Dodatok
Krivky a funkcie dané parametricky

Nech je v rovine daná pravouhlá súradnicová sústava s rovnakými jednotkami dĺžok na súradnicových osiach Ox a Oy. Neprázdna množina K bodov roviny sa nazýva *krivka daná parametricky* (v ďalšom stručne len krivka), ak existujú funkcie φ, ψ definované na intervale I také, že

$$K = \{(\varphi(t), \psi(t))\ ;\ t \in I\}$$ [1].

Rovnice

$$x = \varphi(t)\ , \quad y = \psi(t)\ , \qquad t \in I\ , \tag{1}$$

sa nazývajú *parametrické vyjadrenie krivky K*. Ak existuje funkcia f (funkcia g) tak, že

$$\begin{array}{rcl} K & = & \{(x, f(x))\ ;\ x \in D(f)\} \\ (\quad K & = & \{(g(y), y)\ ;\ y \in D(g)\} \quad)\ , \end{array}$$

hovoríme, že *rovnicami* (1) *je parametricky daná funkcia $y = f(x)$* (*funkcia $x = g(y)$*). (Postačujúcou podmienkou pre existenciu funkcie f (funkcie g) je injektívnosť funkcie φ (funkcie ψ), potom $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ ($g = \varphi \circ \psi^{-1}$).) [2]

Špeciálnym prípadom parametrického vyjadrenia krivky je rovnica krivky v polárnych súradniciach: Usporiadanú dvojicu (ϱ, φ), kde $\varrho \geq 0$, $\varphi \in \mathbf{R}$, nazývame *polárnymi súradnicami* bodu $X \equiv (x, y)$, ak

$$x = \varrho \cos \varphi\ , \quad y = \varrho \sin \varphi$$ [3].

Ak f je nezáporná funkcia definovaná na intervale I a L je množina všetkých bodov roviny s polárnymi súradnicami $(f(\varphi), \varphi)$, $\varphi \in I$, nazýva sa rovnica

$$\varrho = f(\varphi)\ , \quad \varphi \in I\ ,$$

rovnica krivky L v polárnych súradniciach[4]. (Zrejme jedno z možných parametrických vyjadrení krivky L má tvar

$$x = f(\varphi) \cos \varphi\ , \quad y = f(\varphi) \sin \varphi\ , \qquad \varphi \in I\ . \quad)$$

---

[1] spravidla sa požaduje aj spojitosť funkcií φ, ψ

[2] definíciu funkcie danej parametricky možno vysloviť aj vo všeobecnejšej podobe, ak podmienku „$D(\varphi) = D(\psi) = I$“ nahradíme podmienkou „$D(\varphi) = D(\psi)$“

[3] ϱ je teda vzdialenosť bodov X a $O \equiv (0, 0)$, φ je veľkosť (v radiánoch) niektorého z uhlov, o ktorý treba otočiť polpriamku OJ ($J \equiv (1, 0)$) okolo bodu O, aby splynula s polpriamkou OX; pritom $\varphi \geq 0$ ($\varphi \leq 0$), ak sa toto otočenie deje proti smeru (v smere) hodinových ručičiek

[4] niekedy sa polárne súradnice definujú všeobecnejšie: namiesto $\varrho \geq 0$ sa uvažuje $\varrho \in \mathbf{R}$, v takom prípade netreba pri zavádzaní rovnice krivky v polárnych súradniciach požadovať nezápornosť funkcie f

V ďalšom budeme názov krivka používať aj na označenie množín tvaru $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$ $(n \in \mathbf{N})$, kde $K_1, \dots, K_n$ sú krivky v zmysle horeuvedenej definície. Pokiaľ na označenie premenných použijeme písmená ϱ, φ, budeme tým vždy myslieť polárne súradnice.

408. Popíšte nasledujúce krivky pomocou polárnych súradníc:

1. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$;
2. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2)$;
3. $x^4+y^4 = a^2xy$;
4. $a(x^3+y^3) = x^2+y^2$.

409. Nájdite parametrické vyjadrenie nasledujúcich kriviek:

1. $(x+y)^2 = a(x-y)$ (položte $y = tx$) ;
2. $x^4+y^4 = ax^2y$;
3. $4y^2 = 4x^2y + x^5$ (položte $y = tx^2$) ;
4. $y^5+x^4 = xy^2$.

410. Rovnice nasledujúcich kriviek prepíšte na tvar $F(x,y) = 0$, na základe toho zistite, o aké krivky ide:

1. $x = a + b\cos t$, $y = c + d\sin t$ $(b > 0,\ d > 0)$, $t \in \mathbf{R}$ [5] ;
2. $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbf{R}$;
3. $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \operatorname{arcctg} t$, $t \in \mathbf{R}$;
4. $\varrho = \dfrac{d}{\sin(\varphi-\varphi_0)}$ [6] $(d > 0)$;
5. $\varrho = \dfrac{a}{\cos^2(\varphi/2)}$ $(a > 0)$;
6. $\varrho = \dfrac{a}{\sin^2(\varphi/2)}$ $(a > 0)$.

411. Nájdite parametrické vyjadrenie krivky K, ktorá je geometrickým miestom všetkých bodov M popísaných nasledujúcou konštrukciou:

1. Je dané číslo $l > 0$. Zvoľme body $A \in Oy$, $B \in Ox$ tak, aby $|AB| = l$. M je päta kolmice spustenej z vrcholu C obdĺžnika $OACB$ na úsečku AB.

2. Nech k je kružnica s polomerom r a stredom $(r, 0)$. Z bodu $O \equiv (0,0)$ veďme tetivu OB kružnice k, z bodu B spusťme kolmicu na priemer OA, jej pätu označme C. M je päta kolmice spustenej z bodu C na tetivu OB.

3. Nech $a > b > 0$ sú dané čísla. Bodom $A \equiv (0, -a)$ veďme priamku p, ktorá nie je rovnobežná s osou Ox, jej priesečník s touto osou označme B. M je bod ležiaci na priamke p vo vzdialenosti b od bodu B.

Riešenie. 1. Označme K_i $(i = 1,2,3,4)$ tú časť krivky K, ktorá leží v i–tom kvadrante. Pretože — ako vyplýva zo zadania — krivka K je súmerná podľa osí Ox a Oy, stačí nájsť parametrické vyjadrenie krivky K_1, pomocou neho už ľahko nájdeme parametrické vyjadrenia kriviek K_2, K_3, K_4.

