$, resp. $\displaystyle\int \frac{g(x)}{f(x)}\, dx$ budeme spravidla písať $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$, resp. $\displaystyle\int \frac{g(x)\, dx}{f(x)}$

2. Podľa definície musí mať primitívna funkcia k funkcii f rovnaký definičný obor ako funkcia f; z tohto hľadiska sú zápisy 1 (pre $\alpha \in (-1,0)$), 5 a 6 (pre prípad znamienka $-$) trocha nepresné. Napr. primitívnou funkciou k funkcii $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ nie je vlastne funkcia $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$, ale funkcia $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$, $x \neq 0$. Treba si teda zapamätať, že v zápise $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ automaticky predpokladáme, že definičným oborom funkcie F je množina $D(f)$.

Veta 3. *Nech funkcie $f_1, \ldots, f_n$ sú definované na intervale I; nech F_i je primitívna funkcia k funkcii f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, nech $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$. Potom funkcia $c_1F_1 + c_2F_2 + \cdots + c_nF_n$ je primitívna k funkcii $c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n$, a teda*

$$\int (c_1f_1(x) + \cdots + c_nf_n(x))\,dx = c_1\int f_1(x)\,dx + \cdots + c_n\int f_n(x)\,dx\;^2.$$

Na použití vety 3 sa zakladá <u>*integrovanie rozkladom*</u>: ak vieme danú funkciu f napísať v tvare lineárnej kombinácie funkcií, ktorých primitívne funkcie poznáme, tak vieme podľa vety 3 nájsť aj $\int f(x)\,dx$.

1. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int (1-x)(1-4x)\,dx$;
2. $\displaystyle\int (3-x^2)^3 dx$;
3. $\displaystyle\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx$;
4. $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$;
5. $\displaystyle\int 3.4 \cdot x^{-0.17} dx$;
6. $\displaystyle\int (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx$;
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$;
8. $\displaystyle\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;
9. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$;
10. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx$;
11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$;
12. $\displaystyle\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}\,dx$;
13. $\displaystyle\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\,dx$;
14. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$;
15. $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$;
16. $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx$;
17. $\displaystyle\int \mathrm{th}^2 x\,dx$.

2. 1. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

a) $\displaystyle\int |x|\,dx$;

b) $\displaystyle\int f(x)\,dx$, kde $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \le 2 \\ 2, & \text{ak } x > 2 \end{cases}$;

c) $\displaystyle\int (|1+x| - |1-x|)\,dx$;

d) $\displaystyle\int \max\{1, x^2\}\,dx$.

---

[2]Výraz na pravej strane tejto rovnosti má tvar $c_1A_1 + \cdots + c_nA_n$, kde $A_1, \ldots, A_n$ sú podmnožiny množiny $C(I)$ všetkých spojitých funkcií definovaných na intervale I. Pripomeňme si, že pre $A, B \subset C(I)$, $f \in C(I)$, $c \in \mathbf{R}$ sú symboly $A + B$, $f + A$, $c \cdot A$ definované takto:

$$A + B = \{f + g;\ f \in A,\ g \in B\}$$

$$f + A = \{f + g;\ g \in A\}$$

$$c \cdot A = \{c \cdot f;\ f \in A\}$$

2. Nájdite všetky funkcie $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pre ktoré platí

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, \text{ ak } x \in (0,1] \\ x, \text{ ak } x > 1 \end{cases} .$$

Riešenie: 1b) Funkcia f je spojitá a jej definičný obor – množina $\mathbf{R}$ – je interval, preto podľa vety 2 existuje primitívna funkcia F k funkcii f. Hľadaná funkcia F vyhovuje pre $x \in (-\infty, 2]$ podmienke $F'(x) = x$, preto

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{pre} \quad x \in (-\infty, 2].$$

Z rovnosti $F'(x) = 2$, ktorá má platiť pre $x \in (2, \infty)$, vyplýva

$$F(x) = 2x + K \quad \text{pre} \quad x \in (2, \infty).$$

Primitívna funkcia F k funkcii f musí byť spojitá v každom bode $x \in \mathbf{R}$ (F má totiž deriváciu v každom bode $x \in \mathbf{R}$), teda aj v bode 2; preto musí platiť

$$\lim_{x \to 2-} F(x) = \lim_{x \to 2+} F(x),$$

tj.

$$\lim_{x \to 2-} \frac{x^2}{2} + C = \lim_{x \to 2+} 2x + K,$$

odtiaľ dostávame podmienku

$$C = 2 + K.$$

Derivovaním sa možno presvedčiť, že takto nájdená funkcia

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 2 + K \text{ , ak } x \le 2 \\ 2x + K \text{ , } \qquad \text{ak } x > 2 \end{cases}$$

je primitívna k funkcii f.

Preto (podľa vety 1)

$$\int f(x)\, dx = F_1(x) + K,$$

kde

$$F_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 2, \text{ ak } x \le 2 \\ 2x \qquad \text{, ak } x > 2 \end{cases} .$$

3. Uveďte príklad nespojitej funkcie $f:(-1,1) \to \mathbf{R}$, ku ktorej existuje primitívna funkcia.

4. Nech funkcia F je primitívna k funkcii f definovanej na ohraničenom intervale (a, b). Rozhodnite o platnosti nasledujúcich implikácií:

1. ak f je ohraničená, tak aj F je ohraničená;
2. ak F je ohraničená, tak f je ohraničená.

Svoje tvrdenia dokážte.

1.1.2 Metóda substitúcie

Veta 4. *Nech I, J sú intervaly, nech F je primitívna funkcia k funkcii $f : I \to \mathbf{R}$; nech $\varphi : J \to \mathbf{R}$ je diferencovateľná funkcia a $\varphi(J) \subset I$. Potom funkcia $F(\varphi(x))$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(x))\, \varphi'(x)$.*

(Tj.: ak

$$\int f(t)\, dt = F(t) + C,$$

tak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C\,.\ )$$

Ak teda hľadáme $\int g(x)\,dx$ a funkciu g sa nám podarí zapísať v tvare $g(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, pričom vieme nájsť $\int f(t)\,dt$, tak podľa vety 4 vieme nájsť aj $\int g(x)\,dx$. Prechod od hľadania $\int g(x)\,dx$ k výpočtu $\int f(t)\,dt$ budeme zapisovať nasledovne

$$\int g(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \left|\begin{array}{c} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = dt \end{array}\right| = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C\,.$$

Ak funkcia φ je naviac prostá, vyplýva z vety 4 toto tvrdenie:

Veta 5. *Nech I, J sú intervaly, nech* $f : I \to \mathbf{R}$ *je spojitá a* $\varphi : J \to \mathbf{R}$ *prostá*[3] *diferencovateľná funkcia, pričom* $\varphi(J) = I$. *Ak funkcia F(t) je primitívna k funkcii* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, *tak funkcia* $F(\varphi^{-1}(x))$ *je primitívna k funkcii f(x).*

(Tj.: ak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(t) + C\,,$$

tak

$$\int f(x)\,dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C\ ).$$

Použitie vety 5 pri hľadaní $\int f(x)\,dx$ budeme zapisovať nasledovne:

$$\int f(x)\,dx = \left|\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array}\right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C\,.$$

Poznámka. Podstatou obidvoch uvedených viet o substitúcii je ,,rovnosť"

$$\int f(u)\,du = \int f(\varphi(v))\varphi'(v)\,dv\ ^{4},$$

ktorú ,,čítame" v prípade vety 4 ,,sprava doľava" (tj. hľadanie integrálu na pravej strane prevádzame na výpočet integrálu vľavo) a v prípade vety 5 naopak ,,zľava doprava".

Pre $\varphi(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ z vety 4 vyplýva:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot a dx = \left|\begin{array}{c} ax + b = t \\ adx = dt \end{array}\right| = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C\,.$$

5. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a}$;
2. $\displaystyle\int (2x-3)^{10}dx$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$;
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3x^2}$;

---

[3] namiesto existencie inverznej funkcie φ^{-1} stačí dokonca predpokladať len existenciu pravej inverznej funkcie $\overline{\varphi} : J \to I$ (pre funkciu $\overline{\varphi}$ teda platí $\varphi(\overline{\varphi}(x)) = x$, $x \in J$), pozri [14, kapitola III, §4, veta 53]

[4] použitím diferenciálu funkcie φ sa tento zápis stane ešte názornejším:

$$\int f(u)\,du = \int f(\varphi(v))\,d(\varphi(v))$$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$;

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+2}$;

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x+1}$;

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$;

10. $\displaystyle\int (e^{-x}+e^{-2x})\,dx$;

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2(2x+\pi/4)}$;

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$;

13. $\displaystyle\int \mathrm{cth}^2\frac{x}{3}\,dx$;

14. $\displaystyle\int x\,(1-x)^{10}dx$;

15. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$.

Riešenie. 7.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3x^2-2x+1} &= \int \frac{dx}{3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)} = \int \frac{dx}{3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right]} = \\
&= \int \frac{dx}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}} = \left| \begin{array}{c} x-\frac{1}{3}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{3t^2+\frac{2}{3}} = \int \frac{dt}{\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}t^2+1\right)} = \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)^2+1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}\,dt}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)^2+1} = \left| \begin{array}{c} \frac{3}{\sqrt{2}}t=z \\ \frac{3}{\sqrt{2}}\,dt=dz \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,z+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)+C = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)+C.
\end{aligned}$$

14. Výpočet sa zjednoduší použitím substitúcie $1-x=t$:

$$\begin{aligned}
\int x\,(1-x)^{10}dx &= -\int x\,(1-x)^{10}\cdot(-1)\,dx = \left| \begin{array}{c} 1-x=t \\ -dx=dt \end{array} \right| = -\int (1-t)\cdot t^{10}dt = \\
&= \int (t^{11}-t^{10})\,dt = \frac{t^{12}}{12}-\frac{t^{11}}{11}+C = \frac{(1-x)^{12}}{12}-\frac{(1-x)^{11}}{11}+C.
\end{aligned}$$

Uvedeným spôsobom možno (pre $a>0$) odvodiť tieto vzorce:

3'. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C$;

4'. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$;

5'. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$;

6'. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

6. Použitím substitúcie v podobe $\varphi(x)=t$ nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \sin^5 x\,\cos x\,dx$;

2. $\displaystyle\int x\,(1+x^2)^{10}dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

4. $\displaystyle\int x^2\,\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$;

5. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(8x^3+27)^{2/3}}$;

6. $\displaystyle\int x\, e^{-x^2}dx$;

7. $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$;

8. $\displaystyle\int \frac{2\,\ln^2 x-3}{x}\,dx$;

9. $\displaystyle\int \mathrm{tg}\; x\,dx$;

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\arcsin x\,\cdot\,\sqrt{1-x^2}}$;

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\mathrm{th}^2\, x}\,\cdot\,\mathrm{ch}^2 x}$;

12. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{4+x^4}$;

13. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4-2x^2+3}$;

14. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^8-2}$;

15. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$;

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x\,(1+x)}}$;

18. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

19. $\displaystyle\int \frac{x^{n/2}dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}\qquad (n\in\mathbf{N})$;

20. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$;

21. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}$;

22. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,\cos x\,dx}{\sqrt{a^2\,\sin^2 x+b^2\,\cos^2 x}}\,,\qquad a^2\neq b^2$;

23. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$;

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,\ln x\,\ln(\ln x)}$;

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

27. $\displaystyle\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\,dx$.

