2. Riemannov určitý integrál

$\boxed{\mathbf{59}}$ nie; napr. $D_n = \left\{a\,,\ a+\dfrac{b-a}{n},\ a+\dfrac{b-a}{n-1},\ \ldots,\ a+\dfrac{b-a}{2},\ b\right\}$ (samozrejme platí ale obrátená implikácia: ak $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(D_n)=0$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=\infty$);

$\boxed{\mathbf{60}}$ **<u>1</u>.** ak $D_n=\left\{0\,,\ \dfrac{1}{n},\ \dfrac{2}{n},\ \ldots,\ \dfrac{3n-1}{n},\ 3\right\}$, tak $L(x,D_n)=\dfrac{1}{n}\Big(0+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{3n-1}{n}\Big)=$ [1] $\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{(3n-1)3n}{2}=\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2n}$; $U(x,D_n)=\dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{3n}{n}\Big)=\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2n}$; pretože $\nu(D_n)=\dfrac{1}{n}\to 0$ pre $n\to\infty$, je podľa dôsledku vety 2 $\underline{\int_0^3} x\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}L(x,D_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2n}\Big)=\dfrac{9}{2}$; $\overline{\int_0^3} x\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2n}\Big)=\dfrac{9}{2}$; pretože $\underline{\int_0^3} x\,dx=\overline{\int_0^3} x\,dx$, je funkcia $f(x)=x$ riemennovsky integrovateľná na intervale $[0,3]$;

<u>2</u>. ak $D_n=\left\{0\,,\ \dfrac{1}{n},\ \ldots,\ \dfrac{n-1}{n},\ 1\right\}$, tak pre $a>1$ je $L(a^x,D_n)=\dfrac{1}{n}(1+a^{1/n}+\cdots+a^{(n-1)/n})=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}$ [2], $U(a^x,D_n)=\dfrac{1}{n}\,a^{1/n}\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}$, $\underline{\int_0^1} a^x\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}\Big)=(a-1)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{a^{1/n}-1}{1/n}}=\dfrac{a-1}{\ln a}$ [3]; $\overline{\int_0^1} a^x\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{n}\,a^{1/n}\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}\Big)=\dfrac{a-1}{\ln a}$; pre $a=1$ je $L(1,D_n)=U(1,D_n)=1$; $\underline{\int_0^1} 1\,dx=\overline{\int_0^1} 1\,dx=1$; pre $a\in(0,1)$ je $L(a^x,D_n)=\dfrac{1}{n}\,a^{1/n}\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}$, $U(a^x,D_n)=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}$, $\underline{\int_0^1} a^x\,dx=\overline{\int_0^1} a^x\,dx=\dfrac{a-1}{\ln a}$;

<u>3</u>. ak $D_n=\left\{0\,,\ \dfrac{\pi}{2n},\ \dfrac{2\pi}{2n},\ \dfrac{3\pi}{2n},\ \ldots,\ \dfrac{(n-1)\pi}{2n},\ \dfrac{\pi}{2}\right\}$ [4], tak $L(\sin,D_n)=\dfrac{\pi}{2n}\Big(\sin 0+\sin\dfrac{\pi}{2n}+\sin\dfrac{2\pi}{2n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\Big)=\dfrac{\pi}{2n}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4n}-\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{4n}}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}}$ [5]; $U(\sin,D_n)=$

---

[1] použili sme vzorec $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

[2] použili sme vzorec $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{q^n-1}{q-1}$, $q\neq 1$

[3] pripomeňme, že $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{a^u-1}{u}=\ln a$, $a>0$

[4] teda interval $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ rozdelíme na n intervalov dĺžky $\dfrac{\pi}{2n}$

[5] použili sme vzorec $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin k\alpha=\Bigg(=\dfrac{1}{\sin(\alpha/2)}\Big(\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha+\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin 2\alpha+\cdots+\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin k\alpha\Big)=\dfrac{1}{\sin(\alpha/2)}\Big[\dfrac{1}{2}\Big(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{3\alpha}{2}\Big)+\dfrac{1}{2}\Big(\cos\dfrac{3\alpha}{2}-\cos\dfrac{5\alpha}{2}\Big)+\cdots+\dfrac{1}{2}\Big(\cos\dfrac{2k-1}{2}\alpha-\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha\Big)\Big]\Bigg)=$ $=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, $\alpha\neq 2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$

$\dfrac{\pi\left(\cos\dfrac{\pi}{4n}-\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{4n}\right)}{4n\sin\dfrac{\pi}{4n}}$; $\underline{\int_0^{\pi/2}}\sin x\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4n}-\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{4n}}{\dfrac{\sin(\pi/4n)}{\pi/4n}} = 1$ [6];

$\overline{\int_0^{\pi/2}}\sin x\,dx = 1$; teda funkcia sin je riemannovsky integrovateľná na intervale $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

4. najprv dokážte, že pre každé delenie D intervalu $[-2,-1]$ platí $L(f,D) = L(x,D)$, $U(f,D) = U(-x,D)$; ak $D_n = \left\{-2\,,\ -2+\dfrac{1}{n},\ -2+\dfrac{2}{n},\ \ldots,\ -2+\dfrac{n-1}{n},\ -1\right\}$, tak $L(f,D_n) = \dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{2n}{n}-\dfrac{2n-1}{n}-\cdots-\dfrac{n+1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n^2}((n+1)+\cdots+(2n-1)+2n) =$ [7] $-\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{2n(2n+1)}{2}-\dfrac{n(n+1)}{2}\right) = -\dfrac{3n^2+n}{2n^2}$, $U(f,D_n) = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{2n(2n+1)}{2}-\dfrac{n(n+1)}{2}\right) = \dfrac{3n^2+n}{2n^2}$; $\underline{\int_{-2}^{-1}}f(x)\,dx = -\dfrac{3}{2}$, $\overline{\int_{-2}^{-1}}f(x)\,dx = \dfrac{3}{2}$, teda f nie je riemannovsky integrovateľná na intervale $[-2,-1]$;

61 napr. $f(x) = \begin{cases} \alpha\,, & \text{ak } x \in \mathbf{Q}\cap[0,1] \\ \beta\,, & \text{ak } x \in [0,1]\setminus\mathbf{Q} \end{cases}$;

62 **1.** je (f je spojitá na $[-1,1]$); **2.** je (f je monotónna na $[0,1]$; integrovateľnosť f na $[0,1]$ vyplýva aj z toho, že množina $\{1/2^n; n\in\mathbf{N}\}$ jej bodov nespojitosti má Jordanovu mieru nula); **3.** je (na túto funkciu sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6; funkcia $\overline{f} = \begin{cases} f(x)\,, & \text{ak } x\in(0,1] \\ 0 & \text{ak } x = 0 \end{cases}$ je monotónna, a teda riemannovsky integrovateľná na intervale $[0,1]$; integrovateľnosť funkcie $\overline{f}$ na $[0,1]$ vyplýva aj z toho, že množina $\{1/n\,;\ n = 2,3,\ldots\}$ jej bodov nespojitosti má Jordanovu mieru nula [8]); **4.** je (aj na túto funkciu sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6; pre ľubovoľné $A\in\mathbf{R}$ platí: množina $\{0\}\cup\{1/n\,;\ n\in\mathbf{N}\}$ bodov nespojitosti funkcie $\overline{f}_A(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{ak } x\in(0,2] \\ A\,, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$ má Jordanovu mieru nula, teda $\overline{f}_A$ je riemannovsky integrovateľná na $[0,2]$); **5.** je (množina $\{0\}\cup\{1/n\,;\ n = 2,3\ldots\}$ bodov nespojitosti funkcie $f|[0,1]$ má Jordanovu mieru nula); **6.** nie je $\left(\text{pre ľubovoľný uzavretý ohraničený interval } I = [a,b] \text{ je } \underline{\int_a^b}\chi(x)\,dx = 0\,,\ \overline{\int_a^b}\chi(x)\,dx = b-a\right)$; **7.** nie je (f totiž nie je ohraničená na intervale $[-1,1]$, pozri tiež poznámku za vetou 4);

63 dokážte, že množina $\{x_n\,;\ n\in\mathbf{N}\}$ má Jordanovu mieru nula;

64 použijeme vetu 3; pretože pre ľubovoľné delenie D intervalu $I = [a,b]$ je $L(r,D) = 0$, stačí pre každé $\varepsilon > 0$ nájsť také delenie D_ε, pre ktoré $U(r,D_\varepsilon) < \varepsilon$; nech je teda dané $\varepsilon > 0$; množina $M := \left\{x\in I\,;\ r(x) > \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\right\}$ je konečná, preto existuje konečný počet po dvoch disjunktných podintervalov $I_1\,,\ \ldots,\ I_n$ intervalu I taký, že súčet ich dĺžok je menší než $\dfrac{\varepsilon}{2}$ a $M\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$; ak je delenie D intervalu I vytvorené bodmi a, b a koncovými bodmi intervalov $I_1\,,\ \ldots,\ I_n$ (usporiadanými podľa veľkosti), tak $U(r,D) < \varepsilon$ $\Big($pre $x\in I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_n$ iste platí

---

[6] pripomeňme, že $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$

[7] použili sme vzorec $1+2+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

[8] keby sme namiesto funkcie $\overline{f}$ zvolili funkciu $\overline{f}_A(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{ak } x\in(0,1] \\ A\,, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, kde $A\neq 0$ je dané číslo, bola by množinou bodov nespojitosti funkcie $\overline{f}_A$ množina $\{0\}\cup\{1/n\,;\ n = 2,3,\ldots\}$, ktorá má tiež Jordanovu mieru nula

$r(x) \le 1$ a pre $x \in I \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_n)$ je $r(x) \le \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, preto $U(r, D) \le 1 \cdot d_1 + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} d_2$, kde d_1 je súčet dĺžok intervalov $I_1, \ldots, I_n$ a d_2 je súčet dĺžok zvyšných intervalov delenia D (zrejme $d_2 \le (b-a)$), preto $U(r, D) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon \Big)$;