Nech teda úsečka AB leží v prvom kvadrante; za parameter zvoľme veľkosť φ uhla OBA, potom (pozri obr. 4)

– z pravouhlého $\triangle$-a AOB dostávame

$$|OA| = |BC| = |AB|\sin\varphi = l\sin\varphi\ , \qquad |OB| = |AB|\cos\varphi = l\cos\varphi\ ;$$

– z $\triangle$-a BCM:

$$|BM| = |BC|\sin\varphi = l\sin^2\varphi\ ;$$

– z $\triangle$-a BDM:

$$|DM| = |BM|\sin\varphi = l\sin^3\varphi\ , \qquad |BD| = |BM|\cos\varphi = l\sin^2\varphi\cos\varphi\ .$$

Ak $M \equiv (x,y)$, tak

$$x = |OB| - |BD| = l\cos\varphi\cdot(1-\sin^2\varphi) = l\cos^3\varphi\ , \qquad y = |MD| = l\sin^3\varphi\ ,$$

[5] vzhľadom na periodičnosť funkcií sin, cos by stačilo uvažovať $t \in [0, 2\pi]$

[6] pokiaľ v rovnici $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in M$, nie je množina M určená, kladieme $M := \{\varphi \in D(f)\ ;\ f(\varphi) \geq 0\}$; ak je naviac funkcia f periodická a jednou z jej periód je číslo $2n\pi$ $(n \in \mathbf{N})$, stačí položiť $M := [a, a+2n\pi] \cap \{\varphi \in D(f)\ ;\ f(\varphi) \geq 0\}$ $(a \in D(f))$

obr. 4

teda parametrické vyjadrenie krivky K_1 má tvar

$$x = l\cos^3\varphi\ , \quad y = l\sin^3\varphi\ , \qquad \varphi \in (0, \pi/2)\ .$$

Krivky K_1 a K_2 sú súmerné podľa osi Oy, preto

$$\begin{aligned} K_2 &= \{(-x,y)\ ;\ (x,y)\in K_1\} = \{(-l\cos^3\varphi, l\sin^3\varphi)\ ;\ \varphi\in(0,\pi/2)\} = \\ &= \{(l\cos^3(\pi-\varphi), l\sin^3(\pi-\varphi))\ ;\ \varphi\in(0,\pi/2)\} = \\ &= \{(l\cos^3\varphi, l\sin^3\varphi)\ ;\ \varphi\in(\pi/2,\pi)\}\ , \end{aligned}$$

teda jedno z parametrických vyjadrení krivky K_2 je

$$x = l\cos^3\varphi\ , \quad y = l\sin^3\varphi\ , \qquad \varphi \in (\pi/2, \pi)\ .$$

Podobne možno nájsť parametrické vyjadrenia kriviek K_3 a K_4 (K_3, resp. K_4 je súmerná podľa osi Ox s K_2, resp. K_1) v tvare

$$x = l\cos^3\varphi\ , \quad y = l\sin^3\varphi\ , \qquad \varphi \in (\pi, 3\pi/2)\ ,$$

a

$$x = l\cos^3\varphi\ , \quad y = l\sin^3\varphi\ , \qquad \varphi \in (3\pi/2, 2\pi)\ .$$

Krivka K je teda určená rovnicami

$$x = l\cos^3\varphi\ , \quad y = l\sin^3\varphi\ , \qquad \varphi \in (0, 2\pi)\setminus\{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}\ .$$

Poznámka. Krivka daná parametricky rovnicami

$$x = l\cos^3\varphi\ , \quad y = l\sin^{\varphi}\ , \qquad \varphi \in [0, 2\pi]\ ^7,$$

sa nazýva *asteroida*; túto krivku možno zadať tiež rovnicou

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}\ .$$

(K inému geometrickému popisu asteroidy pozri poznámku za riešením pr. 412.2.)

412. 1. *Cykloidou* sa nazýva dráha, ktorú opisuje bod kružnice kotúľajúcej sa po priamke. Nájdite parametrické vyjadrenie cykloidy (za parameter zvoľte uhol otočenia polomeru spájajúceho stred kotúľajúcej sa kružnice s bodom, ktorého dráhu popisujeme).

---

[7]zrejme tú istú krivku dostaneme, ak interval $[0, 2\pi]$ nahradíme intervalom $(-\infty, \infty)$ alebo intervalom $[a, a+2\pi)$

2. Kružnica k s polomerom r sa zvnútra kotúľa po kružnici K s polomerom R, $r < R$. Nájdite parametrické vyjadrenie krivky, ktorú pri tomto pohybe opisuje bod kotúľajúcej sa kružnice (táto krivka sa nazýva *hypocykloida*).

3. Na kružnicu s polomerom R je namotaná niť nulovej hrúbky. Túto niť odmotávame z kružnice tak, aby bola niť stále napnutá (tj. aby bola vždy dotyčnicou ku kružnici). Nájdite parametrické vyjadrenie krivky, ktorú opisuje koniec rozmotávanej nite (táto krivka sa nazýva *evolventa kruhu*).

Riešenie. 2. Zvoľme súradnicovú sústavu tak, aby jej počiatkom O bol stred kružnice K a aby v jednom z okamihov, keď bod $M \in k$ (ktorého dráhu popisujeme) je bodom dotyku obidvoch kružníc, platilo $M \equiv (R, 0)$; predpokladajme, že kružnica k sa kotúľa po kružnici K proti smeru hodinových ručičiek. Za parameter φ zvoľme veľkosť uhla, ktorý zviera spojnica stredov obidvoch kružníc s kladným smerom osi Ox. Nech S je stred kružnice k, D je bod dotyku kružníc k a K, nech ϑ je uhol, ktorý zviera úsečka SD s úsečkou SM (pozri obr. 5).

obr. 5

Pretože kružnica k sa kotúľa po kružnici K, sú dĺžky oblúkov AD a MD rovnaké:

$$R\varphi = r\vartheta ,$$

odtiaľ

$$\vartheta = \frac{R}{r}\varphi .$$

Vzdialenosť bodu $S \equiv (p, q)$ od počiatku O je $R - r$ a orientovaný uhol s počiatočným ramenom OA a koncovým ramenom OS má veľkosť φ, preto

$$p = (R - r)\cos\varphi , \quad q = (R - r)\sin\varphi .$$

Vzdialenosť bodov M a S je r a veľkosť orientovaného uhla s počiatočným ramenom SB a koncovým ramenom SM je $-(\vartheta - \varphi)$, preto pre vektor $\vec{u} \equiv (u_1, u_2) = M - S$ je

$$u_1 = r\cos(-(\vartheta - \varphi)) , \quad u_2 = r\sin(-(\vartheta - \varphi)) .$$

Pretože pre bod $M \equiv (x, y)$ platí $M = S + \vec{u}$, dostávame

$$\begin{aligned} x &= p + u_1 = (R - r)\cos\varphi + r\cos(\vartheta - \varphi) = (R - r)\cos\varphi + r\cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\varphi\right) , \\ y &= q + u_2 = (R - r)\sin\varphi - r\sin(\vartheta - \varphi) = (R - r)\sin\varphi - r\sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\varphi\right) . \end{aligned}$$

Teda parametrické vyjadrenie hypocykloidy má tvar

$$x = (R-r)\cos\varphi + r\cos\left(\left(\frac{R}{r}-1\right)\varphi\right) , \qquad y = (R-r)\sin\varphi - r\sin\left(\left(\frac{R}{r}-1\right)\varphi\right) , \qquad \varphi \in \mathbf{R} .$$

Poznámka. Špeciálne pre $R/r = 4$ dostaneme rovnice asteroidy:

$$\begin{aligned} x &= 3r\cos\varphi + r\cos 3\varphi = 4r\cos^3\varphi = R\cos^3\varphi , \\ y &= 3r\sin\varphi - r\sin 3\varphi = 4r\sin^3\varphi = R\sin^3\varphi . \end{aligned}$$

413. 1. Nech sú dané funkcie φ, ψ definované na intervale I. Uveďte nutnú a postačujúcu podmienku, aby rovnicami

$$x = \varphi(t) , \quad y = \psi(t) , \qquad t \in I ,$$

bola parametricky daná funkcia $y = f(x)$.

