Riešenia, návody, poznámky

,,Milý kamaráde," řekl jednoroční dobrovolník, ,,můj rozhovor, který bude nyní následovat, dokáže vám neobyčejně jasně, že chyb není nikdo ušetřen! Jsem přesvědčen, pánové, že vy tam vzadu přestanete hrát ,,maso", neboť to, co vám nyní povím, bude velice zajímavé už tím, že mnohým odborným výrazům neporozumíte."

J. Hašek: Osudy dobrého vojáka Švejka

1. Neurčitý integrál

$\boxed{1}$ **1**. $x - \frac{5x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + C$; **2**. $27x - 9x^3 + \frac{9x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + C$; **3**. $a \ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C$; **4**. $x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$; **5**. $\frac{340x^{0.83}}{83} + C$; **6**. $a^2x - \frac{9a^{4/3}x^{5/3}}{5} + \frac{9a^{2/3}x^{7/3}}{7} - \frac{x^3}{3} + C$; **7**. $\frac{4x^{5/4}}{5} - \frac{24x^{17/12}}{17} + \frac{4x^{3/4}}{3} + C$; **8**. $\frac{4x^{7/4}}{7} + 4x^{-1/4} + C$; **9**. $-\operatorname{arctg} x + C = x + \operatorname{arcctg} + C$ $\left(\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}\right)$; **10**. $x - 2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$; **11**. $\arcsin x + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C = -\arccos x + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$; **12**. $3x - 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x / \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C$; **13**. $-\frac{2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5\cdot 2^x \ln 2} + C$; **14**. $\frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C$ (použite vzorec $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$); **15**. $\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C$ $\left(\sin\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}\right)$; **16**. $-\operatorname{ctg} x - x + C$; **17**. $x - \operatorname{th} x + C$ $(\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1)$;

$\boxed{2}$ **1a**) $-\frac{x^2}{2} + C$ pre $x < 0$, $\frac{x^2}{2} + C$ pre $x \geq 0$; **1c**) $-2x + C$ pre $x < -1$, $x^2 + 1 + C$ pre $x \in [-1, 1]$, $2x + C$ pre $x > 1$; **1d**) $\frac{x^3}{3} + C$ pre $x < -1$, $x + \frac{2}{3} + C$ pre $x \in [-1,1]$, $\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3} + C$ pre $x > 1$; **2**. ak položíme $x = e^t$, dostaneme $f'(t) = 1$ pre $t \leq 0$, $f'(t) = e^t$ pre $t > 0$, odtiaľ $f(t) = t + C$ pre $t \leq 0$, $f(t) = e^t - 1 + C$ pre $t > 0$;

$\boxed{3}$ napr. $f(x)=g'(x)$, kde $g(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ pre $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$, $g(x)=0$ pre $x=0$;

$\boxed{4}$ **1**. áno (nech $|F(x)|\le M$ pre $x\in(a,b)$; zvoľme $c\in(a,b)$ pevne; potom pre $x\in(a,b)$ platí $|F(x)|=|(F(x)-F(c))+F(c)|\le|F(x)-F(c)|+|F(c)|$; pritom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote je $|F(x)-F(c)|=|f(d)|\,|x-c|\le M|b-a|$; teda $|F(x)|\le|F(c)|+M|b-a|$; **2**. nie (napr. $F(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$);

$\boxed{5}$ **1**. $\ln|x-a|+C$; **2**. $\dfrac{1}{22}(2x-3)^{11}+C$; **3**. $-\dfrac{2}{15}(5x-2)^{-3/2}+C$; **4**. $\dfrac{1}{\sqrt6}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac32}\,x+C$ $\left(\dfrac{1}{2+3x^2}=\dfrac12\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{3/2}\,x)^2},\ \text{subst.}\ \sqrt{\dfrac32}\,x=t\right)$; **5**. $\dfrac{1}{\sqrt3}\ln\left|\sqrt{\dfrac32}\,x+\sqrt{\dfrac32x^2-1}\right|+C=$[1] $\dfrac{1}{\sqrt3}\cdot\ln\left|\sqrt3x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C$; **6**. $\dfrac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt7}+C$; **8**. $\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt2}+C$; **9**. $\dfrac{1}{\sqrt2}\ln\left|x-\dfrac14+\sqrt{x^2-\dfrac{x}{2}+1}\right|+C$ $\left(=\dfrac{1}{\sqrt2}\ln\left|\sqrt2x-\dfrac{1}{2\sqrt2}+\sqrt{2x^2-x+2}\right|+C\right)$; **10**. $-e^{-x}-\dfrac{e^{-2x}}{2}+C$; **11**. $-\dfrac12\operatorname{ctg}\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; **12**. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+C$ $\left(1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}\right)$; **13**. $x-3\operatorname{cth}\dfrac{x}{3}+C$; **15**. $\dfrac{(1-x)^{99}}{99}-\dfrac{(1-x)^{98}}{49}+\dfrac{(1-x)^{97}}{97}+C$;

$\boxed{6}$ **1**. $\dfrac{\sin^6x}{6}+C$; **2**. $\dfrac{(1+x^2)^{11}}{22}+C$ (subst. $1+x^2=t$); **3**. $-\sqrt{1+x^2}+C$; **4**. $\dfrac{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}{4}+C$; **5**. $\dfrac{(8x^3+27)^{1/3}}{8}+C$; **6**. $\dfrac{-e^{-x^2}}{2}+C$; **7**. $\ln(2+e^x)+C$; **8**. $\dfrac23\ln^3x-3\ln x+C$ (subst. $\ln x=t$); **9**. $-\ln|\cos x|+C$ ($\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, subst. $\cos x=t$); **10**. $\ln|\arcsin x|+C$; **11**. $3\operatorname{th}x+C$; **13**. $\dfrac{1}{2\sqrt2}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{\sqrt2}+C$; **14**. $\dfrac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\dfrac{x^4-\sqrt2}{x^4+\sqrt2}\right|+C$ (subst. $x^4=t$); **15**. $\dfrac{1}{2\sqrt2}\arcsin\dfrac{4x^2+3}{\sqrt{17}}+C$; **17**. $2\operatorname{sgn}x\cdot\ln\left|\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+1|}\right|+C$, $x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$ (definičným oborom funkcie $\dfrac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$ je množina $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$; pre $x>0$ platí $\sqrt{x(1+x)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x}$ — použijeme substitúciu $\sqrt{x}=t$; pre $x<-1$ je $\sqrt{x(1+x)}=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-1-x}$ — použijeme substitúciu $\sqrt{-x}=t$; možno postupovať aj analogicky ako v pr. 5.6-9, vtedy dostaneme výsledok v tvare $\ln\left|x+\dfrac12+\sqrt{x^2+x}\right|+C$); **18**. $-(1-x^2)^{1/2}+2\cdot\dfrac{(1-x^2)^{3/2}}{3}-\dfrac{(1-x^2)^{5/2}}{5}+C$ (subst. $\sqrt{1-x^2}=t$, $-\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt$); **19**. $\dfrac{2}{n}\left|x^{n/2+1}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right|+C$ (subst. $x^{n/2+1}=t$); **20**. $\sin x-\dfrac{\sin^3x}{3}+C$ ($\cos^3x=\cos^2x\cos x=(1-\sin^2x)\cos x$, subst. $\sin x=t$); **21**. $\arcsin\dfrac{2\sin x-1}{3}+C$; **22**. $\dfrac{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}{a^2-b^2}$ (subst. $\sin^2x=t$, $2\sin x\cos x\,dx=dt$); **23**. $-\dfrac{\ln\left|\cos x+\sqrt{\cos^2x-1/2}\right|}{\sqrt2}+C$ $\left(=-\dfrac{\ln|\sqrt2\cos x+\sqrt{\cos2x}|}{\sqrt2}+C\right)$; **24**. $\ln|\ln(\ln x)|+C$; **25**. $\operatorname{arctg}e^x+C$; **27**. $\dfrac{1}{2\ln(2/3)}\cdot\ln\left|\dfrac{3^x+2^x}{3^x-2^x}\right|+C$ (integrand možno rozšírením výrazom $\dfrac{1}{9^x}$ upraviť na tvar $\dfrac{(2/3)^x}{1-(2/3)^{2x}}$; subst. $\left(\dfrac23\right)^x=t$);