65 1. ak $D_n = \left\{ -1, -\dfrac{n-1}{n}, -\dfrac{n-2}{n}, \ldots, 0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{2n-1}{n}, 2 \right\}$ a za ξ_i zvolíme vždy ľavý koncový bod príslušného intervalu, tak $S_n = \dfrac{1}{n}\left[1 + \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 + 0^2 + \cdots + \left(\dfrac{2n-1}{n}\right)^2\right] = \dfrac{1}{n^3}[(n^2 + \cdots + 1^2) + (1^2 + \cdots + (2n-1)^2)] = \dfrac{1}{n^3}\left(\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \dfrac{1}{6}(2n-1)2n(4n-1)\right)$ [9], $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3$;

2. ak $D_n = \left\{a, a + \dfrac{b-a}{n}, a + 2\dfrac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1)\dfrac{b-a}{n}, b\right\}$ a ξ_i zvolíme podľa návodu, tak $S_n = \dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{1}{a\left(a + \frac{b-a}{n}\right)} + \dfrac{1}{\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right)} + \cdots + \dfrac{1}{\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\left(a + n\frac{b-a}{n}\right)}\right) = \dfrac{b-a}{n}\left[\dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a + \frac{b-a}{n}}\right) + \dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{1}{a + \frac{b-a}{n}} - \dfrac{1}{a + 2\frac{b-a}{n}}\right) + \cdots + \dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{1}{a + (n-1)\frac{b-a}{n}} - \dfrac{1}{b}\right)\right] = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$;

66 pretože platí $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} \sin 50\xi_k \Delta x_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ aj $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \int_0^3 \sin 50x \, dx \le \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, je $\left| \int_0^3 \sin 50x \, dx - \sum\limits_{k=1}^{n} \sin 50\xi_k \Delta x_k \right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k$; stačí teda nájsť $\delta > 0$ tak, aby z nerovnosti $\Delta x_k < \delta$ vyplývalo $M_k - m_k < \dfrac{0.001}{3}$ $(k = 1, \ldots, n)$; f je spojitá na $[x_{k-1}, x_k]$, preto $M_k = \sin 50\eta_k$, $m_k = \sin 50\vartheta_k$ pre niektoré η_k, $\vartheta_k \in [x_{k-1}, x_k]$; podľa Lagrangeovej vety $M_k - m_k = |M_k - m_k| = |\sin 50\eta_k - \sin 50\vartheta_k| = |50 \cos 50c||\eta_k - \vartheta_k| \le 50|\eta_k - \vartheta_k| \le 50\Delta x_k$; preto stačí zvoliť $\delta = \dfrac{0.001}{150}$;

67 1. limitovaný výraz je integrálnym súčtom riemannovsky integrovateľnej funkcie f pri delení $D_n = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$, pritom $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu $[0, 1]$;

68 napr. Dirichletova funkcia χ, ak v každom čiastočnom intervale každého delenia zvolíme za ξ iracionálne číslo;

69 nie je; $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je totiž normálna postupnosť delení;

70 za daných predpokladov možno nájsť normálnu postupnosť integrálnych súčtov $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $S_n = 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$; príkladom sú Dirichletova funkcia χ a funkcia $f(x) \equiv 0$ (alebo

---

[9] použili sme vzorec $\sum\limits_{i=1}^{N} i^2 = \dfrac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$; vzorce pre $\sum\limits_{i=1}^{N} i^k$ $(k \in \mathbf{N})$ možno odvodiť nasledovne: platí $\sum\limits_{i=1}^{N} i^k = P_{k+1}(N)$, kde $P_{k+1}(N) = a_{k+1}N^{k+1} + a_k N^k + \cdots + a_0$ je polynóm stupňa $k+1$; neznáme koeficienty $a_{k+1}, \ldots, a_0$ nájdeme z podmienok $P_{k+1}(N+1) - P_{k+1}(N) = (N+1)^k$, $P_{k+1}(1) = 1$; iné odvodenie pozri napr. v [27, str. 51]

Dirichletova a Riemannova funkcia);

$\boxed{71}$ napr. $f(x) = \begin{cases} x-a\ , & \text{ak} \quad x \in \mathbf{Q} \\ -(x-a)\ , & \text{ak} \quad x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$;

$\boxed{72}$ súčin áno (ak napr. za jednu z funkcií zvolíme $f(x) \equiv 0$ a druhá bude ľubovoľná ohraničená riemannovsky neintegrovateľná funkcia, iným príkladom je súčin Dirichletovej a Riemannovej funkcie [10]); súčet nie;

$\boxed{73}$ využite rovnosť $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ a analogickú rovnosť pre $\min\{f,g\}$;

$\boxed{74}$ nie (príslušný príklad už musíte nájsť sami);

$\boxed{75}$ stačí dokázať $f(x_0) > 0$ pre niektoré $x_0 \in [a,b]$ a využiť spojitosť funkcie f ; z výroku $\forall\, x \in [a,b] \,:\, f(x) \le 0$ by vyplývalo $\int_a^b f(x)\,dx \le 0$;

$\boxed{76}$ $\underline{\mathbf{1}}.$ nech x_0 je vnútorný bod intervalu $[a,b]$ (v prípade $x_0 = a$, $x_0 = b$ je dôkaz obdobný); iste existujú $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tak, že $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$, pričom $\forall\, x \in O_\delta(x_0) \,:\, f(x) \ge \varepsilon$ (stačí zvoliť napr. $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$ a využiť spojitosť funkcie f v bode x_0); z nerovností $\forall\, x \in [a, x_0-\delta] \,:$ $f(x) \ge 0$, $\forall\, x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \,:\, f(x) \ge \varepsilon$, $\forall\, x \in [x_0+\delta, b] \,:\, f(x) \ge 0$ vyplýva $\int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx \ge 0$, $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \ge 2\delta\varepsilon$, $\int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx \ge 0$, teda $\int_a^b = \int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^b \ge 2\delta\varepsilon > 0$;

$\boxed{77}$ $\underline{\mathbf{1}}.$ vyplýva z nerovnosti $\forall\, x \in (0,\pi) \,:\, 0 < \dfrac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} < \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$ a z tvrdenia pr. 76.2;

$\boxed{78}$ $\underline{\mathbf{1}}.$ druhý; vyplýva to z nerovnosti $\forall\, x \in (0,1) \,:\, e^{-x}\sin x < e^{-x^2}\sin x$ a z tvrdenia pr. 76.2; $\underline{\mathbf{2}}.$ (na obidva porovnávané integrály sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6) druhý; vyplýva to z nerovnosti $\forall\, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \,:\, \dfrac{\sin x}{x} > 0$, z tvrdenia pr. 76.2 a z aditívnej vlastnosti Riemannovho integrálu $\left(\int_0^\pi = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^\pi\right)$;

$\boxed{79}$ označme $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$, potom f^+ , f^- sú spojité funkcie (pozri pr. I.228) a $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$; označme $A := \int_a^b f^+(x)\,dx$, $B := \int_a^b f^-(x)\,dx$; ak $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ $\left(\text{postup pre } \int_a^b f(x)\,dx \le 0 \text{ je obdobný}\right)$, tak zo zadania vyplýva $A - B = A + B$, teda $B = 0$; odtiaľ na základe pr. 76.1 vyplýva $f^-(x) = 0$ pre všetky $x \in [a,b]$;

$\boxed{80}$ napr. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, g je Riemannova funkcia;

$\boxed{81}$ $\underline{\mathbf{1}}.$ $\dfrac{45}{4}$; $\underline{\mathbf{2}}.$ $\dfrac{\pi}{3}$; $\underline{\mathbf{3}}.$ $\dfrac{\pi}{6}$; $\underline{\mathbf{4}}.$ 1 $\left(\text{využite rovnosť } \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\alpha} = \operatorname{ch}\alpha\right)$; $\underline{\mathbf{6}}.$ 2 $\left(\text{pozor: } \sqrt{x^{2/3}} = |x|^{1/3}\right)$; $\underline{\mathbf{7}}.$ ak $b > a \ge 0 \,:\, b - a$; ak $b > 0 > a \,:\, b + a$; ak $0 \ge b > a \,:\, a - b$; to možno „naraz“ zapísať v tvare $|b| - |a|$; $\underline{\mathbf{8}}.$ $100\sqrt{2}$ $\left(\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}|\sin x|\right)$; $\underline{\mathbf{9}}.$ $\ln(n!)$ $(\, = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n\,)$; $\underline{\mathbf{10}}.$ pre $m = n = 0$ a pre $m \ne \pm n \,:\, 0$; pre $m = n \ne 0 \,:\, \pi$; pre $m = -n \ne 0 \,:\, -\pi$; $\underline{\mathbf{12}}.$ $\dfrac{\pi}{2ab}$;

$\boxed{82}$ $\underline{\mathbf{1a)}}$ funkcia $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je neohraničená na $[-1,1] \setminus \{0\}$, teda nemôže byť riemannovsky

---

[10] pozri tiež pr. 165; nie je ťažké dokázať nasledujúce tvrdenie zovšeobecňujúce obidva uvedené príklady: ak $g \in \mathcal{R}[a,b]$, $g \ge 0$, pričom $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, a $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia, tak $fg \in \mathcal{R}[a,b]$ a $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$

integrovateľná na $[-1,1]$[11] $\Big($preto symbol $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ nemá zmysel$\Big)$;