Riešenie. 12.

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{4+x^4} &= \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{4+(x^2)^2} = \left|\begin{array}{c} x^2=t \\ 2x\,dx=dt\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2}+C = \\ &= \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x^2}{2}+C\end{aligned}$$

(pri výpočte posledného integrálu sme použili vzorec 3').

16.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} &= 2\int\frac{1}{1+x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \left|\begin{array}{c} \sqrt{x}=t \\ \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=dt\end{array}\right| = 2\int\frac{dt}{1+t^2} = 2\,\mathrm{arctg}\; t+C = \\ &= 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} &= \frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}dx}{e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}} = \left|\begin{array}{c} 1+e^{2x}=t \\ 2e^{2x}dx=dt\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}} = \\ &= \int\frac{1}{(t-1)}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \left|\begin{array}{c} \sqrt{t}=z \\ \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}=dz\end{array}\right| = \int\frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C = \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}\right|+C = \\ &= \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+C = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right)+C.\end{aligned}$$

Poznámka. V riešení príkladu 6.26 sme mohli dve za sebou nasledujúce substitúcie $1+e^{2x}=t$ a $\sqrt{t}=z$ zlúčiť do jedinej: $\sqrt{1+e^{2x}}=z$.

7. Použitím substitúcie v podobe $x = \varphi(t)$ nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$; 2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$; 4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

5. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}\,dx$; 6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

Riešenie. 1. Funkcia $f(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$ je definovaná a spojitá na intervale $[0,\infty)$. Zvoľme funkciu φ v tvare $\varphi(t) = t^2$, $t \ge 0$; tá – keďže je prostá a diferencovateľná a platí $\varphi([0,\infty)) = [0,\infty)$ – vyhovuje predpokladom vety 5. Pretože primitívnu funkciu k funkcii $f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = \dfrac{2t}{2+t} = 2 - \dfrac{4}{2+t}$ vieme nájsť, môžeme použiť vetu 5, podľa ktorej

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx &= \left|\begin{array}{c} x=t^2 \\ dx = 2t\,dt\end{array}\right| = \int \frac{2t}{2+t}\,dt = \int\left(2-\frac{4}{2+t}\right)dt = 2t - 4\,\ln|2+t| + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 4\,\ln(2+\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

(pri úprave posledného výrazu sme využili, že $\ln|2+\sqrt{x}| = \ln(2+\sqrt{x})$).

Poznámky. 1. Odporúčame čitateľovi presvedčiť sa, že uvedený výsledok sa nezmení, ak zvolíme funkciu φ v tvare $\varphi(t) = t^2$, $t \le 0$.

2. Všimnime si, že napr. neurčitý integrál z pr. 6.16 sme mohli rovnako dobre vypočítať aj na základe vety 5 substitúciou $x = t^2$, $t \ge 0$, podobne neurčitý integrál z pr. 6.26 substitúciou $x = \dfrac{1}{2}\ln(z^2-1)$ (ktorú nájdeme tak, že zo vzťahu $\sqrt{1+e^{2x}} = z$ vyjadríme x). Teda ak φ je prostá funkcia, možno namiesto vety 4 (so substitúciou $\varphi(x) = t$) použiť vetu 5 (so substitúciou $x = \varphi^{-1}(t)$, kde φ^{-1} je inverzná funkcia k funkcii φ). Tento prechod od substitúcie v tvare $\varphi(x) = t$ k tvaru $x = \varphi^{-1}(t)$ používame, ak funkciu f (ktorej neurčitý integrál hľadáme) nevieme jednoduchými úpravami prepísať do podoby $g(\varphi(x))\,\varphi'(x)$.

8. Použitím trigonometrických substitúcií $x = a\,\sin t$, $x = a\,\cos t$, $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $x = a/\cos t$ a pod. nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$; 2. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$; 4. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$;

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$, $a > 0$; 6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$, $a > 0$.

9. Nech P je polynóm. Potom $\int P(\sqrt[n]{x})\,dx = Q(\sqrt[n]{x}) + C$, kde Q je polynóm ($n \in \mathbf{N}$). Dokážte!

10. Nájdite všetky funkcie $f:[0,\infty) \to \mathbf{R}$, $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vyhovujúce podmienkam

$$x\,f'(x^2) + g'(x) = \cos x - 3x^3\,,$$

$$f(x^2) + g(x) = \sin x - x^4\,.$$

1.1.3 Metóda per partes

Veta 6. *Nech funkcie u, $v : I \to \mathbf{R}$ sú diferencovateľné na intervale I a nech existuje primitívna funkcia k funkcii uv'. Potom existuje aj primitívna funkcia k funkcii $u'v$ a platí*

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx.$$

11. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int x\,\cos x\,dx$;
2. $\displaystyle\int x\,e^{-x}\,dx$;
3. $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$;
4. $\displaystyle\int (x^2-x+1)\,\ln x\,dx$;
5. $\displaystyle\int x^2\,3^{-2x}dx$;
6. $\displaystyle\int (x^2+3)\,\sin 2x\,dx$;
7. $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$;
8. $\displaystyle\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,dx$;
9. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;
10. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln^2 x\,dx$;
11. $\displaystyle\int x\,\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|\,dx$;
12. $\displaystyle\int \ln x\,dx$;
13. $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$;
14. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$;
15. $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$;
16. $\displaystyle\int e^{2x}\cos x\,dx$;
17. $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx\,,\quad ab\neq 0$;
18. $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx$.

Riešenie. 13.

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{arctg}\,x\,dx &= \int 1\cdot\mathrm{arctg}\,x\,dx = \begin{vmatrix} u'=1 & u=x \\ v=\mathrm{arctg}\,x & v'=\dfrac{1}{1+x^2}\end{vmatrix} = x\,\mathrm{arctg}\,x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2} = \\
&= x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{1+x^2} = \begin{vmatrix} 1+x^2=t \\ 2x\,dx=dt\end{vmatrix} = x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \\
&= x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln|t|+C = x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C
\end{aligned}$$

16. Použitím metódy per partes dostaneme

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u'=\cos x & u=\sin x \\ v=e^{2x} & v'=2\,e^{2x}\end{vmatrix} = e^{2x}\sin x-2\int e^{2x}\sin x\,dx. \tag{1.2}$$

Neurčitý integrál $\int e^{2x}\sin x\,dx$ vyjadríme opäť pomocou metódy per partes:

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u'=\sin x & u=-\cos x \\ v=e^{2x} & v'=2\,e^{2x}\end{vmatrix} = -e^{2x}\cos x+2\int e^{2x}\cos x\,dx.$$

Ak toto vyjadrenie dosadíme do vzťahu (1.2), dostaneme pre hľadaný neurčitý integrál $I=\int e^{2x}\cos x\,dx$ rovnosť

$$I = e^{2x}\sin x+2\,e^{2x}\cos x-4\,I, \tag{1.3}$$

z ktorej vyplýva

$$I=\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{1}{5}\,e^{2x}(\sin x+2\,\cos x)+C. \tag{1.4}$$

Poznámka. Nebude na škodu uvedomiť si, že (1.3) je rovnosťou dvoch množín: ak označíme $f(x)$ jednu pevne zvolenú primitívnu funkciu k funkcii $e^{2x}\cos x$ (f existuje podľa vety 2, našou úlohou je nájsť jej predpis), má rovnosť (1.3) tvar

$$\{f(x)+C\,;\ C\in\mathbf{R}\} = e^{2x}\sin x+2\,e^{2x}\cos x-4\cdot\{f(x)+K\,;\ K\in\mathbf{R}\},$$

tj.

$$\{f(x)+C\,;\,C\in\mathbf{R}\}=\{e^{2x}\sin x+2\,e^{2x}\cos x-4f(x)-4K\,;\,K\in\mathbf{R}\}. \tag{1.5}$$

Zdôvodnime teraz prechod od (1.3) k (1.4) podrobne: Hľadaná funkcia f je prvkom množiny na ľavej strane rovnosti (1.5) (stačí položiť $C=0$), musí teda patriť aj do množiny na pravej strane. Preto existuje $K\in\mathbf{R}$ tak, že

$$f(x)=e^{2x}\sin x+2\,e^{2x}\cos x-4\,f(x)-4K,$$

odtiaľ

$$f(x)=\frac{1}{5}\,e^{2x}\sin x+\frac{2}{5}\,e^{2x}\cos x-\frac{4}{5}\,K.$$

Podľa vety 1 potom

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos x\,dx &= \{f(x)+\overline{C}\,;\,\overline{C}\in\mathbf{R}\}=\{\frac{1}{5}\,e^{2x}\sin x+\frac{2}{5}\,e^{2x}\cos x-\frac{4}{5}\,K+\overline{C}\,;\,\overline{C}\in\mathbf{R}\}=\\ &= \{\frac{1}{5}\,e^{2x}(\sin x+2\,\cos x)+C\,;\,C\in\mathbf{R}\}.\end{aligned}$$

12. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\int x^5e^{-x^3}\,dx$;
2. $\int e^{\sqrt{x}}dx$;
3. $\int x\,\sin\sqrt{x}\,dx$;
4. $\int(\arcsin x)^2dx$;
5. $\int x\,\sin^2 x\,dx$;
6. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$;
7. $\int(e^x-\cos x)^2dx$;
8. $\int\frac{x\,\cos x}{\sin^3 x}\,dx$;
9. $\int\frac{x\,\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;
10. $\int\frac{x\,\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;
11. $\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$;
12. $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$;
13. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$;
15. $\int\frac{x\,e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$;
16. $\int\frac{e^{\operatorname{arctg}x}dx}{(1+x^2)^{3/2}}$;
17. $\int\frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$.

13. Nech $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je dvakrát diferencovateľná funkcia. Nájdite $\int x\,f''(x)\,dx$.

14$_0$. Nech funkcia $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ má primitívnu funkciu, nech g je polynóm. Potom existuje primitívna funkcia k funkcii fg. Dokážte!

