Chapter 4

Postupnosti a rady funkcií

4. Postupnosti a rady funkcií

4.1 Bodová a rovnomerná konvergencia

Nech je daná postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ [1], nech $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$ $\quad (:= \{x \in \mathbf{R} ; \forall\, n \in \mathbf{N} \,:\, x \in D(f_n)\}\,)$. Hovoríme, že *postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v bode a*, ak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} f_n(a)$. Ak je množina D všetkých tých čísel $x \in R$, v ktorých postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, neprázdna, nazýva sa funkcia $g : D \to \mathbf{R}$, daná predpisom $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, *(bodová) limita* (*limitná funkcia*) *postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$* a označuje sa $\lim_{n\to\infty} f_n$. Hovoríme, že *postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (bodove) konverguje na množine M (k funkcii f)*, ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v každom bode $x \in M$ (a $\lim_{n\to\infty}(f_n|M) = f|M$); funkcia $f|M$ sa nazýva *(bodová) limita* (*limitná funkcia*) *postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na množine M*. Namiesto $\lim_{n\to\infty}(f_n|M) = f|M$ budeme písať $f_n \to f$ *na* M [2].

Ak je daná postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=k}^{\infty}$ ($k \in \{0, 1, \ldots\}$), pričom $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n) \neq \emptyset$, nazýva sa symbol $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} f_n$ (alebo $f_k + f_{k+1} + \cdots + f_n + \cdots$) *rad funkcií* (*funkcionálny rad*). Ak je daný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ [1], nazýva sa funkcia f_k, resp.

$$S_k := f_1 + f_2 + \cdots + f_k \,, \quad k \in N \,,$$

k–ty člen, resp. *k–ty čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$*. Ak existuje $\lim_{n\to\infty} S_n$, nazýva sa táto funkcia *súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* a jej definičný obor *obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* [3]. Hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje v bode a* (*(bodove) konverguje na množine M, (bodove) konverguje na množine M k funkcii f*), ak postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov konverguje v bode a (konverguje na množine M, konverguje na množine M k funkcii f). Zápis $S_n \to f$ na M budeme spravidla nahrádzať zápisom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$ *na* M.

295. Nájdite funkciu $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, ak:

1. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{x + 3n + 2}\,, \quad x \geq 0$;
2. $f_n(x) = x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3}, \quad x \in [0, 1]$;
3. $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x$;
4. $f_n(x) = n^2 x^4 \sin \dfrac{x}{n^2 + n}$;
5. $f_n(x) = (x - 1)\operatorname{arctg} x^n\,, \quad x > 0$;
6. $f_n(x) = n\left(x^{1/n} - x^{1/2n}\right)\,, \quad x > 0$;

---

[1] z podobných dôvodov ako v kapitole 3 uvádzame definície a vety spravidla len pre postupnosti, resp. rady tvaru $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

[2] zapíšme tu ešte rovnosť $\lim_{n\to\infty}(f_n|M) = f|M$ pomocou kvantifikátorov:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \forall\, x \in M\; \exists\, n_0 \in \mathbf{N}\; \forall\, n \in \mathbf{N}\,,\; n > n_0 \;:\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

[3] oborom konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je teda množina všetkých tých $x \in \mathbf{R}$, pre ktoré číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje

7. $f_n(x) = n^3x^2e^{-nx}, \quad x \geq 0$;

8. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}\ln nx$;

9. $f_n(x) = n\operatorname{arcctg} nx^2, \quad x > 0$;

10. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}, \quad x \geq 0$;

11. $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak} \quad x \in [1/n, \infty) \\ -1, & \text{ak} \quad x \in (-\infty, -1/n] \\ nx, & \text{ak} \quad x \in (-1/n, 1/n) \end{cases}$;

12. $f_n(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{ak} \quad x \in [0, 2^{-n}] \\ 0, & \text{ak} \quad x \in (2^{-n}, \infty) \end{cases}$.

296. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale (a,b), nech $f_n \to f$ na (a,b). Potom

1. ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť neklesajúcich funkcií, tak f je neklesajúca funkcia;
2. ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť konvexných funkcií, tak f je konvexná funkcia.

Dokážte!

297. Nájdite obory konvergencie nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-n\sin x}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}, \quad p > 0$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x^2+1)(x^2+2)\cdots(x^2+n)}$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi nx}{n\ln^2(n+1)}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

298. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť lineárnych[4] funkcií definovaných na $\mathbf{R}$; nech $a \neq b$ a rady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ konvergujú. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je lineárna funkcia definovaná na $\mathbf{R}$. Dokážte!

Hovoríme, že *postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M rovnomerne k funkcii f* (a zapisujeme $f_n \rightrightarrows f$ *na* M), ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \in \mathbf{N},\; n > n_0 \; \forall x \in M \; : \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$ [5].

Ak pre postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a neprázdnu množinu $M \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$ existuje funkcia f taká, že $f_n \rightrightarrows f$ na M, hovoríme, že *postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na množine M.*

[4] pripomeňme, že funkcia g sa nazýva lineárna, ak jej predpis možno písať v tvare $g(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbf{R}$

[5] ak tento zápis porovnáme so zápisom z poznámky [2], vidíme, že v prípade rovnomernej konvergencie číslo n_0 závisí len na čísle ε, tj. $n_0 = n_0(\varepsilon)$, zatiaľčo v prípade bodovej konvergencie závisí toto číslo naviac aj na x, tj. $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$; ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je špeciálne postupnosť konštantých funkcií, $f_n \equiv c_n$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in M$, je zrejme rovnomerná konvergencia postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ekvivalentná s existenciou konečnej $\lim_{n\to\infty} c_n$

Hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^\infty f_n$ konverguje rovnomerne na množine M (k funkcii f)*, ak postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ jeho čiastočných súčtov konverguje rovnomerne na množine M (k funkcii f)[6]. Zápis $S_n \rightrightarrows f$ na M nahrádzame zápisom $\sum_{n=1}^\infty f_n \rightrightarrows f$ *na* M.

Veta 1. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M, tak $f_n \to f$ na M.

Veta 2. Postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje na množine M rovnomerne k funkcii f práve vtedy, keď

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$ [7].

Hovoríme, že *postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ [rad $\sum_{n=1}^\infty f_n$] konverguje na množine M k funkcii f nerovnomerne* (*konverguje na množine M nerovnomerne*), ak $f_n \to f$ na M [$\sum_{n=1}^\infty f_n \to f$ na M], ale neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na M [$\sum_{n=1}^\infty f_n \rightrightarrows f$ na M] (ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ [rad $\sum_{n=1}^\infty f_n$] konverguje na M bodove, ale nekonverguje tam rovnomerne).

299. Nech $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M; nech pre funkciu $f: M \to \mathbf{R}$ a postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ kladných čísel platí $|f_n(x) - f(x)| < c_n$ $(x \in M,\ n \in \mathbf{N})$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na M. Dokážte!

300. Zistite, či postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje rovnomerne na množine M, ak:

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$, $M = (0,\infty)$;
2. $f_n(x) = \dfrac{\sin n\sqrt{x}}{\ln(n+1)}$, $M = [0,\infty)$;
3. $f_n(x) = \sin \dfrac{1+nx}{2n}$, $M = \mathbf{R}$;
4. $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^4} \sin \dfrac{x^2}{\sqrt{n}}$, $M = [1,\infty)$;
5. $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}$, $M = \mathbf{R}$;
6. $f_n(x) = n^{3/2}\left(1 - \cos \dfrac{\sqrt[4]{x}}{n}\right)$, $M = [0,\infty)$;
7. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n+x}$, $M = [1,\infty)$;
8. $f_n(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx$ a) $M = [0,1]$, b) $M = [1,\infty)$;
9. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ a) $M = [0,10]$, b) $M = [1,\infty)$;
10. $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln \dfrac{x}{n}$, $M = (0,1)$;
11. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ a) $M = [0,1-\delta]$, b) $M = [1+\delta,\infty)$, c) $M = [1-\delta, 1+\delta]$, $1 > \delta > 0$;
12. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$, $M = (0,1)$;
13. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$, $M = \mathbf{R}$;
14. $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$, $M = [0,2]$;
15. $f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & \text{ak } x \in [0,1/n] \\ n^2(2/n - x), & \text{ak } x \in (1/n, 2/n) \\ 0 & \text{ak } x \in [2/n, \infty) \end{cases}$, $M = [0,\infty)$.

[6] z poznámky [5] vyplýva: ak $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je špeciálne postupnosť konštantných funkcií, $f_n \equiv c_n$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in M$, je zrejme konvergencia číselného radu $\sum_{n=1}^\infty c_n$ ekvivalentná s rovnomernou konvergenciou funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^\infty f_n$ na množine M

[7] táto rovnosť v sebe „automaticky" zahŕňa podmienku „počínajúc niektorým n_0 sú funkcie $|f_n - f|$ ohraničené"

Riešenie. 8. Ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M rovnomerne k niektorej funkcii $f: M \to \mathbf{R}$, tak podľa vety 1 musí platiť $f = \lim_{n\to\infty} f_n|M$. Zistime preto najprv, ku ktorej funkcii konverguje postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na množine M bodove:

Pretože $\lim_{u\to\infty} \operatorname{arctg} u = \pi/2$, platia pre každé $x > 0$ rovnosti $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \pi/2$, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} 2nx = \pi/2$; pre $x = 0$ je $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = 0$, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} 2nx = 0$; ďalej pre každé $x \in \mathbf{R}$ je $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x$. Preto

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + \pi/2 - \pi/2 = \operatorname{arctg} x\,, & \text{ak} \quad x > 0 \\ \operatorname{arctg} x + 0 - 0 = \operatorname{arctg} x\,, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Teda $f_n(x) \to \operatorname{arctg} x$ na $[0,1]$ a $f_n(x) \to \operatorname{arctg} x$ aj na $[1,\infty)$.

Teraz treba zistiť, či postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M k funkcii $\operatorname{arctg} x$ aj rovnomerne; na to použijeme vetu 2. Aby sme našli čísla $\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|$ (pokiaľ existujú), vyšetrime pomocou prvej derivácie priebeh funkcií $f_n - f$:

$$(f_n(x) - f(x))' = (\operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx)' = \frac{n(1 - 2n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)(1 + 4n^2x^2)}\,,$$

teda funkcia $f_n - f$ rastie na intervale $[0, 1/\sqrt{2}n]$ a klesá na intervale $[1/\sqrt{2}n, \infty)$. Ak naviac uvážime, že $(f_n - f)(0) = 0$ a $\lim_{x\to\infty}(f_n(x) - f(x)) = 0$, vidíme, že funkcia $f_n - f$ je na intervale $(0,\infty)$ kladná.

Zaoberajme sa teraz prípadom a), tj. $M = [0,1]$. Z priebehu funkcií $f_n - f$ vyplýva, že

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f)\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n}\right) = \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0\,,$$

čo podľa vety 2 znamená, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje na intervale $[0,1]$ k funkcii $f(x) = \operatorname{arctg} x$ rovnomerne. Pretože $f_n \to f$ na $[0,1]$, ale neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, konverguje postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na intervale $[0,1]$ k funkcii $f(x) = \operatorname{arctg} x$ nerovnomerne.

Uvažujme teraz prípad b), tj. $M = [1,\infty)$. Na intervale $[1,\infty)$ je každá z funkcií $f_n - f$ kladná a klesajúca, preto

$$\sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f)(1) = \operatorname{arctg} 2n - \operatorname{arctg} n\,.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} 2n - \operatorname{arctg} n) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0\,,$$

čo podľa vety 2 znamená, že $f_n \rightrightarrows \operatorname{arctg} x$ na $[1,\infty)$.

Poznámky. 1. Nerovnosť

$$\forall\, x \in M \;:\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\forall\, x \in M \;:\; f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \quad)$$

($\varepsilon > 0$ je dané číslo) „geometricky hovorí“, že graf funkcie $f_n|M$ „leží medzi“ grafmi funkcií $f(x) - \varepsilon$, $x \in M$, a $f(x) + \varepsilon$, $x \in M$ (hovoríme tiež, že *graf funkcie* $f_n|M$ *leží v* ε*–páse okolo (grafu) funkcie* $f|M$). Ak teda $f_n \rightrightarrows f$ na M, znamená to, že pre každý ε–pás okolo funkcie f ($\varepsilon > 0$) vieme nájsť $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že grafy funkcií $f_{n_0+1}|M$, $f_{n_0+2}|M, \ldots$ už ležia v tomto ε–páse. Na obr. 1 je znázornený ε–pás okolo funkcie $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [1,\infty)$ pre $\varepsilon = 0.1$ a grafy funkcií $f_n(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx$, $x \in [1,\infty)$, pre $n = 4, 5, 25$, z ktorých prvý neleží v tomto ε–páse a zvyšné dva v ňom ležia.

Ak neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na M (pričom $M \subset D(f)$, $M \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$), teda ak platí negácia tohto tvrdenia, ktorou je výrok

$$\exists\, \varepsilon > 0\; \forall\, n_0 \in \mathbf{N}\; \exists\, n \in \mathbf{N},\; n > n_0\; \exists\, x_0 \in M \;:\; |f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon\,,$$

znamená to, že existuje ε–pás okolo funkcie f ($\varepsilon > 0$) s touto vlastnosťou: akokoľvek veľké $n_0 \in \mathbf{N}$ zvolíme, vždy nájdeme od neho väčšie číslo $n \in \mathbf{N}$ tak, že graf funkcie $f_n|M$ neleží celý v tomto ε–páse (tj. „vyskočí“ z neho aspoň v jednom bode $x_0 \in M$). Všimnime si teraz znova pr. 300.8a), v ktorom dokonca

obr. 1

platí, že graf ľubovoľnej z funkcií f_1, f_2, ..., f_n, ... neleží celý v ε–páse okolo funkcie $\operatorname{arctg} x$, $x \in [0,1]$, pre $0 < \varepsilon < \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}(1/\sqrt{2}) = 0.3398\ldots$ (z rovnosti $\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = c$ totiž vyplýva, že graf funkcie $f_n|M$ leží v ε–páse okolo f pre každé $\varepsilon > c$ a neleží v žiadnom z ε–pásov okolo f pre $0 < \varepsilon < c$ [8]). Na obr. 2 je znázornený ε–pás okolo funkcie $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [0, 0.1]$, pre $\varepsilon = 0.1$ a grafy funkcií $f_n(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx$, $x \in [0, 0.1]$, pre $n = 25, 50, 100, 250$.