1b) pretože $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \neq 0$, je (v zmysle poznámky 2 za vetou 6) $\int_{-1}^{1}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' dx = \int_{-1}^{1} -\frac{1}{1+x^2}\,dx$, funkcia $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ je primitívna k funkcii $-\frac{1}{1+x^2}$ len na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, preto na $[-1,1]$ nie sú splnené predpoklady vety 11 $\Big($tie sú splnené pri nasledujúcom výpočte:

$$\int_{-1}^{1}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' dx = \int_{-1}^{1} -\frac{dx}{1+x^2} = [-\operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2}\,;$$

pomocou funkcie $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ možno integrál $\int_{-1}^{1}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' dx$ vypočítať nasledovne:

$$\int_{-1}^{1} = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} = \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0} + \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]_{0}^{1} = -\frac{\pi}{2}\,,$$

pretože na intervale $[-1,0]$, resp. $[0,1]$ sú v tomto prípade splnené všetky predpoklady vety 11$\Big)$;

1c) funkcia $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\operatorname{tg} x)$ je primitívna k funkcii $\frac{1}{1+2\sin^2 x}$ len na $\mathbf{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,;\, k\in\mathbf{Z}\right\}$, teda na intervale $[0,\pi]$ nie sú splnené všetky predpoklady vety 11; tie sú v tomto prípade splnené len na intervaloch $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ a $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, preto

$$\int_{0}^{\pi} = \int_{0}^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\operatorname{tg} x)\right]_{0}^{\pi/2} + \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\operatorname{tg} x)\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,;$$

2. $\frac{2}{3}$ $\Big(= \left[\frac{1}{1+2^{1/x}}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{1+2^{1/x}}\right]_{0}^{1}$; pri overovaní predpokladov vety 11 v tomto prípade nezabudnite preveriť, či je funkcia $\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right)'$ riemannovsky integrovateľná na $[-1,1]\Big)$;

83 **2.** $\frac{1}{p+1}$ $\left(=\int_0^1 x^p\,dx\right)$; **3.** $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$; **4.** $\ln 2$ $\left(=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\right)$; **5.** 64 $\left(=\int_0^4 x^3\,dx\right)$; **6.** 2 $\left(=\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}\right)$; **7.** $\frac{\pi}{6}$ $\left(=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\right)$; **8.** $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$; **9.** $\frac{4}{e}$ $\left(= e^{\int_1^2 \ln x\,dx}\right.$, pozri aj pr. 67.2$\Big)$; **10.** $\frac{\ln 3}{3}$ $\left(=\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{1+x^3}\right)$;

84 **1.** $0.3125 < I_1 < 0.409\,7\overline{2}$; **2.** $0.493\,055\,055 < I_2 < 0.493\,107\,639$; **3.** $0.126\,100\,97 < I_3 < 0.126\,171\,46$;

85 jednotlivé nerovnosti sú dôsledkom tvrdenia z pr. 76.2 a nasledujúcich nerovností: **1.** $\frac{x^{19}}{\sqrt{2}} < \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}} < x^{19}$, $x\in(0,1)$; **2.** $\frac{4}{9}e^x < \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}e^x$, $x\in(0,1)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ (stačí nájsť maximum a minimum funkcie $(x+1)(2-x)$, $x\in[0,1]$); **3.** $0 < \frac{e^{-5x}}{x+20} < \frac{e^{-5x}}{20}$, $x\in(0,200]$; **4.** $1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, $n\ge 1$;

[11] funkcia f má hneď dve „chyby“: nie je definovaná v bode 0 a nie je ohraničená, z nich podstatnejšia je v tomto prípade jej neohraničenosť (porovnaj s poznámkou 2 za vetou 6 a poznámkou za vetou 4)

$\boxed{\mathbf{86}}$ $\displaystyle\int_a^b f''(x)\,dx = f'(b) - f'(a) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 1 - \sqrt{3}$;

$\boxed{\mathbf{87}}$ ak $M \subset \{a,b\}$, niet čo dokazovať; ak $M \not\subset \{a,b\}$ a $M\setminus\{a,b\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, pričom $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, tak $\displaystyle\int_a^b = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \cdots + \int_{x_n}^b = [F(x)]_a^{x_1} + [F(x)]_{x_1}^{x_2} + \cdots + [F(x)]_{x_n}^b$;

$\boxed{\mathbf{88}}$ **1.** napr. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)$; menej triviálnym príkladom je Riemannova funkcia r (pri dôkaze faktu, že r nemá na $[a,b]$ primitívnu funkciu, využite tvrdenie z poznámky [19] k pr. 57; **2.** nie, napr. $f = F'$, kde $F(x) = \begin{cases} x^{3/2}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{ak } x \in (0,1] \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$;

$\boxed{\mathbf{89}}$ **2.** 0 $\left(= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^0 \frac{dt}{1+t^2}\right)$; **3.** $\dfrac{1}{6}$; **4.** $2 - \dfrac{\pi}{2}$; **6.** $8 + \dfrac{3\sqrt{3}\pi}{2}$; **7.** $\dfrac{\pi a^4}{16}$; **8.** $\dfrac{\pi}{4}$ $\Big($použite substitúciu $x = a\sin t$ a potom substitúciu $t + \dfrac{\pi}{4} = z$, pritom využite vzorec $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)\Big)$; **9.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}$ $\left(= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}{\frac{1+\sqrt{50}}{14}}\right)\right)$; **10.** $\dfrac{4}{3}$ $\Big($pozor: $\sqrt{1-\cos^2 x} = |\sin x|\Big)$; **11.** $4n$ $\left(\left|\left(\cos\ln\dfrac{1}{x}\right)'\right| = \dfrac{|\sin\ln x|}{x}\right.$, potom subst. $\left.\ln x = t\right)$;

$\boxed{\mathbf{90}}$ **1a)** áno; **1b)** áno; **1c)** áno (všimnite si, že v pr. 90.1a,b, tj. pre $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, resp. pre $t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, „prebieha“ funkcia $\sin t$ všetky hodnoty medzi 0 a 1 (teda hodnoty $\sin t$ presne „vyplnia“ interval $[0,1]$, na ktorom chceme integrovať funkciu $\sqrt{1-x^2}$), zatiaľčo v pr. 90.1c je $\sin\left(\left[0, \dfrac{5\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$; predpoklady vety 12 sú splnené vo všetkých troch prípadoch); **2a)** áno; **2b)** nie $\Big($funkcia $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ nie je spojitá na intervale $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] = \sin\left(\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]\right)$, teda nie sú splnené všetky predpoklady vety 12$\Big)$; **3.** nie (neexistuje $\beta \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo $\sin\beta = 3$, teda pri ľubovoľnej voľbe α, β „nevyplnia“ hodnoty $\sin t$, $t \in [\alpha,\beta]$, interval $[0,3]$);

$\boxed{\mathbf{91}}$ **1.** funkcia $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ nie je definovaná na celom intervale $[0,\pi]$ (a nemožno ju ani „spojite dodefinovať“ [12]), preto pri uvedenom výpočte nie sú splnené predpoklady vety 12 $\Big($správny je napr. nasledujúci výpočet:

$$\int_0^\pi = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^\pi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)\right]_{\pi/2}^\pi = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad {}^{13}\Big);$$

---

[12] vetu 12 možno totiž použiť aj v prípade, keď funkcia φ síce nie je definovaná v konečnom počte bodov intervalu $[\alpha,\beta]$, ale existuje funkcia $\overline{\varphi}\colon[\alpha,\beta] \to \mathbf{R}$ vyhovujúca predpokladom vety 12 (a teda spojitá) taká, že $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pre všetky $x \in D(\varphi)$ (takto možno použiť napr. substitúciu $t = x^3\sin\dfrac{1}{x}$ na výpočet integrálu $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)' dx$; presnú formuláciu uvedeného tvrdenia a jeho dôkaz prenechávame čitateľovi)

[13] všimnime si, že pri výpočte integrálov $\int_0^{\pi/2}$ a $\int_{\pi/2}^{\pi}$ používame substitúciu $t = \operatorname{tg} x$ len ako substitúciu pre neurčitý integrál (vetu 12 nemožno použiť), musíme sa teda „vracať k pôvodnej integračnej premennej“; nebude to potrebné, ak okrem Riemannovho integrálu zavedieme aj Newtonov integrál (pozri poznámku pred odsekom 2.6) alebo nevlastný Riemannov integrál (pozri napr. [1])

2. funkcia $\varphi(t)=\dfrac{1}{t}$ nie je definovaná na celom intervale $[-1,1]$ (a bod 0 je jej neodstrániteľný bod nespojitosti), preto nie sú splnené predpoklady vety 12 pri uvedenom výpočte;

$\boxed{92}$ **1**. použite substitúciu $x=\dfrac{1}{t}$; **2**. použite substitúciu $x=\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ $\Big($na integrál na pravej aj ľavej strane rovnosti sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6, ako treba dodefinovať funkcie $\dfrac{\operatorname{arctg}}{x}$ a $\dfrac{t}{\sin t}$, aby boli splnené predpoklady vety 12?$\Big)$;

$\boxed{93}$ **1**. $\displaystyle\int_{-k}^{k}=\int_{-k}^{0}+\int_{0}^{k}$, na výpočet $\displaystyle\int_{-k}^{0}$ použite substitúciu $x=-t$; **3a**) použite substitúciu $x=\dfrac{\pi}{2}-t$; **3b**) použite substitúciu $x=\pi-t$;

$\boxed{94}$ **1**. 0 (vyplýva to z tvrdenia pr. 93.1); **2**. $\dfrac{\pi}{2}$ $\Big($využite, že podľa tvrdenia z pr. 93.1 je $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x^2\sin x\,dx=0\Big)$; **3**. $\dfrac{\pi^2}{4}$ (použite pr. 93.3b); **5**. a $\Big(\displaystyle\int_{-a}^{a}=\int_{-a}^{0}+\int_{0}^{a}$, na výpočet $\displaystyle\int_{-a}^{0}$ použite substitúciu $x=-t\Big)$; **6**. 1;