2. Nech sú dané funkcie $\varphi: I \to \mathbf{R}$, $\psi: I \to \mathbf{R}$, $\chi: J \to I$, kde I a J sú intervaly. Za akých podmienok je rovnicami

$$x = \varphi(t) , \quad y = \psi(t) , \qquad t \in I ,$$

resp.

$$x = \varphi(\chi(t)) , \quad y = \psi(\chi(t)) , \qquad t \in J ,$$

daná parametricky tá istá funkcia $y = f(x)$?

414. Nech funkcia $y = f(x)$ je daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t) , \quad y = \psi(t) , \qquad t \in I ,$$

kde I je interval.

1. Ak $I = (\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$, φ je rastúca (klesajúca) a existujú $\lim_{t\to\beta-}\varphi(t) =: a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{t\to\beta-}\psi(t) =: b \in \mathbf{R}^*$, tak $\lim_{x\to a-} f(x) = b$ ($\lim_{x\to a+} f(x) = b$). Dokážte!
2. Ak φ je rýdzomonotónna a ψ spojitá funkcia, tak aj f je spojitá funkcia. Dokážte!
3. Ak φ a ψ sú spojité funkcie, tak aj f je spojitá funkcia. Dokážte!
4. Vyplýva zo spojitosti funkcie f spojitosť funkcií φ a ψ?

Veta 1. *Nech funkcie φ a ψ definované na intervale I sú diferencovateľné v bode $a \in I$, nech φ je rýdzomonotónna funkcia spojitá na niektorej z množín $I \cap O(a)$, kde $O(a)$ je okolie bodu a, a nech $\varphi'(a) \neq 0$. Potom funkcia $y = f(x)$ daná parametricky rovnicami* (1) *má v bode $\varphi(a)$ deriváciu*[8] *a*

$$f'(\varphi(a)) = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} . \tag{2}$$

Špeciálne, ak funkcie φ, ψ sú diferencovateľné na intervale I a $\varphi'(t) > 0$, $t \in I$ ($\varphi'(t) < 0$, $t \in I$), tak deriváciou funkcie $y = f(x)$ danej parametricky rovnicami (1) *je funkcia $y = f'(x)$ daná parametricky rovnicami*

$$x = \varphi(t) , \quad y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} , \qquad t \in I .$$

Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (1) (I je interval). Ak funkcie φ, ψ sú diferencovateľné v bode $a \in I$ a $(\varphi'(a), \psi'(a)) \neq (0,0)$, tak priamka p daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(a) + \varphi'(a)\,t , \quad y = \psi(a) + \psi'(a)\,t , \qquad t \in \mathbf{R} ,$$

sa nazýva *dotyčnica ku krivke K v bode $M \equiv (\varphi(a), \psi(a))$*.

[8] ak $D(f) \cap (-\infty, \varphi(a)) = \emptyset$ alebo $D(f) \cap (\varphi(a), \infty) = \emptyset$, ide o príslušnú jednostrannú deriváciu v bode $\varphi(a)$

Poznámky. 1. Ak bod M krivky K zodpovedá niekoľkým rôznym hodnotám parametra t, môže mať krivka K v bode M viacero dotyčníc.

2. Ak $\varphi'(a) \neq 0$, možno rovnicu priamky p zapísať v tvare

$$y = \psi(a) + \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}(x - \varphi(a)) .$$

V prípade, že rovnicami

$$x = \varphi(t) , \quad y = \psi(t) , \qquad t \in J ,$$

kde $J \subset I$ je interval, je daná parametricky funkcia $y = f(x)$, definovaná v niektorom okolí bodu $\varphi(a)$, dostávame tak už známu rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $(\varphi(a), \psi(a))$: $y = \psi(a) + f'(\varphi(a))(x - -\varphi(a))$. (Podobne možno uvažovať v prípade $\psi'(a) \neq 0$.)

415. Nájdite deriváciu funkcie $y = f(x)$ danej parametricky rovnicami:

1. $x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t$, $\quad y = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t$, $\quad t \in (1, \infty)$;
2. $x = \operatorname{ctg} 2t$, $\quad y = \dfrac{2\cos 2t - 1}{2\cos t}$, $\quad t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

416. Ukážte, že cykloida $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$, má dotyčnicu v každom bode neležiacom na osi Ox, pričom dotyčnica (normála) v danom bode prechádza najvyšším (najnižším) bodom príslušnej polohy vytvárajúcej kružnice cykloidy (popis cykloidy pozri v pr. 412.1).

417. 1. Nech I je interval, $f : I \to \mathbf{R}$ je kladná diferencovateľná funkcia. Potom pre uhol ω, ktorý zviera dotyčnica ku grafu krivky $\varrho = f(\varphi)$ so spojnicou dotykového bodu a bodu $(0, 0)$, platí

$$\cos\omega = \frac{f'(\varphi)}{\sqrt{f'^2(\varphi) + f^2(\varphi)}} .$$

Dokážte!

2. Nájdite uhol, pod ktorým sa pretínajú krivky $\varrho = \varphi$ a $\varrho = \dfrac{1}{\varphi}$.

418. Nájdite druhú deriváciu funkcie $y = f(x)$ danej parametricky rovnicami:

1. $x = 2t - t^2$, $\quad y = 3t - t^3$, $\quad t \in (1, \infty)$;
2. $x = e^t \sin t$, $\quad y = e^t \cos t$, $\quad t \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$;
3. $x = \dfrac{t^2 - 2t - 5}{t^2 + 10t + 25}$, $\quad y = \dfrac{t^2 - 4t + 5}{t^2 + 4t - 5}$, $\quad t \in (1, \infty)$;
4. $x = f'(t)$, $\quad y = tf'(t) - f(t)$, $\quad t \in I$ (pričom predpokladáme, že funkcia f je dvakrát diferencovateľná na intervale I a $f''(x) \neq 0$, $t \in I$).