2. Nech je dané $\delta > 0$. Z priebehu funkcií $f_n - f$, ktorý sme vyšetrili pri riešení pr. 300.8, vyplýva, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkcii $\operatorname{arctg} x$ nerovnomerne na intervale $[0,\delta]$ a rovnomerne na intervale $[\delta,\infty)$. Dokážeme to nasledovne: Pretože $\lim_{n\to\infty}(1/\sqrt{2}n) = 0$, musí existovať $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $1/\sqrt{2}n \in [0,\delta]$ pre $n > n_0$ (pripomeňme, že v bode $1/\sqrt{2}n$ nadobúda funkcia $|f_n(x) - f(x)| = |\operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx|$, $x \geq 0$, svoje maximum). Pre $n > n_0$ je teda

$$\sup_{x\in[0,\delta]} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f)\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n}\right) ;$$

pre $n > n_0$ funkcia $f_n - f$ klesá na intervale $[\delta,\infty)$ a je tam kladná, preto

$$\sup_{x\in[\delta,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f)(\delta) .$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\delta]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[\delta,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} 2n\delta - \operatorname{arctg} n\delta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 .$$

[8] toto je myšlienka dôkazu vety 2

obr. 2

301$_0$. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M a funkcia g je ohraničená na množine M, tak $f_n g \rightrightarrows fg$ na M. Dokážte!

302. Nech je daná funkcia $f:[a,b] \to \mathbf{R}$, definujme funkcie $f_n:[a,b] \to \mathbf{R}$ predpisom $f_n(x) = [nf(x)]/n$, $n \in \mathbf{N}$ (symbol $[.]$ označuje celú časť). Potom $f_n \rightrightarrows f$. Dokážte!

303. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií definovaných na intervale $[0,1]$. Rozhodnite o platnosti nasledujúcich tvrdení:

1. ak $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1] \cap \mathbf{Q}$, tak $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$;
2. ak $f_n \to 0$ na $[0,1] \cap \mathbf{Q}$, tak $f_n \to 0$ na $[0,1]$.

304. Nech pre každú postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na danej neprázdnej množine M platí implikácia ,,ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na M bodove, tak tam konverguje aj rovnomerne". Potom M je konečná množina. Dokážte!

305. Zistite, či nasledujúce rady konvergujú rovnomerne na množine M:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ a) $M = [-q,q]$, kde $0 < q < 1$, b) $M = (-1,1)$;

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, \quad M = [0,1]$;

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x-1}{(2x)^n}, \quad M = [1,\infty)$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \quad M = [-1,1]$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, \quad M = (0,\infty)$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}, \quad M = (0,\infty)$.

306. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M a funkcia $g: M \to \mathbf{R}$ je ohraničená, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} g f_n$ konverguje rovnomerne na množine M. Dokážte!

307. Dokážte túto *nutnú podmienku rovnomernej konvergencie* radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine M, tak $f_n \rightrightarrows 0$ na M.

2. Na základe toho dokážte, že nasledujúce rady konvergujú nerovnomerne na množine M:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}, \quad M = (0,\infty)$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right)^2, \quad M = \mathbf{R}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2x^3}\,, \quad M=[0,\infty)\,;$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}\,, \quad M=(0,\infty)\,;$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(1+nx)\sqrt{nx}}\,, \quad M=(0,\pi)\,.$

3. Uveďte príklad radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, ktorý nekonverguje rovnomerne na intervale $[0,1]$, ale spĺňa tam nutnú podmienku rovnomernej konvergencie.

Veta 3 (*Cauchyho–Bolzanovo kritérium rovnomernej konvergencie*). *Postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rvnomerne na množine M práve vtedy, keď platí*

$$\forall\,\varepsilon>0\;\;\exists\, n_0\in\mathbf{N}\;\;\forall\, n,m\in\mathbf{N}\,,\; n>n_0\,,\; m>n_0\;\;\forall\, x\in M\;:\;|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\,.$$

Špeciálne pre funkcionálne rady možno toto tvrdenie sformulovať nasledovne:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M práve vtedy, keď platí

$$\forall\,\varepsilon>0\;\;\exists\, n_0\in\mathbf{N}\;\;\forall\, n\in\mathbf{N}\,,\; n>n_0\;\;\forall\, p\in\mathbf{N}\;\;\forall\, x\in M\;:\;|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|<\varepsilon\,. \tag{4.1}$$

308. Pomocou Cauchyho–Bolzanovho kritéria rovnomernej konvergencie dokážte, že nasledujúce rady konvergujú na množine M nerovnomerne:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx^2}\,, \quad M=(0,\infty)\,;$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}\,, \quad M=(0,1)\,;$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{n}\,, \quad M=(1,\infty)\,;$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{n^2x}}\,, \quad M=(0,\infty)\,.$

Riešenie. 2. Máme dokázať, že daný rad konverguje bodove na $(0,1)$, ale nekonverguje tam rovnomerne.

Nech je dané $x\in(0,1)$, potom z nerovnosti $\displaystyle\left|\frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}\right| \le \frac{1}{n^2x^2}$ a z konvergencie číselného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2}\quad\left(=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)$ vyplýva podľa porovnávacieho kritéria (veta 4 z odseku 3.2) konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}\right|$ a teda (podľa vety 11 z odseku 3.3) aj konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}$. Tým je dokázaná bodová konvergencia nášho radu na intervale $(0,1)$.

Aby sme ukázali, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}$ nekonverguje rovnomerne na $(0,1)$, dokážeme pre $f_n = \displaystyle=\frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}$ a $M=(0,1)$ výrok

$$\exists\,\varepsilon>0\;\;\forall\, n_0\in\mathbf{N}\;\;\exists\, n\in\mathbf{N}\,,\; n>n_0\;\;\exists\, p\in\mathbf{N}\;\;\exists\, x\in M\;:\;|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\ge\varepsilon\,, \tag{4.2}$$

ktorý je negáciou výroku (4.1).

Nech je dané $m\in\mathbf{N}$, označme $g_m(x):=f_m(x)+f_{m+1}(x)+\cdots+f_{2m}(x)$. Potom

$$\begin{aligned} g_m\left(\frac{1}{m}\right) \;&=\; \frac{\sin 1}{2m+1} + \frac{\sin\left(1+\dfrac{1}{m}\right)}{2(m+1)+\left(1+\dfrac{1}{m}\right)} + \frac{\sin\left(1+\dfrac{2}{m}\right)}{2(m+2)+\left(1+\dfrac{2}{m}\right)} + \cdots + \\ &\quad + \frac{\sin\left(1+\dfrac{m-1}{m}\right)}{2(m+(m-1))+\left(1+\dfrac{m-1}{m}\right)} + \frac{\sin 2}{4m+4}\,. \end{aligned}$$

Ak využijeme nerovnosti $\sin(1+k/m) \geq \sin 1 > 0$ a $0 < 2(m+k)+(1+k/m)^2 \leq 4m+4$ $\big($odtiaľ $1/[2(m+k)+(1+k/m)^2] \geq 1/4(m+1)\big)$ pre $k = 0,1,2,\ldots,m$, dostaneme

$$\frac{\sin\left(1+\dfrac{k}{m}\right)}{2(m+k)+\left(1+\dfrac{k}{m}\right)} \geq \frac{\sin 1}{4(m+1)} \qquad \text{pre} \quad k = 0,1,2,\ldots,m\,,$$

a preto

$$\left|g_m\left(\frac{1}{m}\right)\right| \geq (m+1)\frac{\sin 1}{4(m+1)} = \frac{\sin 1}{4}\,.$$

Platí teda

$$\forall\, m \in \mathbf{N}\ :\ \left|f_m\left(\frac{1}{m}\right) + f_{m+1}\left(\frac{1}{m}\right) + \cdots + f_{2m}\left(\frac{1}{m}\right)\right| \geq \frac{\sin 1}{4}\,,$$

odkiaľ — ak položíme $m = n+1$ — dostávame

$$\forall\, n \in \mathbf{N}\ :\ \left|f_{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right) + f_{n+2}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + f_{2n+2}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| \geq \frac{\sin 1}{4}\,.$$

Z tohto výroku už vyplýva tvrdenie (4.2): stačí zvoliť $\varepsilon = \dfrac{\sin 1}{4}$ a pre dané n_0 položiť $n = n_0+1$, $p = n+2$, $x = \dfrac{1}{n+1}$.

309. 1. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií definovaných na intervale $[a,b]$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na (a,b), tak konverguje rovnomerne aj na $[a,b]$. Dokážte!

2. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin(1/2^n)$ konverguje nerovnomerne na intervale $(-2,2)$.

310. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ konverguje rovnomerne na množine M, tak na M konverguje rovnomerne aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Dokážte!

Veta 4 (*Weierstrassovo kritérium*). *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií ohraničených na neprázdnej množine M, nech $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezáporných čísel taká, že $|f_n(x)| \leq c_n$, $x \in M$, $n \in \mathbf{N}$. Ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje, tak funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na M.*

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ z vety 4 sa nazýva *(číselný) majorantný rad k radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$*.

Poznámky. 1. Z predpokladov vety 4 vyplýva aj rovnomerná konvergencia (a teda aj konvergencia) radu $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ na M. Weierstrassovo kritérium teda nemožno použiť na vyšetrenie rovnomernej konvergencie radu, ktorý konverguje relatívne aspoň v jednom bode množiny M.

2. Najmenšie možné číslo c_n vyhovujúce nerovnosti $|f_n(x)| \leq c_n$, $x \in M$, je číslo $\sup_{x\in M} |f_n(x)|$. Ak teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x)|$ diverguje, nemožno na vyšetrenie rovnomernej konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množine M použiť Weierstrassovo kritérium.

3. Na základe tvrdenia ,,ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M a g je funkcia definovaná na M, tak rad $g + \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ [9] konverguje rovnomerne na M“ možno formuláciu Weierstrassovho kritéria upraviť do tejto podoby:

Veta 4'. *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M, nech existuje číslo $n_0 \in \mathbf{N}$ a konvergentný rad $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n$ tak, že $|f_n(x)| \leq c_n$ pre $x \in M$ a $n > n_0$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M.*

311. Pomocou Weierstrassovho kritéria dokážte, že nasledujúce rady rovnomerne konvergujú na množine M:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}\,, \quad M = \mathbf{R}\,;$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^{3/2}x^2}\,, \quad M = \mathbf{R}\,;$

[9] tj. rad $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$, kde $h_1 = g$, $h_n = f_{n-1}$ pre $n > 1$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}$, $\quad M=[1,\infty)$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{nx}\cdot\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$, $\quad M=(0,\infty)$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $\quad M=\mathbf{R}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $\quad M=[-a,a]$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $\quad M=\mathbf{R}$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$, $\quad M=[0,\infty)$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}\left(1+\frac{1}{n}-x\right)^n$, $\quad M=[0,1]$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xe^{-nx^2}}{\sqrt{n\ln^3(n+1)}}$, $\quad M=\mathbf{R}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{x}/n)}{\sqrt{x^2+n^2}}$, $\quad M=[0,\infty)$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}$, $\quad M=\mathbf{R}$.

Riešenie. 4. Z nerovností $|\sin u|\le|u|$ pre $u\in\mathbf{R}$ a $\ln(1+u)\le u$ pre $u>-1$ (pozri pr. I.353 a riešenie pr. I.352.2) vyplýva $\left|\sin\frac{1}{nx}\right|\le\frac{1}{nx}$ a $\left|\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right|=\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\le\frac{x}{\sqrt{n}}$ pre $x\in(0,\infty)$, odtiaľ

$$\left|\sin\frac{1}{nx}\cdot\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right|\le\frac{1}{nx}\cdot\frac{x}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n\sqrt{n}},\quad x\in(0,\infty)\,. \tag{4.3}$$

Pretože rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ konverguje (pozri vetu 5 z odseku 3.2), vyplýva z nerovnosti (4.3) na základe Weierstrassovho kritéria rovnomerná konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{nx}\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ na intervale $(0,\infty)$.

7. Bude nás zaujímať konvergencia majorantného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|$ (pozri tiež poznámku 2 za vetou 4). Pretože funkcie $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^4x^2}$ sú nepárne, platí $\sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)|=\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)|$, na nájdenie čísla $\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)|$ stačí vyšetriť priebeh funkcie f_n na intervale $[0,\infty)$:

$$f_n'(x)=\left(\frac{x}{1+n^4x^2}\right)'=\frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}\,,$$

preto f_n rastie na $[0,1/n^2]$ a klesá na $[1/n^2,\infty)$. Z rovností $f_n(0)=0$ a $\lim_{x\to\infty}f_n(x)=0$ vyplýva, že f_n je nezáporná na $[0,\infty)$. Preto

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)|=\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)|=f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2n^2}\,.$$

Z konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ (pozri vetu 5 z odseku 3.2) a z nerovnosti

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\le\frac{1}{2n^2}\,,\quad x\in\mathbf{R}\,,\ n\in\mathbf{N}\,,$$

vyplýva podľa Weierstrassovho kritéria rovnomerná konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ na $\mathbf{R}$.

312. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť monotónnych funkcií definovaných na intervale $[a,b]$, nech číselné rady $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(a)$ a $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(b)$ absolútne konvergujú. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje rovnomerne na $[a,b]$. Dokážte!