$\boxed{95}$ **1**. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{e}{2}$; **2**. $2-\dfrac{2}{e}$; **3**. $\dfrac{1}{27}(5e^3-2)$; **4**. $\dfrac{1}{(n+1)^2}[(n+1)n^{n+1}\ln n-n^{n+1}+1]$; **5**. $-\dfrac{2}{13}\cdot(e^{-2\pi}+1)$; **6**. $\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$ $\Big($pre funkcie $f(x)=x$, $g(x)=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$ nie sú splnené predpoklady vety 13 — funkcia $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$ nie je definovaná v bode 0 (a nie je ohraničená na $(0,3]$, teda nemôže byť riemannovsky integrovateľná na $[0,3]$), napriek tomu $fg'\in\mathcal{R}[0,3]$ a platí (2.2) z vety 13, zdôvodnenie prenechávame na čitateľa$\Big)$; **7**. 1 $\Big($v tomto prípade nemožno použiť vetu 13, pretože pre $f(x)=x$, $g(x)=\arccos x$ neplatí $fg'\in\mathcal{R}[0,1]$, symbol $\displaystyle\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx$ teda nemá zmysel; metódu per partes tu možno použiť len pre neurčité integrály [14]$\Big)$; **8**. $\dfrac{\pi^2}{4}-2$ (na tento príklad sa vzťahuje podobná poznámka ako na pr. 95.7);

$\boxed{96}$ **2**. $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (rekurentný vzťah $I_n=\dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$ možno odvodiť samostatne alebo použiť substitúciu $x=\cos t$ a využiť riešenie pr. 96.1); **3**. $(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\dfrac{1}{2k-1}$ $\Big(I_n=\dfrac{1}{2n-1}-I_{n-1}\Big)$; **4**. $(-1)^n\dfrac{n!}{(m+1)^{n+1}}$ $\Big($na integrál $I_{m,n}$ $(m,n\in\mathbf{N})$ sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6; rekurentný vzťah $I_{m,n}=-\dfrac{n}{m+1}I_{m,n-1}$ sme odvodili použitím metódy per partes pre neurčitý integrál — funkcie $f'(x)=x^m$, $g(x)=\ln^n x$ totiž nevyhovujú predpokladom vety 13; rovnosť $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x=0$ možno dokázať použitím l'Hospitalovho pravidla$\Big)$; **5**. $(-1)^{n+1}\ln\sqrt{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\frac{1}{2k}$ $\Big(I_n=-\dfrac{1}{2n}-I_{n-1}\Big)$;

$\boxed{97}$ na vyjadrenie integrálu $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$ použite n–krát za sebou metódu per partes;

$\boxed{98}$ **1**. $\dfrac{1}{\sin\alpha}\Big(\operatorname{arctg}\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\operatorname{arctg}\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big)$ $\Big(=\dfrac{\pi}{2\sin\alpha}$, ak použijeme vzorec $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\Big)$; **2**. $\ln\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$; **3**. $\dfrac{14}{15}$; **4**. $\dfrac{29}{270}$; **5**. $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

---

[14] aj v tomto prípade by sa podobne ako v riešení pr. 91.1 situácia zjednodušila zavedením Newtonovho alebo nevlastného Riemannovho integrálu, pozri tiež riešenie tohto príkladu v poznámke pred odsekom 2.6

6. $\ln\left(2\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-1}\right)$ $\Big($ak ste použili substitúciu $x = \dfrac{1}{t}$, uvedomte si, že $\sqrt{t^2} = -t$ pre $t < 0$; použitím substitúcie $x = \operatorname{tg} t$ dostaneme výsledok v tvare $\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\operatorname{arctg} 1}{2}\right) - \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\Big)$; **7**. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$; **8**. $2\sqrt{2}\,\pi$; **9**. $2\pi\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; **10**. $\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{a^3b^3}$; **11**. 0; **12**. $\dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{(m-1)!!}{m!!}$ pre $m \in \mathbf{N}$ párne, $\pi\dfrac{(m-1)!!}{m!!}$ pre $m \in \mathbf{N}$ nepárne; **13**. $\dfrac{\pi}{6}(1+\sqrt{3}\,)$ $\left(= \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}\right.$, pritom $\left.\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\pi/6)}{1+\cos(\pi/6)}}\right)$; **14**. $\dfrac{3}{5}(e^{\pi}-1)$; **15**. 0; **16**. $\dfrac{1}{4}\pi e^{\pi/2} - \dfrac{1}{2}$; **17**. $2e-5$; **18**. $\dfrac{\pi^2}{16}$; **19**. $\dfrac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}$; **20**. $\dfrac{\pi}{4}$ $\Big(\int_{-1}^{1} = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1}$, v prvom z integrálov subst. $x = -t$; po úprave vyjde $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\Big)$; **21**. $\operatorname{arctg}\dfrac{32}{27} - 2\pi$ $\Big(= [\operatorname{arctg} f(x)]_{-1}^{0} + [\operatorname{arctg} f(x)]_{0}^{2} + [\operatorname{arctg} f(x)]_{2}^{3}$; nezabudnite preveriť, či je funkcia $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ riemannovsky integrovateľná na $[-1.3]$, na to stačí vyšetriť jej správanie sa v bodoch 0 a 2 (dobre si rozmyslite, prečo)$\Big)$; **22**. $\dfrac{\pi}{3}$ $\left(= \left[\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\right]_{-2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\right.$, táto rovnosť ovšem nevyplýva bezprostredne z vety 11, ale z pr. 87 $\Big($rozmyslite si, prečo; vypočítajte $\left(\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\right)'$ — nezabudnite pritom, že $\sqrt{(1-x^2)^2} = |1-x^2|\Big)\Big)$; **23**. -1; **24**. $-\dfrac{\pi^2}{4}$; **25**. $14 - \ln(7!)$ $(e^2 \approx 7.39)$.

99 podľa vety 11 (uvedomte si, že jej tvrdenie zostane v platnosti aj v prípade $a \geq b$) je $G(x) = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$, kde F je primitívna funkcia k funkcii f (zvlášť si rozmyslite dôkaz rovnosti (2.3) pre $x = \alpha$, $x = \beta$, ak $I = [\alpha, \beta]$, a pre prípady $\varphi(x) = c$, $\varphi(x) = d$, $\psi(x) = c$, $\psi(x) = d$);

100 **1**. $\sin b^2$; **2**. $-\sin a^2$; **3**. 0; **4**. $\sin b^2 - \sin a^2$; **5**. $2(b-a)x\cos x^2$;

101 **1**. $f'(x) = 2x\sqrt{1+x^4}$; **2**. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; **3**. $-\cos(\pi\cos^2 x)\cos x - \cos(\pi\sin^2 x)\cos x$ $(= \cos(\pi\sin^2 x)\cdot(\sin x - \cos x))$;

102 **1**. (globálne) minimum $\dfrac{4}{3} - 15\ln 3 = F(\ln 2)$; **2**. (globálne) minimum $y = -\dfrac{17}{12}$ pre $x = 1$, inflexné body $x = 2$, $x = \dfrac{4}{3}$;

103 **1**. 1 $\Big($rovnosť $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x \cos t^2\,dt$, ktorú (okrem iného) musíme overiť pred použitím l'Hospitalovho pravidla, vyplýva zo spojitosti funkcie $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t^2\,dt\Big)$; **2**. $\dfrac{\pi^2}{4}$; **3**. 0 $\Big($pred použitím l'Hospitalovho pravidla tu treba overiť podmienku $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x e^{2x^2}\,dx = \infty$, tá vyplýva z nerovnosti $\displaystyle\int_0^x e^{2x^2}\,dx \geq x$, ktorá je dôsledkom nerovnosti $e^{2x^2} \geq 1$, $x \in [0,\infty)\Big)$;

104 A (použite substitúciu $nx = t$);

105 (predovšetkým si uvedomte, že z podmienky $f \in \mathcal{R}[0,\omega]$ vyplýva riemannovská integrovateľnosť funkcie f na ľubovoľnom uzavretom ohraničenom intervale) **1**. $F(x) = G(x) + K(x-a)$, kde $K = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^{\omega} f(t)\,dt$, a $G(x) = F(x) - K(x-a)$ je periodická funkcia s periódou ω (ukážte, že tvrdenie pr. 93.2 platí aj za predpokladov uvedených v pr. 105); **2**. ak

$K = 0$ (pozri vyjadrenie F v riešení pr. 105.1), tak F je periodická funkcia [15], ak $K \neq 0$, tak $\lim_{x\to\infty} |F(x)| = \infty$, a teda F nemôže byť periodická;

$\boxed{\mathbf{106}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. stačí si prezrieť dôkaz tvrdenia a) vety 14 (pozri napr. [24, str. 63]); $\underline{\mathbf{2}}$. vyplýva z pr. 106.1, pretože $\left|\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right| \le L$ pre všetky $x \in [a,b]\setminus\{x_0\}$;

$\boxed{\mathbf{107}}$ $\underline{1}$. $F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$; $\underline{2}$. $F'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$, $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$ $\Big($pri dôkaze prvej z týchto rovností možno postupovať nasledovne: pre $x \in [x_0,b]$ je $F(x) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} \overline{f}(t)\,dt$, kde $\overline{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{ak } \ t\in(x_0,b] \\ \lim\limits_{x\to x_0+} f(t), & \text{ak } \ t = x_0 \end{cases}$; pre funkciu $\overline{f}$, bod x_0 a interval $[x_0,b]$ sú splnené predpoklady tvrdenia b) vety 14$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{108}}$ využite pr. 107.1;

$\boxed{\mathbf{109}}$ z vety 11 vyplýva: ak existuje primitívna funkcia $\overline{F}:[0,1]\to\mathbf{R}$ k riemannovsky integrovateľnej funkcii $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, tak $\overline{F}(x) = \int_0^x f(t)\,dt + C$;

$\boxed{\mathbf{110}}$ $\underline{1}$. $\dfrac{2}{\pi}$; $\underline{2}$. $\dfrac{1}{5}$; $\underline{3}$. $\dfrac{20}{3}$;