Riešenie. 1. Derivácia f' funkcie f je podľa vety 1 daná parametricky rovnicami

$$x = 2t - t^2 - t^2 \ \ (=: \Phi(t)) , \quad y = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1 + t) \ \ (=: \Psi(t)) , \qquad t \in (1, \infty) .$$

Deriváciou f'' funkcie f' bude preto opäť podľa vety 1 funkcia daná parametricky rovnicami

$$x = \Phi(t) , \quad y = \frac{\Psi'(t)}{\Phi'(t)} , \qquad t \in (1, \infty) ,$$

tj.

$$x = 2t - t^2 , \quad y = \frac{3}{4(1 - t)} , \qquad t \in (1, \infty) .$$

419. Ukážte, že nasledujúcimi rovnicami parametricky dané funkcie $y=f(x)$ sú diferencovateľné v bode 0, ale ich deriváciu v tomto bode nemožno nájsť použitím vety 1:

1. $x=2t+|t|\,,\quad y=5t^2+4t|t|\,,\quad t\in\mathbf{R}\,;$
2. $x=t-\dfrac{t}{1+t^2}\,,\quad y=t-\operatorname{arctg} t\,,\quad t\in\mathbf{R}\,;$
3. $x=t+\sqrt[5]{t}\,,\quad y=2t+3\sqrt[5]{t}\,,\quad t\in\mathbf{R}\,.$

420. 1. Nech funkcia $y=f(x)$ je daná parametricky rovnicami (1) (I je interval). Nech funkcie φ, ψ sú diferencovateľné v bode $a\in I$, pričom $\varphi'(a)\neq 0$ a funkcia φ je spojitá na niektorom okolí $O(a)$ bodu a. Potom funkcia f je diferencovateľná v bode $\varphi(a)$ a platí (2). Dokážte! [9]

2. Uveďte príklad takých funkcií $\varphi,\psi:(-1,1)\to\mathbf{R}$ diferencovateľných v bode 0, že $\varphi'(0)\neq 0$ a rovnicami

$$x=\varphi(t)\,,\quad y=\psi(t)\,,\qquad t\in(-1,1)\,,$$

je parametricky daná funkcia $y=f(x)$, ktorá nie je diferencovateľná v bode $\varphi(0)$!

Nech množina D je zjednotením konečného počtu intervalov, nech krivka K je daná parametricky rovnicami

$$x=\varphi(t)\,,\quad y=\psi(t)\,,\qquad t\in D\,.$$

Priamka $x=a$ $\;(y=a)$ sa nazýva *vertikálna asymptota krivky K* (*horizontálna asymptota krivky K pre $x\to\infty$*), ak pre niektorý hromadný bod $b\in\mathbf{R}^*$ množiny D platí

$$\lim_{t\to b+}\varphi(t)=a\;,\;\lim_{t\to b+}|\psi(t)|=\infty\qquad\text{alebo}\qquad \lim_{t\to b-}\varphi(t)=a\;,\;\lim_{t\to b-}|\psi(t)|=\infty$$

$$\left(\quad\lim_{t\to b+}\varphi(t)=\infty\,,\;\lim_{t\to b+}\psi(t)=a\qquad\text{alebo}\qquad \lim_{t\to b-}\varphi(t)=\infty\,,\;\lim_{t\to b-}\psi(t)=a\qquad\right).$$

Priamka $y=kx+q\,,\ k\neq 0\,,$ sa nazýva *asymptota so smernicou krivky K pre $x\to\infty$*, ak pre niektorý hromadný bod $b\in\mathbf{R}^*$ množiny D platí

$$\lim_{t\to b+}\varphi(t)=\lim_{t\to b+}|\psi(t)|=\infty\,,\qquad \lim_{t\to b+}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}=k\,,\qquad \lim_{t\to b+}(\psi(t)-k\varphi(t))=q\,,$$

alebo

$$\lim_{t\to b-}\varphi(t)=\lim_{t\to b-}|\psi(t)|=\infty\,,\qquad \lim_{t\to b-}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}=k\,,\qquad \lim_{t\to b-}(\psi(t)-k\varphi(t))=q\,.$$

Analogicky sa definuje *horizontálna asymptota krivky K pre $x\to-\infty$* a *asymptota so smernicou krivky K pre $x\to-\infty$*.

Špeciálne, ak krivka K je daná rovnicou v polárnych súradniciach

$$\varrho=f(\varphi)\,,\quad \varphi\in D\,,$$

tak priamka

$$\varrho\sin(\varphi-\varphi_0)=d$$ [10],

je asymptotou krivky K práve vtedy, keď

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0+}f(\varphi)=\infty\,,\qquad \lim_{\varphi\to\varphi_0+}f(\varphi)\sin(\varphi-\varphi_0)=d\,,$$

alebo

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0-}f(\varphi)=\infty\,,\qquad \lim_{\varphi\to\varphi_0-}f(\varphi)\sin(\varphi-\varphi_0)=d\,,$$

kde $\varphi_0\in\mathbf{R}$ je hromadný bod množiny D.

---

[9] na rozdiel od vety 1 v tomto tvrdení nepredpokladáme rýdzu monotónnosť funkcie φ, preto jeho dôkaz nemožno vykonať len na základe viet o derivácii zloženej a inverznej funkcie (z ktorých vyplýva veta 1)

[10] jej rovnica v pravouhlých súradniciach je $y\cos\varphi_0-x\sin\varphi_0=d$, teda jej smerový vektor $(\cos\varphi_0,\sin\varphi_0)$ zviera s kladným smerom osi Ox uhol φ_0

421. Načrtnite nasledujúce krivky:

1. $\varrho = \varphi$ (*Archimedova špirála*) ;
2. $\varrho = \dfrac{1}{\varphi}$ (*hyperbolická špirála*) ;
3. $\varrho = \sin 5\varphi$;
4. $\varrho = \sqrt{2}\,c\sqrt{\cos 2\varphi}$ (*Bernoulliho lemniskáta*[11]) ;
5. $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2\,, \quad a>0$;
6. $x(x^2-y^2) = a(x^2+y^2)\,, \quad a>0$.

Riešenie. 3. Keďže funkcia $\sin 5\varphi$ nadobúda kladné aj záporné hodnoty a jednou z jej periód je číslo 2π, chápeme uvedenú rovnicu krivky L v polárnych súradniciach nasledovne (pozri poznámku [6] k pr. 410.4):

$$\varrho = \sin 5\varphi\,, \qquad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{5}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{5}, \pi\right] \cup \left[\frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right] .$$

Ak $f:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ je spojitá nezáporná funkcia, môžeme si krivku K, ktorej rovnica v polárnych súradniciach je $\varrho = f(\varphi)\,,\ \varphi\in[\alpha,\beta]\,,$ predstaviť nasledovne: Na polpriamke $p:\ \varphi=\alpha$ (teda p je množina všetkých bodov s polárnymi súradnicami $(\varrho,\alpha)\,,\ \varrho\ge 0\,,$ tj polpriamka vychádzajúca z počiatku a zvierajúca s kladným smerom osi Ox uhol α) vyznačme bod M s polárnymi súradnicami $(f(\alpha),\alpha)$. Otáčajme teraz polpriamkou p okolo bodu $(0,0)$ proti smeru hodinových ručičiek, až kým sa neprekryje s polpriamkou $\varphi=\beta$; na otáčajúcej sa polpriamke p pritom pohybujme bodom M tak, aby v okamžiku, keď sa p kryje s polpriamkou $\varphi=\gamma$ (kde $\gamma\in[\alpha,\beta]$, tj. keď zviera s kladným smerom osi Ox uhol γ), bola jeho vzdialenosť od bodu $(0,0)$ rovná číslu $f(\gamma)$ [12] (teda ak funkcia f rastie (klesá), tak bod M sa vzďaľuje od (približuje k) bodu $(0,0)$); potom dráhou bodu M je krivka K.