$\boxed{7}$ **2**. $2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$; **3**. $(\sqrt[3]{x+1}+1)^3-\dfrac{9(\sqrt[3]{x+1}+1)^2}{2}+9(\sqrt[3]{x+1}+1)-3\ln|\sqrt[3]{x+1}+1|+C$ (použili sme najprv substitúciu $x=t^3-1$, ktorá vyplýva zo vzťahu $\sqrt[3]{x+1}=t$, potom substitúciu

---

[1] $=\dfrac{1}{\sqrt3}\ln\left|\dfrac{1}{\sqrt2}\left(\sqrt3x+\sqrt{3x^2-2}\right)\right|+C=\dfrac{1}{\sqrt3}\ln\left|\sqrt3x+\sqrt{3x^2-2}\right|+\left(\dfrac{1}{\sqrt3}\ln\dfrac{1}{\sqrt2}+C\right)=\dfrac{1}{\sqrt3}\ln\left|\sqrt3x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C$; teda číslo $\dfrac{1}{\sqrt3}\ln\dfrac{1}{\sqrt2}$ sme „zahrnuli“ do integračnej konštanty

$1+t=z$); **4**. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$; **5**. $\frac{1}{12}\left((2x-5)^{3/2}+30\sqrt{2x-5}-\frac{111}{\sqrt{2x-5}}\right)+C$ (ak chceme, aby platilo $(2x-5)^{3/2}=t$, stačí použiť substitúciu $x=\frac{t^{2/3}+5}{2}$); **6**. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$ (môžeme použiť dve za sebou nasledujúce substitúcie $x=\ln t$; $t=z^2-1$, $z\geq 1$ (prvú dostaneme zo vzťahu $e^x=t$, druhú zo vzťahu $\sqrt{t+1}=z$) alebo — čo je to isté — priamo substitúciu $x=\ln(z^2-1)$, $z\geq 1$, ktorú nájdeme, ak vyjadríme x z rovnosti $\sqrt{1+e^x}=z$);

$\boxed{8}$ **1**. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$ (subst. $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, pri úpravách sme využili rovnosti $\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $\sin(\arcsin x)=x$); **2**. $\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$ (subst. ako v pr. 8.1, $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$); **3**. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$; **4**. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+C$ $\Big($subst. $x=\operatorname{tg} t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, pri úpravách sme použili vzťahy $1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$, $\sin\operatorname{arctg} x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos\operatorname{arctg} x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big)$; **5**. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$; **6**. $(\operatorname{sgn} x)\,\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C$ $\Big($definičný obor integrandu je $(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$; na intervale $(-\infty,-a)$ použijeme substitúciu $x=\frac{a}{\cos t}$, $t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, na intervale (a,∞) substitúciu $x=\frac{a}{\cos t}$, $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Big)$;

$\boxed{9}$ použite substitúciu $x=t^n$, $t\geq 0$, pre n párne, resp. $x=t^n$, $t\in\mathbf{R}$, pre n nepárne a využite, že primitívnymi funkciami k polynómu sú polynómy;

$\boxed{10}$ $f(x)=-\frac{x^2}{2}-C$, $x\geq 0$; $g(x)=\sin x-\frac{x^4}{2}+C$ $(C\in\mathbf{R})$ $\Big($z prvej v príklade vystupujúcej podmienky integrovaním dostaneme $\frac{f(x^2)}{2}+g(x)=\sin x-\frac{3}{4}x^4+K\Big)$ odporúčame čitateľovi urobiť skúšku správnosti získaných riešení;

$\boxed{11}$ **1**. $x\sin x+\cos x+C$; **2**. $-(x+1)e^{-x}+C$; **3**. $\frac{x^2}{2(1+x^2)}-\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg} x}{2}+C$ **4**. $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C$; **5**. $-\frac{2x^2\ln^2 3+2x\ln 3+1}{9^x\cdot 4\cdot\ln^3 3}+C$; **6**. $-\frac{2x^2+5}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C$; **7**. $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$ $\left(u'=\frac{1}{x^2},\ v=\ln^2 x\right)$ [2]; **8**. $\operatorname{tg} x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg} x-x+C$; **9**. $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$; **10**. $\frac{2}{27}x^{3/2}(9\ln^2 x-12\ln x+8)+C$; **11**. $\frac{x^2}{2}\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|+\frac{x}{2}-\frac{\ln|x+1|}{2}+C$ (pri derivovaní zloženej funkcie $\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$ využite, že $(\ln|u|)'=\frac{1}{u}$; vyplýva to okrem iného zo vzorca 2 v tabuľke integrálov); **12**. $x\ln x-x+C$; **14**. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; **15**. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$; **17**. $\frac{1}{a^2+b^2}\,e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$ [3]; **18**. $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+C$;

$\boxed{12}$ **1**. $-\frac{e^{-x^3}}{3}(1+x^3)+C$ (subst. $x^3=t$); **2**. $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$ (subst. $x=t^2$, $t\geq 0$); **3**. $(12\sqrt{x}-2x\sqrt{x})\cos\sqrt{x}+(6x-12)\sin\sqrt{x}+C$; **4**. $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$ $\Big(u=\arcsin^2 x$, $v'=1$, alebo subst. $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Big)$; **5**. $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{\cos 2x}{8}+C$ ($\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-$

---

[2] všimnime si, že v pr. 11.7-9 nie je definičným oborom integrandu interval, ale zjednotenie dvoch otvorených disjunktných intervalov, resp. spočítateľného systému po dvoch disjunktných otvorených intervalov; metódu per partes by sme mali používať na každom z týchto intervalov zvlášť— veta 6 je totiž formulovaná pre funkcie definované na intervale; keďže však na každom z týchto intervalov je zápis výpočtu rovnaký, môžeme použiť metódu per partes na celom definičnom obore ,,naraz"

[3] ak $I:=\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $J:=\int e^{ax}\cos bx\,dx$, tak použitím metódy per partes v podobe $u'=e^{ax}$, $v=\sin bx$, resp. $u'=e^{ax}$, $v=\cos bx$, dostávame $I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}J$, $J=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I$, z tejto sústavy rovníc už vieme vyjadriť integrály I aj J ; tento postup, pri ktorom nájdeme hneď dva ,,párové" integrály naraz, možno použiť aj pri riešení pr. 11.18