313$_0$. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale $[0,1]$ predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak} \quad x \in [0, 2^{-(n+1)}] \\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x)\,, & \text{ak} \quad x \in (2^{-(n+1)}, 2^{-n}) \\ 0\,, & \text{ak} \quad x \in [2^{-n}, 1] \end{cases} \quad , \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $[0,1]$, ale nemožno ho tam majorizovať konvergentným číselným radom (tj. neexistuje konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ taký, že $|f_n(x)| \le c_n$ pre $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbf{N}$).

Hovoríme, že *postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na množine M* ($\emptyset \ne M \subset \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$), ak platí

$$\exists\, K \ge 0 \;\; \forall\, n \in \mathbf{N} \;\; \forall\, x \in M \;:\; |f_n(x)| \le K\,.$$

Veta 5 (*Abelovo kritérium*). *Nech postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovujú nasledujúcim podmienkam:*

1. *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M;*
2. *postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na množine M a pre každé $x \in M$ je postupnosť $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónna.*

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ rovnomerne konverguje na množine M.

Veta 6 (*Dirichletovo kritérium*). *Nech postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovujú nasledujúcim podmienkam:*

1. *postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je rovnomerne ohraničená na množine M;*
2. *$g_n \rightrightarrows 0$ na M a pre každé $x \in M$ je postupnosť $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónna.*

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ rovnomerne konverguje na množine M.

Poznámky. 1. Z viet 5 a 6 vyplývajú — ak za M zvolíme jednoprvkovú množinu — vety 13 a 14 z odseku 3.3.

2. Formuláciu Abelovho kritéria možno upraviť podobne ako sme upravili formuláciu Weierstrassovho kritéria (pozri vetu 4'):

Veta 5'. *Nech postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovujú nasledujúcim podmienkam:*

1. *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M;*
2. *existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že postupnosť $\{g_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na M a pre každé $x \in M$ je postupnosť $\{g_n(x)\}_{n=n_0}^{\infty}$ monotónna.*

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ rovnomerne konverguje na množine M.

Rovnako možno upraviť aj formuláciu Dirichletovho kritéria.

314. Dokážte, že nasledujúce rady konvergujú rovnomerne na množine M:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}\,, \quad M = (0,\infty)\,;$

2$_0$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}\,, \quad M = [-10,10]\,;$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,x^n\,, \quad M = [0,1]\,;$

4$_0$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}\,, \quad M = [1,\infty)\,.$

315. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak *Dirichletov rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n^x)$ konverguje rovnomerne na intervale $[0,\infty)$. Dokážte!

316. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich radov konvergujú rovnomerne a ktoré nerovnomerne na množine M:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n}\,, \quad M=[-1,3]\,;$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}\,, \quad M=\mathbf{R}\,;$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n\,, \quad M$ je obor konvergencie daného radu ;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^2}\,, \quad M=(0,\infty)\,;$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad M=\mathbf{R}\,;$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin(1/nx)}{4+\ln^2 nx}\,, \quad M=(2,\infty)\,;$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}e^{-nx}}{n}\,, \quad M=[0,\infty)\,;$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^6x^2}\sin nx\,, \quad M=\mathbf{R}\,;$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}\,, \quad M=[0,\infty)\,;$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ a) $M=[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, kde $\pi>\varepsilon>0$, b) $M=[0,2\pi]\,;$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+x}{n}$ a) $M=(0,1)$, b) $M=(1,\infty)\,;$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^2}\sin\frac{x}{n^2}$ a) $M=[0,1]$, b) $M=[0,\infty)\,;$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg}\frac{1}{1+3^nx}$ a) $M=[0,\delta]$, b) $M=(\delta,\infty)\,;$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\,, \quad M=\mathbf{R}\,.$

4.2 Niektoré vlastnosti rovnomerne konvergentných postupností a radov funkcií

Veta 7. *Nech $a\in\mathbf{R}^*$ je hromadný bod množiny M. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M a pre každé $n\in\mathbf{N}$ [10] existuje konečná $\lim_{x\to a} f_n(x) =: A_n$, tak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} A_n$ a platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n$$

(je teda oprávnená nasledovná zámena poradia limít:

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) \quad).$$

Dôsledok. *Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M a každá z funkcií f_n, $n\in\mathbf{N}$, je spojitá na množine M, tak je na množine M spojitá aj funkcia f.*

V prípade radov funkcií možno tieto tvrdenia sformulovať nasledovne:

Veta 7'. *Nech $a\in\mathbf{R}^*$ je hromadný bod množiny M. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na M a pre každú z funkcií f_n ($n\in\mathbf{N}$) existuje konečná $\lim_{x\to a} f_n(x) =: A_n$ [11], tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje[12] a*

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

[10] namiesto „pre každé $n\in\mathbf{N}$“ sme mohli predpokladať aj „počínajúc niektorým n_0“

[11] na rozdiel od vety 7 tu už nestačí predpokladať „počínajúc niektorým n_0 existujú konečné $\lim_{x\to a} f_n(x)$“

[12] konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ vyplýva napr. aj z úvah použitých pri riešení pr. 309.1

(je teda oprávnená zámena poradia znaku sumácie a limity:

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) \quad) .$$

Dôsledok. *Ak každá z funkcií* f_n, $n\in\mathbf{N}$, *je spojitá na množine* M *a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje rovnomerne na* M, *tak funkcia* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je spojitá na množine* M.

317. Nájdite limity:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$;

2. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$;

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n(n+1)x^2}$;

4. $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$.

318. Určite definičný obor nasledujúcich funkcií a vyšetrite ich spojitosť:

1. $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n^2}$;

2. $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-n^2 x}$;

3. $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$;

4. $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}\cos nx$;

5. $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$;

6. $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

Riešenie. 5. Na nájdenie definičného oboru funkcie f (tj. na vyšetrenie bodovej konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1/n)^n$) použijeme najprv Cauchyho kritérium (veta 7' z odseku 3.3):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|x+\frac{1}{n}\right| = |x| ,$$

preto daný rad konverguje pre $x\in(-1,1)$ a diverguje pre $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Pre $x=1$ a $x=-1$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie ($\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e\neq 0$ a $\lim_{n\to\infty}(-1+1/n)^n$ neexistuje, pretože pre $a_n=(-1+1/n)^n=(-1)^n(1-1/n)^n$ je $\lim_{k\to\infty}a_{2k}=1/e$, $\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}=-1/e$). Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1/n)^n$ teda konverguje len pre $x\in(-1,1)$, preto $D(f)=(-1,1)$.

Ukážeme teraz, že funkcia f je spojitá v každom bode $a\in(-1,1)$ (tj. že f je spojitá). Nech je teda dané $a\in(-1,1)$; zvoľme $\varepsilon>0$ tak, aby platilo $-1<a-\varepsilon<a+\varepsilon<1$. Na intervale $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1/n)^n$ podľa Weierstrassovho kritéria rovnomerne ($|(x+1/n)^n| < (|a|+\varepsilon+1/n)^n$ pre $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ [13], rad $\sum_{n=1}^{\infty}(|a|+\varepsilon+1/n)^n$ konverguje podľa Cauchyho kritéria) a každá z funkcií $f_n(x)=(x+1/n)^n$, $n\in\mathbf{N}$, je tam spojitá, preto podľa dôsledku vety 7' je na intervale $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ spojitá aj funkcia $f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$. Pretože a je vnútorný bod intervalu $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, vyplýva zo spojitosti funkcie f na intervale $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ spojitosť funkcie f v bode a [14].

Uvedená úvaha platí pre každé $a\in(-1,1)$, preto je funkcia f spojitá v každom bode intervalu $(-1,1) = D(f)$.

Poznámky 1. Na intervale $(-1,1)$ konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1/n)^n$ nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie z pr. 307.1:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-1,1)}\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\neq 0 \quad) ,$$

[13] zrejme $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset(-(|a|+\varepsilon),|a|+\varepsilon)$ a pre $x\in(-(|a|+\varepsilon),|a|+\varepsilon)$ — tj. pre $|x|<|a|+\varepsilon$ — iste platí $|(x+1/n)^n| = |x+1/n|^n \le (|x|+1/n)^n < (|a|+\varepsilon+1/n)^n$

[14] túto úvahu možno sformulovať nasledovne: ak a je vnútorný bod množiny $G\subset D(f)$ a funkcia f je spojitá na množine G, tak f je spojitá v bode a (pozor: hoci toto tvrdenie pôsobí úplne primitívnym dojmom, je v ňom predpoklad „a je vnútorný bod množiny G“ podstatný)

preto pri vyšetrovaní spojitosti funkcie f nemôžeme použiť dôsledok vety 7' na celom intervale $(-1, 1)$,,naraz".

2. Na základe myšlienok z riešenia pr. 318.5 možno dôsledok vety 7' zovšeobecniť:

Hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na množine M*, ak pre každý bod $a \in M$ existuje také jeho okolie $O(a)$, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $M \cap O(a)$.

Platí toto tvrdenie: *Ak každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, je spojitá na množine M a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na M, tak funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je spojitá na množine M.*

319. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií spojitých na intervale $[a, b]$, nech $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Ak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť prvkov z $[a, b]$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, tak $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$. Dokážte!

320. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií rovnomerne spojitých na množine M. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M, tak f je rovnomerne spojitá na M. Dokážte!

321. Môže postupnosť nespojitých funkcií rovnomerne konvergovať

1. k spojitej funkcii? 2. k nespojitej funkcii?

322$_0$. 1. Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}(nxe^{-nx} - (n-1)e^{-(n-1)x})$ konverguje nerovnomerne na $[0, 1]$, ale jeho súčet je spojitý na $[0, 1]$.

2. Ukážte, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{\pi}{x}, & \text{ak} \quad x \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{ak} \quad x \notin \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] \end{cases},$$

je postupnosť spojitých funkcií, ktorá konverguje nerovnomerne na $\mathbf{R}$, ale jej limita je spojitá funkcia.

323$_0$. 1. Uveďte príklad postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na intervale $[0, 1]$, ktorá konverguje na $[0, 1]$ nerovnomerne k funkcii f, pričom

a) každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, je spojitá a funkcia f je nespojitá;
b) každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, je nespojitá a funkcia f je spojitá;
c) každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, aj funkcia f sú nespojité.

2. Riešte tú istú úlohu pre prípad radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a jeho súčtu.

Veta 8. *Nech $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ a každá z funkcí f_n, $n \in \mathbf{N}$, je riemannovsky integrovateľná na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

(teda je oprávnená zámena poradia integrálu a limity:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \quad).$$

Veta 8'. *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných a riemannovsky integrovateľných na intervale $[a, b]$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $[a, b]$, tak aj funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je riemannovsky integrovateľná na $[a, b]$ a platí*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\, dx\right). \tag{4.4}$$

Ak funkcie f_n, $n \in \mathbf{N}$, aj funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sú riemannovsky integrovateľné na $[a, b]$ a platí rovnosť (4.4), hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ možno na intervale $[a, b]$ integrovať člen po člene.*

324. Vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 5} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\,dx$;   2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\,dx$.

325. Na základe výpočtu integrálov $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^2\,dt$ nájdite súčet radu

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\cdots .$$

326. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných a riemannovsky integrovateľných na intervale $[a,b]$, nech množina $M\subset[a,b]$ má Jordanovu mieru nula. Ak súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je ohraničená funkcia f a jeho konvergencia je rovnomerná na množine $[a,b]\setminus M$, tak ho možno na intervale $[a,b]$ integrovať člen po člene. Dokážte!

327. 1. Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2(n+1)}-x^{2n})$ konverguje nerovnomerne na $[-1,1]$, ale možno ho tam integrovať člen po člene.

2. Ukážte, že hoci všetky členy radu $(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1)x^{n-1}-(n-1)nx^{n-2})$ aj jeho súčet sú spojité na intervale $[0,1]$, nemožno tento rad na intervale $[0,1]$ integrovať člen po člene.

328$_0$. Ukážte, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$

1. konverguje na intervale $[0,1]$ bodove pre každé $\alpha\in\mathbf{R}$;
2. konverguje na intervale $[0,1]$ rovnomerne len pre $\alpha<1$;

ale

3. rovnosť $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ platí pre všetky $\alpha<2$.

Veta 9. *Nech definičným oborom funkcí f_n, $n\in\mathbf{N}$, aj ich prvých derivácií je ohraničený interval I. Ak*

1. postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje aspoň v jednom bode $a\in I$

a

2. postupnosť derivácií $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na I

tak

a) postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na I

a

b) funkcia $g=\lim_{n\to\infty} f_n'$ je deriváciou funkcie $f=\lim_{n\to\infty} f_n$.

Ak funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a každá z funkcií f_n, $n\in\mathbf{N}$, je diferencovateľná v bode $a\in\mathbf{R}$ (na intervale I) a platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(a)$$

$$\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\,,\quad x\in I^{15} \right),$$

hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ možno v bode a (na intervale I) derivovať člen po člene.*

Pre prípad funkcionálnych radov možno vetu 9 sformulovať nasledovne:

Veta 9'. *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií diferencovateľných na ohraničenom intervale I. Ak*

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a\in I$

a

2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje rovnomerne na I,

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na I a možno ho tam integrovať člen po člene.

---

[15] ak $I=[c,d]$, $I=[c,d)$ alebo $I=(c,d]$ tak v bode c, resp. d ide o príslušné jednostranné derivácie

329. Dokážte, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na množine M:

1_0. $f_n(x) = \cos\dfrac{1}{nx}$, $\quad M = [1,2]$;

2_0. $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)$, $\quad M = [a,b]$, $a > 0$;

3. $f_n(x) = n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{nx}$, $\quad M = [1,10]$;

4_0. $f_n(x) = n\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$, $\quad M = [0,1]$.

Riešenie. 3. Využijeme tvrdenie a) vety 9; množina $M = [1,10]$ je ohraničený interval, postupnosť $\left\{n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{nx}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje iste v bode $x = 1 \in M$:

$$\lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}(1/n)}{1/n} = 1 \quad {}^{16}; \tag{4.5}$$

postupnosť $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$, tj. $\left\{\dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ [17], konverguje podľa vety 2 na intervale $[1,10]$ rovnomerne k funkcii $g(x) \equiv 1$, $x \in [1,10]$:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,10]}|f_n'(x) - g(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,10]}\frac{1}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2} = 0 \; .$$

Sú teda splnené všetky predpoklady vety 9, podľa jej tvrdenia a) postupnosť $\left\{n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{nx}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na intervale $[1,10]$.