Na základe toho môžeme teraz — keďže poznáme graf funkcie $y=\sin 5x$ (a vieme teda, kde táto funkcia rastie a kde klesá) — načrtnúť krivky K_i $(i=0,1,2,3,4)$ dané rovnicami

$$\varrho = \sin 5\varphi\,, \qquad \varphi \in \left[\frac{2i\pi}{5}, \frac{(2i+1)\pi}{5}\right]\,, \qquad i=0,1,2,3,4\,,$$

ktorých zjednotením je hľadaná krivka L (pozri obr. 6) [13]; pritom — pretože číslo $2\pi/5$ je periódou funkcie $y=\sin 5x$ — krivka K_i je obrazom krivky K_{i-1} pri otočení o uhol $2\pi/5$ okolo bodu $(0,0)$ proti smeru hodinových ručičiek $(i=1,2,3,4)$; súčasne zo súmernosti grafu funkcie $y=\sin 5x\,,\ x\in [2i\pi/5,(2i+1)\pi/5]\,,$ podľa priamky $x=(4i+1)\pi/10$ vyplýva súmernosť krivky K_i podľa priamky obsahujúcej polpriamku $\varphi=(4+1)\pi/10$ $(i=0,1,2,3,4)$.

422. Zostrojte nasledujúce krivky (ak má číslo úlohy exponent [1], stačí použiť len prvé derivácie):

1. $x=-5t^2+2t^5\,,\quad y=-3t^2+2t^3$;
2. $x=2t-t^2\,,\quad y=2t^2-t^3$;
3. $x^4+2y^3=4x^2y$ (položte $y=tx$) ;

4[1]. $4y^2=4x^2y+x^5$ (položte $y=tx^2$) ;

5. $x=\dfrac{(t+2)^2}{t+1}\,,\quad y=\dfrac{(t-2)^2}{t-1}$;
6. $x^3-2x^2y-y^2=0$;

7[1]. $y^5+x^4=xy^2$ (položte $x=ty^3$) ;

8. $x^5+y^5=xy^2$;
9. $x^3+y^3=3axy$ (*Descartesov list*) ;
10. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\quad a>0$ (*asteroida*) ;
11. $x=a(t-\sin t)\,,\quad y=a(1-\cos t)\,,\quad a>0$ (*cykloida*) ;
12. $\varrho=a(1+\cos\varphi)\,,\quad a>0$ (*kardioida*) ;
13. $\varrho=1+2\cos\varphi$ (*Pascalova závitnica*)[14];
14. $x=t+e^{-t}\,,\quad y=2t+e^{-2t}$.

---

[11] Bernoulliho lemniskáta je geometrické miesto bodov, ktorých súčin vzdialeností od bodov $(-c,0)$ a $(c,0)$ je konštantný a rovná sa c^2, možno ju popísať rovnicou $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=0$

[12] ak v definícii polárnych súradníc nahradíme podmienku „$\varrho\ge 0$" podmienkou „$\varrho\in\mathbf{R}$" (pozri poznámku [4] k definícii polárnych súradníc; v takom prípade stráca poznámka [6] k pr. 410.4 platnosť) a $f:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, tak bod M leží v prípade, že $f(\gamma)\ge 0$, na polpriamke $\varphi=\gamma$ vo vzdialenosti $f(\gamma)$ od bodu $(0,0)$, a leží na opačnej polpriamke $\varphi=\pi+\gamma$ vo vzdialenosti $|f(\gamma)|$ od bodu $(0,0)$ pre $f(\gamma)<0$

[13] zhodou okolností (čitateľovi odporúčame rozmyslieť si, v čom táto zhoda okolností spočíva) je v tomto prípade tá istá krivka popísaná aj rovnicou $\varrho=\sin 5\varphi$, kde ϱ a φ chápeme ako „všeobecnejšie polárne súradnice" v zmysle poznámky [4]

obr. 6. $\varrho = \sin 5\varphi$

Riešenie. 5. Ak má parametrické vyjadrenie krivky tvar

$$x = \varphi(t)\ , \quad y = \psi(t)\ ,$$

pričom nie je určená množina, na ktorej uvažujeme funkcie φ a ψ, kladieme $M := D(\varphi) \cap D(\psi)$. V našom prípade

$$\varphi(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}\ , \quad \psi(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1}\ ,$$

teda $D(\varphi) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $D(\psi) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $M = D(\varphi) \cap D(\psi) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

Pri zobrazovaní krivky K s parametrickým vyjadrením

$$x = \varphi(t)\ , \quad y = \psi(t)\ , \qquad t \in M\ ,$$

kde množina M je zjednotením konečného počtu intervalov a funkcie φ, ψ sú spojité na M, postupujeme spravidla nasledovne:

- riešením rovníc $\varphi(t) = 0$, $t \in M$, resp. $\psi(t) = 0$, $t \in M$, nájdeme priesečníky krivky K s osou Oy, resp. Ox;
- množinu M rozdelíme na intervaly $J_1, \ldots, J_n$ tak, aby na každom z nich boli funkcie φ a ψ rýdzomonotónne (ak sú funkcie φ, ψ diferencovateľné, stačí teda vyšetriť ich rast a klesanie pomocou znamienka funkcií φ', ψ'); rovnicami

  $$x = \varphi(t)\ , \quad y = \psi(t)\ , \qquad t \in J_i\ ,$$

  je tak parametricky daná rýdzomonotónna spojitá funkcia $y = f_i(x)$ $(i = 1, \ldots n)$ [15];
- nájdeme množiny $\varphi(J_i)$, $\psi(J_i)$, $i = 1, \ldots, n$ (prvá z nich je zrejme definičným oborom a druhá oborom hodnôt funkcie f_i), na to stačí — pretože funkcie φ, ψ sú na J_i rýdzomonotónne a spojité — nájsť funkčné hodnoty, resp. príslušné jednostranné limity funkcií φ, ψ v krajných bodoch intervalu J_i; v prípade, že niektorá z týchto limít je nevlastná, vyšetríme existenciu asymptoty krivky K;
- na základe znamienka druhej derivácie funkcie f_i (samozrejme pokiaľ táto derivácia existuje) vyšetríme konvexnosť a konkávnosť funkcie f_i;
- načrtneme grafy jednotlivých funkcí f_i, $i = 1, \ldots, n$, ktorých zjednotením je krivka K (pokiaľ pritom nie je zrejmé, či sa grafy dvoch funkcií f_i a f_j pretnú alebo nepretnú, vyšetríme, či existujú $u \neq v$, $u \in J_i$, $v \in J_j$ také, že $\varphi(u) = \varphi(v)$, $\psi(u) = \psi(v)$; ak áno, pretínajú sa grafy funkcií f_i a f_j v bode $(\varphi(u)\,\psi(u))$).