$\cos 2x))$; **6**. $\frac{e^{2x}}{8}(2-\cos 2x-\sin 2x)+C$; **7**. $\frac{e^{2x}}{2}-e^x(\cos x+\sin x)+\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$; **8**. $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{\operatorname{ctg} x}{2}+C$; **9**. $-\sqrt{1-x^2}\arccos x-x+C$; **10**. $\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x+C$; **11**. $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg} x}{2}+C$ $\left(u'=\frac{x}{(1+x^2)^2},\ v=x\right)$ [4]; **12**. $\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+C$ $\left(\frac{1}{(a^2+x^2)^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\right)\right)$; **13**. $\frac{1}{2}\left(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}\right)+C$ $\left(u'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ v=x\right)$; **14**. $\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$ (pre $x\in(-a,a)$ platí $\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ [5]) ; **15**. $\frac{e^{\operatorname{arctg} x}(x-1)}{2\sqrt{1+x^2}}+C$ (najprv subst. $\operatorname{arctg} x=t$) ; **16**. $\frac{(x+1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C$; **17**. $\frac{e^{x+1}}{x+1}+C$ (najprv subst. $x+1=t$; metódu per partes použite len na výpočet $\int\frac{e^t}{t^2}\,dt$; $u'=\frac{1}{t^2}$, $v=e^t$) ;

$\boxed{13}$ $xf'(x)-f(x)+C$;

$\boxed{16}$ **2**. $I_n=\frac{1}{2n+1}x(a^2-x^2)^n+\frac{2na^2}{2n+1}I_{n-1}$, $n\neq-\frac{1}{2}$; **3**. $I_n=\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x-I_{n-2}$, $n\neq 1$ $\left(u'=\frac{\sin x}{\cos^n x},\ v=\sin^{n-1}x\right.$; tento rekurentný vzťah možno odvodiť aj bez použitia metódy per partes: $\left.\int tg^n x\,dx=\int tg^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\right)$; **4**. $I_n=\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2}-a^2\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $n\neq 0$ $\left(u'=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\ v=x^{n-1}\right)$; **5**. $I_n=-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $n\neq 0$; **6**. $I_n=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $n\neq 0$ (možno použiť substitúciu $x=t-\frac{\pi}{2}$ a rekurentný vzťah odvodený v pr. 16.5) ;

$\boxed{18}$ **1**. $e^{2x}\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{77}{8}\right)+C$; **2**. $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{9}{4}\right)\sin 2x+\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+C$ (platí $\int P_n(x)\cos ax\,dx=Q_n(x)\sin ax+R_{n-1}(x)\cos ax+C$) ; **3**. $\left(-\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}+\frac{11}{27}\right)\cos 3x+\left(\frac{2x}{9}+\frac{2}{9}\right)\sin 3x+C$; **4**. $\left(-\frac{3}{2}x^3+\frac{7}{4}x-\frac{1}{2}\right)\cos 2x+\left(\frac{11}{4}x^2+\frac{1}{8}\right)\sin 2x+C$ (výsledok sme hľadali v tvare $Q_3(x)\cos 2x+R_2(x)\sin 2x$) ;

$\boxed{19}$ **1**. $\ln|x^2+3x-10|+C$; **2**. $-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C$; **3**. $\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1024}{3}\ln|x+2|+C$;

$\boxed{20}$ **2**. $\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C$; **3**. $\frac{1}{9(x-2)}+\frac{1}{54}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$; **4**. $4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{4}{x-2}-\frac{1}{x-1}+C$; **5**. $\ln|x+2|-\frac{1}{2x^2}+C$; **6**. $\frac{x^2}{2}+2x-\frac{9}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8}\ln|x+1|+\frac{31}{8}\ln|x-1|+C$;

$\boxed{21}$ **1**. $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; **2**. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C$; **4**. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+$

---

[4] v príkladoch 12.11-14, ktoré tu riešime metódou per partes, možno použiť aj goniometrické substitúcie: v pr. 12.11 $x=\operatorname{tg} t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, pri ďalších úpravách potom rovnosti $\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$, $\sin(2\operatorname{arctg} x)=\frac{2x}{1+x^2}$; v pr. 12.12 $x=a\operatorname{tg} t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (pozri pr. 8.4), v pr. 12.13 $x=\sin t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, alebo $x=\cos t$, $t\in(0,\pi)$ (pozri pr. 8.3), v pr. 12.14 $x=a\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, alebo $x=\cos t$, $t\in[0,\pi]$ (pozri pr. 8.2)

[5] funkciu $f(x)=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$ sme našli integráciou pravej strany tejto rovnosti, preto platí $\forall x\in(-a,a)$: $f'(x)=\sqrt{a^2-x^2}$; zostáva ešte overiť pravdivosť rovnosti $f'(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ pre $x=a$, $x=-a$; hodnoty $f'(a)$, $f'(-a)$ pritom nemožno nájsť tabuľkovým derivovaním, na ich výpočet treba použiť tvrdenie z pr. I.384.1; inou možnosťou dôkazu rovností $f'(a)=f'(-a)=0$ je tvrdenie z pr. 48

C; $\underline{5}$. $\ln|x+2| + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{11}} + C$ $\Bigl($všimnite si, že koeficient pri najvyššej mocnine polynómu v menovateli integrandu nie je rovný 1 — porovnaj s predpokladmi vety 7; rozmyslite si, prečo môžeme rozklad integrandu na parciálne zlomky hľadať v tvare $\dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{Cx+D}{3x^2-2x+4}\Bigr)$; $\underline{6}$. $\dfrac{1}{5}\left(\ln\left(\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+1}\right) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1)\right) + C$;

$\boxed{\mathbf{22}}$ $\underline{1}$. $-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x+2}{x^2+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$; $\underline{2}$. $\dfrac{x}{4(x^2+1)^2} + \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C$; $\underline{3}$. $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}\right) + \dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \dfrac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

$\boxed{\mathbf{23}}$ $\underline{1}$. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}\ln|x^3+2| + C$; $\underline{2}$. $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; $\underline{3}$. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$; $\underline{4}$. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + 2\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + 2\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\right) + C$ $\bigl(x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)\bigr)$ [6]; $\underline{5}$. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$ $\bigl(x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2 - x^2\bigr)$ [7]; $\underline{6}$. $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1} + \dfrac{1}{6}\bigl(\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})\bigr) + C$ $\Bigl(x^6+1 = (x^2)^3 + 1^3 = (x^2+1)(x^4 - x^2+1)$; výsledok možno upraviť na tvar $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\dfrac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg} x^3 + C$ [8]$\Bigr)$; $\underline{7}$. $-\dfrac{1}{6(1+x)} + \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$; $\underline{8}$. $\dfrac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)} +$

---

[6] pokiaľ hľadáme neurčitý integrál len na množine $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, môžeme použitím vzorca z pr. I.87.1 výsledok integrácie prepísať do podoby $F_1(x) + C$ kde $F_1(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ (výraz $\varepsilon\pi$ vystupujúci v uvedenom vzorci sme ,,zahrnuli" do integračnej konštanty C; na symbol C sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 1'; ak chceme pomocou predpisu funkcie F_1 zapísať predpis funkcie F, ktorá by bola primitívnou funkciou k $\dfrac{1}{x^4+1}$ na celej množine $\mathbf{R}$, môžeme postupovať ako v riešení pr. 41.1, dostaneme tak $F(x) = \begin{cases} F_1(x) + \vartheta(x), & \text{ak } x \in \mathbf{R}\setminus\{-1,1\} \\ \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}, & \text{ak } x = -1 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \dfrac{3\pi}{4\sqrt{2}}, & \text{ak } x = 1 \end{cases}$, kde $\vartheta(x) \equiv 0$ pre $x < -1$, $\vartheta(x) \equiv \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ pre $x \in (-1,1)$, $\vartheta(x) \equiv \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ pre $x > 1$

[7] neurčitý integrál na množine $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ možno použitím vzorca z pr. I.87.1 napísať v tvare $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C$; použitím vzorca z pr. I.62.2 možno neurčitý integrál na množine $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ napísať v tvare $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{x\sqrt{3}} + C$