Poznámka. Podľa tvrdenia b) vety 9 je funkcia $g(x) \equiv 1$, $x \in [1,10]$, deriváciou funkcie $f :=$ $:= \lim_{n\to\infty} f_n|[1,10]$, preto predpis funkcie f musí mať tvar $f(x) = x + C$. Pretože — ako vyplýva z rovnosti (4.5) — $f(1) = 1$, je $C = 0$. Teda $n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{nx} \rightrightarrows x$ na $[1,10]$.

330. Dokážte, že nasledujúce funkcie sú diferencovateľné v každom bode svojho definičného oboru a ich derivácia je spojitá funkcia:

1. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{5/2}}$;

2. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$;

3. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2\ln^2(n+1)}$;

4. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$.

Riešenie. 4. Definičným oborom funkcie $f_n(x) := \dfrac{(-1)^n x}{n+x}$ je množina $\mathbf{R}\setminus\{-n\}$, pre každé $x \in$ $\in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n) = \mathbf{R}\setminus\{-n\,;\, n\in\mathbf{N}\}$ rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$ konverguje podľa Leibnizovho kritéria[18], preto $D(f) =$ $= \mathbf{R}\setminus\{-n\,;\,n\in\mathbf{N}\} = (-1,\infty)\cup\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n-1,-n)$.

---

[16] pripomeňme, že $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$

[17] keby sme sa chceli striktne pridŕžať znenia vety 9, v ktorej je definičným oborom funkcií f_n a f_n', $n \in \mathbf{N}$, interval I, tj. v našom prípade interval $[1,10]$, mali by sme vlastne uvažovať postupnosti $\{f_n|[1,10]\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\{f_n'|[1,10]\}_{n=1}^{\infty}$

[18] pozri vetu 12' z odseku 3.3, pre dané x je postupnosť $\left\{\dfrac{n}{n+x}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ monotónna, ak $n_0 + x > 0$

Pomocou vety 9' teraz ukážeme, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ možno derivovať člen po člene v každom bode $a \in \in D(f)$. Nech je teda dané $a \in D(f)$; zvoľme $\varepsilon > 0$ tak, aby $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset D(f)$. Na ohraničenom intervale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ sú splnené všetky predpoklady vety 9':

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje dokonca v každom bode intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (pretože $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset D(f)$);

2. rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{(1+x/n)^2}$ konverguje na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ rovnomerne podľa Abelovho kritéria (pozri vetu 5'; rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje rovnomerne na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ [19] a postupnosť $\displaystyle\left\{\frac{1}{(1+x/n)^2}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená a monotónna pre každé $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ak $n_0 > -a-1$).

Podľa vety 9' možno teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ derivovať na intervale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ člen po člene:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{(x+n)^2}, \quad x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\,. \tag{4.6}$$

Z diferencovateľnosti funkcie f na intervale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ vyplýva jej diferencovateľnosť v bode a [20], hodnotu $f'(a)$ nájdeme dosadením $x = a$ do (4.6). Keďže tieto úvahy platia pre každé $a \in D(f)$, má funkcia f deriváciu v každom bode svojho definičného oboru a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{(x+n)^2}\,. \tag{4.7}$$

Spojitosť funkcie f' dokážeme podobne ako v pr. 318.5: každá z funkcií $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^n\, n}{(x+n)^2}$ je spojitá na intervale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (čísla a, ε majú ten istý význam ako predtým) a — ako sme už dokázali — rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje rovnomerne na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$; preto funkcia $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ je podľa dôsledku vety 7' spojitá na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, a teda iste spojitá v bode a. Keďže a bol ľubovolný bod množiny $D(f) = D(f')$, je funkcia f' spojitá v každom bode svojho definičného oboru.

Poznámky. 1. Rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{(1+x/n)^2}$ konverguje rovnomerne na každom z intervalov $(-1,\infty)$, $(-2,-1)$, …, $(-n-1,-n)$, … (možno to dokázať pomocou Abelovho kritéria rovnako ako v riešení pr. 330.4). Na ohraničených intervaloch $(-2,-1)$, $(-3,-2)$, …, $(-n-1,-n)$, … sú preto splnené všetky predpoklady vety 9', na každom z týchto intervalov možno teda rovnosť (4.7) dokázať pre všetky jeho prvky „naraz“. Na základe vety 9' však túto rovnosť nemôžeme dokázať „naraz“ pre všetky prvky intervalu $(-1,\infty)$, pretože $(-1,\infty)$ je neohraničená množina.

2. Funkcia $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ je spojitá (pretože má konečnú deriváciu v každom bode svojho definičného oboru); vyšetrime teraz charakter jej bodov nespojitosti, ktorými sú všetky prvky množiny $\{-n\,;\, n \in \mathbf{N}\}$. Nech je dané $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$; napíšme funkciu f ako súčet troch funkcií:

$$f = \sum_{n=1}^{k-1} f_n + f_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n\,.$$

Každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N} \setminus \{k\}$, je spojitá na $(-k-1, -k+1)$, preto je na $(-k-1,-k+1)$ spojitá aj funkcia $\sum_{n=1}^{k-1} f_n$ (ako súčet konečného počtu funkcií spojitých na $(-k-1,-k+1)$); zo spojitosti funkcií $f_n|(-k-1,-k+1)$, $n > k$, a z rovnomernej konvergencie radu $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$ na $(-k-1,-k+1)$ (tá vyplýva z Weierstrassovho kritéria alebo z vety 9') vyplýva podľa dôsledku vety 7' spojitosť funkcie $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$ na $(-k-1,-k+1)$. Keďže funkcie $\sum_{n=1}^{k-1} f_n$ a $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$ sú spojité na $(-k-1,-k+1)$, je iste $\lim_{x\to -k}(\sum_{n=1}^{k-1} f_n(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x))$ konečná; súčasne

$$\lim_{x\to -k+} f_k(x) = \lim_{x\to -k+} \frac{(-1)^k x}{k+x} = \begin{cases} -\infty\,, & \text{ak } k \text{ je párne} \\ \infty\,, & \text{ak } k \text{ je nepárne} \end{cases},$$

[19] pozri poznámku [6]

[20] pri tejto úvahe využívame, že a je vnútorný bod intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$$\lim_{x\to -k-} f_k(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ak } k \text{ je párne} \\ -\infty, & \text{ak } k \text{ je nepárne} \end{cases} .$$

Preto

$$\lim_{x\to -k+} f(x) = \lim_{x\to -k+} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-1} f_n(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right) + f_k(x) \right] = \begin{cases} -\infty, & \text{ak } k \text{ je párne} \\ \infty, & \text{ak } k \text{ je nepárne} \end{cases} ,$$

$$\lim_{x\to -k-} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ak } k \text{ je párne} \\ -\infty, & \text{ak } k \text{ je nepárne} \end{cases} ,$$

teda $-k$ je bod nespojitosti 2. druhu. Podobne možno postupovať pre $k = 1$.

331. 1_0. Dokážte nasledujúce tvrdenie: Nech funkcie $f_n, n \in \mathbf{N}$, sú k–krát diferencovateľné na ohraničenom intervale I ($k \in \mathbf{N}$). Ak

(i) každý z radov $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)}, m = 0, 1, \ldots, k$, konverguje aspoň v jednom bode intervalu I a

(ii) rad k–tych derivácií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ konverguje rovnomerne na I,

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na intervale I a možno ho tam k–krát derivovať člen po člene (tj. pre $m = 1, \ldots, k$ platí rovnosť $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)}(x)$, $x \in I$; ak $I = [c,d]$, $I = [c,d)$ alebo $I = (c,d]$, ide pre $x = c$, resp. $x = d$ o príslušné jednostranné derivácie).

2. Dokážte, že nasledujúce funkcie sú spojite diferencovateľné:

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$; b$_0$) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

332. Ak každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, má primitívnu funkciu na intervale $[a,b]$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$, tak f má tiež primitívnu funkciu na $[a,b]$. Dokážte!

337. Rozhodnite o pravdivosti týchto tvrdení: Nech funkcie $f_n, n \in \mathbf{N}$, sú diferencovateľné na neohraničenom intervale I, nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje rovnomerne na I a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a \in I$. Potom

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na I;
2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ možno na intervale I derivovat člen po člene.

334. 1_0. Ukážte, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \operatorname{arctg} nx$, konverguje na $\mathbf{R}$ rovnomerne k diferencovateľnej funkcii f, ale $f'(1) \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1)$.

2. Zostrojte postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ diferencovateľných funkcií a funkciu $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ tak, aby $f_n \rightrightarrows f$ na $[-1,1]$, a pritom neexistovala $f'(0)$.

4.3 Mocninové rady

4.3.1 Polomer a interval konvergencie mocninového radu. Základné vlastnosti mocninových radov

Rad funkcií (premennej x), ktorý má tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n , \tag{4.8}$$

kde $a \in \mathbf{R}$ a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel, sa nazýva *mocninový* (*potenčný*) *rad (so stredom a)*. Čísla a_n, $n = 0, 1, \ldots$, sa nazývajú *koeficienty radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$*[21].

[21]pri niektorých zápisoch členy s nulovými koeficientami „vypadnú“; napr. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n-1}$ je zápis mocninového radu so stredom 0, zodpovedajúceho postupnosti koeficientov 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, $\ldots$

Veta 10. *Ak rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *konverguje v bode* $t_0 \neq 0$, *tak konverguje absolútne v každom bode intervalu* $(-|t_0|, |t_0|)$.

Dôsledok. *Pre mocninový rad* (4.8) *nastane práve jedna z nasledujúcich možností:*

a) *existuje* $R > 0$ *tak, že rad* (4.8) *konverguje absolútne v každom bode* $x \in (a-R, a+R)$ *a diverguje pre* $x \in (-\infty, a-R) \cup (a+R, \infty)$*;*

b) *rad* (4.8) *konverguje absolútne na* $\mathbf{R}$*;*

c) *rad* (4.8) *konverguje len v bode* a.

Ak nastane prípad a), nazýva sa číslo R polomer konvergencie radu (4.8) a interval $(a-R, a+R)$ *interval konvergencie radu* (4.8); v prípade b) sa nazýva polomerom konvergencie radu (4.8) číslo $R = \infty$ a jeho intervalom konvergencie interval $(-\infty, \infty)$; v prípade c) za polomer konvergencie radu (4.8) považujeme číslo $R = 0$ [22].

Pri hľadaní polomeru konvergencie R sa najčastejšie používajú nasledujúce tvrdenia[23]:

Veta 11 (*Cauchy, Hadamard*). *Nech* $r := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $(\in \mathbf{R}^*)$. *Potom pre polomer konvergencie* R *radu* (4.8) *platí:*

$$R = \begin{cases} 1/r\,, & ak \quad r \in \mathbf{R}^+ \\ \infty \quad, & ak \quad r = 0 \\ 0 \quad, & ak \quad r = \infty \end{cases} .$$

Veta 12. *Ak počínajúc niektorým* n_0 *je* $a_n \neq 0$ *a existuje* $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ $(\in \mathbf{R}^*)$, *tak pre polomer konvergencie* R *mocninového radu* (4.8) *platí*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

335. Nájdite (pokiaľ existuje) interval konvergencie mocninového radu:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n (x+1)^n$;
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-2)^n}{4^{n+2}}$;
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n^2} x^n$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$;
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n , \quad a > 0$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n} (x-3)^n$;
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$;
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{4n}}{n^2}$;
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(3\pi n/4)}{n} x^n$;
10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{n^2}{2^n}\right) (x-3)^n$.

336. Nájdite obor konvergencie mocninového radu:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$;
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^{n!}$;

[22] v prípade a) sa nemusí obor konvergencie D radu (4.8) zhodovať s jeho intervalom konvergencie — rad (4.8) môže totiž konvergovať aj v niektorom z bodov $a-R$, $a+R$, prípadne v obidvoch — vo všeobecnosti platia len inklúzie $(a-R, a+R) \subset D \subset [a-R, a+R]$

[23] tie sú odvodené z Cauchyho a d'Alembertovho kritéria (vety 6' a 7' z odseku 3.3), pri hľadaní R možno samozrejme používať aj ďalšie kritériá z kapitoly 3

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}}\, x^n\,, \quad a>0\;;$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,\right)(x+1)^n\;;$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}\, \ln\frac{3n-2}{3n+2}\;;$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)\, x^n\,, \quad a>1\;;$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n\;;$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n\;;$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}\,(x+1)^n\;;$

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}\,, \quad a\ge b>0\;;$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n}\, x^n\;;$

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\, x^n\,.$

337$_0$. Pre dané $R \in \mathbf{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ zostrojte mocninový rad s polomerom konvergencie R.

338. Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný rad. Nájdite polomer konvergencie R radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

339. 1. Nech polomery konvergencie radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sú R_1 a R_2. Aký je vzťah medzi R_1, R_2 a polomerom konvergencie R radu $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$, ak

a) $R_1 > R_2$?

b) $R_1 = R_2$?

2. Nech polomer konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je $R \in \mathbf{R}_0^+ \cup \{\infty\}$. Aký je polomer konvergencie r radu

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k x^n \quad (k\in\mathbf{N})$?

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn} \quad (k\in\mathbf{N})$?

3. Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť nenulových čísel a existuje $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, nech $k,m\in\mathbf{N}$. Potom pre polomer konvergencie R radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn+m}$ platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}\,.$$

Dokážte!

340$_0$. Uveďte príklad mocninového radu, ktorého oborom konvergencie je interval

1. $(-1,1)$;

2. $(-1,1]$;

3. $[-1,1)$;

4. $[-1,1]$.