$\boxed{\mathbf{111}}$ označme $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$; uvedené tvrdenie zrejme platí, ak $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ alebo ak funkcia f je konštantná na intervale $[a,b]$; ďalej iste platí v prípade, keď vnútri intervalu (a,b) leží aspoň jeden z bodov, v ktorých funkcia f nadobúda hodnotu m, a aspoň jeden z bodov, v ktorých f nadobúda hodnotu M (vtedy totiž f — keďže je darbouxovská — musí hodnoty $f(a)$ a $f(b)$, pre ktoré zrejme platí $m \le f(a) \le M$, $m \le f(b) \le M$, nadobúdať aj vnútri intervalu (a,b)); zostáva vyšetriť prípad, keď $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, f je nekonštantná a nadobúda hodnotu m len v niektorom z bodov a, b (prípadne v obidvoch) alebo nadobúda hodnotu M len v niektorom z bodov a, b (prípadne v obidvoch); predpokladajme teda, že $\int_b^a g(x)\,dx > 0$, $f(a) = M$ a $\forall\, x \in (a,b) : m \le f(x) < M$ (postup v ostatných prípadoch je obdobný); pretože $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, existujú $c,d \in (a,b)$, $c < d$ tak, že $\forall\, x \in [c,d] : g(x) > 0$ (pozri pr. 75, resp. 164), súčasne $\forall\, x \in [c,d] : m \le f(x) < M$; z uvedených nerovností dostávame $\forall\, x \in [c,d] : mg(x) \le f(x)g(x) < Mg(x)$; z tejto nerovnosti, nerovnosti $\forall\, x \in [a,b] : mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ a z pr. 76.2 [16] vyplýva $m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx < M\int_a^b g(x)\,dx$, preto pre číslo μ z vety 15 nemôže platiť $\mu = M = f(a)$; zostalo nám teda ešte uvažovať o hodnote $f(b)$: ak $f(b) \neq m$, $f(b) \neq M$, tak z našich predpokladov vyplýva, že f nadobúda hodnotu $f(b)$ aj vnútri intervalu (a,b) (za týchto predpokladov f musí nadobúdať hodnotu m vnútri (a,b), súčasne $f(a) = M$, ďalej stačí využiť darbouxovskosť funkcie f); ak $f(b) = M$, niet už čo dokazovať; ak $f(b) = m$ a $\forall\, x \in (a,b) : m < f(x) < M$, možno rovnakým postupom ako predtým dokázať, že pre μ z vety 15 nemôže platiť $\mu = m = f(b)$;

$\boxed{\mathbf{112}}$ integrál je $\underline{\mathbf{2}}$. kladný; $\underline{\mathbf{3}}$. záporný; $\underline{\mathbf{4}}$. kladný $\Big($pozor: pre interval $[0,\pi]$ a funkcie

[15] pritom každá perióda funkcie f je aj periódou funkcie F; opačná implikácia nemusí platiť (uvažujte napr. $f = r$, kde r je Riemannova funkcia z pr. 63), nájdenie vzťahu medzi množinou periód funkcie f a množinou periód funkcie F v prípade, že f je spojitá periodická funkcia, prenechávame čitateľovi

[16] tvrdenie pr. 111 zostane v platnosti aj vtedy, keď predpoklad „g je spojitá funkcia“ nahradíme predpokladom „$g \in \mathcal{R}[a,b]$“, na tomto mieste dôkazu musíme potom namiesto pr. 76.2 použiť pr. 162

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$ nie sú splnené predpoklady vety 15 ani tvrdenia z pr. 111 — f je totiž neohraničená na intervale $(0,1]$ [17]; príslušnú nerovnosť možno dokázať podobne ako v poznámke 2 za riešením pr. 112.1$\Big)$; **5**. kladný $\left(\int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} \sin x^2\,dx = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{2x}(2x\sin x^2)\,dx\right)$; **6**. záporný pre každé $T > \ln\frac{\pi}{2}$ $\Big($stačí dokázať $\int_{\ln(\pi/2)}^{T} \cos e^x\,dx < 0$ pre $T = \ln\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k = 1,2,\dots,$ a využiť rýdzu monotónnosť funkcie $F(x) = \int_{\ln(\pi/2)}^{x} \cos e^t\,dt$ na každom z intervalov $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right]$, $k = 0,1,2,\dots\Big)$;

113 **2**. 1 $\left(= \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{1}{\varepsilon c_\varepsilon^3 + 1},\ \text{kde } c_\varepsilon \in [0,1]\right)$; **3**. $f(0)\ln\dfrac{b}{a}$ $\big(c_\varepsilon \in [a\varepsilon, b\varepsilon]$, preto $\lim_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon = 0\big)$; **4**. 0 $\Big(\int_0^{\pi/2} = I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon$, pričom $I_1^\varepsilon = \int_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^n x\,dx \to 0$ pre $n\to\infty$, $|I_2^\varepsilon| = \left|\int_{\pi/2-\varepsilon/2}^{\pi/2} \sin^n x\,dx\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$; preto platí $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,N \in \mathbf{N}\ \ \forall\,n > N,\ n \in \mathbf{N}:\ \left|\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx\right|$ $(= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon)\ \ < \varepsilon\Big)$ [18];

114 1. riešenie: ak $F\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je primitívna funkcia k f, tak $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt = k(x-a)$, potom $f(x) = F'(x) = (F(a) + k(x-a))' = k$; 2. riešenie: v každom intervale $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ nadobúda f aspoň raz hodnotu k, z toho a zo spojitosti funkcie f vyplýva tvrdenie príkladu;

115 ak $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, tak $g(x) = 0$ pre všetky $x \in [a,b]$ (pozri pr. 76.1), teda $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ a (2.4) platí pre ľubovoľné $c \in (a,b)$; predpokladajme $\int_a^b g(x)\,dx > 0$; ak f je na (a,b) zdola aj zhora neohraničená, tak tam ako hodnoty nadobúda všetky reálne čísla, teda aj číslo $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right) \Big/ \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$; ak f je na (a,b) zhora neohraničená, zdola ohraničená a $\inf_{x\in(a,b)} f(x) = m$ (a teda f nadobúda ako hodnoty všetky čísla z intervalu (m,∞)), tak z nerovnosti $\forall\,x \in (a,b)\ :\ f(x)g(x) \ge mg(x)$ vyplýva $\mu := \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right) \Big/ \left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \ge m$, pri dôkaze skutočnosti, že $\mu = f(c)$ pre niektoré $c \in (a,b)$ (zvláštnu pozornosť vyžaduje len prípad $\mu = m$) sa možno inšpirovať úvahami z riešenia pr. 111; postup v ostatných prípadoch, ktoré pre f môžu nastať, je obdobný [19];

---

[17] napriek tomu by nebolo ťažké dokážať, že $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{c}\int_0^\pi \sin x\,dx$ pre niektoré $c \in (0,\pi)$ (všeobecne je to urobené v pr. 115), potom by už bolo možné postupovať rovnako ako v riešení pr. 112.1

[18] pozri tiež pr. 384.2

[19] vhodnou úpravou uvedeného dôkazu získame dôkaz tvrdenia, ktoré dostaneme, ak v pr. 115 predpoklad „g je spojitá funkcia“ nahradíme predpokladom „$g \in \mathcal{R}[a,b]$“; implikáciu $\int_a^b g(x)\,dx = 0 \implies \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ vtedy dokážeme nasledovne: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} f(x_\varepsilon) \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} 0 = 0$, pritom prvá nerovnosť vyplýva z vety 14a), druhá z vety 15 a tretia

$\boxed{\mathbf{116}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. funkcie g a $\overline{f}$, kde $\overline{f} = \begin{cases} f(x)\,, & \text{ak} \quad x \in (a,b) \\ A\,, & \text{ak} \quad x = a \\ B\,, & \text{ak} \quad x = b \end{cases}$, vyhovujú predpokladom vety 16;

$\boxed{\mathbf{117}}$ $\underline{\mathbf{3}}$. $\displaystyle\int_a^b \sin x^4\,dx = \int_a^b \frac{1}{4x^3}(4x^3\sin x^4)\,dx\,,\ 0 < a < b\,;$

$\boxed{\mathbf{118}}$ $\displaystyle\left|\int_x^{x^2} \sin e^t\,dt\right| \le \frac{2}{e^x}$ a $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0\,;$

$\boxed{\mathbf{119}}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - G(c)\int_a^b f'(x)\,dx\,,$ kde $\displaystyle G(x) := \int_a^x g(t)\,dt$ je podľa vety 14 primitívna funkcia k funkcii g; pri ďalších úpravách použite vety 11 a 7;