[8] platí totiž $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\bigl(\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})\bigr) + C \overset{(1)}{=} \left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg} x\right) + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2} + C \overset{(2)}{=} \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2} + C \overset{(3)}{=} \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(-x^3)} + C \overset{(4)}{=} \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg} x^3 + C$ (v (1) a (3) sme použili vzorec z pr. I.87.1, v (2) a (4) vzorec z pr.I.62.2 , v (4) naviac rovnosť $\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha$; konštanty vystupujúce v použitých vzorcoch sú ,,zahrnuté" do integračnej konštanty C; uvedené rovnosti platia na množine $\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$, pretože však výraz na ľavej strane rovnosti (1) a výraz na pravej strane rovnosti (4) sú funkcie spojité na $\mathbf{R}$, platí rovnosť medzi týmito výrazmi na celej množine $\mathbf{R}$; odporúčame čitateľovi, aby si najmä poslednú uvedenú úvahu podrobne rozmyslel

$\dfrac{4}{3\sqrt3}\text{arctg}\,\dfrac{2x+1}{\sqrt3}+C$; **9**. $-\dfrac{1}{48x^3}+\dfrac{1}{32x}+\dfrac{x}{128(x^2+4)}+\dfrac{5}{256}\text{arctg}\,\dfrac{x}{2}+C$ $\left(\dfrac{1}{x^8+8x^6+16x^4}=\left(\dfrac{1}{x^2(x^2+4)}\right)^2=\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+4}\right)^2\right)$; **10**. $\dfrac{1}{a+b^2}\left(\dfrac{b}{\sqrt a}\text{arctg}\,\dfrac{x}{\sqrt a}+\dfrac12\ln\dfrac{(x+b)^2}{x^2+a}\right)+C$ pre $a>0$; $\dfrac{1}{2\sqrt{-a}(\sqrt{-a}-b)}\ln|x+\sqrt{-a}|+\dfrac{1}{2\sqrt{-a}(\sqrt{-a}+b)}\ln|x-\sqrt{-a}|+\dfrac{1}{a+b^2}\ln|x+b|+C$ pre $a<0$, $a+b^2\neq0$; $\dfrac{1}{4b^2}\ln\left|\dfrac{x-b}{x+b}\right|+\dfrac{1}{2b(x+b)}+C$ pre $a<0$, $a+b^2=0$;

24 $c=0$ alebo $bc=ad$;

25 **a**) $D:=b^2-4ac=0$ (táto podmienka zahŕňa aj prípad $a=b=0$); **b**) $D>0$ (táto podmienka zahŕňa aj prípad $a=0\wedge b\neq0$) alebo $a=b=0$ (vtedy stačí položiť $R(x)\equiv1$); **c**) $D<0$ alebo $a=b=0$;

26 **1**. $\ln|x-1|-\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+C$ (subst. $x-1=t$); **2**. $\dfrac18\ln\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\dfrac14\text{arctg}\,x^2+C$ (subst. $x^2=t$); **3**. $\dfrac{1}{4\sqrt3}\text{arctg}\,\dfrac{x^4}{\sqrt3}+C$; **4**. $\dfrac13\text{arctg}\,x^3+\dfrac{1}{2\sqrt3}\text{arctg}\,\dfrac{2x^2-1}{\sqrt3}+\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+C$ (napísať ako súčet dvoch integrálov, v prvom subst. $x^3=t$, v druhom $x^2=s$); **5**. $\dfrac{x^4}{4}-\ln(x^4+2)+\dfrac14\ln(x^4+1)+C$; **6**. $-\dfrac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\dfrac{1}{10}\text{arctg}\,(x^5+1)+C$; **7**. $\dfrac{1}{10(x^{10}+1)}+\ln\dfrac{x^{10}}{x^{10}+1}+C$; **8**. $\ln(x^4+1)-\dfrac38\ln x^4-\dfrac58\ln(x^4+2)+C$; **9**. $\dfrac{1}{49}\ln\left|\dfrac{x^7}{x^7+7}\right|+C$ $\left(\dfrac{1}{x^8+7x}=\dfrac{1}{x(x^7+7)}=\dfrac{x^6}{x^7(x^7+7)}\right)$; **10**. $\dfrac1n(x^n+1)-\dfrac1n|x^n+1|+C$ $\left(=\dfrac{x^n}{n}-\dfrac1n\ln|x^n+1|+C\right.$, ak konštantu $\dfrac1n$ „zahrnieme“ do integračnej konštanty $\left.C\right)$ pre $n\neq0$; $2\ln x+C$ pre $n=0$; **11**. $\dfrac{1}{2n}\left(\text{arctg}\,x^n-\dfrac{x^n}{x^{2n}+1}\right)+C$ pre $n\neq0$; $\dfrac14\ln x+C$ pre $n=0$; **12**. $\dfrac{1}{2\sqrt2}\ln\dfrac{x^2-\sqrt2x+1}{x^2+\sqrt2x+1}+C$ $\left(\dfrac{x^2-1}{x^4+1}=\dfrac{1-1/x^2}{x^2+1/x^2}=\dfrac{1-1/x^2}{(x+1/x)^2-2}\right.$ pre $x\neq0$; to, že výsledok (ktorý sme našli integrovaním funkcie definovanej na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$) je hľadanou primitívnou funkciou na $\mathbf{R}$, vyplýva z pr. $\left.46\right)$; **13**. $\dfrac{1}{\sqrt5}\ln\dfrac{2x^2+(1-\sqrt5)x+2}{2x^2+(1+\sqrt5)x+2}+C$ $\left(\text{subst. } x+\dfrac1x=t\right)$; **14**. $\dfrac{1}{4\sqrt2}\ln\dfrac{x^4-x^2\sqrt2+1}{x^4+x^2\sqrt2+1}+C$ $\left(\right.$najprv subst. $x^2=t$ a potom ako v pr. 26.12, alebo priamo subst. $\left.x^2+\dfrac{1}{x^2}=t\right)$;

27 $I=-\dfrac{1}{(a-b)^{m+n-1}}\displaystyle\int\dfrac{(t-1)^{m+n-2}}{t^m}\,dt$; $J=\dfrac{1}{625}\left(\dfrac{3(x-2)}{x+3}-\dfrac{x+3}{x-2}-\dfrac{(x-2)^2}{2(x+3)^2}-3\ln\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right|\right)+C$;

28 **1**. použite metódu per partes a využite, že primitívna funkcia k racionálnej funkcii $F(x)(\text{arctg}\,x)'$, resp. $F(x)(\text{arcctg}\,x)'$, resp. $F(x)(\ln x)'$ je elementárna; **2a**) $\dfrac18\left((x^8-1)\text{arctg}\,x-\dfrac{x^7}{7}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^3}{3}+x\right)+C$; **2b**) $x\text{arcctg}\,\dfrac{1}{x-1}+\text{arctg}\,(x-1)-\dfrac12\ln(x^2-2x+2)+C$ (pomocou vzťahu $\text{arcctg}\,\alpha+\text{arcctg}\,\dfrac1\alpha=\pi-\dfrac\pi2\,\text{sgn}\,\alpha$ možno výsledok upraviť na tvar $(x-1)\text{arcctg}\,\dfrac{1}{x-1}-\dfrac12\ln(x^2-2x+2)+C$); **2c**) $\dfrac12\ln(x^2-x+1)-\ln|x|-\dfrac1x\ln(x^2-x-1)+\sqrt3\text{arctg}\,\dfrac{2x-1}{\sqrt3}+C$; **2d**) $\dfrac1x\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2-4}}+C$ $\left(\right.$pri derivovaní funkcie $\ln\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$ využite vzorec $\left.(\ln|x|)'=\dfrac1x\right)$;