---

[14] vo všeobecnosti je Pascalova závitnica daná rovnicou $\varrho = a\cos\varphi + l$ $(a > 0\ , \ l > 0)$; špeciálne pre $a = l$ dostávame kardioidu

[15] a tiež rýdzomonotónna spojitá funkcia $x = g_i(y)$ inverzná k funkcii f_i

V našom prípade, keď parametrické vyjadrenie krivky K má tvar

$$x = \varphi(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}\,, \quad y = \psi(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1}\,, \qquad t \in M = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)\,,$$

je $\varphi(t) = 0$ pre $t = -2$, teda priesečníkom krivky K s osou Oy je bod $(\varphi(-2), \psi(-2)) = (0, -16/3)$, a $\psi(t) = 0$ pre $t = 2$, teda priesečníkom s osou Ox je bod $(16/3, 0)$. Ďalej

$$\varphi'(t) = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\,,\ t \in M\,, \qquad \psi'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}\,,\ t \in M\,,$$

a pretože $\varphi'(t) = 0$ pre $t = 0$, $t = -2$, $\psi'(t) = 0$ pre $t = 0, t = 2$, dostávame

$$J_1 = (-\infty,-2]\,, \quad J_2 = [-2,-1)\,, \quad J_3 = (-1,0]\,, \quad J_4 = [0,1)\,, \quad J_5 = (1,2]\,, \quad J_6 = [2,\infty)\,.$$

Krivka K je teda zjednotením grafov šiestich funkcií $y = f_1(x)$, $\dots$, $y = f_6(x)$, daných parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad t \in J_i\,, \qquad i = 1,\dots,6\,.$$

V nasledujúcej tabuľke sú zaznačené limity funkcií $\varphi|J_i$, $\psi|J_i$ v krajných bodoch intervalu J_i ($i = 1,\dots,6$):

	$(-\infty,-2]$		$[-2,-1)$		$(-1,0]$		$[0,1)$		$(1,2]$		$[2,\infty)$	
φ	$-\infty$	0	0	$-\infty$	∞	4	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{16}{3}$	∞
ψ	$-\infty$	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	-4	-4	$-\infty$	∞	0	0	∞

Odtiaľ vidíme, že definičným oborom funkcií f_1, $\dots$, f_6 sú postupne intervaly $(-\infty,0]$, $(-\infty,0]$, $[4,\infty)$, $[4,9/2)$, $(9/2,16/3]$, $[16/3,\infty)$. Ďalej, pretože $\lim_{t\to-1-}\varphi(t) = -\infty$, $\lim_{t\to-1-}\psi(t) = -9/2$, je priamka $y = -9/2$ horizontálnou asymptotou krivky K pre $x \to -\infty$, a pretože $\lim_{t\to-1+}\varphi(t) = \infty$, $\lim_{t\to-1+}\psi(t) = -9/2$, je priamka $y = -9/2$ aj horizontálnou asymptotou krivky K pre $x \to \infty$. Z rovností $\lim_{t\to1-}\varphi(t) = 9/2$, $\lim_{t\to1-}\psi(t) = -\infty$ a $\lim_{t\to1+}\varphi(t) = 9/2$, $\lim_{t\to1+}\psi(t) = \infty$ vyplýva, že priamka $x = 9/2$ je vertikálna asymptota krivky K.

Keďže $\lim_{t\to-\infty}\varphi(t) = -\infty$, $\lim_{t\to-\infty}\psi(t) = -\infty$ a $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty}\psi(t) = \infty$, môže mať krivka K aj asymptoty so smernicou; vyšetrime ich existenciu : pretože

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = \lim_{t\to-\infty}\frac{(t-2)^2(t+1)}{(t+2)^2(t-1)} = 1 \qquad (=: k)\,,$$

$$\lim_{t\to-\infty}(\psi(t) - k\varphi(t)) = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{(t-2)^2}{t-1} - \frac{(t+2)^2}{t+1}\right) = -6\,,$$

je priamka $y = x - 6$ asymptota so smernicou krivky K pre $x \to -\infty$, podobne z rovností

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = 1 \quad (:= k)\,, \qquad \lim_{t\to\infty}(\psi(t) - k\varphi(t)) = -6\,,$$

vyplýva, že priamka $y = x - 6$ je aj asymptotou so smernicou krivky K pre $x \to \infty$.

Pretože pre $t \in (-\infty,-2)$ je $\varphi'(t) < 0$, má podľa vety 1 funkcia f_1 deriváciu v každom bode množiny $\varphi((-\infty,-2)) = (-\infty,0)$, tj. v každom vnútornom bode svojho definičného oboru; rovnako z vety 1 vyplýva existencia derivácie funkcií f_2, f_3, f_4 v každom vnútornom bode ich definičného oboru a existencia derivácie funkcií f_5, f_6 v každom bode ich definičného oboru [16], tieto derivácie sú dané parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}\,, \qquad y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{(t-2)(t+1)^2}{(t+2)(t-1)^2} \quad (:= \Psi(t))\,, \tag{3}$$

kde parameter t postupne prebieha intervaly $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2]$, $[2,\infty)$. (Otázkou existencie $(f_1)'_-(\varphi(-2))$, $(f_2)'_-(\varphi(-2))$, $(f_3)'_+(\varphi(0))$, $(f_4)'_+(\varphi(0))$, ktorú nemožno zodpovedať len na základe vety 1, sa budeme zaoberať neskôr.)

[16] v prípade funkcií f_5, f_6 a bodu $16/3$ ide o jednostranné derivácie

Ak použijeme vetu 1 na nájdenie derivácie funkcií daných parametricky rovnicami (3), vidíme, že funkcie f_1, f_2, f_3, f_4, resp. f_5, f_6 majú v každom vnútornom bode svojho definičného oboru, resp. v každom bode svojho definičného oboru druhú deriváciu, danú parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}\,, \qquad y = \frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{12(t+1)^3}{t(t+2)^3(t-1)^3}\,,$$

kde parameter t prebieha postupne intervaly $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2]$, $[2,\infty)$ [17]. Zo znamienka funkcie $\dfrac{12(t+1)^3}{t(t+2)^3(t-1)^3}$ vnútri jednotlivých uvedených intervalov vyplýva, že funkcie f_1, f_3, f_5 a f_6 sú rýdzo konvexné, funkcie f_2 a f_4 rýdzo konkávne.

Teraz by sme už v podstate mohli načrtnúť grafy funkcií $f_1, \ldots, f_6$, vyšetrime však ešte predtým pre úplnosť existenciu $(f_1)'_-(0)$, $(f_2)'_-(0)$, $(f_3)'_+(4)$, $(f_4)'_+(4)$:

Inverzná funkcia $x = f_1^{-1}(y)$ k funkcii $y = f_1(x)$ je daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \qquad t \in (-\infty,-2]\,,$$

táto funkcia je rastúca ako superpozícia rastúcich funkcií φ a ψ^{-1} a podľa vety 1 má v bode $\psi(-2) = -16/3$ jednostrannú deriváciu

$$(f_1^{-1})'_-\left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{\varphi'(-2)}{\psi'(-2)} = 0\,,$$

preto podľa vety o derivácii inverznej funkcie je $(f_1)'_-(\varphi(-2)) = (f_1)'_-(0) = \infty$. Podobne možno dokázať rovnosť $(f_2)'_-(0) = -\infty$ [18].

