Chapter 2

Riemannov určitý integrál

2. Riemannov určitý integrál

2.1 Definícia a základné vlastnosti

Nech $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia. *Delením intervalu $[a,b]$* nazývame každú konečnú neklesajúcu postupnosť $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ takú, že $x_0 = a$, $x_n = b$. Čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sa nazývajú *deliace body (delenia D)*, intervaly[1] $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ *čiastočné intervaly delenia D*. Číslo $\nu(D) := \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$, kde $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ sa nazýva *norma delenia D*. Číslo

$$U(f,D) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \ ,$$

resp.

$$L(f,D) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ ,$$

kde $M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sa nazýva *horný*, resp. *dolný intergálny súčet funkcie f pri delení D* [2].

Veta 1. *Nech $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia. Potom množina $\mathcal{U}$ všetkých horných integrálnych súčtov funkcie f a množina $\mathcal{L}$ všetkých jej dolných integrálnych súčtov sú ohraničené a platí $\sup\mathcal{L} \leq \inf\mathcal{U}$.*

Číslo $\sup\mathcal{L}$, resp. $\inf\mathcal{U}$ sa nazýva *dolný*, resp. *horný (Riemannov) integrál funkcie f (na intervale $[a,b]$)* a označuje sa $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, resp. $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Veta 2. *Nech $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé delenie D intervalu $[a,b]$, ktorého norma $\nu(D)$ je menšia ako δ, platí*

$$\left| U(f,D) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \ .$$

(Analogické tvrdenie platí pre dolný integrál funkcie f.)

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $[a,b]$ sa nazýva *normálna*, ak $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ [3].

---

[1] symbol $[\alpha,\beta]$ definujeme v prípade $\alpha = \beta$ rovnosťou $[\alpha,\beta] := \{\alpha\}$ a množinu $\{\alpha\}$ nazývame *degenerovaný interval*

[2] niekedy sa používa aj názov *horný*, resp. *dolný Darbouxov súčet*

[3] index n v označení D_n nesúvisí s počtom deliacich bodov delenia D_n

Dôsledok vety 2. *Nech* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *je ohraničená funkcia a* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je normálna postupnosť delení intervalu* $[a,b]$. *Potom*

$$\lim_{n\to\infty} U(f,D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} L(f,D_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\ .$$

Ohraničená funkcia $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ sa nazýva <u>*(riemannovsky) integrovateľná na intervale* $[a,b]$</u>, ak

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\ .$$

Spoločná hodnota horného a dolného integrálu funkcie f na intervale $[a,b]$ sa v takom prípade označuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ a nazýva sa <u>*určitý (Riemannov) integrál funkcie* f *(na intervale* $[a,b]$*)*</u>. Čísla a, b v symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ sa nazývajú <u>*hranice integrovania*</u>. Skutočnosť, že funkcia f je riemannovsky integrovateľná na intervale $[a,b]$, zapisujeme $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

Veta 3. *Pre ohraničenú funkciu* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*
a) $f\in\mathcal{R}[a,b]$;
b) *pre každé* $\varepsilon>0$ *existuje delenie* D_ε *intervalu* $[a,b]$ *také, že platí*

$$|U(f,D_\varepsilon)-L(f,D_\varepsilon)|<\varepsilon\ .$$

59. Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení intervalu $[a,b]$, nech $\lim_{n\to\infty} d_n=\infty$, kde d_n je počet deliacich bodov delenia D_n. Vyplýva z toho, že $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení?

60. Nájdite horný a dolný integrál funkcie f na intervale I, ak

1. $f(x)=x\,,\quad I=[0,3]$;
2. $f(x)=a^x\,,\quad I=[0,1]$;
3. $f(x)=\sin x\,,\quad I=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;
4. $f(x)=\begin{cases} x\,, & \text{ak } x\in\mathbf{Q}\\ -x\,, & \text{ak } x\notin\mathbf{Q}\end{cases}\ ,\quad I=[-2,-1]$.

Ktoré z týchto funkcií sú integrovateľné?

61. Nech $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, $\alpha\le\beta$. Zostrojte funkciu $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ tak, aby $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx=\alpha$, $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx=\beta$.

Nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je ohraničená funkcia a $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ je delenie intervalu $[a,b]$. <u>*Integrálnym súčtom*[4] *funkcie* f *(pri delení* D*)*</u> sa nazýva každý súčet tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ ,$$

kde $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\dots,n$.

Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu $[a,b]$, nech S_n je integrálny súčet funkcie f pri delení D_n. Potom sa postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýva <u>*normálna postupnosť integrálnych súčtov funkcie* f.</u>

[4]niekedy sa používa názov *Riemannov súčet*

Hovoríme, že *číslo A je limita množiny $\{S(f,D)\}$ integrálnych súčtov funkcie f pre normu delenia $\nu(D)$ idúcu k nule* (a zapisujeme $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} S(f,D) = A$), ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí: ak S je integrálny súčet funkcie f pri delení D a $\nu(D) < \delta$, tak $|A - S| < \varepsilon$.

Veta 4. *Pre ohraničenú funkciu $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*
a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *a* $\int_a^b f(x)\,dx = A$;
b) $\lim_{\nu(D)\to 0} S(f,D) = A$;
c) *každá normálna postupnosť integrálnych súčtov funkcie f konverguje k číslu A.*

Poznámka. Často sa pojem riemannovskej integrovateľnosti a Riemannovho integrálu definuje pomocou vlastnosti b), resp. c)[5] z vety 4, teda bez použitia horného a dolného integrálu. Hoci integrálne súčty možno (na rozdiel od horných a dolných integrálnych súčtov) zaviesť pre ľubovoľnú funkciu $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ (teda aj pre neohraničené funkcie), stačí sa aj v prípade definície založenej na pojme limity integrálnych súčtov obmedziť na ohraničené funkcie, pretože platí tvrdenie: Ak každá normálna postupnosť integrálnych súčtov funkcie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ má konečnú limitu, tak f je ohraničená funkcia.

Hovoríme, že *množina $M \subset \mathbf{R}$ má Jordanovu mieru nula*, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet otvorených[6] ohraničených intervalov $(a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)$ [7] tak, že $M \subset \bigcup_{i=1}^n (a_i,b_i)$ a $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \varepsilon$.

Veta 5. *Nech ohraničená funkcia $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ spĺňa niektorú z nasledujúcich podmienok:*
a) *f je spojitá;*
b) *množina bodov nespojitosti funkcie f má Jordanovu mieru nula;*
c) *f je monotónna.*
Potom $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Veta 6. *Nech $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ sú ohraničené funkcie, množina $M \subset [a,b]$ má Jordanovu miernu nula a platí*

$$\forall\, x \in [a,b] \setminus M : f(x) = g(x)\ .$$

Potom nastane práve jedna z nasledujúcich možností:
a) *f aj g sú riemannovsky integrovateľné na $[a,b]$ a* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$;
b) *f ani g nie sú riemannovsky integrovateľné na $[a,b]$.*

Poznámky. 1. Z vety 6 vyplýva, že hodnota $\int_a^b f(x)\,dx$ sa nezmení, ak predpis integrovateľnej funkcie f zmeníme na množine s Jordanovou mierou nula (špeciálne: v konečnom počte bodov) tak, aby takto získaná funkcia bola opäť ohraničená na $[a,b]$.

2. Na základe vety 6 možno zovšeobecniť pojem riemannovsky integrovateľnej funkcie:

Nech množina $M \subset [a,b]$ má Jordanovu mieru nula (špeciálne: nech M je konečná množina), nech f je ohraničená funkcia definovaná na $[a,b]\setminus M$. Hovoríme, že f je riemannovsky integrovateľná na $[a,b]$, ak existuje riemannovsky integrovateľná funkcia $\overline{f}:[a,b]\to\mathbf{R}$ taká, že platí

$$\forall\, x \in [a,b] \setminus M : \overline{f}(x) = f(x)\ .$$

Symbol $\int_a^b f(x)\,dx$ potom definujeme nasledovne:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \overline{f}(x)\,dx\ .$$

(Voľne povedané: Funkciu f dodefinujeme v bodoch množiny M tak, aby sme dostali ohraničenú funkciu $\overline{f} : [a,b] \to \mathbf{R}$, potom vyšetríme riemannovskú integrovateľnosť funkcie $\overline{f}$. Z vety 6 pritom vyplýva, že integrovateľnosť funkcie f, resp. hodnota $\int_a^b f(x)\,dx$ nezávisí od toho, ako funkciu f dodefinujeme.)

---

[5]zrejme c) je obdoba Heineho definície limity pre prípad limity integrálnych súčtov

[6]ekvivalentné definície tohto pojmu dostaneme, ak v uvedenej definícii nahradíme otvorené ohraničené intervaly uzavretými intervalmi alebo polouzavretými ohraničenými intervalmi (porovnaj s [24, str. 47, definícia 1])

[7]číslo n závisí na čísle ε, tj. $n = n(\varepsilon)$

62. Zistite, či je funkcia f riemannovsky integrovateľná na intervale I, ak

1. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}, \quad I = [-1,1]$;
2. $f(x) = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{ak} \quad x \in (2^{-n-1}, 2^{-n}], \quad n = 0, 1, \ldots \\ 0, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}, \quad I = [0,1]$;
3. $f(x) = \dfrac{1}{[1/x]}, \quad I = [0,1]$;
4. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right), \quad I = [0,2]$;
5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right], & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}, \quad I = [0,1]$;
6. f je Dirichletova funkcia χ, I je ľubovoľný ohraničený interval ;
7. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ q, & \text{ak} \quad x = p/q, \text{ kde } p \in \mathbf{Z}, \ q \in \mathbf{N} \text{ sú nesúdeliteľné} \end{cases}, \quad I = [-1,1]$.

63. Nech postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov intervalu $[a,b]$ konverguje k bodu x_0. Nech $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ je ohraničená funkcia a $f(x) = 0$ pre všetky $x \in [a,b] \setminus \{x_n;\, n \in \mathbf{N}\}$. Potom $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dokážte!

64. Dokážte, že *Riemannova funkcia*

$$r(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ 1/q, & \text{ak} \quad x = p/q, \text{ kde } p \in \mathbf{Z}, \ q \in \mathbf{N} \text{ sú nesúdeliteľné} \end{cases}$$

je riemannovsky integrovateľná na každom uzavretom ohraničenom intervale I. (Všimnite si, že množina $\mathbf{Q} \cap I$ bodov nespojitosti funkcie $r|I$ nemá Jordanovu mieru nula.)