29 **1**. $\text{arctg}\,\dfrac{\sqrt{1+x}}{2}+C$; **2**. $\dfrac{12}{5}x^{5/12}-6x^{1/6}-4\ln|x^{1/12}+1|+2\ln|x^{1/6}-x^{1/12}+1|+4\sqrt3\text{arctg}\,\dfrac{2x^{1/12}-1}{\sqrt3}+C$ (subst. $x=t^{12}$, $t\geq0$); **3**. $\ln(1+x)-3\ln(1+\sqrt[3]{1+x})-6\text{arctg}\,\sqrt[6]{1+x}+C$; **4**. $\dfrac{12}{13}(1+\sqrt[4]{x})^{13/3}-\dfrac{18}{5}(1+\sqrt[4]{x})^{10/3}+\dfrac{36}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3}-3(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}+C$;

$\boxed{30}$ **<u>1</u>**. špeciálne pre $bc = ad$ je $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ racionálnou funkciou premennej x; v ostatných prípadoch stačí použiť substitúciu, ktorej predpis dostaneme, ak z rovnice $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t$ vyjadríme x ako funkciu premennej t; pritom treba rozlíšiť prípady n párne, n nepárne a prípady $c = 0 \wedge a \neq 0$, $c \neq 0 \wedge bc - ad \neq 0$; **<u>2a</u>)** $\dfrac{\sqrt[5]{(x+1)^4}\,(25x-20)}{36\sqrt[5]{x^9}} + C$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$; **<u>2b</u>)** $\dfrac{2t}{t^3-1} + \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \dfrac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt3} + C$, kde $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (výpočet $\displaystyle\int -\frac{6t^3}{(t^3-1)^2}\,dt$ možno zjednodušiť použitím metódy per partes: $u' = -\dfrac{3t^2}{(t^3-1)^2}$, $v = 2t$); **<u>2c</u>)** $\dfrac12 \ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right| - \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2\,(x+\sqrt{x^2-1})} + C$ (integrand rozšíriť výrazom $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; výsledok možno upraviť na tvar $\dfrac12\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + C$, $x > 1$: zlomok v absolútnej hodnote stačí rozšíriť výrazom $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$, druhý zlomok výrazom $x - \sqrt{x^2-1}$); **<u>2d</u>)** $-\dfrac32\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}} + C$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ (integrand možno prepísať do tvaru $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}} \cdot \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$); **<u>2e</u>)** $\dfrac{n}{b-a}\sqrt[n]{\dfrac{x-b}{x-a}} + C$, $x > \max\{a, b\}$; **<u>2f</u>)** $-\dfrac{at}{t^4+1} + \dfrac{a}{2\sqrt2}\operatorname{arctg}\dfrac{t^2-1}{\sqrt2\,t} + \dfrac{a}{4\sqrt2}\ln\left|\dfrac{t^2+t\sqrt2+1}{t^2-t\sqrt2+1}\right| + C$, kde $t = \sqrt[4]{\dfrac{x}{a-x}}$ (na výpočet $\displaystyle\int \frac{4t^4}{(t^4+1)^2}dt$ použite najprv metódu per partes: $u' = \dfrac{4t^3}{(t^4+1)^2}$, $v = t$; $\displaystyle\int\frac{dt}{1+t^4} = \frac12\int\frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt - \frac12\int\frac{t^2-1}{t^4+1}\,dt$, v prípade druhého integrálu pozri pr. 26.12, prvý možno nájsť analogicky);

$\boxed{31}$ **<u>1</u>**. $\dfrac12\ln\dfrac{t^4}{(2t+1)^3} - \dfrac{8t+1}{2(2t+1)} + C$, kde $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$ [9] (výpočet $\displaystyle\int\frac{2\,dt}{t(2t+1)^2}$ možno zjednodušiť substitúciou $t = \dfrac1z$ alebo $2t+1 = \dfrac1z$; výsledok možno zapísať v podobe $\dfrac12\ln\dfrac{t^4}{(2t+1)^3} + \dfrac{3}{2(2t+1)} + C$ [10]); **<u>2</u>**. $\dfrac{1}{256}\left(2z^2 - 16z + 4\ln|z| - \dfrac{6}{z^2} - \dfrac{48}{z^3} - \dfrac{27}{z^4}\right) + C$, kde $z = 2\left(x + \sqrt{x^2+x+1}\right) + 1$ (použili sme postupne substitúcie $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$, $z = 2t+1$); **<u>3</u>**. $\dfrac18\left(z + 3\ln|z| - \dfrac3z - \dfrac{1}{2z^2}\right) + C$, kde $z = 2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1$ (použitím rovnosti $\dfrac{1}{2x+1+2\sqrt{x^2+x}} = 2x+1-2\sqrt{x^2+x}$ možno výsledok upraviť na tvar $\dfrac38\ln\left|2x+2\sqrt{x^2+x}+1\right| - \dfrac12(x^2+2x) + \dfrac14(x+5)\sqrt{x^2+x} + C$); **<u>5</u>**. $2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right) - \ln\left|\dfrac{2-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} + 1\right| + C$ (definičný obor integrandu je $[-\sqrt2-1, \sqrt2-1]$; použili sme substitúciu $\sqrt{1-2x-x^2} = 1 - tx$, inverzná funkcia k funkcii $x = \varphi(t) = \dfrac{2(t-1)}{t^2+1}$, $t \in [1-\sqrt2, 1+\sqrt2]$, je $t = \varphi^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-2x-x^2}}{x}, & \text{ak } x \in [-\sqrt2-1, \sqrt2-1] \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, to možno zapísať v tvare $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{2-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ [11]); **<u>6</u>**. $2\operatorname{arctg}\left(1 + \dfrac{x-1}{1+\sqrt{1+x-x^2}}\right) + C$ (použili sme sub-

---

[9] príslušná Eulerova substitúcia prepísaná do podoby vyhovujúcej vete 5 má tvar $x = \dfrac{t^2-1}{2t+1}$, $t \in \left(-\dfrac12, 0\right)$ — tak nájdeme primitívnu funkciu na intervale $(-\infty, -1)$, resp. $x = \dfrac{t^2-1}{2t+1}$, $t \in (0, \infty)$ — tak nájdeme primitívnu funkciu na intervale $(-1, \infty)$

[10] platí $-\dfrac{8t+1}{2(2t+1)} = -2 + \dfrac{3}{2(2t+1)}$ a číslo -2 možno „zahrnúť" do integračnej konštanty C

[11] keby sme použili (na prvý pohľad prirodzenejšiu) substitúciu $\sqrt{1-2x-x^2} = tx - 1$, bolo by $x = \varphi(t) =$

stitúciu $\sqrt{1+x-x^2} = tx+1$; funkcia $-2\operatorname{arctg}\left(1+\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1}{x}\right)$ nájdená pomocou substitúcie $\sqrt{1+x-x^2} = tx-1$ je primitívnou funkciou len na $\left(\frac{1-\sqrt5}{2},\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\setminus\{0\}\Big)$; **7**. $\frac{10}{9}\sqrt{\frac{x-2}{5-x}} - \frac{4}{9}\sqrt{\frac{5-x}{x-2}}+C$ (použili sme substitúciu $\left(\sqrt{7x-10-x^2} = \right)$ $\sqrt{(x-2)(5-x)} = t(x-2)$ [12]); **8**. $\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$, kde $t=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ $\left(=\frac{\sqrt{4x-3-x^2}}{x-1}\right)$, $x\in(1,2)\cup(2,3)$;