15$_0$. Ak funkcie $f,g:I\to\mathbf{R}$ sú n-krát spojite diferencovateľné na intervale I, tak

$$\int f\,g^{(n)}dx=f\,g^{(n-1)}-f'g^{(n-2)}+f''g^{(n-3)}+\cdots+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}g+(-1)^n\int f^{(n)}g\,dx$$

(uvedený vzťah sa nazýva *viacnásobná formula per partes*). Dokážte!

1.1.4 Rekurentné vzťahy. Metóda neurčitých koeficientov

Rekurentné vzťahy umožňujú previesť výpočet integrálu závisiaceho od indexu n na výpočet integrálu toho istého typu s menším indexom.

16. Použitím metódy per partes odvoďte rekurentné vzťahy pre výpočet nasledujúcich integrálov:

1. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $a>0$;
2. $I_n = \int (a^2-x^2)^n dx$, $a>0$;
3. $I_n = \int \operatorname{tg}^n x\, dx$;
4. $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$, $a>0$;
5. $I_n = \int \sin^n x\, dx$;
6. $I_n = \int \cos^n x\, dx$.

Riešenie. 1.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \left| \begin{array}{ll} u'=1 & u=x \\ v=(x^2+a^2)^{-n} & v'=-2nx(x^2+a^2)^{-n-1} \end{array} \right| = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2a^2nI_{n+1}.$$

Z takto získanej rovnosti

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2a^2nI_{n+1}$$

vyplýva rekurentný vzťah

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\,I_n \text{ [5]}. \tag{1.6}$$

Pre $n=1$ tak dostávame

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\,I_1 = \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \\ &= \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Pomocou I_2 môžeme teraz vyjadriť I_3 atď.

(Všimnime si, že pri odvodení vzťahu (1.6) sme potrebovali len predpoklad $n \neq 0$, teda uvedený vzťah platí pre všetky reálne čísla $n \neq 0$. Špeciálne pre $n = 1/2$ – kedy sa vlastne „stráca“ jeho „rekurentnosť“, pretože vtedy $\frac{2n-1}{2na^2} = 0$ – z neho vyplýva

$$I_{3/2} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

[5] Rekurentný vzťah sme mohli odvodiť aj nasledovne:

$$I_m = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^m}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^m}\,dx = \frac{1}{a^2}\left(I_{m-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^m}\,dx\right),$$

pritom

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^m}\,dx &= \int x\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^m}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u'=x\,(x^2+a^2)^{-m} & u=-(x^2+a^2)^{-(m-1)}/2(m-1) \\ v=x & v'=1 \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2(m-1)}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)}\,I_{m-1}, \end{aligned}$$

teda

$$I_m = \frac{1}{a^2}\left(I_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)}\,I_m\right) = \frac{1}{2(m-1)a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)a^2}\,I_{m-1}$$

(ak položíme $m-1=n$, dostaneme zrejme rovnosť (1.6)).

Pomocou $I_{3/2}$ teraz môžeme vyjadriť $I_{5/2}$ atď.)

17. Nájdite $\int (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x} dx$.

Riešenie. Tento neurčitý integrál možno vypočítať opakovaným použitím metódy per partes (teda vlastne použitím vzorca z pr. 15). Ak si predstavíme postup výpočtu, zistíme, že hľadaná primitívna funkcia bude mať tvar

$$Q_3(x)\, e^{3x} + C \,,$$

kde $Q_3(x) = Kx^3 + Lx^2 + Mx + N$ je polynóm 3. stupňa. Teraz treba už len nájsť koeficienty K, L, M, N tak, aby platilo

$$(Q_3(x)\, e^{3x} + C)' = (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x}. \tag{1.7}$$

Pretože

$$\begin{aligned}((Kx^3 + Lx^2 + Mx + N)\, e^{3x} + C)' &= (3Kx^2 + 2Lx + M)\, e^{3x} + 3e^{3x}\, (Kx^3 + Lx^2 + Mx + N) = \\ &= (3Kx^3 + (3L + 3K)\, x^2 + (3M + 2L)\, x + (M + 3N))\, e^{3x} \,,\end{aligned}$$

má rovnosť (1.7) tvar

$$(3Kx^3 + (3L + 3K)\, x^2 + (3M + 2L)\, x + (M + 3N))\, e^{3x} = (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x} \,.$$

Táto rovnosť bude splnená, ak polynómy na jej pravej a ľavej strane budú mať zhodné koeficienty u členov s rovnakými mocninami, tj. ak bude platiť

$$3K = 1 \,, \qquad 3L + 3K = -2 \,, \qquad 3M + 2L = 0 \,, \qquad M + 3N = 5 \,.$$

Riešením tejto sústavy dostaneme

$$K = 1/3 \,, \qquad L = -1 \,, \qquad M = 2/3 \,, \qquad N = 13/9 \,,$$

teda hľadaná primitívna funkcia je

$$\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{13}{9} \right) e^{3x} + C \,.$$

Postup výpočtu neurčitého integrálu uvedený v riešení pr. 17, nazývaný *metóda neurčitých koeficientov*, umožňuje vlastne nahradiť integrovanie derivovaním v prípade, keď vieme vopred odhadnúť tvar hľadanej primitívnej funkcie.

18. Metódou neurčitých koeficientov nájdite

1. $\displaystyle\int (3x^3 - 17)\, e^{2x} dx$;
2. $\displaystyle\int (x^2 + 3x + 5)\, \cos 2x\, dx$;
3. $\displaystyle\int (x^2 + 2x - 1)\, \sin 3x\, dx$;
4. $\displaystyle\int (2 + x^2)\, \cos 2x + (1 + 2x + 3x^3)\, \sin 2x\, dx$.

1.2 Integrovanie racionálnych funkcií

Funkcia R tvaru $R = \dfrac{P}{Q}$, kde P, Q sú polynómy, sa nazýva *racionálna funkcia*. (Špeciálne teda každý polynóm je racionálnou funkciou.) Ak naviac stupeň polynómu P je menší ako stupeň polynómu Q, hovoríme, že R je *rýdzo racionálna funkcia*.

Funkcie tvaru $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\dfrac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$, kde A, B, C, a, p, q sú reálne konštanty, pričom $p^2 - 4q < 0$ (tj. polynóm $x^2 + px + q$ nemá reálne korene), $n \in \mathbf{N}$, sa nazývajú *elementárne racionálne funkcie* (*parciálne zlomky*).

Veta 7. *Nech $Q(x)$ je polynóm stupňa $n \geq 1$, nech koeficient pri jeho najvyššej mocnine je rovný 1* [6]. *Potom*

a) *Polynóm $Q(x)$ možno zapísať jediným spôsobom v tvare*

$$(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}\,,$$

kde $a_1,\ldots,a_k$ sú navzájom rôzne korene polynómu $Q(x)$, polynómy $x^2+p_1x+q_1,\ldots,\ x^2+p_s+q_s$ nemajú reálne korene a sú navzájom rôzne, $n_1,\ldots,n_k,m_1,\ldots,m_s\in\mathbf{N}$.

b) *Rýdzo racionálnu funkciu $R=\dfrac{P}{Q}$ (P je polynóm) možno zapísať v tvare súčtu parciálnych zlomkov. Sčítance vystupujúce v tomto súčte možno rozdeliť na skupiny patriace k jednotlivým členom rozkladu polynómu $Q(x)$, tj. na skupinu parciálnych zlomkov patriacu k členu $(x-a_1)^{n_1},\ldots$, skupinu parciálnych zlomkov patriacu k členu $(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$. Pritom skupina patriaca k členu tvaru $(x-\alpha)^\nu$ pozostáva z parciálnych zlomkov*

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)}\,,\quad \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}\,,\quad\ldots,\quad \frac{A_\nu}{(x-\alpha)^\nu}\,,$$

skupina patriaca k členu tvaru $(x^2+\beta x+\gamma)^\mu$ pozostáva z parciálnych zlomkov

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+\beta x+\gamma)}\,,\quad \frac{B_2x+C_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2}\,,\quad\ldots,\quad \frac{B_\mu x+C_\mu}{(x^2+\beta x+\gamma)^\mu}\,.$$

Integrovanie elementárnych racionálnych funkcií

1.
$$\int\frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C\,;$$

2. pre $n\in\mathbf{N}$, $n>1$ je
$$\int\frac{A}{(x-a)^n}\,dx=\frac{A}{1-n}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C.$$

Výpočet neurčitých integrálov $\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)}\,dx$, $\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ možno substitúciou $x+\dfrac{p}{2}=t$ previesť na hľadanie neurčitých integrálov $\displaystyle\int\frac{Mt+N}{(t^2+r)}\,dt$, $\displaystyle\int\frac{Mt+N}{(t^2+r)^n}\,dt$, kde $r=\dfrac{4q-p^2}{4}>0$ (uvedená substitúcia vyplýva z úpravy kvadratického trojčlena x^2+px+q na úplný štvorec $\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{4q-p^2}{4}$).

3.
$$\int\frac{Mt+N}{t^2+r}\,dt=\begin{cases} N\displaystyle\int\frac{dt}{t^2+r}=\frac{N}{\sqrt{r}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{r}}+C \ \text{ pre } M=0\\[2ex] \displaystyle\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+r}+N\int\frac{dt}{t^2+r}=\frac{M}{2}\ln(t^2+r)+\frac{N}{\sqrt{r}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{r}}+C \quad \text{pre } M\neq 0\\ \text{(prvý z integrálov sme riešili substitúciou } t^2+r=s) \end{cases};$$

4. pre $n\in\mathbf{N}$, $n>1$ je
$$\int\frac{Mt+N}{(t^2+r)^n}\,dt=\begin{cases} N\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+r)^n} \quad \text{pre } M=0\text{, tento integrál hľadáme pomocou rekurentného vzorca}\\ \text{(pozri pr. 16.1)}\\[2ex] \displaystyle\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+r)^n}+N\int\frac{dt}{(t^2+r)^n}=\frac{M}{2(1-n)}\,\frac{1}{(t^2+r)^{n-1}}+N\int\frac{dt}{(t^2+r)^n} \ \text{ pre } M\neq 0\\ \text{(prvý z integrálov sme riešili substitúciou } t^2+r=s\text{, na výpočet druhého používame}\\ \text{rekurentný vzorec – pozri pr. 16.1)} \end{cases}$$

19. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

[6] zrejme každý polynóm $\overline{Q}(x)$ stupňa $n\geq 1$ možno zapísať v tvare $\overline{Q}(x)=aQ(x)$, kde a je koeficient pri najvyššej mocnine polynómu $\overline{Q}(x)$ a polynóm $Q(x)$ vyhovuje predpokladom vety 7

1. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$;

2. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

3. $\displaystyle\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,dx$;

4. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{(x-1)(x+1)(x+2)}$.