Ako sme už ukázali, spojitá funkcia f_3 má v každom vnútornom bode svojho definičného oboru deriváciu danú parametricky rovnicami

$$x = \frac{(t+2)^2}{t+1}\,, \quad y = \frac{(t+1)^2(t-2)}{(t-1)^2(t+2)}\,, \qquad t \in (-1,0)\,.$$

Takto parametricky daná funkcia $y = f_3'(x)$ má v bode $x = 4$ limitu sprava rovnú -1 (pozri pr. 414.1), z čoho vyplýva $(f_3)'_+(4) = -1$ (pozri pr. I.384.1, ktorého analógia platí aj pre jednostranné limity), podobne sa dokáže rovnosť $(f_4)'_+(4) = -1$; teda grafy funkcií f_3 a f_4 majú v bode $(4,-4)$ spoločnú dotyčnicu sprava.

Pokiaľ sa teraz na základe získaných údajov pokúsime načrtnúť grafy funkcií $f_1, \ldots, f_6$, zistíme, že nie je jasné, či grafy funkcií f_3 a f_4, ktoré na seba „nadväzujú" v bode $(4,-4)$, majú okrem tohto bodu ešte ďalší spoločný bod. Odpoveď na túto otázku možno (v tomto prípade) nájsť dvoma spôsobmi:

1. Keby sa grafy funkcií f_3 a f_4 pretli v niektorom bode rôznom od bodu $(4,-4)$ $(= (\varphi(0),\psi(0)))$, museli by existovať čísla $s \in (-1,0)$, $t \in (0,1)$, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$\varphi(s) = \varphi(t)\,, \qquad \psi(s) = \psi(t)\,,$$

tj.

$$\frac{(s+2)^2}{s+1} = \frac{(t+2)^2}{t+1}\,, \qquad \frac{(s-2)^2}{s-1} = \frac{(t-2)^2}{t-1}\,,$$

odtiaľ

$$(s+2)^2(t+1) = (t+2)^2(s+1)\,, \qquad (s-2)^2(t-1) = (t-2)^2(s-1)\,,$$

a po roznásobení a úprave

$$s^2t + s^2 = t^2s + t^2\,,$$
$$s^2t - s^2 = t^2s - t^2\,.$$

[17] v prípade funkcií f_5, f_6 a bodu 16/3 ide o jednostranné druhé derivácie

[18] pre $t \in (-\infty,-1)$ je $\psi'(t) > 0$, teda rovnicami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (-\infty,-1)$ je parametricky daná funkcia $x = g(y)$, ktorej graf je zjednotením grafov funkcií f_1 a f_2; z vety 1 vyplýva $g'(\psi(-2)) = \varphi'(-2)/\psi'(-2) = 0$, teda dotyčnicou ku grafu funkcie g v bode $(\varphi(-2),\psi(-2)) = (0,-16/3)$ je priamka $x = 0$, čo je skutočne v súlade s definíciou dotyčnice ku krivke K, podľa ktorej smerovým vektorom dotyčnice v bode $(\varphi(-2),\psi(-2))$ je vektor $(\varphi'(-2),\psi'(-2)) = (0,8/9)$

Ak tieto rovnice sčítame, dostaneme

$$2st(s-t)=0\ ,$$

teda pre hľadané riešenia by muselo platiť $s=0$ alebo $t=0$ alebo $s=t$, čo — keďže má platiť $s \in$ $\in (-1,0)$, $t \in (0,1)$ — nie je možné. To znamená, že grafy funkcií f_3 a f_4 majú jediný spoločný bod $(4,-4)$.

2. Grafy funkcií f_3 a f_4 majú spoločnú dotyčnicu sprava v bode $(4,-4)$, pritom na intervale $(4,\infty)$ leží graf rýdzo konvexnej funkcie f_3 nad touto dotyčnicou (pozri pr. I.362.1) a graf rýdzo konkávnej funkcie f_3 leží na intervale $(4,9/2)$ pod touto dotyčnicou, preto okrem bodu $(4,-4)$ nemôžu mať grafy funkcií f_3 a f_4 žiadne ďalšie spoločné body.

Vyšetrovaná krivka je znázornená na obr. 7.

obr. 7. $x=\dfrac{(t+2)^2}{t+1}\ ,\ y=\dfrac{(t-2)^2}{t-1}$

Veta 2. *Nech funkcie* φ, ψ *sú diferencovateľné na intervale* $[a,b]$, *pričom* $\varphi' \in \mathcal{R}[a,b]$, $\psi' \in \mathcal{R}[a,b]$. *Potom dĺžkou krivky danej parametricky rovnicami*

$$x=\varphi(t)\ ,\quad y=\psi(t)\ ,\qquad t\in[a,b]\ , \tag{4}$$

je číslo

$$\int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\ .$$

Špeciálne, ak funkcia f *je diferencovateľná na intervale* $[a,b]$ *a* $f' \in \mathcal{R}[a,b]$, *tak dĺžkou krivky, ktorej rovnica v polárnych súradniciach má tvar*

$$\varrho=f(\varphi)\ ,\qquad \varphi\in[a,b]\ , \tag{5}$$

je číslo

$$\int_a^b \sqrt{f^2(\varphi)+f'^2(\varphi)}\,d\varphi\ .$$

423. Nájdite dĺžku nasledujúcich kriviek:

1. $x=a(\cos t+t\sin t)\ ,\quad y=a(\sin t-t\cos t)\ ,\quad t\in[0,2\pi]\ ;$
2. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}\ ;$
3. $x=\operatorname{ch}^3 t\ ,\quad y=\operatorname{sh}^3 t\ ,\quad t\in[0,T]\ ;$
4. slučky krivky $x=2t^3(1-t^2)\ ,\ y=\sqrt{15}\,t^4\ ;$

5. $x = \int_1^t \frac{\cos z \, dz}{z}$, $y = \int_1^t \frac{\sin z \, dz}{z}$ od bodu $(0,0)$ po najbližší bod, v ktorom je dotyčnica rovnobežná s osou Oy ;

6. $\varrho = a(1+\cos\varphi)$;

7. $\varrho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$;

8. $\varphi = \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)$;

9. $\varphi = \int_0^\varrho \frac{\operatorname{sh} r}{r}\, dr$, $\varrho \in [0, R]$;

10. $\varrho = 1+\cos t$, $\varphi = t - \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $0 \le t \le T < \pi$.

424. Na cykloide $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ nájdite bod, ktorý delí dĺžku jej prvého oblúka v pomere $1:3$.

425. Dokážte, že pri kotúľaní sa paraboly $p:\ x^2 = 4ay$ po osi Ox sa jej ohnisko (tj. bod $(0,a)$) pohybuje po *reťazovke* $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

Veta 3. *Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (4), pričom φ je rýdzomonotónna a diferencovateľná a ψ nezáporná spojitá funkcia. Potom plošným obsahom útvaru ohraničeného krivkou K a priamkami $y=0$, $x=\varphi(a)$, $x=\varphi(b)$ je číslo*

$$P = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\psi(t)\,dt\,.$$

Poznámka. Ak funkcia ψ je diferencovateľná na $[a,b]$ a φ je rastúca, tak použitím metódy per partes dostávame

$$P = \int_a^b \varphi'(t)\psi(t)\,dt = [\varphi(t)\psi(t)]_a^b - \int_a^b \varphi(t)\psi'(t)\,dt\,.$$

Ak teda $[\varphi(t)\psi(t)]_a^b = 0$, možno plošný obsah P vypočítať aj použitím vzorcov

$$P = -\int_a^b \varphi(t)\psi'(t)\,dt\,,$$

$$P = \frac{1}{2}\int_a^b (\varphi'(t)\psi(t) - \varphi(t)\psi'(t))\,dt\,;$$

podobne možno uvažovať v prípade klesajúcej funkcie φ.