$\boxed{32}$ **1**. $\frac12\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}} - \sqrt{5+x-x^2}+C$, $x\in\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2},\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$; **2**. $\frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1} - \frac18\ln\left|x+\frac12+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$; **3**. $\frac{1}{3840}\sqrt{1+x^2}\,(384x^9-432x^7+504x^5-630x^3+945x) - \frac{945}{3840}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$ $\Big($stačí opakovane použiť rekurentný vzťah $I_n = \frac1n x^{n-1}\sqrt{1+x^2} - \frac{n-1}{n}I_{n-2}\Big)$; **4**. $\frac{11}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt5}+\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}+C$, $x\in\left(\frac{1-\sqrt5}{2},\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$; **5**. $\left(\frac{x^5}{6}-\frac{a^2x^3}{24}-\frac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac xa+C$ (integrand rozšíriť výrazom $\sqrt{a^2-x^2}$, potom možno použiť rekurentný vzťah $I_n = -\frac1n x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{n-1}{n}a^2I_{n-2}$, kde $I_n=\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ [13]; iná možnosť: odvodiť rekurentný vzťah $J_n = \frac{n-1}{n+2}a^2J_{n-2} - \frac{1}{n-2}x^{n-1}(a^2-x^2)^{3/2}$, kde $J_n=\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, J_0 pritom možno vypočítať substitúciou $x=a\cos t$, $t\in[0,\pi]$); **6**. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+2}+\frac78\ln\left|\frac12+x+\sqrt{x^2+x+2}\right|+C$;

$\boxed{33}$ **1**. $\left(-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{6}-\frac{19}{6}\right)\sqrt{1-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{\sqrt2}+C$; **2**. $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C$;

$\boxed{34}$ **1**. $\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}+C$ [14]; **2**. $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\operatorname{sgn}x\cdot\frac12\ln\left|\frac1x+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right|+C$ $\Big($výsledok možno upraviť do podoby $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac12\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C$ [15]$\Big)$; **4**. $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt5}+\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\ln\left|\frac{3+x+2\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\sqrt{1-x-x^2}}{2(x+1)}\right|+C$ $\Big(= \arcsin\frac{2x+1}{\sqrt5}+\operatorname{sgn}(x+1)\cdot$

$\frac{2(t-1)}{t^2+1}$, $t\in(-\infty,1-\sqrt2]\cup[1+\sqrt2,\infty)$, $t=\varphi^{-1}(x)=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$, pomocou tejto substitúcie nájdená funkcia $\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\operatorname{arctg}t$ $\big($kde $t=\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitívnou funkciou len na $[-\sqrt2-1,\sqrt2-1]\setminus\{0\}$, hľadanie primitívnej funkcie na celom intervale $[-\sqrt2-1,\sqrt2-1]$ sa potom zakladá na rovnakých úvahách ako riešenie pr. 41.1

[12]teda $t=\sqrt{\frac{5-x}{x-2}}$, potom $x=\frac{5+2t^2}{1+t^2}$, $\sqrt{7x-10-x^2}=t(x-2)=t\left(\frac{5+2t^2}{1+t^2}-2\right)$

[13]to, že výsledok, ktorý sme našli integrovaním funkcie definovanej na $(-a,a)$, je hľadanou primitívnou funkciou na intervale $[-a,a]$, vyplýva z pr. 46

[14]použitím substitúcie $x=\frac1t$ dostaneme na intervale $(1,\infty)$: $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{t^3\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$; na intervale $(-\infty,-1)$: $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{t^3\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$; to možno naraz zapísať v podobe $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\operatorname{sgn}t\cdot\int\frac{t^3\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$; na výpočet posledného integrálu použite substitúciu $\sqrt{1-t^2}=z$

[15]pre $x>0$ by mala byť úprava zrejmá; pre $x<0$ je $\operatorname{sgn}x\cdot\frac12\ln\left|\frac1x+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right|=-\frac12\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}\right|=$

$\ln\left|\dfrac{3+x+2\,\mathrm{sgn}\,(x+1)\cdot\sqrt{1-x-x^2}}{x+1}\right|+C$, ak číslo $\ln\dfrac{1}{2}$ „zahrnieme“ do integračnej konštanty C; výsledok možno upraviť do podoby $\arcsin\dfrac{2x+1}{\sqrt{5}}+\ln\left|\dfrac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{x+1}\right|+C\Big)$; **5**. $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|-\sqrt{2}\,\mathrm{sgn}\,x\cdot\ln\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{|x|}\right|+C$ $\Big($integrand rozšíriť výrazom $\sqrt{x^2+2x+2}$, výsledok možno upraviť do podoby $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|-\sqrt{2}\ln\left|\dfrac{2+x+\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\right|+C\Big)$; **6**. $\dfrac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\dfrac{3}{8}\,\mathrm{sgn}\,(x+1)\cdot\arcsin\dfrac{1}{x+1}+C$, $x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ $\Big($ak využijeme nepárnosť funkcie arcsin, môžeme výsledok napísať v tvare $\dfrac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}-\dfrac{3}{8}\arcsin\dfrac{1}{|x+1|}+C$, $x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\Big)$;

$\boxed{\mathbf{35}}$ **1**. $\dfrac{3}{5}k^5-2k^3+3k+C$, kde $k=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$; **2**. $\dfrac{1}{8}(1+x^3)^{8/3}-\dfrac{1}{5}(1+x^3)^{5/3}+C$; **3**. $-\dfrac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1+x)}+\dfrac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}+C$, $x\in[0,1)$ $\big($výsledok sme získali použitím substitúcie $\sqrt{x}=t$ a rekurentného vzťahu z návodu k pr. 32.5 [16]$\big)$; **4**. $\dfrac{x}{2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}-\dfrac{x^3}{6\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^3}+C$ $\big($použili sme Eulerovu substitúciu $\sqrt{1-x^2}=1-tx$ [17]$\big)$; **5**. $\dfrac{1}{12}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{12}+C$; **6**. $\dfrac{2}{9z}+\dfrac{1}{24z^2}+\dfrac{17}{108}\ln|z|+\dfrac{16}{27}\ln|z+3|+C$, kde $z=2\left(x+\sqrt{x^2-3x+2}\right)-3$ $\big($použili sme substitúcie $\sqrt{x^2-3x+2}=t-x$, $2t-3=z\big)$; **7**. $\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{2x}+\dfrac{3\sqrt{x^2+2x}}{2(x+2)}+C$ $\Bigg(\dfrac{x-1}{x^2+2x}$ rozložte na parciálne zlomky; pri úprave výsledku použite rovnosti $\mathrm{sgn}\,x\cdot\sqrt{\dfrac{2+x}{x}}=\dfrac{\sqrt{x(2+x)}}{x}$, $\mathrm{sgn}\,(x+2)\cdot\sqrt{\dfrac{x}{2+x}}=\dfrac{\sqrt{x(2+x)}}{x+2}\Bigg)$; **8**. $-\dfrac{2}{x}-x+\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{x}-2\arcsin x+C$ $\Big($integrand rozšírte výrazom $1+\sqrt{1-x^2}$; pri výpočte $\displaystyle\int\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$ použite substitúciu $x=\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$, alebo integrand rozšírte výrazom $\sqrt{1-x^2}$ a použite postup z pr. 34$\Big)$; **9**. $\dfrac{3}{4}\arcsin\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+C$; **10**. $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)}{1+\sqrt{1+x^4}}\right)+C$; **11**. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|+\dfrac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)+C$; **12**. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+C$ $\big($integrand rozšírte výrazom $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{2}\big)$; **13**. $\dfrac{2}{5}\left(x^{5/2}-(x+1)^{5/2}\right)+\dfrac{2}{3}\left(x^{3/2}+(x+1)^{3/2}\right)+C$ $\big($integrand rozšírte výrazom $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\big)$;