65. Nájdite nasledujúce určité Riemannove integrály ako limitu niektorej normálnej postupnosti integrálnych súčtov:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\, dx$;
2. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2}, \quad 0 < a < b \qquad$ (návod: položte $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_1}, \quad i = 1, \ldots, n$) .

66. Nájdite $\delta > 0$ tak, aby z nerovnosti $\max_{k=1,\ldots,n} \Delta x_k < \delta$ vyplývala nerovnosť

$$\left| \int_0^3 \sin 50x\, dx - \sum_{k=1}^{n} (\sin 50\xi_k)\, \Delta x_k \right| < 0.001 ,$$

kde $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 3$ a ξ_k je ľubovoľne zvolený bod z intervalu $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

67. 1. Nech $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x)\, dx .$$

Dokážte!

2_0. Nech $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ je spojitá kladná funkcia. Potom

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int_0^1 \ln f(x)\,dx}\;.$$

Dokážte!

68. Zostrojte funkciu, ktorá nie je riemannovsky integrovateľná na uzavretom ohraničenom intervale $[a,b]$, ale pre každú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $[a,b]$ existuje postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie f taká, že S_n je integrálny súčet pri delení D_n a $\lim_{n\to\infty}S_n=0$.

69. Nech delenie D_n intervalu $[0,1]$ je dané deliacimi bodmi $x_0=0$, $x_1=1/2^n$, $x_2=1/2^{n-1}$, $x_3=1/2^{n-2}$, $\ldots$, $x_{n-1}=1/2^2$, $x_n=1/2$, $x_{n+1}=1$; nech $S_n^{(1)}$ $\left(S_n^{(2)}\right)$ je integrálny súčet funkcie $f(x)=x$ pri delení D_n, ktorý dostaneme, ak za ξ_k zvolíme ľavý (pravý) koncový bod intervalu $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\ldots,n+1$. Hoci $f\in\mathcal{R}[0,1]$ (prečo?), je $\lim_{n\to\infty}S_n^{(1)}\neq\lim_{n\to\infty}S_n^{(2)}$. Je to v rozpore s vlastnosťou c) z vety 4?

70. Nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je ohraničená funkcia a množina $N:=\{x\in[a,b]\,;\,f(x)=0\}$ je hustá v $[a,b]$ (tj. každý bod množiny $[a,b]$ je hromadným bodom množiny N). Potom buď $f\notin\mathcal{R}[a,b]$ alebo $\int_a^b f(x)\,dx=0$. Dokážte! Na príkladoch ukážte, že obidva prípady môžu nastať!

71. Zostrojte funkciu $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, ktorá je spojitá v bode a, ale nie je riemannovsky integrovateľná na žiadnom uzavretom ohraničenom intervale obsahujúcom bod a!

Veta 7 (*aditívna vlastnosť určitého integrálu*). *Nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je ohraničená funkcia, nech $a<c<b$. Potom $f\in\mathcal{R}[a,b]$ práve vtedy, keď $f\in\mathcal{R}[a,c]$ a súčasne $f\in\mathcal{R}[c,b]$.*

Naviac, ak $f\in\mathcal{R}[a,b]$, tak

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\;.$$

Veta 8. *Nech $f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{R}[a,b]$, nech $c_1,\ldots,c_n\in\mathbf{R}$. Potom je na intervale $[a,b]$ riemannovsky integrovateľná aj funkcia $c_1f_1+\cdots+c_nf_n$ a platí*

$$\int_a^b (c_1f_1(x)+\cdots+c_nf_n(x))\,dx=c_1\int_a^b f_1(x)\,dx+\cdots+c_n\int_a^b f_n(x)\,dx\;.$$

Veta 9. *Nech $f\in\mathcal{R}[a,b]$, nech $f([a,b])\subset[m,M]$ a nech funkcia φ je spojitá na intervale $[m,M]$. Potom $\varphi\circ f\in\mathcal{R}[a,b]$.*

Dôsledok. *Nech $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$. Potom $fg\in\mathcal{R}[a,b]$, $|f|\in\mathcal{R}[a,b]$. Ak naviac $\inf_{x\in[a,b]}g(x)>0$ alebo $\sup_{x\in[a,b]}g(x)<0$, tak aj $f/g\in\mathcal{R}[a,b]$.*

Veta 10. *Nech $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$ a $f(x)\le g(x)$ pre všetky $x\in[a,b]$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx\;.$$

Špeciálne:

a) *ak $m\le f(x)\le M$ pre všetky $x\in[a,b]$, tak*

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)\;;$$

b)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx\;.$$

72. Môže byť súčin (súčet) integrovateľnej a ohraničenej neintegrovateľnej funkcie integrovateľný?

73. Ak $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, tak aj $\max\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$, $\min\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$. Dokážte!

74. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Vyplýva z nerovnosti $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ nerovnosť $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$?

75. Nech $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Potom existuje interval $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ taký, že $f(x) > 0$ pre všetky $x \in [\alpha,\beta]$. Dokážte!

76. 1. Nech $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá nezáporná funkcia a $f(x_0) > 0$ pre niektoré $x_0 \in [a,b]$. Potom $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Dokážte!

2_0. Nech $f, g:[a,b] \to \mathbf{R}$ sú spojité funkcie, $f(x) \geq g(x)$ pre všetky $x \in [a,b]$ a $f(x_0) > g(x_0)$ pre niektoré $x_0 \in [a,b]$. Potom $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$. Dokážte!

77. Dokážte nerovnosti:

1. $0 < \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}\,dx < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$;

2_0. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\pi + \arcsin x}{\sqrt[3]{x^2+8}}\,dx < \frac{3}{2}$.

78. Zistite, ktorý z určitých integrálov je väčší:

1. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\sin x\,dx$ alebo $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\sin x\,dx$;

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ alebo $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

79. Nech $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a nech $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$. Potom f nemení na $[a,b]$ znamienko. Dokážte!

80. Uveďte príklad riemannovsky integrovateľných funkcií f, g, ktorých superpozícia $f \circ g$ je ohraničená, ale nie je riemannovsky integrovateľná.

2.2 Výpočet určitého integrálu pomocou neurčitého

Veta 11 (*Newtonov–Leibnizov vzorec*). *Nech funkcia f je riemannovsky integrovateľná na intervale $[a,b]$ a má na intervale (a,b) primitívnu funkciu F, pričom existujú konečné limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Špeciálne: ak $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na $[a,b]$, tak

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Číslo $\lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$ budeme označovať symbolom $[F(x)]_a^b$.

81. Vypočítajte nasledujúce určité integrály:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx$;
2. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
3. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;
4. $\displaystyle\int_{\mathrm{sh}\,1}^{\mathrm{sh}\,2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;
5. $\displaystyle\int_{0}^{2} |1-x|\, dx$;
6. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{4}{3}\sqrt{x^{2/3}}\, dx$;
7. $\displaystyle\int_{a}^{b} \operatorname{sgn} x\, dx$;
8. $\displaystyle\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$;
9. $\displaystyle\int_{1}^{n+1} \ln[x]\, dx$;
10. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx\,, \quad m,n\in \mathbf{Z}$;
11. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$;
12. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,, \quad a,b>0$.

Riešenie. 5. Funkcia $|1-x|$ je spojitá, a teda riemannovsky integrovateľná na intervale $[0,2]$. Pri výpočte využijeme (aby sme sa „zbavili absolútnej hodnoty“) aditívnu vlastnosť integrálu:

$$\begin{aligned}\int_0^2 |1-x|\,dx &= \int_0^1 |1-x|\,dx+\int_1^2 |1-x|\,dx=\int_0^1 (1-x)\,dx+\int_1^2 (x-1)\,dx=\\ &=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)-0\right)+\left((2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)=1\,.\end{aligned}$$

Poznámka. Pri výpočte integrálu $\int_0^2|1-x|\,dx$ by bol možný aj trocha odlišný postup: nájsť primitívnu funkciu F k funkcii $|1-x|$ na intervale $[0,2]$ a priamo použiť Newtonov–Leibnizov vzorec. Pretože však pri hľadaní funkcie F by bolo potrebné „zlepiť“ primitívnu funkciu na intervale $[0,1]$ s primitívnou funkciou na intervale $[1,2]$ (porovnaj s pr. 2.1b)), je postup využívajúci aditívnu vlastnosť určitého integrálu výhodnejší.

11. Funkcia $f(x)=\dfrac{1}{3+2\cos x}$ je spojitá, a teda riemannovsky integrovateľná na intervale $[0,\pi]$. Použitím substitúcie $\operatorname{tg}(x/2)=t$ nájdeme primitívnu funkciu F k funkcii f na intervale $[0,\pi)$:

$$F(x)=\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt5}\,,\quad x\in[0,\pi)\,.$$

Podľa Newtonovho–Leibnizovho vzorca potom

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}\,dx &= \left[\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt5}\right]_0^\pi=\lim_{x\to\pi-}F(x)-\lim_{x\to0+}F(x)=\\ &=\lim_{x\to\pi-}F(x)-F(0)=\lim_{x\to\pi-}\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt5}-0=\frac{\pi}{\sqrt5}\,.\end{aligned}$$

82. 1. Objasnite nesprávnosť nasledujúcich výpočtov formálne používajúcich Newtonov–Leibnizov vzorec:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=[\ln|x|]_{-1}^{1}=\ln1-\ln1=0$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)'dx=\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{2}$;

c) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{dx}{1+2\sin^2x}=\int_0^\pi\frac{dx}{\cos^2x+3\sin^2x}=\int_0^\pi\frac{dx/\cos^2x}{1+3\operatorname{tg}^2x}=\left[\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}(\sqrt3\operatorname{tg}x)\right]_0^\pi=0$.

2. Nájdite $\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+2^{1/x}} \right)' \, dx$.

83. Pomocou určitých integrálov nájdite nasledujúce limity:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$, $\quad p > 0$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right)$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \cdots + \frac{(4n-1)^3}{n^4} \right)$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right)$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right)$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right)$, $\quad$ kde $f \in \mathcal{R}[a,b]$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n^n}}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^2}{n^3+2^3} + \frac{4^2}{n^3+4^3} + \cdots + \frac{(2n)^2}{n^3+(2n)^3} \right)$.

Riešenie. 1. Ak limitovaný výraz napíšeme v tvare

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} \right) ,$$

vidíme, že číslo a_n je integrálnym súčtom funkcie $f(x) = x$ pri delení $D_n = \{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1 \}$, ktorý dostaneme, ak za ξ_k zvolíme ľavý koncový bod intervalu $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$, $k = 1, \ldots, n$.