Riešenie. 4. Ak je stupeň polynómu P väčší než stupeň polynómu Q, možno racionálnu funkciu $\frac{P}{Q}$ napísať v tvare súčtu polynómu a rýdzo racionálnej funkcie (stačí polynóm P vydeliť polynómom Q), v našom prípade

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{(x-1)(x+1)(x+2)} &= \left(\frac{x^4}{x^3+2x^2-x-2} = x-2+\frac{5x^2-4}{x^3+2x^2-x-2} = \right) \\ &= x-2+\frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,.\end{aligned}$$

Podľa vety 7b) funkciu $\frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)}$ možno napísať v tvare

$$\frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\,. \tag{1.8}$$

Neznáme koeficienty A, B, C môžeme nájsť nasledovne: súčet parciálnych zlomkov na pravej strane rovnosti (1.8) upravíme na spoločný menovateľ

$$\begin{aligned}\frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)} &= \frac{A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \\ &= \frac{(A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C)}{(x-1)(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

a porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách premennej x na pravej a ľavej strane rovnosti

$$5x^2-4=(A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C) \tag{1.9}$$

dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{array}{rcrcrl} A & + & B & + & C= & 5 \\ 3A & + & B & & = & 0 \\ 2A & - & 2B & - & C= & -4 \end{array} \quad , \tag{1.10}$$

ktorej riešenie je $A=1/6$, $B=-1/2$, $C=16/3$.

Teraz už môžeme pristúpiť k výpočtu nášho neurčitého integrálu:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4\,dx}{(x-1)(x+1)(x+2)} &= \int \left(x-2+\frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)}\right)dx = \\ &= \int \left(x-2+\frac{1}{6(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{16}{3(x+2)}\right)dx = \\ &= \frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{16}{3}\ln|x+2|+C\,.\end{aligned}$$

Poznámka. Rovnosť (1.9) platí pre všetky $x \in \mathbf{R}$ (pre $x \neq 1, -1, -2$ to vyplýva z rovnosti (1.8), ktorej platnosť zaručuje veta 7b), pre $x = 1, -1, -2$ to vyplýva zo spojitosti funkcií na pravej a ľavej strane rovnosti (1.9)). Ak v tejto rovnosti dosadíme za x vhodné čísla, dostaneme sústavu rovníc pre neznáme A, B, C, ktorá môže byť jednoduchšia než (1.10).

Zapíšme (1.9) v tvare

$$5x^2 - 4 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)\,,$$

potom je zrejmé, že za x bude vhodné zvoliť čísla $1, -1$ a -2 (teda korene polynómu z menovateľa rýdzo racionálnej funkcie, ktorú sme rozkladali na parciálne zlomky [7]); dostaneme tak rovnice

$$1 = 6A\,, \quad 1 = -2B\,, \quad 16 = 3C\,.$$

20. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$;

2. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x-5)}$;

4. $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$;

5. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^3}\,dx$;

6. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{x^4-2x^3+2x-1}$.

Riešenie. 1. Vyjadrenie integrandu ako súčtu parciálnych zlomkov hľadáme podľa vety 7b) v tvare

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}\,.$$

Po úprave pravej strany na spoločný menovateľ a porovnaní koeficientov polynómov v čitateli na pravej a ľavej strane dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcl} & A & & + & C & = & 1 \\ & & B & + & 2C & = & 0 \\ - & A & - B & + & C & = & 1 \end{array}\quad ,$$

ktorej riešením je $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/2$. Preto

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx &= \int\left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x-1)}\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C = \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C\,.\end{aligned}$$

21. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$;

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$;

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$;

5. $\displaystyle\int \frac{(3x^2-2)x\,dx}{(x+2)^2(3x^2-2x+4)}$;

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$.

---

[7] tento postup je výhodný, ak menovateľ rozkladanej rýdzo racionálnej funkcie je polynóm n-tého stupňa, ktorý má práve n navzájom rôznych reálnych koreňov

Riešenie. 3. Pretože $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, pričom polynóm x^2-x+1 nemá reálne korene, budeme vyjadrenie integrandu ako súčtu parciálnych zlomkov hľadať v tvare

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\,.$$

Pre neznáme koeficienty $A,\ B,\ C$ dostávame sústavu rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ -A & + & B & + & C & = & 0 \\ A & & & + & C & = & 1 \end{array}\quad ,$$

ktorej riešením je $A=1/3$, $B=-1/3$, $C=2/3$. Preto

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x^3+1} &= \int\left(\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right)dx=\frac13\ln|x+1|-\frac13\int\frac{x-2}{\left(x-\frac12\right)^2+\frac34}\,dx=\left|\begin{array}{r} x-\frac12=t \\ dx=dt\end{array}\right|= \\
&= \frac13\ln|x+1|-\frac13\int\frac{t-\frac32}{t^2+\frac34}\,dt=\frac13\ln|x+1|-\frac13\left(\frac12\int\frac{2t\,dt}{t^2+\frac34}-\frac32\int\frac{dt}{t^2+\frac34}\right)= \\
&= \frac13\ln|x+1|-\frac16\ln\left(t^2+\frac34\right)+\frac12\cdot\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt3}+C= \\
&= \frac13\ln|x+1|-\frac16\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}+C\,.
\end{aligned}$$

22. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$;
2. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$;
3. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$;
4. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^6+4x^4+4x^2}$.

Riešenie. 4. Pretože $x^6+4x^4+4x^2=x^2(x^2+2)^2$ a polynóm x^2+2 nemá reálne korene, možno podľa vety 7b) písať integrand v tvare

$$\frac{1}{x^6+4x^4+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}\,,$$

pritom neznáme $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ sú riešením sústavy

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} A & & + & C & & & & & & & = & 0 \\ & B & & & + & D & & & & & = & 0 \\ 4A & & + & 2C & & & + & E & & & = & 0 \\ & 4B & & & + & 2D & & & + & F & = & 0 \\ 4A & & & & & & & & & & = & 0 \\ & 4B & & & & & & & & & = & 1 \end{array}\quad ,$$

odtiaľ $A=0$, $B=1/4$, $C=0$, $D=-1/4$, $E=0$, $F=-1/2$. Preto

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x^6+4x^4+4x^2} &= \int\left(\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4(x^2+2)}-\frac{1}{2(x^2+2)^2}\right)dx= \\
&= -\frac{1}{4x}-\frac{1}{4\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt2}-\frac12\underbrace{\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}}_{I}\,.
\end{aligned}$$

Integrál I môžeme nájsť dosadením do rekurentného vzťahu (1.6) z pr. 16.1; nasledujúci výpočet integrálu I však v tomto prípade nevyžaduje viacej námahy než odvodenie rovnosti (1.6):

$$
\begin{aligned}
I=\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2)-x^2}{(x^2+2)^2}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x^2+2} - \int x\cdot \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx\right) = \left| \begin{array}{ll} u'=\dfrac{x}{(x^2+2)^2} & u=-\dfrac{1}{2(x^2+2)} \\ v=x & v'=1 \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2}\right) = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C \quad {}^{8}.
\end{aligned}
$$

Teda celkovo

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^6+4x^4+4x^2} &= -\frac{1}{4x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}I = \\
&= -\frac{1}{4x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \\
&= -\frac{1}{4x} - \frac{x}{8(x^2+2)} - \frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C\,.
\end{aligned}
$$

23. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{x^3+2}$;
2. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$;
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$;
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$;
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}$;
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$;
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$;
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+8x^6+16x^4}$;
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+bx^2+ax+ab}$, $\quad ab\neq 0$.

24. Pre aké hodnoty parametrov $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ $(c^2+d^2>0)$ je $\displaystyle\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx$ racionálnou funkciou?

25. Akým podmienkam musia vyhovovať koeficienty $a, b, c \in \mathbf{R}$ $(a^2+b^2+c^2>0)$, aby $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ bola funkcia tvaru

a) $R(x)$;
b) $K\ln R(x)+C$;
c) $K\operatorname{arctg} R(x)+C$;

kde $R(x)$ je racionálna funkcia a $K\neq 0$?

26. Výpočet nasledujúcich neurčitých integrálov možno zjednodušiť použitím vhodných substitúcií:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-7}{(x-1)^3}\,dx$;
2. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^8-1}$;
3. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^8+3}$;
4. $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx$;

---

[8] Tento výpočet zodpovedá postupu z poznámky [5] k riešeniu pr. 16.1. Ak chceme pri výpočte integrálu I použiť postup z riešenia pr. 16.1, musíme tam uvedenú metódu per partes použiť na vyjadrenie integrálu $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2}$.

5. $\displaystyle\int \frac{x^{11}\,dx}{x^8+3x^4+2}$;

6. $\displaystyle\int \frac{x^9\,dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$;

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$;

8. $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx$;

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+7x}$;

10. $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}$;

11. $\displaystyle\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,dx$;

12. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$ (použite substitúciu $x+\dfrac{1}{x}=t$) ;

13. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx$;

14. $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx$.

27. Na výpočet integrálu $I=\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$, $a\neq b$, $m,n\in\mathbf{N}$ použite substitúciu $t=\dfrac{x+a}{x+b}$. Na základe získaného výsledku nájdite integrál $J=\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$.

28. 1. Ak primitívna funkcia F k funkcii f je racionálna, tak primitívne funkcie k funkciám $f(x)\operatorname{arctg}x$, $f(x)\operatorname{arcctg}x$, $f(x)\ln x$ sú elementárne. Dokážte!

2. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

a) $\displaystyle\int x^7\operatorname{arctg}x\,dx$;

b) $\displaystyle\int \operatorname{arcctg}\frac{1}{x-1}\,dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{\ln(1-x+x^2)}{x^2}\,dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\,dx$.

1.3 Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

29. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$;

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x}}$;

3. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt[6]{1+x}}{1+x+\sqrt[3]{(1+x)^4}}\,dx$;

4. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$.

<u>*Polynómom dvoch premenných*</u> x, y nazývame funkciu $P:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ v tvare $P(x,y)=\displaystyle\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}a_{mn}x^my^n$, kde $a_{mn}\in\mathbf{R}$ $(m=0,1,\ldots,M,\ n=0,1,\ldots,N)$ sú konštanty.

<u>*Racionálnou funkciou dvoch premenných*</u> x, y nazývame funkciu $f(x,y)$, ktorú možno zapísať v tvare $f(x,y)=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde P,Q sú polynómy premenných x, y.

30. 1. Nech $R(x,y)$ je racionálna funkcia dvoch premenných, $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, $a^2+b^2>0$, $c^2+d^2>0$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$. Dokážte, že výpočet integrálu $\int R(x,\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)})\,dx$ možno previesť na výpočet integrálu z racionálnej funkcie.

2. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

a) $\displaystyle\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\,\frac{dx}{x^3}$; b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$; d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$, $x > \max\{a,b\}$, $a \neq b$;

f) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$, $a > 0$.