341. 1. Ak pre polomer konvergencie R radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ platí $R>1$, tak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokážte!

2. Ak pre polomer konvergencie R radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ platí $R<1$, tak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená postupnosť. Dokážte!

3$_0$. Uveďte príkald mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s polomerom konvergencie $R=1$ takého, že

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Veta 13. *Nech rad (4.8) má nenulový polomer konvergencie R, nech $r \in (0,R)$. Potom tento rad konverguje rovnomerne na intervale $[a-r, a+r]$.*

Veta 14. *Ak rad (4.8) má polomer konvergencie $R \in \mathbf{R}^+$ a konverguje v bode $a+R$ (v bode $a-R$), tak konverguje rovnomerne na intervale $[a, a+R]$ (na intervale $[a-R, a]$)*[24].

Veta 15. *Rady* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ *majú rovnaký polomer konvergencie.*

Z týchto viet možno na základe viet 8', 9' a dôsledku vety 7' odvodiť nasledujúce tvrdenie:

Veta 16. *Nech rad (4.8) má nenulový polomer konvergencie R. Potom*
a) *Funkcia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ je spojitá v každom bode oboru konvergencie D radu (4.8)*[25];
b) *Rad (4.8) možno integrovať člen po člene na každom intervale $[c,d] \subset D$, špeciálne*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-a)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n(t-a)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}, \quad x \in D\ ^{26},$$

c) *V každom bode $x \in I$, kde I je interval konvergencie radu (4.8), má funkcia f derivácie všetkých rádov; hodnotu $f^{(k)}(x)$ ($k \in \mathbf{N}$, $x \in I$) možno nájsť k–násobným derivovaním radu (4.8) člen po člene:*

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right)' = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n(x-a)^{n-k}, \quad x \in I,\ k \in \mathbf{N}\,. \tag{4.9}$$

Ak $R \in \mathbf{R}^+$ a rad $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n(x-a)^{n-k}$ konverguje pre $x = a+R$ ($x = a-R$), tak funkcie f, f', ..., $f^{(k)}$ sú definované aj v bode $a+R$ (v bode $a-R$) a v tomto bode platí tiež rovnosť (4.9).

342. Integrovaním člen po člene nájdite súčty radov:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{2^n}\, x^n$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{3^{n+2}}$.

Riešenie. 1. Polomer konvergencie daného radu je $R = 1$ (na jeho výpočet sme mohli použiť vetu 11 ($R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$) aj vetu 12 ($R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$)); v bodoch $x = 1$ a $x = -1$ (tj. v krajných bodoch intervalu konvergencie $(-1,1)$) rad $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ diverguje (nie je splnená nutná podmienka konvergencie). Definičným oborom funkcie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ je teda interval $(-1,1)$.

Zapíšme predpis funkcie f v tvare

$$f(x) = xg(x)\,,$$

kde

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\,.$$

Súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ nájdeme integrovaním člen po člene: podľa tvrdenia b) vety 16 je funkcia $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ primitívna k funkcii g, pritom súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ (ktorý je geometrický pre každé $x \in \mathbf{R}$) už poznáme:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}\,, \quad x \in (-1,1)\,.$$

[24] a — ako vyplýva z vety 13 — na každom intervale $[a-r, a+R]$, $-R < r < R$ ($[a-R, a+r]$, $-R < r < R$)
[25] tj. v každom bode svojho definičného oboru, čo znamená, že f je spojitá funkcia
[26] pripomeňme, že podľa vety 14 z odseku 2.3 je F primitívna funkcia k funkcii f, pričom $F(a) = 0$

Odtiaľ dostávame

$$g(x) = G'(x) = \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad x \in (-1,1)\,,$$

a teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xg(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\,, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Poznámka. V uvedenom postupe sme mohli namiesto integrovania člen po člene použiť samozrejme aj derivovanie člen po člene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \overset{(*)}{=} x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}\,, \quad x \in (-1,1)\,,$$

pritom rovnosť (*) vyplýva z tvrdenia c) vety 16.

343. Derivovaním člen po člene nájdite súčty radov:

1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+1}x^{4n-1}}{4n+1}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n(2n-1)}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$.

Riešenie. 4. Polomer konvergencie daného radu je $R = 1$, pričom v bodoch $x = 1$ a $x = -1$ tento rad konverguje. Definičným oborom funkcie $f(x) = \dfrac{x^n}{n(n+2)}$ je teda interval $[-1,1]$.

Aby sme našli súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$, budeme sa podobne ako pri riešení pr. 342.1 snažiť postupnými úpravami dospieť k mocninovému radu, ktorého súčet už poznáme (zatiaľ sú pre nás takými radmi len geometrické rady, neskôr — s Taylorovými radmi — sa počet mocninových radov, ktorých súčty poznáme, zväčší).

Pretože $\dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$, platí pre $x \in [-1,1)$ rovnosť

$$f(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) - f_2(x))\,,$$

kde

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,, \qquad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

(uvedená rovnošť nemôže platiť pre $x = 1$, pretože v tomto bode rady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ divergujú).

Súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ už môžeme nájsť derivovaním člen po člene: podľa tvrdenia c) vety 16 pre $x \in$ $\in (-1,1)$ ($(-1,1)$ je interval konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$) platí

$$f_1'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}\,.$$

Preto pre $x \in (-1,1)$ je

$$f_1(x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) + C\,;$$

pre hľadanú funkciu f_1 platí $f_1(0)=0$ (hodnotu $f_1(0)$ sme vypočítali dosadením $x=0$ do radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$), odtiaľ $C=0$ a

$$f_1(x)=-\ln(1-x)\,, \quad \text{ak} \quad x\in(-1,1) \quad ^{27}. \tag{4.10}$$

Teraz hľadajme súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$: pre $x\in[-1,1)$, $x\neq 0$ platí

$$f_2(x)=\frac{1}{x^2}\,g(x)\,,$$

kde

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\,,$$

a súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$ už môžeme nájsť derivovaním člen po člene: pre $x\in(-1,1)$ (tento interval je intervalom konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$) platí

$$g'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}=-x-1+\frac{1}{1-x}\,,$$

preto

$$g(x)=\int\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)dx=-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)+C\,, \quad \text{ak} \quad x\in(-1,1)\,,$$

a pretože z rovnosti $g(0)=0$ vyplýva $C=0$, je

$$g(x)=-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)\,, \quad \text{ak} \quad x\in(-1,1) \quad ^{28}$$

a

$$f_2(x)=\frac{1}{x^2}\,g(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x^2}\,, \quad \text{ak} \quad x\in(-1,1)\,,\ x\neq 0\,. \tag{4.11}$$

Pre $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$ teda platí

$$f(x)=\frac{1}{2}(f_1(x)-f_2(x))=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x^2}\right)\,. \tag{4.12}$$

Zostáva nájsť súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$ pre $x=0$, $x=1$ a $x=-1$; začnime prípadom $x=-1$. Podľa tvrdenia a) vety 16 je funkcia $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$ spojitá v každom bode svojho definičného oboru, ktorým

---

[27] mohli sme tiež použiť rovnosť $f_1(x)=f_1(0)+\int_0^x f'(t)\,dt$, pri hľadaní predpisu funkcie f_1 na $x\in(-1,1)$ sme mohli rovnako dobre použiť aj integrovanie člen po člene:

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$$

[28] rovnako aj pri hľadaní predpisu funkcie g pre $x\in(-1,1)$ sme mohli použiť tvrdenie b) vety 16:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n+1}\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n+1}\right)dt=\int_0^x\frac{t^2}{1-t}\,dt=-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)$$

je interval $[-1,1]$, preto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)} = f(-1) = \lim_{x\to-1+} f(x) = \lim_{x\to-1+}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x^2}\right) ;$$

pretože elementárna funkcia $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x^2}\right)$ je spojitá v bode -1, je jej limitou v tomto bode funkčná hodnota; to znamená, že rovnosť (4.12) platí aj pre $x=-1$.

Rovnako zo spojitosti funkcie f v bode 1 vyplýva

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = f(1) = \lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)-\left(\lim_{x\to1-}\frac{x+1}{x^2}\right)(\lim_{x\to1-}(1-x)\ln(1-x)) = \frac{3}{4}-2.0=\frac{3}{4}$$

(pri výpočte $\lim_{x\to1-}(1-x)\ln(1-x)$ sme použili l'Hospitalovo pravidlo, ostatné limity sa nájdu dosadením)[29].

Zostal prípad $x=0$, v ktorom sa zaobídeme bez výpočtu limity (hoci samozrejme podľa tvrdenia a) vety 16 aj tu platí $f(0)=\lim_{x\to0} f(x)$): dosadením $x=0$ do radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$ dostávame $f(0)=0$ [30].

Celkovo teda

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x^2}\right), & \text{ak } x\in[-1,0)\cup(0,1) \\ 0, & \text{ak } x=0 \\ \frac{3}{4}, & \text{ak } x=1 \end{cases} .$$

Poznámky. 1. Úvahu, ktorú sme použili na dôkaz rovnosti (4.12) v bode $x=-1$, možno sformulovať nasledovne:

Ak pre $x\in(-a,a)$ platí rovnosť $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)$, pričom funkcia f je spojitá v bode a (v bode $-a$) a rad $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ konverguje v bode a (v bode $-a$), tak uvedená rovnosť platí aj pre $x=a$ ($x=-a$).

2. V riešení pr. 343.4 sme uviedli súčty radov $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$ (ktoré konvergujú na intervale $[-1,1)$), len pre $x\in(-1,1)$ (rovnosť (4.10)), resp. $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$ (rovnosť (4.11)). Z tvrdenia uvedeného v poznámke 1 vyplýva, že rovnosti (4.10) a (4.11) platia aj pre $x=-1$, okrem toho zrejme $f_2(0)=0$.

344. Nájdite súčty číselných radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$.

---

[29] hodnoty $f(1)$ a $f(-1)$ sme v tomto prípade mohli nájsť aj bez použitia vety 16: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, preto n–tý súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ je $S_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$, $n\in\mathbf{N}$, odtiaľ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}$; analogicky možno postupovať pri dôkaze rovnosti $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}=-\frac{1}{4}$

[30] snaživý čitateľ si môže preveriť platnosť rovnosti $\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x^2}\right)=0$

Riešenie. 2. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ konverguje podľa Leibnizovho kritéria a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = g(1) ,$$

kde funkcia g je daná predpisom

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1} .$$

Z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1}$ v bode 1 vyplýva podľa vety 10 jeho konvergencia na intervale $(-1,1)$ [31]. Na tomto intervale možno súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1}$ nájsť na základe vety 16: pre $x \in (-1,1)$ je

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n+1} t^{2n-2}\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} t^{2n-2} \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x .$$

Funkcia g je podľa tvrdenia a) vety 16 spojitá v každom bode oboru konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1}$, teda aj v bode 1, preto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = g(1) = \lim_{x \to 1-} g(x) = \lim_{x \to 1-} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$$

(na dôkaz rovnosti $g(1) = \operatorname{arctg} 1$ sme mohli použiť aj tvrdenie z poznámky 1 za riešením pr. 343.4).

Poznámka. Postup, ktorý sme použili pri riešení pr. 344.2, sa spravidla formuluje ako samostatné tvrdenie:

Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje, tak* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

345. 1. Uveďte príklad mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, pre ktorý existuje konečná $\lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ale rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

2. Nech $a_n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$. Ak existuje konečná $\lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: S$, tak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$. Dokážte!

346. Nech číselné rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ aj ich Cauchyho súčin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergujú, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$. Potom $C = AB$. Dokážte!

4.3.2 Taylorove rady

Nech funkcia f má v bode $a \in \mathbf{R}$ derivácie všetkých rádov. Potom mocninový rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\, (x-a)^n$$

sa nazýva *Taylorov rad funkcie f v bode a*. Ak $a = 0$, používame spravidla názov *Maclaurinov rad funkcie f*. Funkcia f sa nazýva *analytická v bode a*, ak jej Taylorov rad konverguje na niektorom okolí $O(a)$ bodu a k funkcii $f|O(a)$.

[31] interval $(-1,1)$ je v tomto prípade aj intervalom konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1}$, vyplýva to z riešenia pr. 338

Veta 17. *Ak mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *konverguje na niektorom okolí* $O(a)$ *bodu* $a \in \mathbf{R}$ *k funkcii* $f|O(a)$, *tak* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *je Taylorov rad funkcie* f (a funkcia f je teda analytická v bode a) [32].

Platia naledujúce rovnosti:

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty)$;

2. $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty)$;

3. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ [33], $\quad x \in (-\infty, \infty)$ [34] ;

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]$;

5. $$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \\ + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in I,$$

$$\text{kde} \quad I = \begin{cases} (-\infty, \infty), & \text{ak} \quad m \in \mathbf{N} \\ [-1, 1] \quad , & \text{ak} \quad m \in (0, \infty) \setminus \mathbf{N} \\ (-1, 1] \quad , & \text{ak} \quad m \in (-1, 0) \\ (-1, 1) \quad , & \text{ak} \quad m \in (-\infty, -1] \end{cases} ,$$

špeciálne

5.1. $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$;

5.2. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad x \in [-1, 1)$;

pritom intervaly, na ktorých rovnosti 1-5 a 5.1,2 platia, sú obormi konvergencie príslušných mocninových radov.

347. 1. Ak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je Maclaurinov rad párnej (nepárnej) funkcie, tak $a_{2n+1} = 0$ ($a_{2n} = 0$) pre všetky $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Dokážte!

2. Ak $\varepsilon > 0$ a pre každé $x \in (0, \varepsilon)$ platí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$, tak $a_n = 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Dokážte!