Funkcia $f(x) = x$ je spojitá, a teda aj riemannovsky integrovateľná na intervale $[0,1]$. Pretože $\nu(D_n) = 1/n$, je $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ normálna postupnosť delení intervalu $[0,1]$, teda $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť integrálnych súčtov funkcie f, preto podľa vety 4 je $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\, dx$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} .$$

84. 1. Na základe nerovností[8]

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} , \quad x > 0 ,$$

odhadnite integrál $I_1 = \int_{0.5}^{1} \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx$.

2. Na základe nerovností[9]

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} , \quad x > 0 ,$$

[8]pripomeňme, že tieto nerovnosti možno dokázať napr. pomocou Taylorovho vzorca so zvyškom v Lagrangeovom tvare, pozri pr. I.393.3

[9]pri dôkaze týchto nerovností možno postupovať ako v pr. I.352.2

odhadnite integrály $I_2 = \int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x}\, dx$, $\quad I_3 = \int_0^{0.64} \sqrt{x} \sin x\, dx$.

85. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $\frac{1}{20\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx < \frac{1}{20}$;
2. $\frac{4}{9}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x\, dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}(e-1)$;
3. $0 < \int_0^{200} \frac{e^{-5x}\, dx}{x+20} < 0.01$;
4. $0.5 < \int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{\pi}{6}$, $\quad n \ge 1$.

86. Dotyčnica ku grafu dvakrát spojite diferencovateľnej funkcie f zviera v bode $[a, f(a)]$ uhol $\pi/3$ a v bode $[b, f(b)]$ uhol $\pi/4$ s osou Ox $(a < b)$. Vypočítajte $\int_a^b f''(x)\, dx$!

87. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $F\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia taká, že platí

$$\forall\, x \in [a,b] \setminus M : F'(x) = f(x) ,$$

kde $M \subset [a,b]$ je konečná množina. Potom

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) .$$

Dokážte!

88. 1. Uveďte príklad funkcie riemannovsky integrovateľnej na intervale $[a,b]$, ktorá nemá primitívnu funkciu na $[a,b]$.

2. Nech f má primitívnu funkciu na intervale $[0,1]$. Vyplýva z toho, že f je riemannovsky integrovateľná na $[0,1]$?

V ďalšom budeme (kvôli zjednodušeniu zápisov) okrem symbolu $\int_a^b f(x)\, dx$, kde $a < b$, používať aj symboly $\int_b^a f(x)\, dx$ a $\int_a^a f(x)\, dx$ definované nasledovne:

$$\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx , \qquad \int_a^a f(x)\, dx := 0 .$$

Veta 12 (*metóda substitúcie pre určité integrály*). *Ak $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá a $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ spojite diferencovateľná funkcia a $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$, tak*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt . \tag{2.1}$$

Poznámka. Rovnosť (2.1) sa dá dokázať aj za predpokladu „$f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbf{R}$ je monotónna spojite diferencovateľná funkcia a $\varphi([\alpha,\beta]) = [a,b]$ “; vtedy možno (2.1) prepísať do podoby

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\, |\varphi'(x)|\, dx = \int_a^b f(t)\, dt .$$

89. Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\displaystyle\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\,dx$;

2. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$;

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$;

4. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$;

5. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{dx}{3+\cos x}$;

6. $\displaystyle\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$;

7. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,, \quad a>0$;

8. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\,, \quad a>0$;

9. $\displaystyle\int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$;

10. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$;

11. $\displaystyle\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\left(\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)'\right|\,dx\,, \quad n\in\mathbf{N}$.

Riešenie. 1. Zvoľme $\varphi(x)=2-x^2$, potom (pozri označenie z vety 12) $\alpha=0$, $\beta=1$, odtiaľ $\varphi(\alpha)=2$, $\varphi(\beta)=1$. Teda

$$\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1(-2x)(2-x^2)^{12}\,dx = \left|\begin{array}{lcccc} 2-x^2=t & & x & t & \\ -2x\,dx=dt & (\beta=) & 1 & 1 & (=\varphi(\beta) \\ & (\alpha=) & 0 & 2 & (=\varphi(\alpha) \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^1 t^{12}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{12}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{13}}{13}\right]_1^2 = \frac{1}{26}(2^{13}-1)\,.$$

5. Na rozdiel od pr. 89.1, kedy sme rovnosť (2.1) používali „zľava doprava" (tj. výpočet určitého integrálu na jej ľavej strane sme nahradili výpočtom určitého integrálu vpravo), budeme teraz postupovať „sprava doľava"; aby sa nám zápis riešenia ľahšie porovnával s rovnosťou (2.1), zameňme v nej navzájom strany aj premenné x a t :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Na výpočet nášho integrálu použijeme substitúciu $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$, odtiaľ — pretože $x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ — dostávame $x=2\operatorname{arctg} t=\varphi(t)$. Zostáva nájsť čísla α, β tak, aby platilo $\varphi(\alpha)=\dfrac{\pi}{3}$, $\varphi(\beta)=\dfrac{\pi}{2}$. Keďže funkcia φ je prostá, je $\alpha=\varphi^{-1}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta=\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

Teda

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{3+\cos x} = \left|\begin{array}{rcc} \operatorname{tg}(x/2)=t & x & t \\ x=2\operatorname{arctg} t & \pi/2 & 1 \\ dx=2dt/(1+t^2) & \pi/3 & 1/\sqrt{3} \end{array}\right| = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{1}{3+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int_{1/\sqrt{3}}^1\frac{dt}{2+t^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{1/\sqrt{3}}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

Poznámky. 1. Odporúčame čitateľovi preveriť, že v obidvoch riešených príkladoch boli splnené všetky predpoklady vety 12.

2. V uvedených príkladoch sme mohli postupovať aj trocha odlišne: nájsť najprv primitívnu funkciu k funkcii $x(2-x^2)^{12}$, resp. $1/(3+\cos x)$ a potom použiť Newtonov–Leibnizov vzorec. V pr. 89.5 by sme tak dostali (primitívnu funkciu stačí hľadať na intervale $[\pi/3,\pi/2]$):

$$\int\frac{dx}{3+\cos x} = \left|\begin{array}{r} \operatorname{tg}(x/2)=t \\ x=2\operatorname{arctg} t \\ dx=2dt/(1+t^2) \end{array}\right| = \int\frac{1}{3+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int\frac{dt}{2+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C \overset{*}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} \right) + C \,, \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right] \,,$$

potom

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} \right) \right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \,.$$

Teraz by malo byť zrejmé, v čom sa uvedené dva spôsoby výpočtu líšia: v druhom z nich (uvedenom v tejto poznámke) sa musíme ,,vrátiť k pôvodnej integračnej premennej“ (to je krok označený *), zatiaľčo v prvom (založenom na vete 12) stačí namiesto toho len zmeniť pri substitúcii hranice integrovania.

3. Môže sa stať, že neurčitý integrál niektorej funkcie možno nájsť použitím substitúcie $\varphi(x) = t$, ale pri výpočte určitého integrálu tej istej funkcie nemožno vetu 12 použiť (typickým príkladom je použitie substitúcie $\operatorname{tg}(x/2) = t$ pri výpočte integrálov $\int_{-\pi}^{\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx$; pozri tiež riešenia pr. 81.11 a 91.1).

90. 1. Na výpočet integrálu $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ chceme použiť substitúciu $x = \sin t$. Rozhodnite, či môžeme za nové hranice integrovania zvoliť čísla

a) 0 a $\pi/2$; b) π a $\pi/2$;
c) 0 a $5\pi/2$.

2. Na výpočet integrálu $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}\, dx$ chceme použiť substitúciu $x = \sin t$. Rozhodnite, či za nové hranice integrovania môžeme zvoliť čísla

a) $-\pi/4$ a $\pi/4$; b) π/a a $5\pi/4$.

3. Môžeme na výpočet integrálu $\displaystyle\int_0^3 x \sqrt[3]{1 - x^2}\, dx$ použiť substitúciu $x = \sin t$?

91. Nájdite chybu v nasledujúcich výpočtoch:

1.

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx/\cos^2 x}{1 + 2\operatorname{tg}^2 x} = \left| \begin{array}{cc} \operatorname{tg} x = t & \begin{array}{cc} x & t \\ \pi & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \\ dx/\cos^2 x = dt & \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^0 \frac{dt}{1 + 2t^2} = 0$$

(výsledok je zrejme nesprávny, pretože $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ je integrál z kladnej spojitej funkcie, a teda nemôže byť rovný 0 [10]);

2.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = \left| \begin{array}{cc} x = 1/t & \begin{array}{cc} x & t \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \\ dx = -dt/t^2 & \end{array} \right| = \int_{-1}^{1} \frac{-dt/t^2}{1 + 1/t^2} = -\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1 + t^2} = -[\operatorname{arctg} t]_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2}$$

(uvedený postup zrejme nemôže byť správny, pretože z neho vyplýva $\pi/2 = [\operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = -[\operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = -\pi/2$).

92. Dokážte rovnosti:

1. $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{1 + x^2} = \int_1^{1/a} \frac{dx}{1 + x^2}$, $a > 0$; 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t\, dt}{\sin t}$.

---

[10] pozri pr. 76.1

93. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. Ak $f:[-k,k]\to\mathbf{R}$ je spojitá párna (nepárna) funkcia, tak

$$\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 2\int_0^k f(x)\,dx \qquad \left(\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 0\right)\ .$$

2_0. Ak $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je spojitá periodická funkcia s periódou T, tak pre ľubovoľné $a\in\mathbf{R}$ platí

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx\ .$$

3. Ak $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, tak

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

94. Vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos^2 x + x^2\sin x)\,dx$;
3. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\,\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$;
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx$;
5. $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{\ln(2a-x)}{\ln(4a^2-x^2)}\,dx\ ,\quad a>\frac{1}{\sqrt{3}}$;
6. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\ln\left(\sin x+\sqrt{\sin^2 x + e^{\cos x}}\right)\,dx$.