$\boxed{\mathbf{120}}$ $\underline{\mathbf{2}}$. $\dfrac{44}{15}$; $\underline{\mathbf{3}}$. $9.9 - \dfrac{8.1}{\ln 10}$; $\underline{\mathbf{4}}$. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}$; $\underline{\mathbf{5}}$. $\dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\underline{\mathbf{6}}$. $\sqrt{2} - 1$ $\left(= \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\cos y - \sin y)\,dy\,,\right.$ pretože danú množinu možno popísať nerovnosťami $0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}$, $\left.\sin y \le x \le \cos y\right)$; $\underline{\mathbf{7}}$. $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ $\left(\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\left(1 - \dfrac{\sin 2x}{2}\right) \ge 0 \text{ pre } x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]\right)$; $\underline{\mathbf{8}}$. $\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{8}$ (funkcia $f(x) = \cos\pi x$ je konkávna na $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, funkcia $g(x) = 6x^2 - 5x + 1$ konvexná na $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $f(0) = g(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, preto $f(x) \ge g(x)$ pre všetky $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$); $\underline{\mathbf{9}}$. πab; $\underline{\mathbf{11}}$. $\dfrac{8}{3}$; $\underline{\mathbf{12}}$. $\dfrac{ab}{6}$; $\underline{\mathbf{13}}$. $\dfrac{\pi}{4}$ (ak využijeme ekvivalenciu $|y - a| = c \iff (y = a + c \vee y = a - c)$, $c \ge 0$, vidíme, že krivka $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2$ je zjednotením grafov funkcií $f_1(x) = \arcsin x + \sqrt{x - x^2}$, $f_2 = \arcsin x - \sqrt{x - x^2}$); $\underline{\mathbf{14}}$. $\dfrac{1}{2}$ (uvedená krivka je zjednotením grafov funkcií $f_1 : x = y + 3\sqrt{y} + 2$, $f_2 : x = y - 3\sqrt{y} + 2$, len graf druhej z nich sa pretína s priamkou $x = 0$; útvar, ktorého plošný obsah máme vypočítať, je množina $\{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R};\, 0 \le y \le 1\,,\ 0 \le x \le f_2(y)\}$); $\underline{\mathbf{15}}$. $6(\pi + \sqrt{3})$ (daný útvar je na obr. 8, šrafovaním sú vyznačené jeho jednotlivé časti, ktoré možno popísať nerovnosťami typu $a \le y \le b$, $f(y) \le x \le g(y)$; plošný obsah časti daného útvaru ležiacej v 3. a 4. kvadrante sme vypočítali ako rozdiel plošného obsahu polkruhu s polomerom 4 a plošného obsahu nevyšrafovanej časti kruhu $x^2 + y^2 = 16$ ležiacej v 4. kvadrante); $\underline{\mathbf{16}}$. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^2 + \dfrac{3a^2}{2}\left(\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \arcsin\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$ $\left(= a^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3} + \dfrac{3}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}\right)\right.$, ak použijeme vzorec z pr. I.87.2$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{121}}$ $4ab\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\left(= 4ab\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}\right.$, ak použijeme vzorec $\arcsin x =$[20] $\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\left. x \in (-1,1)\right)$;

$\boxed{\mathbf{122}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. $\dfrac{m - n}{m + n}$; $\underline{\mathbf{2}}$. $4\dfrac{m - n}{m + n}$, ak m, n sú párne; $2\dfrac{m - n}{m + n}$, ak m, n sú nepárne; $\dfrac{m - n}{m + n}$, ak práve jedno z čísel m, n je párne;

---

z implikácie „ak $g \in \mathcal{R}[a,b]$, $g(x) \ge 0$ pre všetky $x \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0$, tak $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx = 0$ pre všetky $\varepsilon \in \left[0, \dfrac{b-a}{2}\right]$"

[20] $= \mathrm{arctg}\,(\,\mathrm{tg}\,\arcsin x) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sin\arcsin x}{\cos\arcsin x}\right) =$

obr. 8.

$\boxed{\mathbf{123}}$ $\frac{9}{4}$;

$\boxed{\mathbf{124}}$ ak $k>0$, $B\equiv(b,kb^2)$, $C\equiv(c,kc^2)$, $c>b$, tak $A\equiv\left(\frac{b+c}{2},k\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right)$, $P=\frac{k}{8}(c-b)^3$;

$\boxed{\mathbf{125}}$ **1**. pre $k=p$ $\Big($závislosť plošného obsahu na čísle k určuje funkcia $P(k)=\frac{1}{6}((k-p)^2+4(b-q))^{3/2}\Big)$; **2**. ak ide o normálu v bode $\left(p,\frac{p}{2}\right)$ $\Big($v prípade normály v bode $\left(x,\frac{x^2}{2p}\right)$, $x>0$, je príslušný plošný obsah $\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2+p^2)^3}{px^3}$; z geometrickej interpretácie vyplýva, že stačí uvažovať $x>0\Big)$;

$\boxed{\mathbf{126}}$ **1**. $\frac{3}{7}\pi ab^2$; **2**. $\frac{\pi h^2b^2}{3a^2}(3a+h)$; **3**. $\frac{\pi pqa^2}{p+q}$; **4**. $\frac{\pi pqa^2}{q-p}$; **5a**) $\frac{16}{15}\pi$; **5b**) $\frac{8}{3}\pi$; **6a**) $\frac{4}{15}\cdot\pi ab^2$; **6b**) $\frac{1}{6}\pi a^2b$; **7**. $36\pi^2$; **8**. $\frac{8\pi a^3}{3}$ $\Big($krivka $x^2-xy+y^2=a^2$ je zjednotením grafov funkcií $f_1(x)=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{4a^2-3x^2}\right)$ a $f_2(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{4a^2-3x^2}\right)$, pritom $f_1(a)=0$, $f_2(-a)=0$, $0\geq f_2(x)\geq f_1(x)$ pre $x\in\left[-\frac{2a}{\sqrt{3}},-a\right]$, $|f_2(x)|\leq|f_1(x)|$ pre $x\in[-a,0]$, $|f_2(x)|\geq|f_1(x)|$ pre $x\in[0,a]$, $f_2(x)\geq f_1(x)\geq 0$ pre $x\in\left[a,\frac{2a}{\sqrt{3}}\right]$; teleso, ktorého objem hľadáme, je teda zjednotením telies, ktoré vzniknú rotáciou okolo osi Ox množín popísaných nasledujúcimi nerovnosťami: $-\frac{2a}{\sqrt{3}}\leq x\leq -a\wedge|f_2(x)|\leq y\leq|f_1(x)|$; $-a\leq x\leq 0\wedge 0\leq y\leq|f_1(x)$; $0\leq x\leq a\wedge 0\leq y\leq|f_2(x)|$; $a\leq x\leq\frac{2a}{\sqrt{3}}\wedge f_1(x)\leq y\leq f_2(x)\Big)$; **9**. $\frac{\pi}{20}(6\pi+5\sqrt{3})$ $\Big($uvedené krivky sa pretínajú v bodoch $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)\Big)$; **10**. $\frac{\pi^3}{2}$; **11**. $\pi a^3\ln 2$; **12**. $48\pi-\frac{20\sqrt{3}}{3}\pi^2$ $\Big($na výpočet $\int x^2\sqrt{\frac{3+3x}{3-x}}\,dx$ možno použiť substitúciu $\sqrt{3-x}=t$ a potom metódu neurčitých koeficientov, pozri text pred pr. 33$\Big)$; **13**. $\pi^3+4\pi$ $\left(=\pi\int_{-1}^{1}\left[\pi^2-\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)^2\right]dx\right)$;

$\boxed{\mathbf{127}}$ $2\pi^2a^2b$;

$\boxed{\mathbf{128}}$ $\dfrac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)\quad \left(=\pi\displaystyle\int_0^h \left(r+\frac{R-r}{h}\,x\right)^2 dx\right)$;

$\boxed{\mathbf{129}}$ $\dfrac{\pi h r^2}{2}$;

$\boxed{\mathbf{130}}$ $\dfrac{\pi h D^2}{8}\quad \left(\text{ak } f_1(x)=k_1\left(x^2-\dfrac{D^2}{4}\right),\ f_2(x)=k_2\left(\dfrac{D^2}{4}-x^2\right),\ \text{kde } k_1>0,\ k_2>0,\ \text{tak}\right.$ $\left. h=\dfrac{D^2}{4}(k_1+k_2),\ V=2\pi\displaystyle\int_0^{D/2}\left(xk_1\Big(\frac{D^2}{4}-x^2\Big)+xk_2\Big(\frac{D^2}{4}-x^2\Big)\right)dx\right)$;

$\boxed{\mathbf{131}}$ $\dfrac{16}{15}\pi a h^2$;

$\boxed{\mathbf{132}}$ **1**. $\dfrac{8}{27}(\sqrt{1000}-1)$; **2**. $p\ln\dfrac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}+\sqrt{2x_0}\,\sqrt{p+2x_0}$ $\left(=\displaystyle\int_{-\sqrt{2px_0}}^{\sqrt{2px_0}}\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy\right)$; **3**. $\dfrac{e^2+1}{4}$; **4**. $2a\ln\dfrac{a}{a-x_0}-x_0$; **5**. $e-1$; **6**. $\dfrac{a^2}{2}+a$; **7**. $a\ln\dfrac{a}{b}$; **8**. $2\sqrt{2}(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,)$; **9**. $a\ln\dfrac{a+b}{a-b}-b$; **10**. $\dfrac{25}{3}$; **11**. $\ln\dfrac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$; **12**. $\arcsin\dfrac{3}{4}$; **13**. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}\quad\left(=\ln\dfrac{1+\sin a}{\cos a}=\ln\dfrac{\cos(a/2)+\sin(a/2)}{\cos(a/2)-\sin(a/2)}=\ln\dfrac{1+\operatorname{tg}(a/2)}{1-\operatorname{tg}(a/2)}=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{a}{2}\right)\right)$; **14**. $2+2\ln\dfrac{3}{2}$; **15**. $\dfrac{\pi+1}{4}$ $\left(\text{pozor: } \sqrt{x^4-6x^2+9}=3-x^2 \text{ pre } x\in[0,1]\right)$; **16**. $2a\left(2+\sqrt{3}\ln\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)$ $\left(=4a\left(1+\sqrt{3}\ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)=2\displaystyle\int_0^{5a/3}a\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}\cdot\frac{dx}{2a-x}\right)$; **17**. $6a$ $\left(=8\displaystyle\int_{a/\sqrt{8}}^{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{1/3}dx\right.$; daná krivka je súmerná podľa osí $x=\pm y$, $x=0$, $y=0$, stačí preto vypočítať dĺžku krivky $y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$, $x\in\left[\dfrac{a}{\sqrt{8}},a\right]$[21]; dĺžku krivky $(f(x)=)\ \ y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$, $x\in[0,a]$, nemožno počítať na základe vety 19, pretože f nemá v bode 0 konečnú deriváciu [22];