$-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}\cdot\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|=-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$

[16] použitím substitúcie $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=t$ a rekurentného vzťahu z pr. 16.1 by sme dostali výsledok $-\dfrac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}-\dfrac{5}{8}\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}+C$ pre $x\in(0,1)$ $\big(:=F(x)\big)$, hodnotou primitívnej funkcie v bode 0 je potom číslo $\lim\limits_{x\to0+}F(x)$; pozri aj pr. 48

[17] inou možnosťou je rozšíriť integrand výrazom $\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2$, na výpočet integrálu $\displaystyle\int\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$ použiť substitúciu $x=\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ $\left(\dfrac{\cos^2 t}{\sin^4 t}=\mathrm{ctg}^2 t\cdot\dfrac{1}{\sin^2 t}\right)$ a pri ďalších úpravách rovnosť $\mathrm{ctg}\arcsin x=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, dostaneme tak výsledok v tvare $\dfrac{3x^2-2-2(1-x^2)^{3/2}}{3x^3}$

$\boxed{37}$ využite integráciu per partes a skutočnosť, že primitívna funkcia k funkcii $\dfrac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ je elementárna (použitím tretej Eulerovej substitúcie možno $\displaystyle\int \frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ previesť na $\displaystyle\int R(t)\,dt$, kde R je racionálna funkcia; funkcia $S(t) := \displaystyle\int R(t)\,dt$ je elementárna, preto aj $S\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ je elementárna funkcia);

$\boxed{38}$ **1**. $\dfrac{\cos^5 x}{5} - \dfrac{\cos^3 x}{3} + C$; **2**. $\dfrac{\sin^5 x}{5} - \dfrac{2\sin^3 x}{3} + \sin x + C$; **3**. $-\dfrac{\cos^{12} x}{12} + \dfrac{\cos^{10} x}{5} - \dfrac{\cos^8 x}{8} + C$ (subst. $\cos x = t$) alebo $-\dfrac{\sin^{12} x}{12} + \dfrac{3\sin^{10} x}{10} - \dfrac{3\sin^8 x}{8} + \dfrac{\sin^6 x}{6} + C$ (subst. $\sin x = t$); **5**. $\dfrac{5x}{16} - \dfrac{\sin 2x}{4} + \dfrac{\sin^3 2x}{48} + \dfrac{3\sin 4x}{64} + C$; **6**. $\dfrac{3x}{128} - \dfrac{\sin 4x}{128} + \dfrac{\sin 8x}{1024} + C$;

$\boxed{39}$ **1**. $I_n = \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2} - \dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{\cos x}{\sin^{n-1} x}$, $n \neq 1$ $\Bigl(u' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $v = \dfrac{1}{\sin^{n-2} x}$; iná možnosť: ak do rekurentného vzťahu odvodeného v pr. 16.5 — ten platí pre všetky $n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ — dosadíme $n = -k$, dostaneme vzťah medzi I_k a $I_{k+2}\Bigr)$; **2**. $I_n = \dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2}$, $n \neq 1$;

$\boxed{40}$ **1**. $-\dfrac{\cos 6x}{12} - \dfrac{\cos 4x}{8} + C$; **2**. $\dfrac{1}{2}\cos\left(x + \dfrac{5\pi}{12}\right) - \dfrac{1}{10}\cos\left(5x + \dfrac{\pi}{12}\right) + C$; **3**. $\dfrac{1}{12}\cos(3x+a+b) - \dfrac{1}{4}\cos(x+a-b) - \dfrac{1}{2}\cos a\cos(x+b) + C$ $\Bigl($ak integrand prepíšeme do tvaru $\dfrac{1}{2}\bigl(\cos a - \cos(2x+a)\bigr)\sin(x+b)\Bigr)$ alebo $\dfrac{1}{12}\cos(3x+a+b) - \dfrac{1}{4}\cos(x+a+b) - \dfrac{1}{2}\cos x\cos(a-b) + C$ $\Bigl($ak integrand prepíšeme dotvaru $\sin x \cdot \dfrac{1}{2}\bigl(\cos(a-b) - \cos(2x+a+b)\bigr)\Bigr)$; **4**. $\dfrac{3}{2}\cos\dfrac{x}{6} - \dfrac{3}{10}\cos\dfrac{5x}{6} - \dfrac{3}{14}\cos\dfrac{7x}{6} + \dfrac{3}{22}\cos\dfrac{11x}{6} + C$; **5**. $-\dfrac{3\cos 2x}{16} + \dfrac{3\cos 4x}{64} + \dfrac{\cos 6x}{48} - \dfrac{3\cos 8x}{128} + \dfrac{\cos 12x}{192} + C$ $\Bigl($integrnad sme najprv prepísali do podoby $\sin 2x\left(\dfrac{1-\cos 4x}{2}\right)\left(\dfrac{1+\cos 6x}{2}\right)\Bigr)$;

$\boxed{41}$ **2**. $F(x) + C$, kde

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{5}}\right) + \dfrac{k\pi}{\sqrt{5}}, & \text{ak } x \in \bigl((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\bigr),\ k \in \mathbf{Z} \\[2ex] \dfrac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{5}}, & \text{ak } x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$\Bigl($ primitívnou funkciou na $\mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\pi\,;\, k \in \mathbf{Z}\}$ je $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{5}}\right) + C\Bigr)$; **3**. $\dfrac{1}{6}\ln\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} \cdot \left(\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} + 3\right)^2\right) + C$ [18] $\Bigl($definičný obor integrandu je $\mathbf{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbf{Z}\}$; výpočet integrálu $\displaystyle\int \frac{dt}{t(3+t^2)}$ možno zjednodušiť substitúciou $t = \dfrac{1}{z}\Bigr)$; **4**. $\dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right)\right| + C$ $\Bigl(\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}[(\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x)] = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 - \dfrac{1}{2}$; pri výpočte $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ použite substitúciu $x + \dfrac{\pi}{4} = t$ vyplývajúcu z rovnosti $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Bigr)$; **5**. ak $\varepsilon = 1$: $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + C$; ak $\varepsilon > 1$: $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{\varepsilon+1}\cos(x/2) + \sqrt{\varepsilon-1}\sin(x/2)}{\sqrt{\varepsilon+1}\cos(x/2) - \sqrt{\varepsilon-1}\sin(x/2)}\right| + C$ [19]; ak $\varepsilon \in (0,1)$: $F(x) + C$, kde $F(x) =$

---

[18] použitím vzorcov $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}(1 + \cos x)$, $\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}(1 - \cos x)$ možno výsledok upraviť na tvar $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3} + C$

[19] body $x_k := (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sú body odstrániteľnej nespojitosti funkcie $F_1(x) =$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{2k\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, & \text{ak} \quad x \in \big((2k-1)\pi,(2k+1)\pi\big)\,,\ k\in\mathbf{Z} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,, & \text{ak} \quad x=(2k+1)\pi\,,\ k\in\mathbf{Z} \end{cases}$$; **6**. $F(x)+C$,

kde $$F(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}(3x/2)+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}\,k\pi}{3}, & \text{ak} \quad x\in\left((2k-1)\dfrac{\pi}{3},(2k+1)\dfrac{\pi}{3}\right)\,,\ k\in\mathbf{Z} \\ (2k+1)\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}\,, & \text{ak} \quad x=(2k+1)\dfrac{\pi}{3}\,,\ k\in\mathbf{Z} \end{cases}$$;