348. Ukážte, že nasledujúce funkcie sú analytické v bode 0 a určite obor konvergencie ich Maclaurinových radov:

1. $f(x) = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1$;

2. $f(x) = \operatorname{ch} ax$;

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}, & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad , & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}$;

4. $f(x) = x \sin 2x \cos 3x$;

5. $f(x) = \sin^3 x$;

6. $f(x) = \dfrac{1}{a + bx}, \quad ab \neq 0$;

7. $f(x) = \dfrac{5x - 4}{x + 2}$;

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$;

9. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$;

10. $f(x) = \dfrac{x}{(1 - x^3)^2}$;

11. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad a > 0$;

12. $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

---

[32] z vety 17 vyplýva, že definíciu funkcie analytickej v bode sme mohli vysloviť v tejto prirodzenejšej podobe: funkcia f sa nazýva analytická v bode a, ak existuje mocninový rad so stredom a, ktorý na niektorom okolí $O(a)$ bodu a konverguje k $f|O(a)$

[33] pritom kladieme $(-1)^0 := 1$

[34] funkcie sin a cos sa často definujú práve pomocou rovností 2 a 3

13. $f(x) = \ln(12 - x - x^2)$;

14. $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$;

15. $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$;

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sin x + \ln(1-x^2)}{x^4}, & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ -\dfrac{2}{3}, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}$.

Riešenie. 16. Použijeme podobné postupy ako pri hľadaní Taylorových polynómov v pr. I.387. Podľa vzorca 2 z úvodu k tomuto odseku platí pre všetky $x \in \mathbf{R}$ rovnosť

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1} ,$$

a teda aj rovnosť

$$x\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\, x^{2n} . \tag{4.13}$$

Podľa vzorca 4 platí pre $u \in (-1,1]$

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} .$$

Odtiaľ vyplýva (stačí položiť $u = -x^2$), že pre všetky $x \in (-1,1)$ platí

$$\ln(1-x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,(-x^2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n}\, x^{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} . \tag{4.14}$$

Ak sčítame rovnosti (4.13) a (4.14), vidíme, že pre všetky $x \in (-1,1)$ (pre tieto x platia totiž rovnosti (4.13) a (4.14) súčasne) platí

$$\begin{aligned} x\sin x + \ln(1-x^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{n} \right) x^{2n} = \\ &= \left(\frac{1}{1!} - 1 \right) x^2 + \left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{2} \right) x^4 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3} \right) x^6 + \cdots = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{n} \right) x^{2n} . \end{aligned} \tag{4.15}$$

Vydelením rovnosti (4.15) výrazom x^4 dostávame pre $x \in (-1,1)$, $x \neq 0$:

$$\frac{x\sin x + \ln(1-x^2)}{x^4} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{n} \right) x^{2n-4} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} - \frac{1}{k+2} \right) x^{2k} \tag{4.16}$$

(pri poslednej úprave sme položili $n - 2 = k$, pritom $(-1)^{n+1} = (-1)^{k+3} = (-1)^{k+1}$). Pre $x = 0$ má súčet radu $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} - \frac{1}{k+2} \right) x^{2k}$ hodnotu $-\frac{1}{3!} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$.

Na intervale $(-1,1)$ teda rad $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} - \frac{1}{k+2} \right) x^{2k}$ konverguje k funkcii $f|(-1,1)$, čo podľa vety 17 znamená, že funkcia f je analytická v bode 0 a uvedený rad je jej Maclaurinovým radom.

Zostáva nájsť obor konvergencie radu $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} - \frac{1}{k+2} \right) x^{2k}$; využijeme pri tom znalosti oborov konvergencie radov, z ktorých sme tento rad vytvárali. Rad na pravej strane rovnosti (4.13) konverguje pre každé $x \in \mathbf{R}$, rad z rovnosti (4.14) len pre $x \in (-1,1)$ [35], preto ich súčet (tj. rad z rovnosti (4.15))

[35] okrem iného to vyplýva aj z tejto úvahy: rad $-\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2n}/n)$ sme získali substitúciou $u = -x^2$ z radu $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n+1}u^n/n$; keďže druhý z týchto radov konverguje len pre $u \in (-1,1]$ (pozri vzorec 4 z úvodu k tomuto odseku), konverguje prvý z nich len pre tie $x \in \mathbf{R}$, pre ktoré $-x^2 \in (-1,1]$

konverguje len pre $x \in (-1,1)$ [36] . Ak konvergentný (divergentný) rad vynásobíme nenulovou konštantou (v našom prípade číslom $1/x^4$), dostaneme konvergentný (divergentný) rad; odtiaľ vyplýva: rad z rovnosti (4.16) iste diverguje pre $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ a konverguje pre $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$; jeho konvergencia v bode 0 (ktorá nevyplýva z tejto úvahy) je zrejmá.

Teda oborom konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} - \frac{1}{n+2} \right) x^{2n}$ je interval $(-1,1)$.

Poznámky. 1. Pri hľadaní oboru konvergencie Maclaurinovho radu funkcie f sme mohli samozrejme postupovať aj „klasickým" spôsobom (tj. nájsť polomer konvergencie a potom vyšetriť konvergenciu daného radu v krajných bodoch intervalu konvergencie); ak chceme na výpočet polomeru konvergencie použiť vetu 11, je

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0\,, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \\ \sqrt[2k]{\dfrac{1}{(2k+3)!} + \dfrac{1}{k+2}} = \sqrt[2k]{\dfrac{1}{k+2}\left(1 + \dfrac{k+2}{(2k+3)!}\right)}\,, & \text{ak } n = 2k \text{ a } k \text{ je párne} \\ \sqrt[2k]{\dfrac{1}{k+2} - \dfrac{1}{(2k+3)!}} = \sqrt[2k]{\dfrac{1}{k+2}\left(1 - \dfrac{k+2}{(2k+3)!}\right)}\,, & \text{ak } n = 2k \text{ a } k \text{ je nepárne} \end{cases};$$

ak využijeme rovnosti $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{k+2} = 1$ a $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{n+2}{(2n+3)!} = 0$, dostaneme $\lim_{m\to\infty} \sqrt[2m-1]{|a_{2m-1}|} = 0$, $\lim_{m\to\infty} \sqrt[4m]{|a_{4m}|} = 1$, $\lim_{m\to\infty} \sqrt[4m-2]{|a_{4m-2}|} = 1$, odtiaľ $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ (pozri tiež riešenie pr. I.160).

2. Úvaha, ktorú sme použili pri hľadaní oboru konvergencie radu z rovnosti (4.15), je vlastne špeciálnym prípadom tohto tvrdenia:

Nech rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ *majú navzájom rôzne polomery konvergencie. Potom obor konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-a)^n$ *je prienikom oborov konvergencie radov* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ (pozri tiež riešenie pr. 339.1).

3. Príklad 348.16 „hovorí" vlastne toto: funkciu $g(x) = \dfrac{x\sin x + \ln(1-x^2)}{x^4}$ možno „dodefinovať" v bode 0 tak, že funkcia, ktorú dostaneme, bude analytická v bode 0 (táto poznámka sa vzťahuje aj na pr. 348.3, obdobne možno dodefinovať napr. funkcie $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$).

349. Ukážte, že nasledujúce funkcie sú analytické v bode 0 a určite obor konvergencie ich Maclaurinových radov:

1. $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
2. $f(x) = \arcsin x$;
3. $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$, $a > 0$;
4. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2+x^2}{2-x^2}$;
5. $f(x) = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$;
6. $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$;
7. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$;
8. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$, $x \in (-1,1)$.

Riešenie. 2. Nájdeme najprv Maclaurinov rad derivácie funkcie f, tj. funkcie $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: Podľa vzorca 5.2 z úvodu k tomuto odseku pre každé $u \in [-1,1)$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, x^n\,,$$

preto (stačí položiť $u = x^2$) pre každé $x \in (-1,1)$ je

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, x^{2n}\,. \tag{4.17}$$

[36] pri tejto úvahe využívame, že súčet dvoch konvergentných radov je konvergentný rad, súčet konvergentného a divergentného radu je divergentný rad

Integrovaním člen po člene (tvrdenie b) vety 16) dostávame pre $x \in (-1,1)$ rovnosť

$$\begin{aligned}\arcsin x &=^{37} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,t^{2n}\right)dt = \int_0^x dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,t^{2n}\,dt = \\ &= x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}\,, \end{aligned} \tag{4.18}$$

čo podľa vety 17 znamená, že funkcia arcsin je analytická v bode 0 a rad $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}$ je jej Maclaurinovým radom.

Nájdime teraz obor konvergencie tohto radu: Rad z rovnosti (4.17) konverguje len pre $x \in (-1,1)$ (možno to odvodiť podobnými úvahami ako v poznámke [35] k riešeniu pr. 348.16), teda jeho polomer konvergencie je $R=1$. Pretože podľa vety 15 má ľubovoľný mocninový rad rovnaký polomer konvergencie ako rad získaný z neho integrovaním člen po člene, je polomer konvergencie radu $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}$ tiež rovný 1; pritom v bodoch $x=1$ a $x=-1$ (tj. v krajných bodoch intervalu konvergencie $(-1,1)$) tento rad konverguje podľa Raabeho kritéria [38]. Oborom konvergencie radu $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}$ je teda interval $[-1,1]$. (Z tvrdenia uvedeného v poznámke 1 za riešením pr. 343.4 potom vyplýva, že rovnosť (4.18) platí aj pre $x=1$ a $x=-1$.)

Poznámka. Polomer konvergencie R radu $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}$ môžeme samozrejme nájsť aj priamo (tj. bez úvah o polomere konvergencie radu z rovnosti (4.17)), nemožno na to však použiť vetu 12 (rad $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}$ totiž nespĺňa podmienku „počínajúc niektorým n_0 je $a_n \neq 0$" z tejto vety, pozri tiež poznámku [21]). Číslo R možno vypočítať napr. na základe tvrdenia z pr. 339.3 alebo pomocou d'Alembertovho kritéria (veta 6' z odseku 3.3), z ktorého je toto tvrdenie odvodené.

350. 1. Nech funkcia f je súčtom radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s nenulovým polomerom konvergencie. Nájdite Maclaurinov rad funkcie $\dfrac{f(x)}{1-x}$!

2. Nájdite Maclaurinove rady funkcií:

a) $f(x)=\ln^2(1-x)$;

b) $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^2$.

351. Nájdite Taylorov rad funkcie f v bode a a určite jeho obor konvergencie, ak:

1. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-2x+3)^2}$, $a=1$;
2. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-10x+29}}$, $a=5$;
3. $f(x)=(2x+1)\sin x\sin(x+1)$, $a=-\dfrac{1}{2}$;
4. $f(x)=\ln(x^2-9x+20)$, $a=3$.

Návod: Substitúciou $x-a=t$ možno hľadanie Taylorovho radu funkcie f v bode a previesť na hľadanie Maclaurinovho radu funkcie $g(t):=f(t+a)$. Pritom zrejme platí: ak interval I je obor konvegencie Maclaurinovho radu funkcie g, tak interval $J=a+I$ $(:=\{x+a\,;\,x\in I\})$ je oborom konvergencie Taylorovho radu funkcie f v bode a.

[37] využívame rovnosť $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt$

[38] konvergencia v bodoch $x=1$ a $x=-1$ vyplýva aj z pr. 345.2

352. Pomocou derivovania alebo integrovania člen po člene nájdite súčty radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n\, n!}\, x^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}\, x^{2n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\, x^{2n}$.

353. Nájdite súčty číselných radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$;
5. $\displaystyle 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

354. Nech funkcia $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ má derivácie všetkých rádov v každom bode intervalu (a,b), nech pre niektoré $M>0$, $c>0$ platí

$$\forall\, n\in\mathbf{N}\ \ \forall\, x\in(a,b)\ :\ |f^{(n)}(x)|<Mc^n\ .$$

Potom Taylorov rad funkcie f v bode x_0 ($x_0\in(a,b)$) konverguje na intervale (a,b) k funkcii f. Dokážte![39]

355. Uveďte príklad funkcie, ktorá má derivácie všetkých rádov v bode 0, ale nie je v tomto bode analytická!

4.4 Niektoré výpočty pomocou radov

356. Vypočítajte nasledujúce hodnoty s uvedenou presnosťou:

1. $\sqrt[3]{130}\quad(10^{-5})$;
2. $\sqrt[4]{15}\quad(10^{-4})$;
3. $\operatorname{arctg}\frac14\quad(10^{-4})$;
4. $\ln 1.2\quad(10^{-4})$;
5. $e\quad(10^{-6})$.