Integrovanie funkcií tvaru $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, kde R je racionálna funkcia dvoch premenných, $a \neq 0$ a polynóm ax^2+bx+c nemá dvojnásobný koreň, možno vždy previesť na integrovanie racionálnych funkcií premennej t [9], a to

1. substitúciou $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$, ak $a > 0$ [10] (*prvá Eulerova substitúcia*);
2. substitúciou $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$, ak $c > 0$ [10] (*druhá Eulerova substitúcia*);
3. substitúciou $\sqrt{\dfrac{a(x-\alpha)}{x-\beta}} = \pm t$ [10], ak polynóm ax^2+bx+c má dva rôzne reálne korene α, β; tj. ak $b^2-4ac > 0$ (*tretia Eulerova substitúcia*), táto substitúcia sa často zapisuje v tvare $\sqrt{x(x-\alpha)(x-\beta)} = \pm t(x-\beta)$.

31. Použitím Eulerových substitúcií nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; 2. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{1+2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}$;

3. $\displaystyle\int \frac{(1+x)\,dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$; 4. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx$;

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$; 6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$;

7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$; 8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{4x-3-x^2}}$.

Riešenie. 4. Zapíšeme najprv vlastný výpočet, komentár k jednotlivým krokom urobíme na záver: Použijeme prvú Eulerovu substitúciu v tvare

$$\sqrt{x^2+4x+3} = x+t\,, \tag{1.11}$$

z nej po umocnení obidvoch strán na druhú vyjadríme x :

$$\begin{aligned} x^2+4x+3 &= x^2+2tx+t^2 \\ x(4-2t) &= t^2-3 \\ x &= \frac{t^2-3}{2(2-t)}\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Odtiaľ

$$dx = -\frac{t^2-4t+3}{2(2-t)^2}\,dt\,. \tag{1.13}$$

[9] na to možno okrem tu uvedených Eulerových použiť aj goniometrické (alebo hyperbolické) substitúcie, pozri poznámku pred pr. 44

[10] presnejšie povedané, substitúciou, ktorej predpis dostaneme, ak z uvedenej rovnosti vyjadríme x ako funkciu premennej t (pozri riešenie pr. 31.4)

Ak teraz do pravej strany rovnosti (1.11) dosadíme za x podľa vzťahu (1.12), dostaneme

$$\sqrt{x^2+4x+3} = \frac{t^2-3}{2(2-t)} + t = -\frac{t^2-4t+3}{2(2-t)}\,. \tag{1.14}$$

Preto

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx &= \int \left(-\frac{t^2-4t+3}{2(2-t)}\right)\left(-\frac{t^2-4t+3}{2(2-t)^2}\right)dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2-4t+3)^2}{(2-t)^3}\,dt = \left|\begin{array}{r} t-2=z \\ dt=dz \end{array}\right| = \\
&= -\frac{1}{4}\int \frac{(z^2-1)^2}{z^3}\,dz = -\frac{1}{4}\int \frac{z^4-2z^2+1}{z^3}\,dz = -\frac{1}{4}\int\left(z-\frac{2}{z}+\frac{1}{z^3}\right)dz = \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{z^2}{2} - 2\ln|z| - \frac{1}{2z^2}\right) + C = -\frac{1}{8}(t-2)^2 + \frac{1}{2}\ln|t-2| - \frac{1}{2(t-2)^2} + C =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x-2\right)^2 + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+4x+3}-x-2\right| - \frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x-2\right)^2} + C$$

(v poslednom kroku sme dosadili za t podľa vzťahu (1.11)).

Všimnime si teraz výpočty súvisiace so vzťahmi (1.11) – (1.14) podrobnejšie. Pri hľadaní nášho neurčitého integrálu sme použili substitúciu v tvare $x=\varphi(t)$, overme teda, či sú splnené všetky predpoklady vety 5.

Integrand, tj. funkcia $\sqrt{x^2+4x+3}$ $\left(=\sqrt{(x+1)(x+3)}\right)$, je definovaný na množine $(-\infty,-3]\cup[-1,\infty)$. Substitúciu volíme v podobe $x=\varphi(t)=\dfrac{t^2-3}{2(2-t)}$ (pozri (1.12)). Zistime teraz, kde je funkcia φ prostá. Zo vzťahu pre φ' (pozri (1.13)) vyplýva: φ je klesajúca na $(-\infty,1]$ a na $[3,\infty)$, rastúca na $[1,2)$ a na $(2,3]$; ďalej platí $\lim_{t\to-\infty}\varphi(t) = \lim_{t\to 2-}\varphi(t) = \infty, \lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \lim_{t\to 2+}\varphi(t) = -\infty$, $\varphi(1)=-1$, $\varphi(3)=-3$. Teda funkcie $\varphi|(-\infty,1]$, $\varphi|[1,2)$, $\varphi|(2,3]$ a $\varphi|[3,\infty)$ sú prosté, pričom $\varphi((-\infty,1]) = \varphi([1,2)) = [-1,\infty)$, $\varphi((2,3]) = \varphi([3,\infty)) = (-\infty,-3]$. Nasledujúca tabuľka zachycuje inverzné funkcie k jednotlivým zúženiam funkcie φ:

funkcia	inverzná funkcia
$\varphi\|(-\infty,1]$	$-x-\sqrt{x^2+4x+3},\ x\in[-1,\infty)$
$\varphi\|[1,2)$	$-x+\sqrt{x^2+4x+3},\ x\in[-1,\infty)$
$\varphi\|(2,3]$	$-x-\sqrt{x^2+4x+3},\ x\in(-\infty,-3]$
$\varphi\|[3,\infty)$	$-x+\sqrt{x^2+4x+3},\ x\in(-\infty,-3]$

Teraz už môžeme overiť oprávnenosť použitia vety 5. Pri hľadaní primitívnej funkcie k funkcii $\sqrt{x^2+4x+3}$ na intervale $(-\infty,-3]$ použijeme substitúciu

$$x=\frac{t^2-3}{2(2-t)},\quad t\in[3,\infty)\,,$$

potom (pozri štvrtý riadok tabuľky)

$$t=-x+\sqrt{x^2+4x+3},\quad x\in(-\infty,-3]\,,$$

teda platí (1.11) aj (1.14). Pri hľadaní primitívnej funkcie na intervale $[-1,\infty)$ použijeme substitúciu

$$x=\frac{t^2-3}{2(2-t)},\quad t\in[1,2)\,,$$

potom (pozri druhý riadok tabuľky)

$$t=-x+\sqrt{x^2+4x+3},\quad x\in[-1,\infty)\,,$$

tj. opäť platí (1.11) a (1.14). Pritom zápis výpočtu pre $x\in(-\infty,-3]$ aj pre $x\in[-1,\infty)$ je rovnaký, teda primitívnu funkciu hľadáme na celom definičnom obore „naraz". (Z uvedeného tiež vidno, že substitúcia v tvare $x=\dfrac{t^2-3}{2(2-t)}$, $t\in(-\infty,1]\cup(2,3]$ zodpovedá Eulerovej substitúcii $\sqrt{x^2+4x+3}=-t-x$, pozri prvý a tretí riadok tabuľky.)

Uvedený integrál by bolo možné hľadať aj použitím druhej alebo tretej Eulerovej substitúcie, zapíšme teraz stručne výpočty vedúce k nájdeniu nového integrandu v týchto prípadoch.

Pri použití druhej Eulerovej substitúcie v tvare $\sqrt{x^2+4x+3} = tx+\sqrt{3}$ dostaneme

$$\begin{aligned} x^2+4x+3 &= t^2x^2+2\sqrt{3}\,tx+3\,, \\ x^2+4x &= t^2x^2+2\sqrt{3}\,tx\,, \\ x(x+4) &= x(xt^2+2\sqrt{3}\,t)\,, \\ x+4 &= xt^2+2\sqrt{3}\,t\,, \\ x(1-t^2) &= 2\sqrt{3}\,t-4\,, \\ x &= \frac{2\sqrt{3}\,t-4}{1-t^2}\,, \\ dx &= \frac{2\sqrt{3}\,t^2-8t+2\sqrt{3}}{(1-t^2)^2}\,dt \end{aligned}$$

a

$$\sqrt{x^2+4x+3} = tx+\sqrt{3} = t\left(\frac{2\sqrt{3}\,t-4}{1-t^2}\right)+\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\,t^2-4t+\sqrt{3}}{1-t^2}\,,$$

teda

$$\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx = 2\int \frac{(\sqrt{3}t^2-4t+\sqrt{3})^2}{(1-t^2)^3}\,dt\,,$$

pritom

$$t = \frac{\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{x}\,.$$

V prípade tretej Eulerovej substitúcie v tvare $\sqrt{x^2+4x+3} = \sqrt{(x+3)(x+1)} = t(x+1)$ bude

$$\begin{aligned} (x+3)(x+1) &= t^2(x+1)^2\,, \\ (x+3) &= t^2(x+1)\,, \\ 3-t^2 &= x(t^2-1)\,, \\ x &= \frac{3-t^2}{t^2-1} \quad \left(= -1+\frac{2}{t^2-1} \right)\,, \\ dx &= -\frac{4t}{(t^2-1)^2}\,dt \end{aligned}$$

a

$$\sqrt{x^2+4x+3} = t(x+1) = t\left[\left(-1+\frac{2}{t^2-1}\right)+1\right] = \frac{2t}{t^2-1}\,,$$

teda

$$\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx = -\int \frac{8t^2}{(t^2-1)^3}\,dt\,,$$

pritom

$$t = \frac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x+1}\,.$$

Zistiť, či boli pri použití druhej a tretej Eulerovej substitúcie splnené predpoklady vety 5, odporúčame len zvlášť snaživým čitateľom. Toto overovanie nebudeme robiť pri každom jednotlivom použití Eulerových substitúcií (čitateľ ho môže skúsiť urobiť vo všeobecnosti).

Všimnime si, že použitím tretej Eulerovej substitúcie $\sqrt{x^2+4x+3} = t(x+1)$, kde na konci výpočtu dosádzame $t = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x+1}$, nájdeme hodnoty spojitej funkcie $F : (-\infty,-3]\cup[-1,\infty) \to \mathbf{R}$, primitívnej k funkcii $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3}$ [11], len pre $x \in (-\infty,-3]\cup(-1,\infty)$. Hodnotu $F(-1)$ nájdeme potom ako limitu $\lim_{x\to -1} F(x)$.