$\boxed{\mathbf{133}}$ $4\quad\left(1+\cos t=2\cos^2\dfrac{t}{2}\right)$;

$\boxed{\mathbf{134}}$ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{27}(13\sqrt{13}-8)$ (krivky sa pretínajú v bodoch $(1,1)$ a $(-1,1)$; ak chceme na výpočet dĺžky krivky $y^3=x^2$, $x\in[0,1]$, použiť vetu 19, musíme jej predpis zapísať v podobe $(f(y)=)\ \ x=y^{3/2}$, $y\in[0,1]$, funkcia $g(x)=x^{2/3}$, $x\in[0,1]$ (ktorej grafom je tiež uvedená krivka) nemá totiž konečnú deriváciu v bode 0);

$\boxed{\mathbf{135}}$ $7a\quad\left(x\text{–ové súradnice priesečníkov sú riešením rovnice } \left(y^{2/3}=\right)\ x^{2/3}-a^{2/3}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\,a^{1/3}x^{1/3}\right)$;

$\boxed{\mathbf{136}}$ $N\equiv\left(m-a\operatorname{th}\dfrac{m}{a},\dfrac{a}{\operatorname{ch}(m/a)}\right)$, ak $M\equiv\left(m,a\operatorname{ch}\dfrac{m}{a}\right)$;

$\boxed{\mathbf{137}}$ použite substitúciu $x=f^{-1}(t)$, potom (podľa vety o derivácii inverznej funkcie) je $f'(x)=\dfrac{1}{(f^{-1})'(t)}$; z predpokladov ďalej vyplýva, že f je rastúca (pozri pr. I.239), a preto $f'(x)\ge 0$ pre $x\in[a,b]$ (a teda aj $(f^{-1})'(t)\ge 0$ pre $t\in[f(a),f(b)]$;

$\boxed{\mathbf{138}}$ **1**. $\dfrac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+\ln\dfrac{11+3\sqrt{13}}{2}\right)$; **2**. $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2}\,)+\pi\ln\dfrac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}$; **3a**) $\dfrac{2\pi}{3}\cdot$

---

[21] to je časť danej krivky ležiaca v uhle AOB, kde $A\equiv(0,1)$, $O\equiv(0,0)$, $B\equiv(1,0)$

[22] pozri tiež pr. 423.2

$\left(\sqrt{2px_0+p^2}\,(2x_0+p)-p^2\right)$ $\left(=2\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}} y\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy\ ^{23}\right)$; **3b**) $\frac{\pi}{4}\Bigg((4x_0+p)\cdot \sqrt{2x_0}\,\sqrt{2x_0+p}-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{2x_0+p}}{\sqrt{p}}\Bigg)$; **4**. $2\pi a(a-b)$; **5**. $\frac{\pi a^2}{8}(7\sqrt{2}+3\ln(1+\sqrt{2}))$; **6**. $\pi\left(\ln\frac{a^2+\sqrt{a^4+1}}{1+\sqrt{2}}+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{a^4+1}}{a^2}\right)$; **7**. $\frac{\pi}{6}(16\ln 3-9\ln 2-5)$ (pozor: $\ln(x-\sqrt{x^2-1})<0$ pre $x>1$); **8**. $\frac{\pi}{16}\left(e^4-\frac{1}{e^4}-\frac{8}{e^2}\right)$ $\left(\text{nezabudnite preveriť, či } x^2-2\ln x\ge 0 \text{ pre } x\in\left[\frac{1}{e},e\right]\right)$; **9**. $\frac{\pi a^2}{6}(11-9\sqrt{3})+\frac{\pi^2a^2}{3}(2\sqrt{3}-1)$; **10**. $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$;

$\boxed{\mathbf{139}}$ $\frac{2\pi a^2}{9}(20-9\ln 3)$ $\left(=2\pi\int_{-a\ln 3}^{a\ln 3}\left(\frac{5a}{3}-a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\right)\sqrt{1+\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}\,dx\right)$;

$\boxed{\mathbf{140}}$ $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}(4-\pi)$ (počítali sme plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou oblúka kružnice $x^2+y^2=a^2$ od bodu $A_1\equiv\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ po bod $A_2\equiv\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ okolo spojnice bodov A_1 a A_2);

$\boxed{\mathbf{141}}$ $\frac{\pi R}{6h^2}((4h^2+R^2)^{3/2}-R^3)$;

$\boxed{\mathbf{142}}$ $a=0$, $S(0)=4\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$ (treba nájsť globálne minimum funkcie $S(a)=2\pi\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x-a|\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx=$

$$=\begin{cases} 4\pi\left(\int_0^{\pi}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx-a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\right), & \text{ak}\quad a\le -1\\ 4\pi\left(a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx-\int_0^{\pi}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\right), & \text{ak}\quad a\ge 1\\ 4\pi\Big(\int_0^{\arccos a}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx & \\ \quad -\ a\int_0^{\arccos a}\sqrt{1+\sin^2 x}\ \ dx\ +\ a\int_{\arccos a}^{\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\ \ dx\ - , & \text{ak}\quad a\in(-1,1)\\ \int_{\arccos a}^{\pi}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\Big) & \end{cases};$$

funkcia S je spojitá, rastúca (a lineárna) na $[1,\infty)$, klesajúca (a lineárna) na $(-\infty,-1]$, stačí teda zistiť jej priebeh na $(-1,1)$; $(S|(-1,1))'(a)=\int_{\arccos a}^{\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx-\int_0^{\arccos a}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$ (použili sme vetu o derivácii súčinu a pr. 99), graf funkcie $g(x)=\sqrt{1+\sin^2 x}$, $x\in[0,\pi]$, je súmerný podľa priamky $x=\frac{\pi}{2}$, preto $\int_0^{\pi/2}g(x)\,dx=\int_{\pi/2}^{\pi}g(x)\,dx$, z kladnosti funkcie

---

[23] počítali sme plošný obsah množiny M, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie $f(y)=\frac{y^2}{2p}$, $y\in[0,\sqrt{2px_0}]$, okolo osi Ox (a použili sme teda vetu 20b); výpočtom integrálu $2\pi\int_0^{x_0}g(x)\sqrt{1+g'^2(x)}\,dx$, kde $g(x)=\sqrt{2px}$, $x\in[0,x_0]$ (rotáciou grafu funkcie g okolo osi Ox vznikne tá istá množina M) by sme síce dostali to isté číslo, ale — pretože funkcia g nevyhovuje predpokladom vety 20a (nemá konečnú deriváciu v bode 0) — veta 20a nás neoprávňuje tvrdiť, že číslo $2\pi\int_0^{x_0}g(x)\sqrt{1+g'^2(x)}\,dx$ je plošným obsahom množiny M

g vyplýva $\int_0^c g(x)\,dx \ \left(= \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^c \right) \ > \int_c^\pi g(x)\,dx \ \left(= \int_{\pi/2}^\pi - \int_{\pi/2}^c \right)$ pre $c \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\int_0^c g(x)\,dx < \int_c^\pi g(x)\,dx$ pre $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; teda pre $a \in (-1, 0)$ je $S'(a) < 0$, pre $a \in (0,1)$ je $S'(a) > 0$; preto funkcia S nadobúda globálne minimum v bode $0\Big)$;

$\boxed{\mathbf{143}}$ pozri návod k pr. 137;

$\boxed{\mathbf{150}}$ **2**. pozri pr. 70;

$\boxed{\mathbf{151}}$ pre každé $n \in \mathbf{N}$ existujú integrálne súčty $S_n^{(1)}$ a $S_n^{(2)}$ funkcie f pri delení D_n také, že $0 \le U(f, D_n) - S_n^{(1)} \le \frac{1}{n}$, $0 \le S_n^{(2)} - L(f, D_n) \le \frac{1}{n}$; z toho a z predpokladov tvrdenia potom vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} L(f, D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} U(f, D_n)$, ďalej pozri dôsledok vety 2;

$\boxed{\mathbf{152}}$ „a) $\Longrightarrow$ b)“: pre $\eta = \varepsilon\lambda$ existuje delenie $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ také, že $\varepsilon\lambda = \eta > U(f, D_n) - L(f, D_n) = \sum\limits_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_i])\Delta x_i = \sum{}' + \sum{}'' \ge \sum{}'' \ge \lambda d$, kde $\sum{}''$ je súčet tých sčítancov, pre ktoré $\omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \ge \lambda$;

„b) $\Longrightarrow$ a)“: ak $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ vyhovuje predpokladom tvrdenia b), tak $\Delta_D := U(f, D) - L(f, D) = \sum\limits_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_1])\Delta x_i = \sum{}' + \sum{}'' \le \lambda(b-a) + \omega(f, [a,b])\varepsilon$, kde $\sum{}'$, $\sum{}''$ majú ten istý význam ako predtým; vhodnou voľbou λ, ε vieme dosiahnuť platnosť nerovnosti $\Delta_D < \eta$ pre vopred zadané $\eta > 0$;