Riešenie. 1. Platí

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{130} &= \sqrt[3]{125+5}=\sqrt[3]{125\left(1+\frac{1}{25}\right)}=5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}}=\\ &= 5\left[1+\frac{1}{1!\,3}\left(\frac{1}{25}\right)-\frac{2}{2!\,3^2}\left(\frac{1}{25}\right)^2+\frac{2\cdot5}{3!\,3^3}\left(\frac{1}{25}\right)^3-\cdots\right]\end{aligned}$$

(použili sme vzorec 5 z úvodu odseku 4.3.2 pre $m=1/3$ a $x=1/25$), teda

$$\sqrt[3]{130}=5+5\cdot\frac{1}{1!\,3\cdot5^2}-5\cdot\frac{2}{2!\,3^25^4}+5\cdot\frac{2\cdot5}{3!\,3^35^6}-\cdots\ .$$

Ak číslo b je súčtom radu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, je prirodzené aproximovať ho niektorým čiastočným súčtom tohto radu. Odhadnime absolútnu chybu takejto aproximácie: ak pre n–tý zvyšok $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} b_n$ uvedeného

---

[39] špeciálne teda (ak $c=1$) platí: ak postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na (a,b), tak Taylorov rad funkcie f v bode x_0 ($x_0\in(a,b)$) konverguje na intervale (a,b) k funkcii f ; na základe tohto tvrdenia možno dokázať napr. vzorce 1-3 z úvodu tohto odseku

radu platí $|R_n| < \varepsilon_1$, ak každé z čísel b_0, b_1, $\dots$, b_n vypočítame s presnosťou ε_2 (tj. nájdeme aproximácie β_0, $\dots$, β_n čísel b_0, $\dots$, b_n také, že $|b_k - \beta_k| < \varepsilon_2$ pre $k = 0, 1, \dots, n$) a ak zaokrúhlením čísla $\sum_{k=0}^{n} \beta_k$ dostaneme číslo β, pre ktoré platí $|\sum_{k=0}^{n} \beta_k - \beta| < \varepsilon_3$, tak číslo β je aproximáciou čísla b, pre ktorej absolútnu chybu ε platí

$$\varepsilon \le \varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ ;$$

vyplýva to z nerovností

$$\varepsilon = \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k - \beta \right| \le \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{n} (b_k - \beta_k) \right| + \left| \sum_{k=0}^{n} \beta_k - \beta \right| \ .$$

Ak presnosť, s ktorou máme vypočítať číslo b, je $\delta = 10^{-m}$ ($m \in \mathbf{N}$), zaokrúhľujeme spravidla číslo $\sum_{k=0}^{n} \beta_k$ na m desatinných miest; pre chybu ε_3, ktorej sa tým dopúšťame, platí

$$\varepsilon_3 \le 0.5 \cdot 10^{-m} = \frac{\delta}{2} \ .$$

Ak teda chceme, aby platilo $\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \delta = 10^{-m}$, treba zvoliť ε_1 a ε_2 tak, aby bola splnená nerovnosť $\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2 < \delta/2$; položme preto

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta}{4}$$

a nájdime (čo najmenšie) číslo n, pre ktoré platí

$$|R_n| < \varepsilon_1 = \frac{\delta}{4}$$

(také n existuje, pretože z konvergencie radu $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ vyplýva $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$), potom zrejme stačí položiť

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta}{4(n+1)} \ .$$

V našom príklade máme počítať s presnosťou $\delta = 10^{-5}$, nájdime teraz čísla n a ε_2. Rad $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, ktorého súčtom je číslo $\sqrt[3]{130}$, strieda — počínajúc členom b_1 — znamienka, pričom postupnosť $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ rýdzomonotónne konverguje k 0, preto pre jeho n–tý zvyšok R_n ($n \in \mathbf{N}$) platí (pozri vetu 12 z odseku 3.3)

$$\begin{aligned} |R_n| \quad &< \quad |b_{n+1}| = 5 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{(n+1)!\, 3^{n+1}} \left(\frac{1}{25}\right)^{n+1} \le \\ &\le \quad \frac{5}{3(n+1)} \cdot \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}{n!\, 3^n} \cdot \frac{1}{5^{2n+2}} = \frac{1}{3(n+1)5^{2n+1}} \ . \end{aligned}$$

Nerovnosť $|R_n| < \delta/4 = 10^{-5}/4$ bude preto iste splnená pre tie $n \in \mathbf{N}$, ktoré sú riešeniami nerovnice

$$\frac{1}{3(n+1)5^{2n+1}} \le \frac{1}{4 \cdot 10^5} \ ,$$

najmenším takým číslom je $n = 3$; potom

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta}{4(n+1)} = \frac{10^{-5}}{16} = 6.25 \cdot 10^{-7} \ .$$

Aby sme teda našli číslo $\sqrt[3]{130}$ s presnosťou 10^{-5}, stačí vypočítať každé z čísel b_0, b_1, b_2, b_3 s presnosťou $6.25 \cdot 10^{-7}$, sčítať ich a výsledok zaokrúhliť na 5 desatinných miest:

$$\begin{aligned} b_0 &= \ \ 5 \ , & \beta_0 &= \ \ 5 \ , \\ b_1 &= \ \ 5 \cdot \frac{1}{1!\, 3 \cdot 5^2} \ , & \beta_1 &= \ \ 0.066\,666\,7 \ , \\ b_2 &= -5 \cdot \frac{2}{2!\, 3^2 5^4} \ , & \beta_2 &= -0.000\,888\,9 \ , \\ b_3 &= \ \ 5 \cdot \frac{2 \cdot 5}{3!\, 3^3 5^6} & \beta_3 &= \ \ 0.000\,019\,8 \ , \end{aligned}$$

potom $\sum_{k=0}^{3} \beta_k = 5.065\,797\,6$, zaokrúhlením na 5 desatinných miest dostávame $5.065\,80$, preto

$$\sqrt[3]{130} = 5.065\,80 \pm 0.000\,01 \ .$$

Poznámky. 1. Pri odhade R_n sme mohli použiť napr. aj Lagrangeov tvar zvyšku Taylorovho polynómu (pozri [23, str. 173, poznámka 2]): pre

$$f(x) = 5(1+x)^{1/3}$$

je

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \cdot 5 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1}} (1+x)^{-(3n+2)/3}, \quad n \in \mathbf{N} \ ,$$

preto

$$|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}\left(\vartheta_n \cdot \frac{1}{25}\right)}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{n+1} \right| = 5 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{(n+1)!\, 3^{n+1}} \left(1 + \vartheta_n \cdot \frac{1}{25}\right)^{-(3n+2)/3} \cdot \frac{1}{25^{n+1}} \ ,$$

kde $\vartheta_n \in (0,1)$, odtiaľ (ak použijeme rovnaké úpravy ako v riešení pr. 356.1 a nerovnosť $(1+\vartheta_n/25)^{-(3n+2)/3} < 1$)

$$|R_n| < \frac{1}{3(n+1)5^{2n+1}} \ , \quad n \in \mathbf{N} \ .$$

2. Číslo $\sqrt[3]{130}$ sme mohli napísať aj v tvare

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{216-86} = 6\sqrt[3]{1 - \frac{86}{216}}$$

a ďalej pokračovať obdobne ako pri riešení pr. 356.1 (získaný rad ovšem vtedy nie je radom so striedavými znamienkami, preto nemožno použiť odhad $|R_n| < |b_{n+1}|$; z nerovnosti

$$|b_k| \le \frac{2}{k} \left(\frac{43}{108}\right)^k \ ,$$

kde

$$b_k := -6 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3k-4)}{k!\, 3^k} \left(\frac{43}{108}\right)^k \ , \quad k \ge 2 \ ,$$

vyplýva tento odhad:

$$\begin{aligned} |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| \quad &\le \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \le \frac{2}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{43}{108}\right)^k = \\ &= \quad \frac{2}{n+1} \left(\frac{43}{108}\right)^{k+1} \frac{1}{1-43/108} = \frac{86}{65(n+1)} \left(\frac{43}{108}\right)^n \ , \quad n \in \mathbf{N} \ ; \end{aligned}$$

najmenším prirodzeným riešením nerovnice

$$\frac{86}{65(n+1)} \left(\frac{43}{108}\right)^n < \frac{10^{-5}}{4}$$

je $n = 12$ [40]).

Nemalo by však zmysel písať číslo $\sqrt[3]{130}$ napr. v tvare

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{64+66} = 4\sqrt[3]{1 + \frac{66}{64}} \ ,$$

[40] použitím Lagrangeovho tvaru zvyšku dostaneme odhad

$$|R_n| \quad = \quad 6 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{(n+1)! 3^{n+1}} \left(1 - \vartheta_n \cdot \frac{43}{108}\right)^{-(3n+2)/3} \left(\frac{43}{108}\right)^{n+1} \le$$

pretože $66/64 > 1$, neleží číslo $66/64$ v obore konvergencie Maclaurinovho radu funkcie $\sqrt[3]{1+x}$.

357. Dokážte rovnosť

$$\ln(n+1) = \ln n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2n+1)^{2k-1}} + \cdots\right)$$

a vypočítajte pomocou nej $\ln 2$ a $\ln 3$ s presnosťou 10^{-5}.

358. 1. Vypočítajte číslo π s presnosťou 10^{-5} na základe rovnosti

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\ .$$

2. Vypočítajte $\sin 18^\circ$ s presnosťou 10^{-4}.

359. S presnosťou 10^{-3} vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2\,dx$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,\cos x\,dx$;
4. $\displaystyle\int_0^{1/9} \sqrt{x}\,e^x\,dx$.

Riešenie. 3. Podľa vzorca 3 z úvodu k odseku 4.3.2

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,,$$

preto pre každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$\sqrt[3]{x}\,\cos x = \sqrt[3]{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!}\ .$$

Rad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!}$ konverguje rovnomerne na intervale $[0,1]$ (možno to dokázať Weierstrassovým alebo Abelovým kritériom alebo odvodiť z vety 13 a pr. 306), preto (podľa vety 8')

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,\cos x\,dx &= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^n\frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!}\,dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{3x^{(6n+4)/3}}{(2n)!\,(6n+4)}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{(2n)!\,(6n+4)}\ .\end{aligned}$$

Ďalej budeme postupovať rovnako ako pri riešení pr. 356.1: Keďže rad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{(2n)!\,(6n+4)}$ je radom so striedavými znamienkami, pričom postupnosť $\displaystyle\left\{\frac{3}{(2n)!\,(6n+4)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ rýdzomonotónne konverguje k 0, platí pre jeho n–tý zvyšok $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$ odhad

$$|R_n| < \frac{3}{(2n+2)!\,(6n+10)} < \frac{1}{(2n+3)!}\ ;$$

$$\leq \frac{2}{n+1}\left(1-\frac{43}{108}\right)^{-(3n+2)/3}\left(\frac{43}{108}\right)^{n+1} \leq \frac{2}{n+1}\left(\frac{108}{65}\right)^{n+1}\left(\frac{43}{108}\right)^{n+1} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{43}{65}\right)^{n+1}\,,$$

najmenším prirodzeným riešením nerovnice

$$\frac{2}{n+1}\left(\frac{43}{65}\right)^{n+1} < \frac{10^{-5}}{4}$$

je $n = 25$

obr. 3

najmenším prirodzeným riešením nerovnice

$$\frac{1}{(2n+3)!} \le \frac{1}{4 \cdot 10^3}$$

je $n = 2$; potom

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 10^3} = 8.\overline{3} \cdot 10^{-5} \, .$$

Treba teda vypočítať b_n pre $n = 0$, 1 , 2 s presnosťou ε_2 , vypočítané čísla sčítať a výsledok zaokrúhliť na 3 desatinné miesta:

$$\begin{aligned} b_0 &= \ \ \frac{3}{4} &&= \ \ 0.75 &&, \\ b_1 &= -\frac{3}{20} &&= -0.15 &&, \\ b_2 &= \ \ \frac{3}{24 \cdot 16} &&= \ \ 0.007\,81\ldots &&, \end{aligned}$$

$0.75 - 0.15 + 0.007\,81 = 0.607\,81$, teda

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} \, \cos x \, dx = 0.608 \pm 0.001 \, .$$

Poznámka. Pretože čísla b_0 a b_1 sme vypočítali presne, stačilo by počítať číslo b_2 s presnosťou $\dfrac{1}{4 \cdot 10^3} = 2.5 \cdot 10^{-4}$.

360. Odvoďte nasledujúce približné vzorce pre obsah p kruhového odseku ABC , zodpovedajúceho malému stredovému uhlu AOC veľkosti 2ϑ (pozri obr. 3):

1. $p \approx \dfrac{2}{3} dh$;

2_0. $p \approx \dfrac{h}{15}(7d + 3s)$;

kde d je dĺžka tetivy AC , s je dĺžka oblúka AC , h je výška odseku ABC.

4.5 Ďalšie príklady

361. Nájdite obor konvergencie radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n (e^{x/n} - 1)^n$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1 + a^{2n} x^2}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin nx$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^p \sin nx}{1+n^q}$, $\quad q > 0$, $x \in (0, \pi)$;

9. $\sin x - \sin\sin x + \sin\sin\sin x - \cdots$;

10. $\cos x - \cos\cos x + \cos\cos\cos x - \cdots$.

362. 1. Na základe rovnosti

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}, \quad x \neq 1,$$

nájdite súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}$.

2. Na základe rovnosti

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$$

nájdite súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2^n}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

363. 1. Nech $a_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty}(1/a_n)$ diverguje. Potom

$$\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x} + \frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdot\frac{a_3}{a_4+x} + \cdots = \frac{a_1}{x}, \quad x > 0.$$

Dokážte!

2. Dokážte rovnosť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \dfrac{1}{x-1}$, $x > 1$.

3. Nájdite súčty radov:

a) $\dfrac{2}{1+2x} + \dfrac{3}{(1+2x)(1+3x)} + \dfrac{4}{(1+2x)(1+3x)(1+4x)} + \cdots$, $x > 0$;

b) $\dfrac{y}{1-y^2} + \dfrac{y^2}{1-y^4} + \dfrac{y^4}{1-y^8} + \cdots + \dfrac{y^{2^n}}{1-y^{2^{n+1}}} + \cdots$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$.

364. Nech $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n^2+x^2}$. Potom $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Dokážte!

365. Vyšetrite bodovú a rovnomernú konvergenciu postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na množine M, ak:

1. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$, $\quad M = (0, \infty)$;

2. $f_n(x) = n\displaystyle\int_0^x \sin\frac{\pi t^n}{2}\, dt$, $\quad M = [0, \alpha]$, $0 < \alpha < 1$;

3. $f_n(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{n-1}{n}x\right)$, $\quad M = \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$;

4. $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n} + \operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n}\, x}$ $\quad$ a) $M = (0, 1)$, $\quad$ b) $M = (1, \infty)$;

5. $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$, $\quad M = (0, \infty)$;

6. $f_n(x) = x^n + x^{2n} - 2x^{3n}$, $\quad M = [0, 1]$;

7. $f_n(x) = \sqrt[n]{|\sin x|}$, $\quad M = \mathbf{R}$;

8. $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right)$, $\quad M = [0, \infty)$;

9. $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)$ $\quad$ a) $M = (0, 2)$, $\quad$ b) $M = (2, \infty)$;

10. $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$, $\quad M = [1, a]$;

11. $f_n(x) = \dfrac{n}{x}\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, $\quad M = (0, 10)$;

12. $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $\quad$ a) $M = [a, b]$, $\quad$ b) $M = \mathbf{R}$.