[11] rovnosť $D(F) = (-\infty,-3]\cup[-1,\infty)$ vyplýva z rovnosti $D(F) = D(f)$, spojitosť funkcie F vyplýva z jej diferencovateľnosti

Podobná situácia nastane pri použití tretej Eulerovej substitúcie, kde na konci výpočtu dosádzame $t = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{x}$; takto nájdená funkcia F je síce definovaná len na množine $(-\infty,3]\cup[-1,0)\cup(0,\infty)$, ale existuje konečná $\lim_{x\to 0} F(x)$. Hľadanou primitívnou funkciou je potom funkcia F „spojite dodefinovaná" v bode 0 (tj. $F(0) := \lim_{x\to 0} F(x)$; pozri tiež pr. 46; $\lim_{x\to 0} F(x)$ možno nájsť jednoduchou úpravou: ak zlomok $t = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{x}$ rozšírime výrazom $\sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt{3}$, dostaneme po úprave výraz $\dfrac{x+4}{\sqrt{3}+\sqrt{x^2+4x+3}}$, ktorý je definovaný aj pre $x=0$; uvedená úprava súvisí aj s overením predpokladov vety 5 v tomto prípade: pri hľadaní primitívnej funkcie na intervale $[-1,\infty)$ používame vlastne substitúciu

$$x = \varphi(t) = \frac{2\sqrt{3}\,t-4}{1-t^2}, \quad t \in (1,\sqrt{3}]\,,$$

potom

$$t = \varphi^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,, & \text{ak} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{x}\,, & \text{ak} \quad x \in [-1,\infty)\setminus\{0\} \end{cases} ,$$

čo možno skutočne zapísať v tvare $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{\sqrt{3}+\sqrt{x^2+4x+3}}, \quad x\in[-1,\infty)\,.$)

Eulerove substitúcie predstavujú univerzálny prostriedok na výpočet neurčitých integrálov funkcií typu $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, ich použitie však často vedie k integrovaniu pomerne zložitých racionálnych funkcií . Uvedieme teraz príklady funkcií typu $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, ktorých integrovanie m ožno vykonať bez použitia Eulerových substitúcií.

Integrály $I_k = \displaystyle\int \frac{x^k\,dk}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$, resp. $J_k = \displaystyle\int \frac{x^k\,dk}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a \neq 0$, $k \in \mathbf{N}$, možno vypočítať na základe rekurentného vzťahu (pozri tiež pr. 16.4); špeciálne pre nepárne k možno použiť aj substitúciu $\sqrt{x^2\pm a^2} = t$, resp. $\sqrt{a^2-x^2} = t$ [12]. Na lineárnu kombináciu integrálov tohto typu možno previesť integrál $\displaystyle\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{px^2+qx+r}}$ (P je polynóm, $p\neq 0$), ak použijeme substitúciu $x+\dfrac{q}{2p}=t$.

32. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$;
2. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$;
3. $\displaystyle\int \frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$;
4. $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$;
5. $\displaystyle\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\quad a>0$;
6. $\displaystyle\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx$.

Uvedeným spôsobom možno odvodiť vzorec

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx = Q_{n-1}(x)\,y + \lambda \int \frac{dx}{y}\,,$$

kde $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$, P_n je polynóm stupňa n, Q_{n-1} je polynóm stupňa $n-1$. Koeficienty polynómu Q_{n-1} a číslo λ nájdeme, ak zderivujeme obidve strany uvedenej rovnosti a porovnáme získané výrazy (teda použitím metódy neurčitých koeficientov).

[12] ďalšou možnosťou výpočtu uvedených integrálov je samozrejme – ako v prípade všetkých funkcií typu $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ – použitie goniometrických (alebo hyperbolických) substitúcií, pozri poznámku pred pr. 44 a pr. 8, 53

33. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

2. $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$.

Na výpočet integrálov $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{x^2+px+q}}$ $(n \in \mathbf{N})$ možno použiť substitúciu $x-a=1/t$.

34. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$;

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$;

4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$;

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx$;

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

Riešenie. 3. (Poznámky ku krokom označeným jednotlivými číslami sú za zápisom riešenia.)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} &= \left|\begin{array}{r} x+2=t \\ dx=dt \end{array}\right| = \int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-2t-5}} = \left|\begin{array}{r} t=1/k \\ dt=-dk/k^2 \end{array}\right| = \\
&\overset{(1)}{=} -\int \frac{dk}{k^2\frac{1}{k^2}\sqrt{\frac{1-2k-5k^2}{k^2}}} = -\frac{1}{\sqrt5}\int \frac{|k|\,dk}{\sqrt{\frac15-\frac{2k}{5}-k^2}} = \\
&\overset{(2)}{=} -\frac{\operatorname{sgn} k}{\sqrt5}\int \frac{k\,dk}{\sqrt{\frac{6}{25}-\left(k+\frac15\right)^2}} = \left|\begin{array}{r} k+\frac15=z \\ dk=dz \end{array}\right| = \\
&= -\frac{\operatorname{sgn}\left(z-\frac15\right)}{\sqrt5}\int \frac{z-\frac15}{\sqrt{\frac{6}{25}-z^2}}\,dz = \\
&= -\frac{\operatorname{sgn}\left(z-\frac15\right)}{\sqrt5}\left(\int \frac{z\,dz}{\sqrt{\frac{6}{25}-z^2}} - \frac15\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{6}{25}-z^2}}\right) = \\
&= -\frac{\operatorname{sgn}\left(z-\frac15\right)}{\sqrt5}\left(-\sqrt{\frac{6}{25}-z^2}-\frac15\arcsin\frac{5z}{\sqrt6}\right)+C = \\
&= \frac{\operatorname{sgn} k}{\sqrt5}\left(\sqrt{\frac15-\frac{2k}{5}-k^2}+\frac15\arcsin\frac{5k+1}{\sqrt6}\right)+C = \\
&\overset{(3)}{=} \frac{\operatorname{sgn} t}{\sqrt5}\left(\sqrt{\frac{t^2-2t-5}{5t^2}}+\frac15\arcsin\frac{5+t}{\sqrt6\,t}\right)+C = \\
&= \frac{\operatorname{sgn} t}{\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt{t^2-2t-5}}{\sqrt5\,|t|}+\frac{\operatorname{sgn} t}{5\sqrt5}\arcsin\frac{5+t}{\sqrt6\,t}+C = \\
&\overset{(4)}{=} \frac{\sqrt{t^2-2t-5}}{5t}+\frac{\operatorname{sgn} t}{5\sqrt5}\arcsin\frac{5+t}{\sqrt6\,t}+C =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)}+\frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{5\sqrt5}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt6\,(x+2)}+C\,, \quad x \in (-\infty,-1-\sqrt6)\cup(-1+\sqrt6,\infty)\,.$$

(1) substitúciu $x+2=1/k$ sme rozložili na dve za sebou nasledujúce substitúcie $x+2=t,\ t=1/k$, aby bolo vidno, ako sa zmení integrand na ľavej strane rovnosti (1) použitím substitúcie $t=1/k$;

(2) funkcia $f(k)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1-2k-5k^2}{k^2}}}$ je definovaná na množine $\left(\dfrac{1-\sqrt{6}}{5},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, pre $k\in D(f)$ je $f(k)=\dfrac{|k|}{\sqrt{1-2k-5k^2}}$; ak hľadáme primitívnu funkciu na intervale $\left(\dfrac{1-\sqrt{6}}{5},0\right)$, tak

$$\int f(k)\,dk=(-1)\cdot\int\frac{k\,dk}{\sqrt{1-2k-5k^2}}=\operatorname{sgn}k\cdot\int\frac{k\,dk}{\sqrt{1-2k-5k^2}}\ ;$$

pri výpočte primitívnej funkcie na intervale $\left(0,\dfrac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$ je

$$\int f(k)\,dk=1\cdot\int\frac{k\,dk}{\sqrt{1-2k-5k^2}}=\operatorname{sgn}k\cdot\int\frac{k\,dk}{\sqrt{1-2k-5k^2}}\ ;$$

keďže získané zápisy sú v obidvoch prípadoch rovnaké, môžeme primitívnu funkciu hľadať na obidvoch intervaloch „naraz“ ;

(3) pri úprave sme využili rovnosť $\operatorname{sgn}(1/t)=\operatorname{sgn}t,\ t\neq 0$;

(4) pri úprave sme využili rovnosť $\operatorname{sgn}t\cdot(1/|t|)=1/t$.

35. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$;
2. $\displaystyle\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$;
3. $\displaystyle\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$;
4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}$;
5. $\displaystyle\int\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{12}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;
6. $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{x^2-3x+2}}{x+\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$;
7. $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}\,dx$;
8. $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx$;
9. $\displaystyle\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx$;
10. $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$;
11. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$;
12. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;
13. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx$.

36$_0$. Dokážte rovnosti

$$\arcsin x=2\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{\pi}{2}=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{\pi}{2},\quad x\in(-1,1)$$

tak, že na výpočet integrálu $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ postupne použijete substitúcie $\sqrt{1-x^2}=1+tx,\ \sqrt{1-x^2}=(1+x)\,t,\ \sqrt{1-x^2}=(1-x)\,t$.

37. Ak primitívna funkcia F k funkcii f je racionálna, tak primitívne funkcie k funkciám $f(x)\arcsin x,\ f(x)\arccos x$ sú elementárne. Dokážte!

1.4 Integrovanie niektorých goniometrických funkcií

Integrál

$$I=\int \sin^n x\cos^m x\,dx\ ,\quad m,n\in\mathbf{N}\cup\{0\}\ ,$$

možno vypočítať

1. pre nepárne m substitúciou $\sin x = t$:

$$\int \sin^n x\cos^{2k+1}x\,dx=\int \sin^n x\ \left(1-\sin^2 x\right)^k\cos x\,dx\ ;$$

2. pre nepárne n substitúciou $\cos x = t$;

3. pre párne m,n použitím vzorcov

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\ ,\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\ ,\quad \cos\alpha\sin\alpha=\frac{sin2\alpha}{2}$$

alebo použitím rekurentných vzťahov pre výpočet integrálov $I_k=\int\sin^k x\,dx$, resp. $J_k=\int\cos^k x\,dx$ (pozri pr. 16.5,6):

$$\begin{aligned}\int \sin^{2i}x\cos^{2j}x\,dx &= \int\sin^{2i}x\ \left(1-\sin^2 x\right)^j\ dx=\\ &= \int\sin^{2i}x\left(1-j\sin^2 x+\binom{j}{2}\sin^4 x+\cdots+(-1)^j\sin^{2j}x\right)dx=\\ &= I_{2i}-jI_{2i+2}+\binom{j}{2}I_{2i+4}+\cdots+(-1)^j\,I_{2(i+j)}\ ;\end{aligned}$$

analogicky možno integrál I previesť na lineárnu kombináciu integrálov J_k, $k=2i,2i+2,\ldots,2(i+j)$.

38. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$;
2. $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$;
3. $\displaystyle\int \sin^5 x\cos^7 x\,dx$;
4. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$;
5. $\displaystyle\int \sin^6 x\,dx$;
6. $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$.