Riešenie. 4.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx &= \int_0^{\pi/4}\ln\left(\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\right)\,dx = \int_0^{\pi/4}\ln(\sin x+\cos x)\,dx - \int_0^{\pi/4}\ln\cos x\,dx = \\
&= \int_0^{\pi/4}\ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)\,dx - \int_0^{\pi/4}\ln\cos x\,dx = \\
&\overset{(1)}{=} \int_0^{\pi/4}\ln(\sqrt{2}\cos x)\,dx - \int_0^{\pi/4}\ln\cos x\,dx = \int_0^{\pi/4}\ln\frac{\sqrt{2}\cos x}{\cos x}\,dx = \\
&= \int_0^{\pi/4}\ln\sqrt{2}\,dx = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{8}\ln 2\ ;
\end{aligned}$$

pritom v kroku označenom (1) sme pri výpočte $\int_0^{\pi/4}\ln(\sqrt{2}\cos(\pi/4-x))\,dx$ použili substitúciu $\pi/4-x=t$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4}\ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)\,dx &= \left|\begin{array}{rcc} \pi/4-x=t & x & t \\ -dx=dt & \pi/4 & 0 \\ & 0 & \pi/4 \end{array}\right| = -\int_{\pi/4}^{0}\ln(\sqrt{2}\cos t)\,dt = \\
&= \int_0^{\pi/4}\ln(\sqrt{2}\cos t)\,dt = \int_0^{\pi/4}\ln(\sqrt{2}\cos x)\,dx
\end{aligned}$$

(posledná rovnosť by mala byť zrejmá: hodnota integrálu nezávisí na označení premennej).

Všimnime si, že hodnotu $\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx$ sme našli bez toho, že by sme poznali primitívnu funkciu k funkcii $\ln(1+\operatorname{tg} x)$.

Veta 13 (*metóda per partes pre určité integrály*). *Ak funkcie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ majú riemannovsky integrovateľné derivácie definované na intervale $[a,b]$, tak*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\ . \tag{2.2}$$

Poznámka. V pr. 95.6 uvidíme, že vzorec (2.2) možno niekedy použiť aj v prípadoch, keď predpoklady vety 13 nie sú splnené. V iných prípadoch (ako ukazujú pr. 95.7,8) bude treba namiesto vety 13 použiť metódu per partes pre neurčitý integrál a Newtonov–Leibnizov vzorec (pozri tiež vetu o integrácii per partes pre Newtonov integrál uvedenú v poznámke pred odsekom 2.6).

95. Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$;
3. $\displaystyle\int_1^{e} (x\ln x)^2\,dx$;
4. $\displaystyle\int_1^{n} x^n \ln x\,dx$;
5. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3x\,dx$;
6. $\displaystyle\int_0^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$;
7. $\displaystyle\int_0^{1} \arccos x\,dx$;
8. $\displaystyle\int_0^{1} (\arcsin x)^2\,dx$.

96. Pomocou rekurentných vzťahov vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$;
2. $\displaystyle I_n = \int_0^{1} (1-x^2)^n\,dx$;
3. $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^{2n} x\,dx$;
4. $\displaystyle I_{m,n} = \int_0^{1} x^m(\ln x)^n\,dx$;
5. $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1} dx$.

Riešenie. 1. Odvoďme najprv rekurentný vzťah pre výpočet I_n : pre $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$ dostaneme použitím metódy per partes

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin x\cdot\sin^{n-1}x\,dx \overset{(1)}{=} \left|\begin{array}{ll} u'=\sin x & u=-\cos x\\ v=\sin^{n-1}x & v'=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\end{array}\right| =\\
&= [-\cos x\sin^{n-1}x]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx \overset{(2)}{=} (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cdot(1-\sin^2 x)\,dx =\\
&= (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\ ,
\end{aligned}$$

teda

$$I_n = (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\ ,$$

odtiaľ

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}$$

(k označeným rovnostiam urobme tieto poznámky:

(1) aby sme mohli použiť vetu 13, musíme predpokladať $n\ge 2$ (pre $n<2$ je derivácia funkcie $\sin^{n-1}x$ neohraničená);

(2) pre $n>1$ je $[-\cos x\sin^{n-1}x]_0^{\pi/2}=0$).

Na základe tohto rekurentného vzťahu vieme pomocou hodnoty I_0 $\left(=\int_0^{\pi/2}\sin^0 x\,dx=\int_0^{\pi/2}dx\right) = \dfrac{\pi}{2}$ vyjadriť I_n pre n párne:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\ ,\\
I_4 &= \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\ ,\\
&\ \,\vdots\\
I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k}\,I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\ ,
\end{aligned}$$

čo skrátene zapisujeme

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(význam symbolu !! je čitateľovi iste zrejmý).

Podobne môžeme pomocou hodnoty I_1 $\left(= \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} \right) = 1$ vyjadriť I_n pre n nepárne:

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 , \\ I_5 &= \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 , \\ &\vdots \\ I_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 . \end{aligned}$$

Získané výsledky teda môžeme zhrnúť

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} , & \text{ak} \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{je párne} \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} , & \text{ak} \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{je nepárne}^{11} \end{cases} .$$

97. Nech funkcia f je $(n+1)$–krát spojite diferencovateľná na intervale I. Potom pre každé x, $x_0 \in I$ platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

(tento vzťah sa nazýva *Taylorov vzorec so zvyškom v integrálnom tvare*).

---

98. Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$, $\quad 0 < \alpha < \pi$;
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{x^2 + x + 1}$;
3. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{x\, dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}}$;
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^{15} \sqrt{1 + 3x^8}\, dx$;
5. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$;
6. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;
7. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x}$;
8. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;
9. $\displaystyle\int_{0}^{4\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$;
10. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}$, $\quad a, b > 0$;
11. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\sin x}\, dx$;
12. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x \sin^m x\, dx$, $\quad m \in \mathbf{N}$;
13. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\, dx$;
14. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx$;
15. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x}) \mathrm{tg}\, x\, dx$;
16. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x e^x \sin x\, dx$;

---

[11] pritom kladieme $0!! := 1$

17. $\displaystyle\int_1^e (1-\ln x)^2\,dx$;

18. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$;

19. $\displaystyle\int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$;

20. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$;

21. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}$, kde $\displaystyle f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$;

22. $\displaystyle\int_{-2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'\,dx$;

23. $\displaystyle\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx$;

24. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\operatorname{sgn}\cos x\,dx$;

25. $\displaystyle\int_0^2 [e^x]\,dx$.

2.3 Integrál ako funkcia hornej (dolnej) hranice

Veta 14. *Nech $f\in\mathcal{R}[a,b]$, $c\in[a,b]$ a nech funkcia $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ je daná predpisom*

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$$ [12].

Potom

a) *F je spojitá funkcia;*

b) *ak funkcia f je spojitá v bode $x_0\in[a,b]$, tak funkcia F má v bode x_0 vlastnú deriváciu (v prípade $x_0=a$ alebo $x_0=b$ príslušnú jednostrannú deriváciu) rovnú $f(x_0)$.*

Poznámka. Z vety 14 vyplýva veta 2 z odseku 1.1.

99. Nech $f:[c,d]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, funkcie φ, ψ sú diferencovateľné na intervale I a nech $\varphi(I)\subset[c,d]$, $\psi(I)\subset[c,d]$. Potom funkcia $G:I\to\mathbf{R}$ daná predpisom

$$G(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$$

je diferencovateľná na I a platí

$$G'(x)=f(\psi(x))\,\psi'(x)-f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,. \tag{2.3}$$

Dokážte!

100. Vypočítajte[13]:

1. $\displaystyle\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2\,dx$;

2. $\displaystyle\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2\,dx$;

3. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2\,dx$;

4. $\displaystyle\int_a^b \left(\frac{d}{dx}\sin x^2\right)\,dx$;

5. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2\,da$.

---

[12] pretože hodnota určitého integrálu sa nezmení, ak integračnú premennú označíme x namiesto t, mohli by sme predpis funkcie F zapísať aj v tvare $F(x)=\int_c^x f(x)\,dx$

[13] symbolom $\dfrac{df}{dx}$ (resp. $\dfrac{df(x)}{dx}$) označujeme deriváciu funkcie $y=f(x)$; dx tu má podobnú úlohu ako v symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ (kde označuje, ,,podľa čoho integrujeme“): určuje, čo v danom výraze ,,pokladáme za premennú“ (napr. $\dfrac{d}{dx}(\alpha x^2)=2\alpha x$, $\dfrac{d}{d\alpha}(\alpha x^2)=x^2$, $\dfrac{d}{d\alpha}x^2=0$)

101. Nájdite f', ak

1. $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\, dt$;

2. $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

3. $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\, dt$.

102. 1. Nájdite lokálne extrémy funkcie $F(t) = \int_0^{e^t} \frac{x^4 - 16}{1+x}\, dx$.

2. Nájdite lokálne extrémy a inflexné body funkcie $y = \int_0^x (t-1)(t-2)^2\, dt$.

103. Vypočítajte limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos x^2\, dx}{x}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} x)^2\, dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2}\, dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}\, dx}$.

104. Nech $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbf{R}$. Vypočítajte $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\, dx$.

105. Nech $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je periodická funkcia s periódou ω, $f \in \mathcal{R}[0,\omega]$, $a \in \mathbf{R}$ a nech funkcia $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je daná predpisom $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, $x \in \mathbf{R}$. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. funkcia F je súčtom spojitej periodickej funkcie s periódou ω a lineárnej funkcie;
2. funkcia F je periodická práve vtedy, keď $\int_0^\omega f(t)\, dt = 0$.

106. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$, nech funkcia $F: [a,b] \to \mathbf{R}$ je daná predpisom $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Potom

1. funkcia F je lipschitzovsky spojitá na $[a,b]$ (tj.

$$\exists\, L \in \mathbf{R}^+ \; \forall\, x, y \in [a,b] : |F(x) - F(y)| \le L|x-y| \quad);$$

2. funkcia F nemôže mať v žiadnom bode $x_0 \in [a,b]$ nevlastnú deriváciu (v prípade $x_0 = a$, $x_0 = b$ nevlastnú jednostrannú deriváciu).

Dokážte!

107. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$, nech funkia $F: [a,b] \to \mathbf{R}$ je daná predpisom $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. ak $x_0 \in (a,b)$ je bod odstrániteľnej nespojitosti funkcie f, tak funkcia F je diferencovateľná v bode x_0;

2. ak $x_0 \in (a,b)$ je bod nespojitosti 1. druhu funkcie f, tak funkcia F má vlastné jednostranné derivácie v bode x_0, ale nie je tam diferencovateľná.

108. Zostrojte funkciu $f \in \mathcal{R}[a,b]$, pre ktorú je funkcia $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$ diferencovateľná na $[a,b]$, ale pre nekonečne veľa $x \in [a,b]$ platí $F'(x) \ne f(x)$.

109. Zostrojte takú nespojitú riemannovsky integrovateľnú funkciu $f: [0,1] \to \mathbf{R}$, aby pre funkciu $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$, $x \in [0,1]$, platilo $F' = f$.