Veta 4. *Nech $0 < b-a \le 2\pi$, nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je spojitá nezáporná funkcia. Potom plošným obsahom útvaru ohraničeného krivkou $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi\in[a,b]$, a polpriamkami $\varphi=a$, $\varphi=b$ je číslo*

$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$

426. Vypočítajte plošný obsah P útvarov ohraničených nasledujúcimi krivkami:

1. $x = 2t-t^2$, $y = 2t^2-t^3$;

2. $x = \frac{1}{1+t^2}$, $y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$;

3. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$, a spojnicou bodov $(a,0)$ a $(a,-2\pi a)$;

4. asteroidou $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$;

5. kardioidou $\varrho = a(1+\cos\varphi)$;

6. $\varrho = a\sin n\varphi$, $a>0$, $n\in\mathbf{N}$;

7. $\varrho = a\cos\varphi$, $\varrho = a(\cos\varphi+\sin\varphi)$, $a>0$, pričom bod s pravouhlými súradnicami $\left(\frac{a}{2},0\right)$ leží v danom útvare ;

8. $\varphi = \varrho\operatorname{arctg}\varrho$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$;

9. $\varrho = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $\varphi = t-\operatorname{arctg} t$, $0\le t\le t_0$, $\varphi(t_0)\le 2\pi$;

10. $x^4+y^4 = a^2(x^2+y^2)$.

427. Vypočítajte plošný obsah tej časti útvaru ohraničeného Bernoulliho lemniskátou $(x^2+y^2)^2 = = a^2(x^2-y^2)$, ktorá leží vnútri kruhu $x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}$.

Veta 5. *Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (4), pričom φ je rýdzomonotónna spojite diferencovateľná a ψ nezáporná (nekladná) spojitá funkcia. Nech M je útvar ohraničený krivkou K a priamkami $y=0$, $x=\varphi(a)$, $x=\varphi(b)$. Potom objemom telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo osi Ox, je číslo*

$$V=\pi\int_a^b \psi^2(t)\,|\varphi'(t)|\,dt\ .$$

Ak naviac $\varphi([a,b])\subset[0,\infty)$, tak objemom telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo osi Oy, je číslo

$$V=2\pi\int_a^b \varphi(t)\,|\psi(t)|\,|\varphi'(t)|\,dt\ .$$

Veta 6. *Nech $0\le a<b\le\pi$, nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia a M je útvar ohraničený krivkou $\varrho=f(\varphi)$, $\varphi\in[a,b]$, a polpriamkami $\varphi=a$, $\varphi=b$. Potom objemom telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo osi Ox, je číslo*

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_a^b f^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\ .$$

428. Vypočítajte objem V telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M ohraničeného krivkami

1. $x=a\sin^3 t,\ \ y=b\cos^3 t,\ \ t\in[0,2\pi],\ \ a>0,\ b>0$, a) okolo osi Ox, b) okolo osi Oy ;
2. $x=a(t^2+1)$, $y=\dfrac{at}{3}(3-t^2)$, $|t|\le\sqrt{3}$, a) okolo osi Ox, b) okolo osi Oy ;
3. $x=2t-t^2$, $y=4t-t^3$ a) okolo osi Ox, b) okolo osi Oy ;
4. $y=x^2$, $y=x$ okolo priamky $y=x$;
5. $\varrho=a(1+\cos\varphi)$ okolo osi Ox ;
6. $\varrho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ okolo priamky $y=x$;
7. $x(x^2-y^2)=a(x^2+y^2)$, $x=3a$ okolo osi Ox .

Riešenie. 4. Priesečníkmi daných kriviek sú zrejme body $(0,0)$ a $(1,1)$. Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo priamky $y=x$, je rovnaký ako objem telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi Ox útvaru M', ktorý získame otočením množiny M okolo bodu $(0,0)$ o uhol $\pi/4$ v smere hodinových ručičiek ($\pi/4$ je uhol, ktorý zviera priamka $y=x$ a os Ox). Toto otočenie možno jednoducho popísať pomocou polárnych súradníc: obrazom bodu s polárnymi súradnicami (ϱ,φ) je bod $(\varrho,\varphi-\pi/4)$. Ak teda obrazom bodu s pravouhlými súradnicami (x,y) je bod (x',y'), tak zo vzťahov

$$x=\varrho\cos\varphi\,,\quad y=\varrho\sin\varphi\,,\qquad x'=\varrho\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\,,\quad y'=\varrho\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$$

dostávame

$$x'=\varrho\cos\varphi\cos\frac{\pi}{4}+\varrho\sin\varphi\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt2}(x+y)\,,$$

$$y'=\varrho\sin\varphi\cos\frac{\pi}{4}-\varrho\cos\varphi\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt2}(y-x)\,.$$

Obrazom grafu funkcie $y=x^2$, $x\in[0,1]$, tj. množiny $\{(x,x^2)\,;\,x\in[0,1]\}$, je teda množina $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt2}(x+x^2),\dfrac{1}{\sqrt2}(x^2-x)\right)\,;\,x\in[0,1]\right\}$, tj. krivka K daná parametricky rovnicami

$$x=\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt2}(t^2+t)\,,\quad y=\psi(t)=\frac{1}{\sqrt2}(t^2-t)\,,\qquad t\in[0,1]\,.$$

Útvar M' je ohraničený krivkou K a osou Ox, pritom $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2t+1) > 0$ pre $t \in [0,1]$, preto objem telesa, ktoré vznikne rotáciou M' okolo osi Ox, je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \psi^2(t)\varphi'(t)\,dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (t^2-t)^2(2t+1)\,dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (2t^5 - 3t^4 + t^2)\,dt = \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{t^6}{3} - \frac{3t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{30\sqrt{2}} \,. \end{aligned}$$

Veta 7. *Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (4), pričom*
1. *funkcie φ, ψ sú spojite diferencovateľné na $[a,b]$;*
2. $\forall t \in (a,b) : \varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ *;*
3. *neexistujú $u, v \in [a,b]$, $u \neq v$. také, že $\varphi(u) = \varphi(v)$, $\psi(u) = \psi(v)$;*
4. *ψ je nezáporná (nekladná) funkcia.*

Potom plošným obsahom plochy vytvorenej rotáciou krivky K okolo osi Ox je číslo

$$S = 2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \,.$$

429. Vypočítajte plošný obsah S plochy vytvorenej rotáciou

1. krivky $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ a) okolo osi Ox, b) okolo priamky $y = x$;
2. krivky $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, a) okolo osi Ox, b) okolo osi Oy ;
3. krivky $\varrho = a(1 + \cos\varphi)$ okolo osi Ox ;
4. oblúka paraboly $y^2 = 2px$ odrezaného priamkou $y = 2x$ okolo tejto priamky .

430. Vypočítajte veľkosť povrchu telesa, ktoré vznikne rotáciou kocky s hranou dĺžky a okolo jej diagonály!