Riešenie. 4.

$$\begin{aligned}\int\sin^2 x\cos^6 x\,dx &= \int(\sin x\cos x)^2\cos^4 x\,dx=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\\ &= \frac{1}{2^4}\int\sin^2 2x\ \left(1+2\ \cos 2x+\cos^2 x\right)\,dx=\\ &= \frac{1}{2^4}\left(\underbrace{\int\sin^2 2x\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int 2\ \sin^2 2x\cos 2x\,dx}_{I_2}+\underbrace{\int(\sin 2x\cos 2x)^2\,dx}_{I_3}\right)\overset{(1)}{=}\\ &= \frac{1}{2^4}\left(\frac{5}{8}x+\frac{\sin^3 2x}{3}-\frac{\sin 4x}{8}-\frac{\sin 8x}{64}\right)+C\ ,\end{aligned}$$

pričom rovnosť (1) vyplýva z nasledujúcich výpočtov:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}+C\ ;\\ I_2 &= \int 2\ \sin^2 2x\cos 2x\,dx=\left|\begin{array}{c}\sin 2x=t\\ 2\ \cos 2x\,dx=dt\end{array}\right|=\int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sin^3 2x}{3}+C\ ;\\ I_3 &= \int\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 4x\,dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1-\cos 8x}{2}\right)dx=\frac{x}{8}-\frac{\sin 8x}{64}+C\ .\end{aligned}$$

39. Odvoďte rekurentný vzťah pre výpočet integrálu

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n x}$; 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x}$.

Nasledujúce neurčité integrály možno nájsť použitím vzorcov

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)) \ ,$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)) \ ,$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)) \ .$$

40. Nájdite neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \sin 5x\cos x\,dx$;
2. $\displaystyle\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$;
3. $\displaystyle\int \sin x\sin(x+a)\sin(x+b)\,dx$;
4. $\displaystyle\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$;
5. $\displaystyle\int \sin^3 2x\cos^2 3x\,dx$.

Integrovanie funkcií tvaru $R(\sin x, \cos x)$, kde R je racionálna funkcia dvoch premenných, možno previesť na integrovanie racionálnych funkcií premennej t substitúciou $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$; pritom využívame rovnosti

$$\sin x = \left(= \frac{\sin 2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} =^{13} \right) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \ , \quad x\neq(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z} \ ;$$

$$\cos x = \left(= \frac{\cos 2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} =^{13} \right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \ , \quad x\neq(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z} \ .$$

Poznámka. Zrejme integrovanie funkcií tvaru $R(\sin\alpha x, \cos\alpha x)$ možno substitúciou $\alpha x = z$ previesť na integrovanie funkcií tvaru $R(\sin z, \cos z)$.

[13] zlomok sme rozšírili výrazom $\dfrac{1}{\cos^2(x/2)}$

41. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;
4. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}$;
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $\quad \varepsilon>0$;
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin 3x+\cos 3x}$.

Riešenie. 1. Pre $x\neq(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, platí

$$\int\frac{dx}{3+\cos x+\sin x} = \int\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{3+\cos x+\sin x}\cdot\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \left|\begin{array}{c}\operatorname{tg}(x/2)=t\\ dx/\cos^2(x/2)=dt\end{array}\right| =^{14}$$

$$= \int\frac{2\cdot\frac{1}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = \int\frac{2dt}{2t^2+2t+4} = \int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} =$$

$$= \left|\begin{array}{c}t+\frac{1}{2}=z\\ dt=dz\end{array}\right| = \int\frac{dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt7}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{2z}{\sqrt7}+C = \frac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt7}+C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt7}\right)+C\,.$$

Takto nájdená funkcia $F_1(x) := \dfrac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt7}\right)$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(x) := \dfrac{1}{3+\cos x+\sin x}$ len na množine $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$ $\quad(=\mathbf{R}\setminus\{(2k+1)\pi;\ k\in\mathbf{Z}\})$, pritom body $x_k:=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, sú bodmi nespojitosti 1. druhu funkcie F_1 :

$$\lim_{x\to x_k-}F_1(x)=\frac{\pi}{\sqrt7}\,,\qquad \lim_{x\to x_k+}F_1(x)=-\frac{\pi}{\sqrt7}\quad. \tag{1.15}$$

Pretože však definičným oborom spojitej funkcie f je množina $\mathbf{R}$, musí k nej podľa vety 2 existovať primitívna funkcia F definovaná na $\mathbf{R}$, ktorá – pretože je diferencovateľná – je spojitá na $\mathbf{R}$. Podľa vety 1 musí pre $x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$ platiť $F(x)-F_1(x)\equiv$ konšt; teda graf funkcie $F|((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$ vznikne posunutím grafu funkcie $F_1|((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$ v smere osi Oy.

Na nájdenie neurčitého integrálu funkcie f stačí podľa vety 1 nájsť jednu primitívnu funkciu $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; hľadajme napr. tú funkciu F, pre ktorú platí $F(x)=F_1(x)$ pre $x\in(-\pi,\pi)$. Z predchádzajúceho vyplýva, že graf funkcie F dostaneme, ak „poposúvame" grafy funkcií $F_1|((2k-1)\pi,(2k+1)\pi),\ k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$ tak, aby sa z bodov $x_k,\ k\in\mathbf{Z}$, stali odstrániteľné body nespojitosti, pričom hodnoty $F(x_k)$ dodefinujeme ako limity v týchto bodoch. (Teda z „poposúvaných" častí grafu funkcie F_1 „zlepíme" graf spojitej funkcie F.)

Z rovností (1.15) vyplýva, že graf funkcie $F_1|(x_0,x_1)$ treba posunúť o $2\pi/\sqrt7$ „nahor"; podobne zistíme, že graf funkcie $F_1|(x_{-2},x_{-1})$ treba posunúť o $2\pi/\sqrt7$ „nadol", graf funkcie $F_1|(x_1,x_2)$ potom posunúť

---

[14] $\cos^2(x/2) = \dfrac{\cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$, $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; rozširovaniu výrazom $2\cos^2(x/2)$ sa môžeme vyhnúť, ak namiesto vety 4 použijeme vetu 5 o substitúcii (a teda zo vzťahu $\operatorname{tg}(x/2)=t$ vyjadríme x pomocou t), pre $x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$ dostaneme $x=2\operatorname{arctg}t+2k\pi$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$

o $4\pi/\sqrt{7}$ „nahor" atď. Tak dostaneme graf funkcie danej predpisom

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{7}} \right) + \dfrac{2k\pi}{\sqrt{7}} \,, & \text{ak} \quad x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) \,,\ k \in \mathbf{Z} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{\sqrt{7}} \,, & \text{ak} \quad x = (2k+1)\pi \,,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} .$$

Teda

$$\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x} = F(x) + C \,.$$

Namiesto univerzálnej substitúcie $\operatorname{tg}(x/2) = t$ možno pri výpočte integrálu $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, kde R je racionálna funkcia dvoch premenných, použiť substitúciu

1. $\sin x = t$, ak $R(u,-v) = -R(u,v)$;
2. $\cos x = t$, ak $R(-u,v) = -R(u,v)$;
3. $\operatorname{tg} x = t$, ak $R(-u,-v) = R(u,v)$ [15].

V prípade substitúcie $\operatorname{tg} x = t$ využívame vzorce

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \,, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \,, \quad \sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \,, \qquad x \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z} \quad .$$

Poznámka. Funkcia $R(\sin x, \cos x) = \sin^n x \cos^m x$ $(m,n \in \mathbf{Z})$ zrejme vyhovuje prvej z uvedených podmienok v prípade nepárneho m, druhej v prípade nepárneho n a tretej v prípade párnych m, n (porovnaj s textom pred pr. 38).

42. Nájdite nasledujúce neurčité integrály

1. použitím substitúcie $\sin x = t$ alebo $\cos x = t$:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\,(1+\cos x)}$;

b) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x}\, dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x + \cos^3 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\, dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x - \cos 3x}{1-\sin^4 x}\, dx$;

2. použitím substitúcie $\operatorname{tg} x = t$:

a) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1+\sin^2 x}$;

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}$;

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x\cos x + \sin^2 x}$;

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\operatorname{tg} x - 3}$;

e) $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$;

f) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{\sin 2x}\, dx$.

43. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$;

2. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$;

4. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\, dx}{3+4\sin^2 x}$;

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x - 5}$;

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$, $\quad c > \sqrt{a^2+b^2} > 0$;

[15] niekedy môže byť výhodnejšie použiť substitúciu $\operatorname{ctg} x = t$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-4\sin 2x+2\cos^2 x}$;

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$;

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$;

10. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x\cos 3x}$;

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$;

12. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$;

13. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$;

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$;

15. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

16. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}$;

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}\,,\quad x\in(0,\pi)$;

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}}\,,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Poznámka (*o výpočte integrálov* $\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)\,dx$). Pri hľadaní integrálov $\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)\,dx$, kde R je racionálna funkcia dvoch premenných, možno postupovať podobne ako v prípade integrálov $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ (vyplýva to zo skutočnosti, že pre hyperbolické funkcie platia vzorce podobné goniometrickým – pozri aj pr. I.63, 64). Teda integrál $\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)\,dx$ možno substitúciou $\operatorname{th}(x/2)=t$ previesť na integrál z racionálnej funkcie premennej t. Ak funkcia R vyhovuje podmienke

1. $R(u,-v)=-R(u,v)$, resp. 2. $R(-u,v)=-R(u,v)$, resp. 3. $R(-u,-v)=R(u,v)$,

možno použiť substitúciu

1. $\operatorname{sh}x=t$, resp. 2. $\operatorname{ch}x=t$, resp. 3. $\operatorname{th}x=t$.

Poznámka (*o použití goniometrických substitúcií pri výpočte integrálov* $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$).

Nech R je racionálna funkcia dvoch premenných, $a>0$, $D:=b^2-4ac>0$. Použitím substitúcie $x+b/2a=z$ možno integrál $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ previesť na integrál $\int R_1(z,\sqrt{z^2-p^2})\,dz$, kde $p^2=D/4a^2$ a R_1 je racionálna funkcia dvoch premenných.

Substitúcia $z/p=t$ prevedie integrál $\int R_1(z,\sqrt{z^2-p^2})\,dz$ na integrál $\int R_2(t,\sqrt{t^2-1})\,dt$, kde R_2 je opäť racionálna funkcia dvoch premenných.

Analogicky možno postupovať aj pre $a>0$, $D<0$ a pre $a<0$, $D>0$.

Výpočet integrálu $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ možno teda použitím vhodných substitúcií previesť na výpočet integrálu

1. $\int R_2(t,\sqrt{t^2-1})\,dt$, ak $a>0$, $D>0$;
2. $\int R_2(t,\sqrt{t^2+1})\,dt$, ak $a>0$, $D<0$;
3. $\int R_2(t,\sqrt{1-t^2})\,dt$, ak $a<0$, $D>0$.