2.4 Vety o strednej hodnote

Veta 15 *(prvá veta o strednej hodnote). Nech $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, pričom $g(x) \geq 0$ pre všetky $x \in [a,b]$ ($g(x) \leq 0$ pre všetky $x \in [a,b]$). Označme $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Potom existuje $\mu \in \mathbf{R}$ také, že $m \leq \mu \leq M$ a*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Ak funkcia f je naviac spojitá na $[a,b]$, tak existuje $c \in [a,b]$ [14] *také, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Špeciálne, pre každú funkciu $f \in \mathcal{R}[a,b]$ existuje číslo μ také, že $m \leq \mu \leq M$ a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

(číslo μ s touto vlastnosťou sa nazýva *stredná hodnota funkcie f na intervale $[a,b]$*)[15].

110. Nájdite strednú hodnotu funkcie f na intervale I, ak:

1. $f(x) = \sin 3x, \quad I = [0, \pi/3]$;
2. $f(x) = x^4, \quad I = [0,1]$;
3. $f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [0,100]$.

111. Nech funkcie f, g sú spojité na intervale $[a,b]$, nech $g(x) \geq 0$ pre všetky $x \in [a,b]$ ($g(x) \leq 0$ pre všetky $x \in [a,b]$). Potom existuje $c \in (a,b)$ také, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Dokážte!

112. Určte znamienko nasledujúcich integrálov:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$;
3. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} x^2 \ln x\,dx$;
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$;
5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} \sin x^2\,dx$;
6. $\displaystyle\int_{\ln(\pi/2)}^{T} \cos e^x\,dx\ , \quad T > \ln(\pi/2)$.

Riešenie. 1.

$$\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} x^{158} \sin x\,dx + \int_\pi^{2\pi} x^{158} \sin x\,dx\ ,$$

pritom podľa tvrdenia z pr. 111 (pre $f(x) = x^{158}$, $g(x) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$) je

$$\int_0^{\pi} x^{158} \sin x\,dx = c_1^{158} \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2c_1^{158}$$

pre niektoré $c_1 \in (0,\pi)$ a

$$\int_\pi^{2\pi} x^{158} \sin x\,dx = c_2^{158} \int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = -2c_2^{158}$$

---

[14] možno dokonca dokázať že $c \in (a,b)$ (pozri riešenie pr. 111)

[15] pre spojitú funkciu $f\colon[a,b] \to \mathbf{R}$ teda platí $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ pre niektoré $c \in (a,b)$, čo je vlastne len iná formulácia Lagrangeovej vety o strednej hodnote pre funkciu $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

pre niektoré $c_2 \in (\pi, 2\pi)$.

Pretože $c_1 \in (0, \pi)$ a $c_2 \in (\pi, 2\pi)$, je zrejme $0 < c_1 < c_2$, a teda $c_1^{158} < c_2^{158}$. Preto

$$\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x \, dx = 2c_1^{158} - 2c_2^{158} < 0 \, .$$

Poznámky. 1. Keby sme pri riešení pr. 112.1 použili namiesto tvrdenia z pr. 111 vetu 15, podarilo by sa nám dokázať len nerovnosť $\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x \, dx \le 0$ (z vety 15 totiž vyplýva iba $c_1 \in [0, \pi]$, $c_2 \in [\pi, 2\pi]$, odtiaľ $0 \le c_1 \le c_2$, a teda $2(c_1^{158} - c_2^{158}) \le 0$).

2. Nerovnosť $\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x \, dx < 0$ možno dokázať aj na základe tvrdenia z pr. 76.2 (ktorého dôsledkom je napokon aj tvrdenie z pr. 111): Pretože $\int_\pi^{2\pi} x^{158} \sin x \, dx = -\int_0^\pi (x+\pi)^{158} \sin x \, dx$ (stačí použiť substitúciu $x = t - \pi$), je $\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x \, dx = \quad (= \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}) \quad = \int_0^\pi [x^{158} - (x+\pi)^{158}] \sin x \, dx < 0$; posledná nerovnosť vyplýva z tvrdenia pr. 76.1 (ktoré je špeciálnym prípadom tvrdenia z pr. 76.2).

113. Vypočítajte limity:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$;

2. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3 + 1}$;

3. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x}$, kde $0 < a < b$, $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia ;

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

Riešenie. 1. Podľa vety 15 je

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx = \frac{1}{1+c_n} \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{1+c_n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

pre niektoré $c_n \in [0,1]$. Postupnosť $\left\{ \dfrac{1}{1+c_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená ($c_n \in [0,1]$ pre každé $n \in \mathbf{N}$, preto $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{1+c_n} \le 1, \quad n \in \mathbf{N}$) a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, preto

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+c_n} \cdot \frac{1}{n+1} \right) = 0 \, .$$

114. Nech strednou hodnotou spojitej funkcie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ na ľubovoľnom intervale $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ je vždy to isté číslo $k \in \mathbf{R}$. Potom $f(x) \equiv k$, $x \in [a,b]$. Dokážte!

115. Nech pre spojitú funkciu $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ a spojitú nezápornú funkciu $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ platí $fg \in \mathcal{R}[a,b]$. Potom existuje $c \in \mathbf{R}$ také, že

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = f(c) \int_a^b g(x) \, dx \, . \tag{2.4}$$

Dokážte!

Veta 16 (*druhá veta o strednej hodnote*). *Nech* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *je montónna funkcia,* $g \in \mathcal{R}[a,b]$. *Potom existuje* $c \in [a,b]$ *také, že*

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = f(a) \int_a^c g(x) \, dx + f(b) \int_c^b g(x) \, dx \quad [16].$$

[16] pre niektoré špeciálne prípady dokážeme túto rovnosť v pr. 119 a 387

116. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. Nech $g \in \mathcal{R}[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je neklesajúca funkcia, nech $A \le \lim_{x\to a+} f(x)$, $B \ge$ $\ge \lim_{x\to b-} f(x)$. Potom existuje $c\in[a,b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = A\int_a^c g(x)\,dx + B\int_c^b g(x)\,dx.$$

2_0. Nech $g\in\mathcal{R}[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je neklesajúca (nerastúca) funkcia a $f(a)\ge 0$ $\quad(f(b)\ge 0\,)$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_c^b g(x)\,dx \tag{2.5}$$

$$\left(\quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx \quad\right) \tag{2.6}$$

pre niektoré $c\in[a,b]$ (rovnosti (2.5) a (2.6) sa nazývajú *Bonnetove vzorce*).

117. Pomocou druhej vety o strednej hodnote dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx\right| \le \frac{2}{\sqrt{a}}\,,\quad 0<a<b\,;$

2_0. $\left|\int_a^b \frac{1}{x}e^{-\alpha x}\cos x\,dx\right| \le \frac{2}{a}\,,\quad 0<a<b\,;$

3. $\left|\int_a^b \sin x^4\,dx\right| \le \frac{1}{2a^3}\,,\quad 0<a<b\,;$

4_0. $\left|\int_a^b \cos\varphi(x)\,dx\right| \le \frac{2}{\varphi'(a)}\,,\quad 0<a<b$, kde $\varphi:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ je dvakrát diferencovateľná funkcia, $\varphi''(x)\ge 0$ pre všetky $x\in(0,\infty)$ a $\varphi'(0)>0$.

Riešenie. 1. Pre funkcie $f(x)=1/\sqrt{x}$, $g(x)=\sin x$ sú na intervale $[a,b]$ splnené všetky predpoklady tvrdenia z pr. 116.2 (ktoré je špeciálnym prípadom vety 16), preto

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_a^c \sin x\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}(\cos a-\cos c)\,.$$

Pretože $|\cos a-\cos c|\le|\cos a|+|\cos c|\le 2$, je

$$\left|\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x\,dx\right| = \frac{1}{\sqrt{a}}|\cos a-\cos c| \le \frac{2}{\sqrt{a}}\,.$$

118. Dokážte rovnosť

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x^2}\sin e^t\,dt = 0\,.$$

119. Nech $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, nech derivácia f' funkcie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je nezáporná riemannovsky integrovateľná funkcia definovaná na $[a,b]$. Dokážte za týchto predpokladov druhú vetu o strednej hodnote použitím integrácie per partes a prvej vety o strednej hodnote!

2.5 Niektoré aplikácie Riemannovho určitého integrálu

Veta 17. *Nech* $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ *sú spojité funkcie a* $f(x) \le g(x)$ *pre všetky* $x \in [a,b]$. *Potom plošným obsahom*[17] *množiny* $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$ *je číslo*

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx\ .$$

120[18]**.** Vypočítajte plošný obsah útvaru ohraničeného krivkami:

1. $y = \dfrac{x^2}{2}\,,\quad y = 2 - \dfrac{3}{2}x\ ;$

2. $y = f(x) = 2 - 4x^2 + 4x^3 - x^4\,,\quad y = 0\,,\quad x = x_1\,,\quad x = x_2\,,$ kde x_1, x_2 sú body lokálneho maxima funkcie f ;

3. $y = |\log x|\,,\quad y = 0\,,\quad x = 0.1\,,\quad x = 10\ ;$

4. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,,\quad y + x^2 = 0\,,\quad x = 1\ ;$

5. $y = \operatorname{tg} x\,,\quad y = \dfrac{2}{3}\cos x\,,\quad x = 0\ ;$

6. $y = \arcsin x\,,\quad y = \arccos x\,,\quad y = 0\ ;$

7. $y = \sin^3 x + \cos^3 x\,,\quad y = 0\,,\qquad x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]\ ;$

8. $y = 6x^2 - 5x + 1\,,\quad y = \cos \pi x\,,\qquad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]\ ;$

9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ ;$

10. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)\ ;$

11. $y^2 = \sin^2 x \cos x\,,\qquad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\ ;$

12. $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1\,,\quad x = 0\,,\quad y = 0\ ;$

13. $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2\ ;$

14. $(y - x + 2)^2 = 9y\,,\quad x = 0\,,\quad y = 0\ ;$

15. $x^2 + y^2 = 16\,,\quad x^2 + y^2 = 4y\,,\quad \sqrt{3}\,y - x = 4\sqrt{3}\,,\quad y + \sqrt{3}\,x = 4\ ;$

16. $x^2 + y^2 = 3a^2\,,\quad x^2 = 2ay\,,\quad y^2 = 2ax\ .$

Riešenie. 1. Krivky $y = \dfrac{x^2}{2}$ a $y = 2 - \dfrac{3}{2}x$ sa pretínajú v bodoch, ktorých x-ové súradnice nájdeme riešením rovnice

$$\frac{x^2}{2} = 2 - \frac{3}{2}x\ ;$$

tej vyhovujú čísla $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Pre všetky $x \in (-4,1)$ platí $2 - \dfrac{3}{2}x > \dfrac{x^2}{2}$ [19]. Útvar ohraničený krivkami $y = \dfrac{x^2}{2}$ a $y = 2 - \dfrac{3}{2}x$ je teda množina $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ -4 \le x \le 1,\ \dfrac{x^2}{2} \le y \le 2 - \dfrac{3}{2}x\}$ a jeho plošným obsahom je podľa vety 17 číslo

$$\int_{-4}^{1} \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_{-4}^{1} = \frac{125}{12}\ .$$