$\boxed{\mathbf{42}}$ **1a**) $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}+C$ $\Bigg(=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right|+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}+C$; integrand rozšíriť členom $\sin x\Bigg)$ [20]; **1b**) $\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\cos x}\right|+C$ $\Bigg($integrand možno zapísať v tvare $\dfrac{2-\cos^2 x}{2\cos^2 x-1}\sin x\Bigg)$; **1c**) $\sin x-\dfrac{2}{\sin x}-6\operatorname{arctg}\sin x+C$; **1d**) $-2\operatorname{arctg}\sin x+\ln\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+C$ $\left(=-2\operatorname{arctg}\sin x+2\ln\left|\dfrac{\cos x}{1-\sin x}\right|+C\right)$ [21];

2a) $F(x)+C$, kde $$F(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)-\dfrac{k\pi}{\sqrt{2}}, & \text{ak} \quad x\in\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2},(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbf{Z} \\ \dfrac{\pi}{2}(2k+1)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), & \text{ak} \quad x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z} \end{cases}$$;

2b) $-\dfrac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}+C$ $\Bigg($integrand rozšíriť výrazom $\dfrac{1}{\cos^2 x}$; ak predpis funkcie $F_1(x)=-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{a\operatorname{tg}x+b}$, ktorá je primitívnou k funkcii $f(x)=\dfrac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}$ na množine $D(f)\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2};\,k\in\mathbf{Z}\right\}$, rozšírime výrazom $\cos x$, dostaneme predpis spojitej funkcie definovanej na $D(f)\Bigg)$; **2c**) $F(x)+C$, kde $$F(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{7}}\right)+\dfrac{2k\pi}{\sqrt{7}}, & \text{ak} \quad x\in\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2},(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\,,\ k\in\mathbf{Z} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{\sqrt{7}}, & \text{ak} \quad x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,,\ k\in\mathbf{Z} \end{cases}$$; **2d**) $\dfrac{x}{10}+\dfrac{3}{20}\ln\left(\dfrac{(\operatorname{tg}x-3)^2}{\operatorname{tg}^2x+1}\right)+C$ [22]; **2e**) $F(x)+C$, kde

---

$\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}(x/2)}\right|$, ktorá je primitívna k funkcii $f(x)=\dfrac{1}{1+\varepsilon\cos x}$ na množine $D(f)\setminus\{(2k+1)\pi\,;\,k\in\mathbf{Z}\}$; ak logaritmovaný zlomok v predpise funkcie F_1 rozšírime výrazom $\cos\dfrac{x}{2}$, dostaneme predpis spojitej funkcie F definovanej na množine $D(f)$; predpis funkcie F možno upraviť na tvar $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\dfrac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\,\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|$, ak v ňom logaritmovaný zlomok rozšírime výrazom $\sqrt{\varepsilon+1}\,\cos\dfrac{x}{2}+\sqrt{\varepsilon-1}\,\sin\dfrac{x}{2}$

[20]hoci pre $R(-u,v)=-R(u,v)$ očakávame spravidla od nahradenia substitúcie $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ substitúciou $\cos x=t$ zjednodušenie výpočtu, je to v tomto prípade naopak: substitúcia $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ prevedie daný integrál na $\displaystyle\int\frac{1+t^2}{2t}\,dt$ $\left(=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(\frac{1}{t}+t\right)dt=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C\right)$

[21]vzorec $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$ možno odvodiť z Moivreovej vety „$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$, $n\in\mathbf{N}$, $\alpha\in\mathbf{R}$“, ak ľavú stranu rozpíšeme podľa vzorca $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ a nájdeme reálnu časť tohto komplexného výrazu

[22]použitím vzťahu $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2x+1}=\cos^2 x$, $x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, možno výsledok upraviť na tvar

$F(x) = \begin{cases} F_1(x) + \dfrac{k\pi}{\sqrt{3}}\,, & \text{ak } x \in D(F_1) \cap \left((2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\,,\ k \in \mathbf{Z} \\ (2k+1)\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}\,, & \text{ak } x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$, pričom $F_1(x) = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}}$ $\Big($integrand rozšíriť výrazom $\dfrac{1}{\cos^3 x}$; definičný obor integrandu je $D := \mathbf{R} \setminus \left\{(4k-1)\dfrac{\pi}{4}\,;\, k \in \mathbf{Z}\right\}$ [23], F_1 je primitívnou funkciou na množine $D \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,;\, k \in \mathbf{Z}\right\}\Big)$ [24];

2f) $\dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x| + \dfrac{1}{6}\operatorname{tg}^3 x + C$;

$\boxed{43}$ **1**. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$; **2**. $\dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x} + C$; **3**. $\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{3\cos^3 x} + C$ (čitateľ integrandu — tj. číslo 1 — možno zapísať v tvare $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$ a integrand potom napísať ako súčet troch zlomkov) ; **4**. $\dfrac{1}{4}\ln(3 + 4\sin^2 x) + C$; **5**. $F(x) + C$, kde $F(x) = \begin{cases} F_1(x)\,, & \text{ak } x \in D(F_1) \\ 0\,, & \text{ak } x = (2k+1)\pi\,,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$, pričom $F_1(x) = \dfrac{2}{9\operatorname{tg}(x/2) + 3}$; **6**. $F(x) + C$, kde

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{(c-a)\operatorname{tg}(x/2)+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} + \dfrac{2k\pi}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}, & \text{ak } x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbf{Z} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\,, & \text{ak } x = (2k+1)\pi\,,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$\Big($definičným oborom integrandu je $\mathbf{R}$: $a\cos x + b\sin x + c = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) + c = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) + c > 0$; číslo φ je určené podmienkami $\sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)$; **7**. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3\sin x - 5\cos x}{\sin x - \cos x}\right| + C$; **8**. $F(x) + C$, kde $F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{a}{b}\operatorname{tg} x\right) + \dfrac{k\pi}{|ab|}\,, & \text{ak } x \in \left((2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\,,\ k \in \mathbf{Z} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{2|ab|}\,, & \text{ak } x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$; **9**. $F(x) + C$, kde

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \dfrac{\operatorname{tg} x}{4(2+\operatorname{tg}^2 x)} + k\pi\right)\,, & \text{ak } x \in \left((2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\,,\ k \in \mathbf{Z} \\ \dfrac{3(2k+1)\pi}{8\sqrt{2}}\,, & \text{ak } x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$;

10. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{3\operatorname{tg}^2 x - 1}\right| + C$ $\Big($možno použiť substitúciu $\sin^2 x = t$, v prípade substitúcie $\operatorname{tg} x = t$ možno na výpočet $\displaystyle\int \frac{dt}{t(1-3t^2)}$ použiť substitúciu $t = \dfrac{1}{z}\Big)$; **11**. $F(x) + C$, kde $F(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2}\right) + k\pi\,, & \text{ak } x \in \left((2k-1)\dfrac{\pi}{4}, (2k+1)\dfrac{\pi}{4}\right)\,,\ k \in \mathbf{Z} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{2}\,, & \text{ak } x = (2k+1)\dfrac{\pi}{4}\,,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$ $\Big(\sin^6 x + \cos^6 x =$

$\dfrac{x}{10} + \dfrac{3}{10}\ln|\sin x - 3\cos x| + C$, pričom tento predpis uvažujeme len na definičnom obore integrandu (pozri poznámku 2 pred vetou 3)

[23] platí $\sin^3 + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\left(1 + \dfrac{\sin 2x}{2}\right)$

[24] použitím substitúcie $x + \dfrac{\pi}{4} = t$ a potom $\operatorname{ctg} t = z$ by sme dostali výsledok v tvare $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) - \dfrac{1}{6}\ln\left(3\operatorname{ctg}^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1\right) + C$