Na výpočet týchto integrálov možno použiť goniometrické substitúcie[16]

1. $t=1/\sin u$, $u\in[-\pi/2,\pi/2]\setminus\{0\}$ alebo $t=1/\cos x$, $u\in[0,\pi]\setminus\{\pi/2\}$;
2. $t=\operatorname{tg}u$, $u\in(-\pi/2,\pi/2)$ alebo $t=\operatorname{ctg}u$, $u\in(0,\pi)$;
3. $t=\sin u$, $u\in[-\pi/2,\pi/2]$ alebo $t=\cos u$, $u\in[0,\pi]$,

ktoré výpočet integrálu v premennej t prevedú na hľadanie integrálu $\int R_3(\sin u,\cos u)\,du$, kde R_3 je racionálna funkcia dvoch premenných[17].

---

[16] alebo hyperbolické substitúcie 1. $t=\operatorname{ch}u$, $u\ge 0$ pre $t\ge 1$; $t=-\operatorname{ch}u$, $u\ge 0$ pre $t\le -1$; 2. $t=\operatorname{sh}u$; 3. $t=\operatorname{th}u$

[17] Ak na výpočet integrálu $\int R_2(t,\sqrt{1-t^2})\,dt$ použijeme substitúcie $t=\sin u$, $u\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ a $\operatorname{tg}\frac{u}{2}=v$ a vyjadríme v pomocou t, dostaneme

$$v=\operatorname{tg}\frac{\arcsin t}{2}=\operatorname{sgn}t\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\arcsin t}{1+\cos\arcsin t}}=\operatorname{sgn}t\cdot\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{1+\sqrt{1-t^2}}}\overset{*}{=}\operatorname{sgn}t\cdot\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{|t|}=\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}$$

44. Použitím goniometrických substitúcií nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+5)^3}}$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+6x+10)\sqrt{(x^2+6x+8)^3}}$;
4. $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

1.5 Ďalšie príklady

45. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$;
2. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;
4. $\displaystyle\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$;
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$;
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$;
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx$;
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$;
9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx$;
10. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$;
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$;
12. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx$;
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$;
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$;
15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}\,dx$;
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}$;
17. $\displaystyle\int \frac{2\cos x+\sin x-3}{2\cos x-\sin x-3}\,dx$;
18. $\displaystyle\int \frac{2+\cos 4x}{5+4\cos 4x}\,dx$;
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$;
20. $\displaystyle\int \frac{\sin 4x\,dx}{\sin^8 x+\cos^8 x}$;
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$;
22. $\displaystyle\int \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\,dx$;
23. $\displaystyle\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\,dx$;
24. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$;
25. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$;
26. $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx\,,\quad \alpha\beta\neq 0$;
27. $\displaystyle\int xe^x\sin x\,dx$;
28. $\displaystyle\int x^2e^{3x}\cos 2x\,dx$;
29. $\displaystyle\int x^7e^{-x^2}\,dx$;
30. $\displaystyle\int x^2e^{\sqrt{x}}\,dx$;
31. $\displaystyle\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$;
32. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$;

(zlomok na ľavej strane rovnosti * sme rozšírili výrazom $1-\sqrt{1-t^2}$), odtiaľ $\sqrt{1-t^2}=1-vt$, čo je zápis druhej Eulerovej substitúcie. Rovnako možno zistiť, že použitie substitúcií $t=\cos u$, $u\in[0,\pi]$ a $\operatorname{tg}\frac{u}{2}=v$, resp. $t=-\cos u$, $u\in[0,\pi]$ a $\operatorname{tg}\frac{u}{2}=v$ zodpovedá tretej Eulerovej substitúcii $v=\pm\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$; podobná situácia nastane aj v ostatných prípadoch.

33. $\int \sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx$;

34. $\int \ln^n x\,dx$;

35. $\int x^3 \ln^3 x\,dx$;

36. $\int \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^3 dx$.

46. Nech f, F sú spojité funkcie definované na intervale I, nech $M \subset I$ je konečná množina. Ak pre všetky $x \in I \setminus M$ platí $F'(x) = f(x)$, tak F je primitívna funkcia k funkcii f. Dokážte!

47. Rozhodnite o platnosti tvrdenia „rovnomerne spojitá funkcia f definovaná na ohraničenom intervale I má ohraničenú primitívnu funkciu F"!

48. Nech $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Nech funkcia $F:(a,b)\to\mathbf{R}$ je primitívna k spojitej funkcii $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ na intervale (a,b). Potom existujú konečné $\lim_{x\to a} F(x) =: A$, $\lim_{x\to b} F(x) =: B$ a funkcia $F_1:[a,b]\to\mathbf{R}$ daná predpisom

$$F_1(x) = \begin{cases} A\,, & \text{ak} \quad x = a \\ F(x)\,, & \text{ak} \quad x \in (a,b) \\ B\,, & \text{ak} \quad x = b \end{cases}$$

je primitívna k funkcii f. Dokážte!

49. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\int \dfrac{x\,dx}{1+\cos x}$;

2. $\int \dfrac{x\,\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx$;

3. $\int \dfrac{x\,dx}{(a\cos x+\sin x)^2}$;

4. $\int \sin x\,\ln\left(\cos x+\sqrt{2-\sin^2 x}\right)\,dx$;

5. $\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,dx$;

6. $\int \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{(x^2+1)\,\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

7. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx$;

8. $\int \dfrac{\ln x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}$;

9. $\int \dfrac{x\,\ln|x|}{(1-x^2)\,\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

10. $\int \dfrac{ax^2+b}{x^2-1}\,\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\,dx$;

11. $\int \dfrac{x\,\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$;

12. $\int x\,\sqrt{x^2+1}\,\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$;

13. $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\ln\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$;

14. $\int \dfrac{x\,\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1-x^2)^2}\,dx$;

15. $\int x\,\arcsin(1-x)\,dx$;

16. $\int \sqrt{1-x^2}\,\arcsin x\,dx$;

17. $\int (2x+3)\,\arccos(2x-3)\,dx$;

18. $\int \arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx$;

19. $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}\cdot\dfrac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

20. $\int \arcsin^3\left(\dfrac{x}{3}\right)\,dx$;

21. $\int \dfrac{x\,\arcsin x}{(x^2-1)\,\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

22. $\int \dfrac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$;

23. $\int \dfrac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

24. $\int \dfrac{ax^2+b}{x^2+1}\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$;

25. $\int \dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

26. $\int \dfrac{x^4\,\mathrm{arctg}\,x}{x^2+1}\,dx$;

27. $\int \dfrac{x\,\mathrm{arcctg}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx$;

28. $\int x(1+x^2)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$;

29. $\int \dfrac{3x^2-1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$;

30. $\int \dfrac{\mathrm{arctg}\,e^{x/2}}{e^{x/2}\,(1+e^x)}\,dx$;

31. $\int x \operatorname{arctg} x \ln\left(1+x^2\right)\, dx$;

32. $\int \dfrac{\operatorname{sh} 2x + 3\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x + 2\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx$;

33. $\int \dfrac{a_1 \operatorname{ch} x + b_1 \operatorname{sh} x}{a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x}\, dx$;

34. $\int \dfrac{\operatorname{ch} 2x\, dx}{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}$;

35. $\int \dfrac{x^4+1}{x^6+1}\, dx$;

36. $\int \dfrac{x^4-1}{x\left(x^4-5\right)\left(x^5-5x+1\right)}\, dx$;

37. $\int \dfrac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$;

38. $\int \dfrac{\left(x^2+1\right)\, dx}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^4+1}}$;

39. $\int \dfrac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\, dx$;

40. $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$;

41. $\int \dfrac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$;

42. $\int \dfrac{dx}{\cos x + \cos a}$;

43. $\int \dfrac{\sin x\, dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$;

44. $\int \dfrac{\sin^2 x\, dx}{\sin x + 2\cos x}$;

45. $\int \dfrac{\cos^{n-1} \frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x-a}{2}}\, dx$, $n \in \mathbf{N}$ (použite substitúciu $t = \dfrac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}}$) ;

46. $\int (x+|x|)^2\, dx$;

47. $\int e^{-|x|}\, dx$;

48. $\int [x] \sin \pi x\, dx$.

50. Za akých podmienok je $\displaystyle\int \frac{P_m(x)\, dx}{(x-a)^n}$ (kde P_m je polynóm stupňa m a $n \in \mathbf{N}$) racionálnou funkciou?

51$_0$. Ak primitívna funkcia F k funkcii f a derivácia g funkcie G sú racionálne, tak primitívna funkcia k funkcii fG je elementárna. Dokážte!

52$_0$. Ak P je polynóm, tak primitívna funkcia k funkcii $P(\ln x)$ je elementárna. Dokážte!

53. Pomocou hyperbolických substitúcií nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$, $a>0$;

2. $\int \dfrac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $a>0$;

3. $\int x^2 \sqrt{x^2-1}\, dx$.

54$_0$. Nech $a_1, \ldots, a_n$ sú reálne čísla také, že $\dfrac{a_n}{a_1}, \dfrac{a_{n-1}}{a_1}, \ldots, \dfrac{a_2}{a_1} \in \mathbf{Q}$. Potom $\int R\left(e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_n x}\right) dx$, kde R je racionálna funkcia n premených[18] je elementárna funkcia. Dokážte!

55. Dokážte, že výpočet integrálu $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\, dx$ (kde R je racionálna funkcia troch premenných[18]) možno previesť na výpočet integrálu $\int R_1(t)\, dt$, kde R_1 je racionálna funkcia.

56. Nájdite všetky spojité funkcie $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, ktoré pre $x>0$ vyhovujú podmienkam

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= x+1 , \\ f'(x)-g'(x) &= 0 , \\ f'(2x)+g'(-2x) &= 1-12\,x^2 . \end{aligned}$$

57. Zostrojte funkciu, ktorá je darbouxovská na $\mathbf{R}$, ale nemá primitívnu funkciu[19].

[18] definíciu pojmu racionálna funkcia n premenných prenechávame na čitateľa

[19] Platí totiž (pozri napr. [23, str. 160, veta 2]): Ak funkcia $f:I\to\mathbf{R}$ je diferencovateľná v každom bode intervalu I, tak funkcia f' je darbouxovská na I. (Pr. 57 teda ukazuje, že obrátená implikácia neplatí.)

58. 1. Ak $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je prostá funkcia a existuje primitívna funkcia k funkcii f, tak existuje primitívna funkcia aj k inverznej funkcii f^{-1}. (Využite, že f musí byť darbouxovská na $\mathbf{R}$, pozri poznámku [19].)

2. Ak $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je prostá diferencovateľná funkcia a $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, tak $\int f^{-1}(x)\,dx = x\,f^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right) + C$. Dokážte!