---

[17]korektná definícia pojmov plošný obsah rovinného útvaru, objem telesa, plošný obsah povrchu telesa, dĺžka rovinnej krivky presahuje rámec tohto textu, čitateľ ju môže nájsť napr. v [10]

[18]všetky parametre vystupujúce v pr. 120–141 pokladáme za kladné

[19]spojitá funkcia $y = \left(2 - \dfrac{3}{2}x\right) - \dfrac{x^2}{2}$ nadobúda nulové hodnoty len v bodoch $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, preto na intervale $(-4,1)$ nemení znamienko; na zistenie jej znamienka na tomto intervale stačí nájsť funkčnú hodnotu v niektorom jeho bode

10. Rovnosť $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ možno upraviť na tvar $|y| = |x|\sqrt{a^2 - x^2}$, krivka $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ je teda zjednotením grafov funkcií $f_1(x) = |x|\sqrt{a^2 - x^2}$, $f_2(x) = -|x|\sqrt{a^2 - x^2}$, pritom $f_1(x) \geq f_2(x)$ pre všetky $x \in [-a, a]$ [20]. Útvar ohraničený krivkou $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ je preto množina $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\, -a \leq x \leq \leq a,\ -|x|\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq |x|\sqrt{a^2 - x^2}\}$ a jeho plošný obsah je

$$\int_{-a}^{a}\Big(|x|\sqrt{a^2 - x^2} + |x|\sqrt{a^2 - x^2}\Big)\,dx = 2\int_{-a}^{a}|x|\sqrt{a^2 - x^2}dx \overset{(1)}{=} 4\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}dx = 4\left[-\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3}a^3$$

(rovnosť (1) vyplýva z párnosti integrandu – pozri pr. 93.1).

121. Vypočítajte plošný obsah krivočiareho štvoruholníka ohraničeného grafmi elíps $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1 \quad (a > b)$.

122. 1. Vypočítajte plošný obsah tej časti útvaru ohraničeného krivkami $y^m = x^n$ a $y^n = x^m \quad (m, n \in \mathbf{N},\ m > n)$, ktorá leží v prvom kvadrante.

2. Vypočítajte plošný obasah celého útvaru!

123. Vypočítajte plošný obsah útvaru ohraničeného parabolou $y = x^2 + 4x + 9$ a jej dotyčnicami v bodoch $x_1 = -3$, $x_2 = 0$.

124. Priamka sa dotýka paraboly v bode A, tetiva BC paraboly je s ňou rovnobežná. Dokážte, že plošný obsah útvaru ohraničeného úsečkou BC a parabolou je $4P/3$, kde P je plošný obsah trojuholníka ABC.

125. 1. Nech sú dané čísla p, q, b, pričom $b \geq q$. Pre ktoré $k \in \mathbf{R}$ je plošný obsah útvaru ohraničeného krivkami $y = x^2 + px + q$ a $y = kx + b$ minimálny?

2. Kedy je plošný obsah útvaru ohraničeného parabolou $x^2 = 2py$ ($p > 0$ je dané) a normálou k nej najmenší?

Veta 18. *Nech $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sú spojité funkcie, nech $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pre všetky $x \in [a, b]$. Potom objem telesa, ktoré vznikne rotáciou množiny $M = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\, a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ okolo osi Ox, je číslo*

$$\pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))\,dx\,.$$

Ak $a \geq 0$, tak objem telesa, ktoré vznikne rotáciou množiny M okolo osi Oy, je číslo

$$2\pi\int_a^b x(g(x) - f(x))\,dx$$ [21].

126. Vypočítajte objem telesa, ktoré vzniklo rotáciou plochy ohraničenej grafmi kriviek

1. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3}, \quad x \in [0, a]\,,$ okolo osi Ox ;
2. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad x = a + h$ okolo osi Ox ;

---

[20] krivku $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ možno samozrejme zapísať aj v tvare zjednotenia grafov iných funkcií premennej x (napr. $g_1(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $g_2(x) = -x\sqrt{a^2 - x^2}$), uvedené vyjadrenie nám však vyhovuje preto, lebo $f_1(x) \geq f_2(x)$ pre všetky $x \in [-a, a]$ a f_1, f_2 sú spojité funkcie

[21] z geometrickej interpretácie potom vyplýva, že pre spojitú rastúcu funkciu $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ takú, že $a \geq 0$, $f(a) \geq 0$, platí

$$2\int_a^b xf(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} \left(b^2 - (f^{-1}(x))^2\right)\,dx$$

(porovnaj s pr. 137 a 143)

3. $2px = y^2\,,\quad 2q(a-x) = y^2$ okolo osi Ox ;

4. $2px = y^2\,,\quad 2q(x-a) = y^2\quad (q > p)$ okolo osi Ox ;

5. $y = 2x - x^2\,,\quad y = 0$ a) okolo osi Ox ; b) okolo osi Oy ;

6. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\,,\quad y = b\left|\dfrac{x}{a}\right|$ a) okolo osi Ox ; b) okolo osi Oy ;

7. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$ okolo osi Ox ;

8. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ okolo osi Ox ;

9. $y = \cos x\,,\quad y = \dfrac{9}{2\pi^2}\,x^2$ okolo osi Ox ;

10. $y = x\,,\quad y = x + \sin^2 x\,,\quad x = 0\,,\quad x = \pi$ okolo osi Oy ;

11. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}\,,\quad y = 0\,,\quad x = 0\,,\quad x = a$ okolo osi Oy ;

12. $y = x\sqrt{\dfrac{3+3x}{3-x}}\,,\quad x = 0\,,\quad x = 2\,,\quad y = 6$ okolo osi Oy ;

13. $y = \arcsin x\,,\quad x = 1\,,\quad y = -\dfrac{\pi}{2}$ okolo priamky $y = \dfrac{\pi}{2}$.

127. *Tórus* je teleso, ktoré vznikne rotáciou kruhu (s polomerom a) okolo osi ležiacej v rovine kruhu, ktorej vzdialenosť od stredu kruhu je b $(b \ge a)$. Nájdite vzorec pre jeho objem!

128. Nájdite vzorec pre objem zrezaného rotačného kužela (rovina rezu je kolmá na os rotácie) s polomermi základní R, r $(r < R)$ a výškou h.

129. Rovina kolmá na os rotačného paraboloidu z neho odsekáva segment s polomerom základne r a výškou h. Vypočítajte objem tohto segmentu!

130. Vypuklá šošovka je ohraničená dvoma súosými paraboloidmi, jej priemer (v rovine prieniku paraboloidov) je D, hrúbka (v ich spoločnej osi) je h. Vypočítajte objem V šošovky!

131. Parabolický segment je ohraničený oblúkom paraboly a jej tetivou dĺžky $2a$, ktorá je kolmá na os paraboly a je vzdialená h od vrcholu paraboly. Nájdite objem telesa, ktoré vznikne rotáciou tohto segmentu okolo tetivy!

Veta 19. *Nech* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *je spojite diferencovateľná funkcia. Potom dĺžkou krivky* $\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\,;\ x\in[a,b],\ y = f(x)\}$ *je číslo*

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx\,.$$

132. Vypočítajte dĺžku krivky danej rovnicou

1. $y = x^{3/2},\quad x \in [0,4]$;

2. $y^2 = 2px\,,\quad x \in [0, x_0]$;

3. $x = \dfrac{1}{4}\,y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y\,,\quad y \in [1,e]$;

4. $y = 2a\ln\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} - 4\sqrt{ax}\,,\quad x \in [0, x_0]\quad (x_0 < a)$;

5. $y = \sqrt{e^{2x}-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}\,,\quad x \in [0,1]$;

6. $y = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right)\,,\quad x \in [1, a+1]$;

7. $x = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}\,, \quad y \in [b, a]$;

8. $y = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} - \sqrt{1 - x^2}\,, \quad |x| \le a < 1$;

9. $y = a \ln \dfrac{a^2}{a^2 - x^2}\,, \quad x \in [0, b] \qquad (b < a)$;

10. $y = \dfrac{x}{6}\sqrt{x + 12}\,, \quad x \in [-11, -3]$;

11. $e^y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\,, \quad x \in [a, b]$;

12. $y = \sqrt{2x - x^2} - 1\,, \quad x \in \left[\dfrac{1}{4}, 1\right]$;

13. $y = \ln \cos x\,, \quad x \in [0, a] \qquad \left(a < \dfrac{\pi}{2}\right)$;

14. $y = 2\sqrt{1 + e^{x/2}}\,, \quad \ln 9 \le x \le \ln 64$;

15. $y = \dfrac{x}{4}\sqrt{2 - x^2}\,, \quad x \in [0, 1]$;

16. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}\,, \quad x \in \left[0, \dfrac{5}{3}a\right]$;

17. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

133. Vypočítajte dĺžku krivky $y = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\, dt$.

134. Vypočítajte obvod útvaru ohraničeného krivkami $y^3 = x^2$, $y = \sqrt{2 - x^2}$.

135. Vypočítajte dĺžku tej časti krivky $x^{2/3} - y^{2/3} = a^{2/3}$, ktorá leží vnútri paraboly $27ax = 10\sqrt{10}\, y^2$.

136. Nech M je bod *reťazovky* $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, l jej dotyčnica v bode M. Označme M_1 projekciu bodu M na os Ox a N projekciu bodu M_1 na priamku l. Dokážte, že dĺžka oblúka AM reťazovky (kde $A \equiv (0, a)$ je vrchol reťazovky) je rovnaká ako dĺžka úsečky MN.

137. Nech $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ je prostá spojite diferencovateľná funkcia, pričom $f'(x) \ne 0$ pre všetky $x \in [a, b]$, $f(b) > f(a)$. Potom

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + [(f^{-1})'(x)]^2}\, dx \, .$$

Dokážte uvedenú rovnosť a interpretujte ju geometricky!