366$_0$. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale $[0,1]$, nech $f_n \to 0$ na $[0,1]$. Pre $\varepsilon > 0$ a $x \in [0,1]$ položme

$$n_\varepsilon(x) := \min\{n \in \mathbf{N}\,;\, \forall k \ge n \ :\ |f_k(x)| < \varepsilon\}\,.$$

Potom $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$ práve vtedy, keď každá z funkcií n_ε $(\varepsilon > 0)$ je ohraničená. Dokážte!

367. 1_0. Nech $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je rovnomerne spojitá funkcia, nech

$$f_n(x) := f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}\,.$$

Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbf{R}$. Dokážte!

2. Nech $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia, nech

$$f_n(x) := n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right), \quad x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}\,,$$

nech $a < b$. Potom $f_n \rightrightarrows f'$ na $[a,b]$. Dokážte!

3. Nech $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, nech

$$f_n(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right) \quad x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}\,.$$

Potom postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na každom ohraničenom intervale $[a,b]$. Dokážte!

368. Rozhodnite o platnosti nasledujúcich tvrdení:

1. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných funkcií definovaných na intervale (a,b), nech $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b). Potom pre každé $\alpha \in (0,1]$ platí $f_n^\alpha \rightrightarrows f^\alpha$ na (a,b).

2. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b) a $g_n \rightrightarrows g$ na (a,b), tak $f_n g_n \rightrightarrows fg$ na (a,b).

369. Vyšetrite bodovú a rovnomernú konvergenciu radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^4)^n}$, $\quad x \in [a,b]$, $\quad$ pričom $\quad$ a) $ab > 0$, $\quad$ b) $ab < 0$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$, $\quad \frac{1}{2} \le |x| \le 2$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{[n/2]!}$[41], $\quad |x| < a$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin(x/n)}{x^2 + \ln^3(n+1)}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{n \ln^2(n+1)}$, $\quad x \ge 1$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/nx)\cos nx}{4 + \ln^2 2nx}$ $\quad$ a) $x \in (0,1)$, $\quad$ b) $x > 1$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n x + 1}$ $\quad$ a) $x \in (0,\delta)$, $\quad$ b) $x > \delta$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x^n)$, $\quad x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin\sqrt{n}}{1 + n^3 x^3}$ $\quad$ a) $x \ge \alpha > 0$, $\quad$ b) $x > 0$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} x^n$, $\quad x \ge 1$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ $\quad$ a) $x \in [0,\delta]$, $\quad$ b) $x \ge \delta$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n^2 + nx^2}}$[41].

370. Nájdite všetky $\alpha \in \mathbf{R}$, pre ktoré rad $\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx^2}$ konverguje rovnomerne na $(0,\infty)$.

---

[41] $[.]$ tu označuje celú časť

371₀. 1. Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ konverguje rovnomerne na každom ohraničenom intervale, ale nekonverguje absolútne v žiadnom bode $x \in \mathbf{R}$.

2. Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ konverguje rovnomerne a absolútne na $[0,1]$, ale rad absolútnych hodnôt $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ konverguje na $[0,1]$ nerovnomerne.

372. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ konverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x-a_n}$ konverguje rovnomerne a absolútne na každom uzavretom ohraničenom intervale $[a,b]$ neobsahujúcom žiadny prvok množiny $\{a_n \,;\, n \in \mathbf{N}\}$.

373. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií definovaných na intervale $[0,1]$, nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ bodove konverguje a $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$. Vyplýva z toho rovnomerná konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $[0,1]$?

374. Rozhodnite o platnosti tohto tvrdenia: Ak postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na intervale I, tak $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} f_n(x) = \sup_{x\in I} f(x)$.

375. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na uzavretom ohraničenom intervale I, tak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na I rovnomerne. Dokážte!

376. Nájdite definičný obor nasledujúcich funkcií a vyšetrite ich spojitosť:

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$;

2. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$;

3. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}$.

377. Ukážte, že funkcia

$$F(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x+n\omega)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n\omega)^2}$$

je spojitá a periodická.

378. 1. Nech postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií definovaných na otvorenom intervale I konverguje na I rovnomerne k funkcii f. Ak žiadna z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, nemá bod nespojitosti 2. druhu, tak ani funkcia f nemá bod nespojitosti 2. druhu. Dokážte!

2. Uveďte príklad postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých funkcií definovaných na $\mathbf{R}$ takej, že $\lim_{n\to\infty} f_n$ je definovaná na $\mathbf{R}$ a má bod nespojitosti 2. druhu.

379. Nech postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónnych funkcií definovaných na intervale $[a,b]$ konverguje na $[a,b]$ k spojitej funkcii f. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Dokážte!

380. Ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvexných funkcií bodove konverguje na intervale (a,b) k funkcii f, tak f je spojitá na (a,b). Dokážte!

381. 1. Dokážte, že existuje spojitá funkcia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ktorá nie je monotónna na ľubovoľnom intervale $I \subset \mathbf{R}$!

2. Dokážte, že existuje spojite diferencovateľná funkcia $g : [0,1] \to \mathbf{R}$, ktorá nie je konvexná a nie je konkávna na ľubovoľnom intervale $I \subset [0,1]$!

382. Dokážte, že existuje funkcia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ také, že množina jej bodov nespojitosti je $\mathbf{Q}$, pričom

1. každé $a \in \mathbf{Q}$ je bod nespojitosti 1. druhu a $\lim_{x\to a+} f(x) \neq f(a)$, $\lim_{x\to a-} f(x) \neq f(a)$;

2₀. každé $a \in \mathbf{Q}$ je bod nespojitosti 2. druhu a $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a-} f(x)$ neexistujú.

383. 1. Ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií riemannovsky integrovateľných na intervale $[a,b]$ je rovnomerne ohraničená na (a,b) a konverguje tam lokálne rovnomerne, tak $\lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ a

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \,.$$

Dokážte!

2. Uveďte príklad postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií riemannovsky integrovateľných na intervale $[0,1]$, ktorá konverguje na $(0,1)$ lokálne rovnomerne k 0, ale $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.

384. Nájdite limity:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x^2}\,dx$;

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$;

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}\,dx$;

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{1+1/n} x^n \ln x\,dx$;

5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}\,dx$, kde $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia .

385. Vypočítajte $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\,\frac{x}{2^n}\,dx.$

386. Uveďte príklad postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií definovaných na intervale $[0,1]$, ktorá konverguje na $[0,1]$ nerovnomerne k ohraničenej funkcii f, pričom
1. $f_n\in\mathcal{R}[0,1]$ $(n\in\mathbf{N})$, $f\notin\mathcal{R}[0,1]$;
2. $f_n\notin\mathcal{R}[0,1]$ $(n\in\mathbf{N})$, $f\in\mathcal{R}[0,1]$.

387. Na základe pr. 119, 192 a 193 dokážte druhú vetu o strednej hodnote integrálneho počtu (veta 16 z odseku 2.4) pre prípad spojitej funkcie $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ a spojitej monotónnej funkcie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$.

388. Nájdite definičný obor nasledujúcich funkcií a ich prvých derivácií:

1. $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$;

2. $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

389. Nech funkcie f_n, $n\in\mathbf{N}$, sú spojite diferencovateľné na (ohraničenom alebo neohraničenom) intervale I. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a\in I$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'$ konverguje lokálne rovnomerne na I, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na I a možno ho tam derivovať člen po člene. Dokážte!

390. Ukážte, že postupnosť $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konverguje na $\mathbf{R}$ rovnomerne k diferencovateľnej funkcii, ale pre žiadne $x\in\mathbf{R}$ neexistuje konečná $\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$.

391. Nech funkcia f a jej derivácie všetkých rádov sú definované na $\mathbf{R}$, nech postupnosť $\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na $\mathbf{R}$ lokálne rovnomerne k funkcii φ. Potom $\varphi(x)=Ce^x$ pre niektoré $C\in\mathbf{R}$. Dokážte!

392. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale I, nech $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť konečných podmnožín intervalu I, nech definičným oborom funkcie f_n' je množina $I\setminus K_n$ $(n\in\mathbf{N})$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a\in I$ a existuje konvergentný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ taký, že platí

$$|f_n'(x)|\le a_n\,,\quad x\in I\setminus K_n\,,\ n\in\mathbf{N}\,,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na I a možno ho derivovať člen po člene v každom bode $x\in I\setminus\bigcup_{n\in\mathbf{N}}K_n$. Dokážte!

393. 1. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť obsahujúca všetky racionálne čísla z intervalu $(0,1)$. Potom funkcia

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-a_n|}{3^n}\,,\quad x\in(0,1)\,,$$

je spojitá a definičným oborom jej derivácie je množina $(0,1)\setminus\mathbf{Q}$. Dokážte!

2_0. Zostrojte spojitú funkciu $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ takú, že $D(f')=(0,1)\setminus\mathbf{Q}$, pričom v žiadnom bode $a\in\mathbf{Q}\cap(0,1)$ neexistujú jednostranné derivácie $f_+'(a)$ a $f_-'(a)$.

394. Nájdite obor konvergencie radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-n^{\alpha}} x^n$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\cos\frac{1}{3^n}\right)x^n$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\,x^n$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\,,\quad a>0\,,\ b>0$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n^2}}{n!}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}\,,\quad a>0$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{\nu(n)}}{n}(1-x)^n\,,$ kde $\nu(n)$ je počet cifier čísla n ;

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\,x^n$;

12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\,x^n$;

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\,x^n$;

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$.

395. Nech polomer konvergencie radov $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ je $R_1\in\mathbf{R}^+$ a $R_2\in\mathbf{R}^+$. Čo viete povedať o polomere konvergencie R radu

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_nx^n$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+|a_n|}\,x^n$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n\,,$ kde $\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n$ je Cauchyho súčin radov $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$?

396. Nájdite Maclaurinove rady nasledujúcich funkcií a určite ich obor konvergencie I:

1. $f(x)=\sin(\mu\arcsin x)$;

2. $f(x)=\ln\sqrt[7]{3-x+6x^2-2x^3}$;

3. $f(x)=(x^2-1)\arcsin 2x^2$;

4. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}$;

5. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$;

6. $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\operatorname{arctg}t}{t}\,dt$;

7. $f(x)=\ln\left(\pi\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}\right)+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$;

8. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

9. $f(x)=\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$;

10. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$.

397. Dokážte rovnosti:

1. $\displaystyle\operatorname{arctg}x\cdot\ln(1+x^2)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,\quad x\in[-1,1]$;

2. $\displaystyle\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac12+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)\frac{x^n}{n+2}\,,\quad x\in(-1,1]\setminus\{0\}$;

3. $\displaystyle\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}\,,\quad x\in[-1,1]$;

4. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\, x^{2n+1}\,, \quad x \in (-1,1)\ ;$

5. $\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}((n-1)!\,)^2}{(2n)!}\, x^{2n}\,, \quad x \in [-1,1]\ .$

398$_0$. 1. Na základe identity $(1+x)^p(1+x)^{-k-1} = (1+x)^{p-k-1}$ dokážte rovnosti

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{k+s}{s}\binom{p}{n-s} = \binom{p-k-1}{n}\,, \quad n = 0,1,\dots,p-k-1\ .$$

2. Z identity $(1-x)^{-m-1}(1-x)^{-q-1} = (1-x)^{-m-q-2}$ odvoďte rovnosti

$$\sum_{s=0}^{p-m} \binom{q+s}{s}\binom{p-s}{m} = \binom{p+q+1}{p-m}\,, \quad p \ge m\,,\ m,q = 0,1,2,\dots\ .$$

399. Dokážte, že funkcia $F:(-1,1)\to \mathbf{R}$ daná predpisom $F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1-x\cos t)\,dt$, je elementárna.

400. Nájdite súčty radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ;$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!}\ ;$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{2^n\, n!}\ ;$

4. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) + \dfrac{1}{2\cdot 4}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^3 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^5 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^7 + \cdots\ ;$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}\ ;$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}\ ;$

7. $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + \cdots\ .$

401. Nájdite súčty číselných radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(3n+1)}\ ;$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}\ ;$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}\ ;$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{1}{n}\ .$

402. Ak Maclaurinov rad funkcie f konverguje na množine $\mathbf{R}$ rovnomerne k funkcii f, tak f je polynóm. Dokážte!

403. Nech funkcia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je súčtom radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, nech $\{n!\,a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť. Potom funkcia f má v každom bode $a\in\mathbf{R}$ derivácie všetkých rádov a platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,, \quad x \in R\ .$$

Dokážte!

404. 1. Dokážte rovnosti:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\ ;$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi \arcsin a, \quad |a|<1\ .$

2. Vyjadrite v tvare radu hodnotu integrálu:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\,dx$;   b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1-x)\,dx$.

405. Dokážte rovnosť
$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{239} \tag{4.19}$$
a na jej základe vypočítajte číslo π s presnosťou 10^{-9} [42].

406. Na základe rovností
$$\begin{aligned}
\ln\frac{9}{10} &= -\ln 2 + 2\ln 3 - \ln 5\\
\ln\frac{24}{25} &= 3\ln 2 + \ln 3 - 2\ln 5\\
\ln\frac{81}{80} &= -4\ln 2 + 4\ln 3 - \ln 5
\end{aligned}$$
vypočítajte $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 6$, $\ln 10$ s presnosťou 10^{-6}.

407. S presnosťou 10^{-4} vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_2^4 e^{1/x}\,dx$;   2. $\displaystyle\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

[42] Po vyriešení tohto príkladu iste nejeden čitateľ uzná, že jednoduchšie je zapamätať si vetu

MÁM, Ó BOŽE Ó DOBRÝ PAMATOVAT SI TAKOVÝ ČÍSEL ŘAD!

VELKÝ SLOVUTNÝ ARCHIMEDES ,

ktorá udáva číslo π na 12 desatinných miest (stačí zrátať počet písmen jednotlivých slov). Pre záujemcov uvádzame ešte anglickú verziu:

HOW I WANT A DRINK, ALCOHOLIC OF COURSE,
AFTER THE HEAVY LECTURES INVOLVING QUANTUM MECHANICS!

udávajúcu číslo π na 14 desatinných miest.