Veta 20. a) *Nech $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia. Potom plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou krivky $y = f(x)$ okolo osi Ox, je číslo*

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \, .$$

b) *Ak naviac $a \ge 0$, tak plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou krivky $y = f(x)$ okolo osi Oy, je číslo*

$$2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \, .$$

138. Vypočítajte plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou krivky

1. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}\,, \quad x \in [0, a]\,, \qquad$ okolo osi Ox ;

2. $y = \operatorname{tg} x\,, \quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]\,, \qquad$ okolo osi Ox ;

3. $y^2 = 2px\,, \quad x \in [0, x_0]\,, \qquad$ a) okolo osi Ox ; $\qquad$ b) okolo osi Oy ;

4. $x = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$, $0 < b \le y \le a$, okolo osi Ox ;

5. $y = \dfrac{1}{2a}(a^2 + x^2)$, $x \in [0, a]$, okolo osi Ox ;

6. $y = \dfrac{1}{x}$, $x \in [1, a]$, okolo osi Ox ;

7. $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$, $x \in \left[\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{3}\right]$, okolo osi Ox ;

8. $y = \dfrac{1}{4}(x^2 - 2\ln x)$, $x \in \left[\dfrac{1}{e}, e\right]$, okolo osi Ox ;

9. $y = a \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{x(a - x)}$, $x \in \left[\dfrac{a}{4}, \dfrac{3a}{4}\right]$, okolo osi Ox ;

10. $y = \dfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}\right)$, $x \in [0, 1]$, okolo osi Oy .

139. Vypočítajte plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou oblúka reťazovky $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ odrezaného priamkou $y = 5a/3$ okolo tejto priamky.

140. Vypočítajte plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou oblúka kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ od bodu $A \equiv (a, 0)$ po bod $B \equiv (0, a)$ okolo priamky $x + a = y$.

141. Nájdite vzorec pre výpočet plošného obsahu povrchu segmentu rotačného paraboloidu s výškou h a polomerom základne R.

142. Krivka $y = \cos x$, $x \in [-\pi, \pi]$, rotuje okolo priamky $y = a$. Pri akom a bude plošný obsah S množiny, ktorá vznikne touto rotáciou, minimálny? Vypočítajte tento minimálny plošný obsah!

143. Nech $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je nezáporná prostá spojite diferencovateľná funkcia, pričom $a \ge 0$, $f(a) \le f(b)$, $f'(x) \ne 0$ pre všetky $x \in [a, b]$. Potom

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} x\sqrt{1 + [(f^{-1})'(x)]^2}\, dx \, .$$

Dokážte uvedenú rovnosť a interpretujte ju geometricky!

Poznámka (*Newtonov integrál a zovšeobecnená primitívna funkcia*). Pri riešení príkladov 91.1 a 95.7 sme sa stretli s pojmom Newtonov integrál, preto na tomto mieste uvádzame jeho definíciu a niektoré základné tvrdenia.

Nech $F : (a, b) \to \mathbf{R}$ je primitívna funkcia k funkcii $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, nech existujú konečné $\lim_{x\to a} F(x)$, $\lim_{x\to b} F(x)$. *Newtonovým integrálom funkcie* f *na intervale* (a, b) sa potom nazýva číslo

$$(N)\int_a^b f(x)\, dx := [F(x)]_a^b := \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x) \, .$$

Použitím pojmu Newtonovho integrálu môžeme vetu 11 (Newtonov–Leibnizov vzorec) sformulovať takto:

Nech $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *a existuje* $(N)\int_a^b f(x)\, dx$. *Potom*

$$\int_a^b f(x)\, dx = (N)\int_a^b f(x)\, dx \, .$$

Pojem Newtonovho integrálu môžeme zovšeobecniť, ak v jeho definícii použijeme namiesto pojmu primitívnej funkcie pojem zovšeobecnenej primitívnej funkcie definovaný nasledovne:

Spojitá funkcia F definovaná na intervale I sa nazýva *zovšeobecnená primitívna funkcia k funkcii* $f: I \to \mathbf{R}$, ak existuje konečná množina $K \subset I$ taká, že

$$\forall\, x \in I \setminus K : F'(x) = f(x)\ .$$

(V súvislosti s takto zovšeobecneným pojmom Newtonovho integrálu si všimnite pr. 87.)

Veta (*integrácia per partes pre Newtonov integrál*). *Nech* $F,\ G : (a,b) \to \mathbf{R}$ *sú zovšeobecnené primitívne funkcie k funkciám* $f,\ g : (a,b) \to \mathbf{R}$, *nech existuje* $(N)\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$ *a konečné* $\lim_{x\to a} F(x)G(x)$, $\lim_{x\to b} F(x)G(x)$. *Potom*

$$(N)\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_a^b - (N)\int_a^b F(x)g(x)\,dx\ .$$

Veta (*substitučná metóda pre Newtonov integrál*). *Nech* ω *je spojitá rýdzomonotónna funkcia zobrazujúca interval* (a,b) *na interval* (c,d) $\ (a,b,c,d \in \mathbf{R}^*)$; *nech pre každé* $x \in (a,b)\setminus K$, *kde* K *je konečná množina, existuje nenulová vlastná derivácia* $\omega'(x)$. *Potom*

$$(N)\int_a^b f(\omega(x))\,|\omega'(x)|\,dx = (N)\int_c^d f(x)\,dx\ ,$$

ak aspoň jeden z uvedených integrálov existuje.

Využime teraz Newtonov integrál pri výpočte $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ (pr. 91.1) a $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\,dx$ (pr. 95.7):

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x} &= (N)\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = (N)\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x} = (N)\int_0^{\pi/2} \frac{dx/\cos^2 x}{2\,\mathrm{tg}^2 x + 1} = \\
&= \left| \begin{array}{c} \mathrm{tg}\, x = t \\ dx/\cos^2 x = dt \end{array} \quad \mathrm{tg}\,((0,\pi/2)) = (0,\infty) \right| = (N)\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+2t^2} = \left[\frac{1}{\sqrt2}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt2\, t \right]_0^{\infty} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt2}\pi\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arccos x\,dx &= (N)\int_0^1 \arccos x\,dx = \left| \begin{array}{ll} G = \arccos x & g = -1/\sqrt{1-x^2} \\ f = 1 & F = x \end{array} \right| = \\
&= [x\arccos x]_0^1 + (N)\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [x\arccos x]_0^1 + [-\sqrt{1-x^2}]_0^1 = 1\ .
\end{aligned}$$

2.6 Ďalšie príklady

144$_0$. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť bodov intervalu $[a,b]$, pričom $a_1 = a$, $a_2 = b$. Nech delenie D_n intervalu $[a,b]$ je vytvorené deliacimi bodmi $a_1,\dots,a_{n+1}$ (usporiadanými podľa veľkosti). Dokážte nasledujúce tvrdenie:

$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálnou postupnosťou delení práve vtedy, keď každý bod intervalu $[a,b]$ je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

145. Dokážte, že pre každé číslo $\lambda \in [0,1]$ a každú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $[0,1]$ existuje postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov Dirichletovej funkcie χ taká, že S_n je integrálny súčet pri delení D_n a $\lim_{n\to\infty} S_n = \lambda$.

146. Ak nekonštantná periodická funkcia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je integrovateľná na každom uzavretom ohraničenom intervale $I \subset \mathbf{R}$, tak f má najmenšiu periódu. Dokážte!

147. Ak $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia a $f \in \mathcal{R}[a-\varepsilon, b]$ pre každé $\varepsilon \in (0, b-a)$, tak $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dokážte!

148. Nech $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je nezáporná ohraničená funkcia, nech pre každé $\alpha > 0$ je množina $\{x \in [a,b]\,;\ f(x) \ge \alpha\}$ konečná. Potom $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dokážte!

149. Nech $M \subset [a,b]$ je nekonečne spočítateľná množina. Na $[a,b]$ definujte funkciu f tak, aby bola nespojitá v každom bode množiny M a aby platilo $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

150. Označme $E_n := \left\{ \frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n} \right\}$, $n = 0,1,2,\ldots$, nech $E_n^* := E_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} E_k$, $n \in \mathbf{N}$; nech $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť reálnych čísel. Definujme funkciu $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_n\,, & \text{ak} \quad x \in E_n^* \\ 0 & \text{ak} \quad x \in [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n^* \end{cases} .$$

Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1_0. $f \in \mathcal{R}[0,1]$ práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$;

2. ak $f \in \mathcal{R}[0,1]$, tak $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

151. Ohraničená funkcia $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je riemannovsky integrovateľná práve vtedy, keď existuje normálna postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $[a,b]$ taká, že všetky k nej patriace postupnosti integrálnych súčtov (tj. všetky postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ také, že S_n je integrálny súčet funkcie f pri delení D_n) konvergujú k tomu istému číslu. Dokážte!

152. Nech $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia. Dokážte, že nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$;

b) pre každé $\varepsilon > 0$ a každé $\lambda > 0$ existuje delenie D intervalu $[a,b]$, pre ktoré súčet d dĺžok tých jeho čiastočných intervalov, na ktorých je oscilácia funkcie f väčšia alebo rovná λ, je menší ako ε.

(*Osciláciou funkcie f na intervale* $[a,b]$ sa nazýva číslo $\omega(f,[a,b]) := \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$.)

153. Ak $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, tak

$$\lim_{h\to 0} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0 .$$

Dokážte!

154. Ak ohraničená funkcia $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je nespojitá v každom bode intervalu $[a,b]$, tak $f \notin \mathcal{R}[a,b]$. Dokážte!

155. Ak ohraničená funkcia $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ je spojitá v každom bode $x \in [0,1] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$, tak $f \in \mathcal{R}[0,1]$. Dokážte!

156. Nech $A \subset \mathbf{R}$ je ohraničená množina. Definujme množiny $A^{(n)}$, $n = 0,1,2,\ldots$, nasledovne: $A^{(0)} := A$, $\ldots$, $A^{(n+1)} := \left(A^{(n)}\right)'$ (symbol B' označuje množinu všetkých hromadných bodov množiny B). Dokážte tvrdenie:

Ak niektorá z množín $A^{(n)}$, $n = 0,1,\ldots$, má Jordanovu mieru nula, tak aj A má Jordanovu mieru nula.

157. Ak $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je konvexná funkcia a $g \in \mathcal{R}[0,1]$, tak

$$f\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) \le \int_0^1 f(g(x))\,dx . \tag{2.7}$$

Dokážte!

158. Nech $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a nech pre každú funkciu $g \in \mathcal{R}[a,b]$ platí $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. Potom $f(x) = 0$ pre všetky $x \in [a,b]$. Dokážte!

159. Ak $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá nezáporná fukcia, tak

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n} = \max_{x\in[a,b]} f(x) .$$

Dokážte!

160. Nech $f:[0,\pi] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia, nech $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx = 0$. Potom funkcia f nadobúda aspoň v dvoch rôznych bodoch intervalu $(0,\pi)$ nulovú hodnotu. Dokážte!

161. Ak $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $f(x) > 0$ pre všetky $x \in [a,b]$, tak $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Dokážte!

162$_0$. Ak $f,\ g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $f(x) > g(x)$ pre všetky $x \in [a,b]$, tak $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$. Dokážte!

163. Ak $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $f(x) > 0$ pre všetky $x \in [a,b]$, tak existuje interval $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ taký, že $\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) > 0$. Dokážte!

164. Nech $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je nezáporná riemannovsky integrovateľná funkcia. Potom $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ práve vtedy, keď množina $N := \{x \in [a,b]\,;\ f(x) = 0\}$ nie je hustá v $[a,b]$ (definíciu hustoty pozri v pr. 70). Dokážte!

165. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $f(x) \neq 0$ pre všetky $x \in [a,b]$. Potom $f\chi \notin \mathcal{R}[a,b]$. Dokážte!

166. Ak $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá konkávna funkcia, tak

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) .$$

Dokážte!

167. Ak $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia a $f(1) - f(0) = 1$, tak

$$\int_0^1 (f'(x))^2\,dx \ge 1 .$$

Dokážte!

168. Nech $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia, označme

$$\Delta_n := \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right) .$$

Nájdite $\lim_{n\to\infty} n\Delta_n$!

169. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $1 < \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < \frac{43}{42}$;

2. $1 - \dfrac{1}{n+1} < \displaystyle\int_0^1 e^{-x^n}\,dx < 1$;

3. $0.03 < \displaystyle\int_0^1 \frac{x^7}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}}\,dx < 0.05$.

170. Porovnajte čísla $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}\,dx$ a $\dfrac{3\pi}{2}$!

171$_0$. Dokážte nerovnosť

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \int_1^n \frac{dx}{x} < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

a na jej základe rovnosť

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1 .$$

172. Vypočítajte približne $1^5 + 2^5 + \cdots + 100^5$.

173. Nájdite $\lim_{n\to\infty} S_n$, ak

1. $S_n = \left(\sin\dfrac{\pi}{n}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos(k\pi/n)}$;

2. $S_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}$, $\quad x \ge 0$;

3. $S_n = \dfrac{2^{1/n}}{n+1} + \dfrac{2^{2/n}}{n+1/2} + \cdots + \dfrac{2^{n/n}}{n+1/n}$;

4. $S_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\dfrac{\pi}{n^2} + \left(1+\dfrac{2}{n}\right)\sin\dfrac{2\pi}{n^2} + \cdots + \left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n^2}$;

5. $S_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{1/(n+k)}\right) - n$;

6. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$;

7. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$.

174. Vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}\,dx\,, \quad m \in \mathbf{N}$;

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx\,, \quad n \in \mathbf{N}$;

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx\,, \quad n \in \mathbf{N}$.

175. Vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$ (použite substitúciu $x - \dfrac{1}{x} = t$) ;

2. $\displaystyle\int_a^b \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$.

176. 1. Nech $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je periodická funkcia s periódou P, $\varphi \in \mathcal{R}[0,P]$, nech $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\varphi(nx)\,dx = 0\,.$$

Dokážte!

2. Ak $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia, tak

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dokážte!

177. Vypočítajte $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+1/x}\,dx$!

178. Použitím rekurentného vzťahu vypočítajte integrál $I = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx\,,\ n \in \mathbf{N}$. Na základe získaného výsledku dokážte rovnosť

$$1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} - \frac{\binom{n}{3}}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,.$$

179. Viacnásobným integrovaním per partes vypočítajte *Eulerov integrál*

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \quad (\,m,\ n \in \mathbf{N}\,)\,.$$

Na základe získaného výsledku dokážte rovnosť

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+m}\binom{n-1}{k} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\,.$$

180. Dokážte rovnosť

$$I_{m,n} := \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} \,, & \text{ak } m,\ n \in \mathbf{N} \text{ sú párne} \\[2ex] \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \,, & \text{ak aspoň jedno z čísel } m,\ n \in \mathbf{N} \text{ je nepárne} \end{cases} .$$

181. Na základe výsledku pr. 96.1 a nerovností $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ pre $n \in \mathbf{N}$ a $x \in (0, \pi/2)$ dokážte *Wallisov vzorec*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \,.$$

182. Vypočítajte integrály:

1. $K_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx \, dx$;

2. $L_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx \, dx$.

183. Dokážte nasledujúce rovnosti:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1} x \sin(\alpha+1)x \, dx = \frac{1}{\alpha}$;

2_0. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1} x \cos(\alpha+1)x \, dx = 0$;

3_0. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} x \cos(\alpha+1)x \, dx = \frac{\cos(\alpha\pi/2)}{\alpha}$;

4_0. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} x \sin(\alpha+1)x \, dx = \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\alpha}$.

184_0. Nech $a < \alpha < \beta < b$, nech funkcie $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ sú n–krát spojite diferencovateľné a nech platí

$$\forall\, x \in [a,b] \setminus (\alpha, \beta) : f(x) = g(x) = 0 \,.$$

Potom

$$\int_a^b f^{(n)}(x) g(x) \, dx = (-1)^n \int_a^b f(x) g^{(n)}(x) \, dx \,.$$

Dokážte!

185. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$ je kladná funkcia. Potom existuje $c \in (a,b)$ také, že $\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$. Dokážte!

186. Vypočítajte limity:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$;

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt}{\displaystyle\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\, dt}$.

187. Nech $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ je spojitá kladná funkcia. Dokážte, že funkcia $g : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ daná predpisom

$$g(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x t f(t) \, dt}{\displaystyle\int_0^x f(t) \, dt}$$

je rastúca.

188. Nech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia. Rozhodnite, či platí tvrdenie „Ak $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ pre každé $a > 0$, tak f je nepárna funkcia.“.

189. Spojitá funkcia f je kladná na intervale $[a,b]$ práve vtedy, keď platí

$$\exists\, \lambda > 0\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ a \le \alpha < \beta \le b : \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \ge \lambda(\beta - \alpha) \,.$$

Dokážte!

190. Zostrojte funkciu $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ tak, aby $f\in\mathcal{R}[-1,1]$ a funkcia $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$, $x\in[-1,1]$, nemala deriváciu sprava ani zľava v bode 0.

191. Ukážte, že funkcia $F(x)=\int_{-1}^{x}\sin(1/x)\,dx$ je diferencovateľná v bode 0.

192. Nech funkcia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je riemannovsky integrovateľná na každom intervale $[a,b]\subset\mathbf{R}$, nech $\delta>0$. Definujme funkciu $F_\delta:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ predpisom

$$F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt\ .$$

Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1_0. F_δ je spojitá funkcia;
2_0. ak f je spojitá, tak F_δ je spojite diferencovateľná;
3_0. ak f je n–krát spojite diferencovateľná, tak F_δ je $(n+1)$–krát spojite diferencovateľná;
4. ak f je rastúca (klesajúca), tak aj F_δ je rastúca (klesajúca):
5_0. ak f je konvexná (konkávna), tak aj F_δ je konvexná (konkávna);
6. ak f je spojitá, tak platí

$$\forall\,[a,b]\subset\mathbf{R}\;\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,x\in[a,b]:|f(x)-F_\delta(x)|<\varepsilon\ .$$

193. Nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, nech $n\in\mathbf{N}$ a $\varepsilon>0$ sú dané. Potom existuje n–krát spojite diferencovateľná funkcia $f_\varepsilon:[a,b]\to\mathbf{R}$, pre ktorú platí

$$\forall\,x\in[a,b]:|f(x)-f_\varepsilon(x)|<\varepsilon\ .$$

Dokážte!

194 (*Steffensenova nerovnosť*). Nech pre spojitú funkciu $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ platí $0\le g(x)\le 1$, $x\in[a,b]$, nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je spojitá rastúca funkcia; označme $l:=\int_a^b g(x)\,dx$. Potom

$$\int_a^{a+l} f(t)\,dt\le\int_a^b f(t)g(t)\,dt\le\int_{b-l}^{b} f(t)\,dt\ .$$

Dokážte!

195. Nech $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ je klesajúca funkcia. Potom pre každé $\vartheta\in(0,1)$ platí nerovnosť

$$\vartheta\int_0^1 f(x)\,dx\le\int_0^{\vartheta} f(x)\,dx\ .$$

Dokážte!

196. Nájdite $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nf(x)e^{-nx}\,dx$, kde $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia.

197. Nech $f,g:[0,1]\to\mathbf{R}$ sú spojité neklesajúce funkcie. Dokážte nerovnosť

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\ge\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1 g(x)\,dx\ .$$

198. Nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, nech v každom intervale $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ existuje práve jedno číslo c také, že $f(c)$ je stredná hodnota funkcie f na intervale $[\alpha,\beta]$. Potom f je rýdzomonotónna funkcia. Dokážte!

199 (*Schwarzova–Cauchyho–Bunjakovského nerovnosť*). Nech $f,\ g\in\mathcal{R}[a,b]$. Potom

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx\ .$$

Dokážte!

200. Nech $f,\ g \in \mathcal{R}[a,b]$, nech $0 < p \leq \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) \leq P,\ 0 < q \leq \inf_{x\in[a,b]} g(x) \leq$ $\leq \sup_{x\in[a,b]} g(x) \leq Q$. Potom

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \left(\sqrt{\frac{PQ}{pq}} + \sqrt{\frac{pq}{PQ}}\right)^2 \geq 4\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx\ .$$

Dokážte!

201 (*Youngova nerovnosť*). Nech $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ je diferencovateľná rastúca funkcia taká, že $f(0)=0$ a $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$; nech $g:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ je inverzná funkcia k funkcii f. Potom pre každé $a,b\in[0,\infty)$ platí

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx\ .$$

Dokážte! Na základe toho dokážte nerovnosť

$$\forall\, p>1,\ q>1;\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad \forall\, u\geq 0,\ v\geq 0\ :\ uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}\ . \tag{2.8}$$

202 (*Hőlderova nerovnosť*). Nech $f,\ g\in\mathcal{R}[a,b]$, nech pre čísla $p>1,\ q>1$ platí $1/p+1/q=1$. Potom

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\ .$$

Dokážte[22]!

203. Odhadnite hodnotu integrálu $I=\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$
1. pomocou prvej vety o strednej hodnote;
2. na základe pr. 166;
3. na základe nerovnosti $\sqrt{1+x^4} < 1+x^4/2,\ x>0$;
4. pomocou Schwarzovej–Cauchyho–Bunjakovského nerovnosti.

[22]zrejme špeciálnym prípadom tejto nerovnosti je Schwarzova–Cauchyho–Bunjakovského nerovnosť z pr. 199