$\boxed{\mathbf{153}}$ (nezabudnite dokázať, že funkcia $g_h(x) := |f(x+h) - f(x)|$ je pre dostatočne malé h integrovateľná na $[\alpha, \beta]$) predpokladajme $h > 0$ (pre $h < 0$ je dôkaz obdobný); pre dané $h \in (0, b-\beta)$ existuje delenie $D_h = \{x_0, \ldots, x_n\}$ intervalu $[\alpha, \beta]$ také, že $h \le \nu(D_h) \le 2h$; predpokladajme, že n je párne číslo (pre n nepárne sú úvahy rovnaké, len treba zvoliť iné označenia), označme $x_{n+1} := x_n + h$, $\Delta x_{n+1} := x_{n+1} - x_n$, $D_1 := \{x_0, x_2, x_4, \ldots, x_n\}$, $D_2 := \{x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}\}$, nech D_a, resp. D_b je delenie intervalu $[a, \alpha]$, resp. $[\beta + h, b]$ také, že $\nu(D_a) \le 2h$, $\nu(D_b) \le 2h$, a nech delenie D_h^* intervalu $[a,b]$ je vytvorené deliacimi bodmi delení D_a, D_1, D_2, D_b (zrejme $\nu(D_h^*) \le 2h$); potom $0 \le \int_\alpha^\beta g_h(x)\,dx \le U(g_h, D_h) \le \sum\limits_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_i + h])\Delta x_i \le \sum\limits_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_{i+1}])\Delta x_i \le \sum\limits_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_{i+1}])(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) = (U(f, D_1) - L(f, D_1)) + (U(f, D_2) - L(f, D_2)) \le 2(U(f, D_h^*) - L(f, D_h^*))$; z vety 2 vyplýva: pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé delenie D intervalu $[a,b]$, pre ktoré $\nu(D) \le \delta$, platí $|U(f,D) - L(f,D)| < \varepsilon$; z toho a z predchádzajúcej nerovnosti vyplýva $\lim\limits_{h\to 0+} \int_\alpha^\beta g_h(x)\,dx = 0$;

$\boxed{\mathbf{154}}$ nepriamo; využijeme pritom tvrdenie: ak $f \in \mathcal{R}(I)$, tak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ existuje uzavretý interval $I^* \subset I$, ktorého dĺžka je menšia ako δ a $\omega(f, I^*) < \varepsilon$ (vyplýva to z dôsledku vety 2 uvedeného v závere riešenia pr. 153 a z nerovnosti $\omega(f, J) \le \omega(f, K)$, ak $J \subset K \subset I$); nech teda $f \in \mathcal{R}[a,b]$, potom $f \in \mathcal{R}[a + \frac{b-a}{4}, b - \frac{b-a}{4}]$ a existuje interval $[a_1, b_1] \subset \left[a + \frac{b-a}{4}, b - \frac{b-a}{4}\right]$ tak, že $b_1 - a_1 < 1$ a $\omega(f, [a_1, b_1]) < 1$; podobne dostaneme interval $[a_2, b_2] \subset \left[a_1 + \frac{b_1 - a_1}{4}, b_1 - \frac{b_1 - a_1}{4}\right]$ taký, že $b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$, $\omega(f, [a_2, b_2]) < \frac{1}{2}$, atď; nech $\bigcap\limits_{n=1}^\infty [a_n, b_n] = \{c\}$; ukážte, že c je vnútorný bod každého intervalu $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbf{N}$, a že z rovnosti

$\lim\limits_{n\to\infty}\omega(f,[a_n,b_n])=0$ vyplýva spojitosť funkcie f v bode c;

155 použijeme vetu 3, nech $\eta>0$, $\vartheta>0$; pre každé $x\in[0,1]\setminus\mathbf{Q}$ existuje jeho δ–okolie $O(x)\subset[0,1]$ také, že $\omega(f,[x-\delta,x+\delta])<\eta$; množinu $[0,1]\cap\mathbf{Q}$ zoraďme do prostej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a pre $x=a_n$ označme $O(x):=\left(x-\dfrac{\vartheta}{2^{n+1}},x+\dfrac{\vartheta}{2^{n+1}}\right)$; z otvoreného pokrytia $\{O(x)\,;\,x\in[0,1]\}$ kompaktu $[0,1]$ vyberme konečné podpokrytie $O(x_1)$, …, $O(x_n)$, nech delenie D intervalu $[0,1]$ je vytvorené deliacimi bodmi 0, 1 a tými krajnými bodmi intervalov $O(x_1)$, …, $O(x_n)$, ktoré ležia v $[0,1]$; potom $U(f,D)-L(f,D)<\eta+\vartheta\cdot\omega(f,[0,1])$ $\Big($pre $I=(a,b)$ označme $\overline{I}:=[a,b]$, $|I|:=b-a$; každý čiastočný interval delenia D je podmnožinou niektorého z intervalov $\overline{O(x_1)}$, …, $\overline{O(x_n)}$, nech I_1, …, I_k sú tie čiastočné intervaly delenia D, ktoré sú podmnožinou aspoň jedného intervalu $\overline{O(x_i)}$ takého, že $x_i\notin\mathbf{Q}$, nech I_{k+1}, …, I_m sú zvyšné čiastočné intervaly delenia D; potom $U(f,D)-L(f,D)=\sum'+\sum''$, kde $\sum':=\sum\limits_{i=1}^{k}\omega(f,\overline{I_i})|I_i|<\eta\cdot(|I_1|+\dots+|I_k|)\le\eta\cdot1$; $\sum'':=\sum\limits_{i=k+1}^{m}\omega(f,\overline{I_i})|I_i|\le\omega(f,[0,1])\cdot(|I_{k+1}|+\dots+|I_m|)\le\omega(f,[0,1])\cdot\sup\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\vartheta}{2^i}\,;\,n\in\mathbf{N}\right\}=\omega(f,[0,1])\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\vartheta}{2^i}=\vartheta\cdot\omega(f,[0,1])\Big)$[24];

156 stačí dokázať implikáciu „ak B je ohraničená množina a množina B' má Jordanovu mieru nula, tak aj B má Jordanovu mieru nula“;

157 z konvexnosti funkcie f vyplýva nerovnosť (pozri pr. I.453) $f\left(\dfrac{1}{n}g\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}g\left(\dfrac{2}{n}\right)+\dots+\dfrac{1}{n}g\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)\le\dfrac{1}{n}f\left(g\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)+\dots+\dfrac{1}{n}f\left(g\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)$, pre $n\to\infty$ konverguje pravá, resp. ľavá strana tejto nerovnosti k pravej, resp. ľavej strane nerovnosti (2.7) (využite pr. I.458, nezabudnite dokázať, že $f\circ g\in\mathcal{R}[0,1]$);

158 zvoľte $g=f$ a využite pr. 76.1;

159 pre dané $\varepsilon>0$ existuje interval $[a_\varepsilon,b_\varepsilon]\subset[a,b]$ taký, že $\forall\,x\in[a_\varepsilon,b_\varepsilon]\,:\,M-\varepsilon\le f(x)$, kde $M:=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$; z toho vyplýva

$$[(M-\varepsilon)^n(b_\varepsilon-a_\varepsilon)]^{1/n}\le\left(\int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon}f^n(x)\,dx\right)^{1/n}\le\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n}\le[M^n(b-a)]^{1/n}\,,$$

pritom $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_\varepsilon-a_\varepsilon}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b-a}=1$, preto $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbf{N}\ \ \forall n>N,\ n\in\mathbf{N}\ :\ \left|\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n}-M\right|<\varepsilon$;

160 nech f nie je identicky nulová; potom f musí aspoň raz zmeniť na intervale $[0,\pi]$ znamienko $\left(\text{pretože }\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=0\right)$; ďalej sporom: nech f zmení na $[0,\pi]$ znamienko len raz, a to v bode $a\in(0,\pi)$, potom $0\ne\int_0^\pi f(x)\sin(x-a)\,dx=\cos a\cdot\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx-\sin a\cdot\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx=0$, čo je spor;

---

[24]Riešenie pr 154 a 155 by sa podstatne zjednodušilo použitím *Lebesguovho kritéria riemannovskej integrovateľnosti: Ohraničená funkcia* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *je riemannovsky integrovateľná na* $[a,b]$ *práve vtedy, keď pre každé* $\varepsilon>0$ *existuje najviac spočítateľný systém ohraničených intervalov* $\{(a_i,b_i)\,;\,i\in J\}$ *(kde* $J=\{1,2,\dots,n\}$ *alebo* $J=\mathbf{N}$*) taký, že* $\sup\left\{\sum\limits_{i=1}^{k}(b_i-a_i)\,;\,k\in J\right\}<\varepsilon$ *a* $M\subset\bigcup\limits_{i\in J}(a_i,b_i)$, *kde* M *je množina bodov nespojitosti funkcie* f (pozri aj [24, str. 157-158]).

$\boxed{\mathbf{161}}$ uvedieme dve riešenia: 1. nepriamo, nech $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ $\Big($potom $\int_c^d f(x)\,dx = 0$ pre každé $a \le c < d \le b\Big)$; využijeme tvrdenie „ak $f(x) \ge 0$ pre všetky $x \in [\alpha,\beta]$ a $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$, tak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje interval $[\alpha_1,\beta_1] \subset [\alpha,\beta]$ taký, že $\forall\, x \in [\alpha_1,\beta_1]\,:\, f(x) < \varepsilon$" (vyplýva to z pr. 152); $\int_a^b f(x)dx = 0$, preto existuje $[a_1,b_1] \subset [a,b]$ tak, že $\forall\, x \in [a_1,b_1]\,:\, 0 \le f(x) < 1$; $\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx = 0$, preto existuje $[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$ tak, že $\forall\, x \in [a_2,b_2]\,:\, 0 \le f(x) < \frac{1}{2}$, atď, pre $c \in \bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]$ potom platí $f(c) = 0$;

2. z pr. 154 vyplýva, že f je spojitá aspoň v jednom bode $x_0 \in [a,b]$, ďalej možno postupovať ako v riešení pr. 76.1;

$\boxed{\mathbf{163}}$ keby to nebola pravda, bol by každý dolný integrálny súčet funkcie f na intervale $[a,b]$ rovný nule;

$\boxed{\mathbf{164}}$ pozri pr. 70; ak N nie je hustá v $[a,b]$, tak existuje $x_0 \in [a,b]$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $N \cap O_\varepsilon(x_0) = \emptyset$;

$\boxed{\mathbf{165}}$ z pr. 154 vyplýva, že f je spojitá aspoň v jednom bode $x_0 \in [a,b]$, preto existuje interval $[a_1,b_1]$, na ktorom f nemení znamienko, nech napr. $\forall\, x \in [a_1,b_1]\,:\, f(x) > 0$; podľa pr. 163 existuje interval $[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$ taký, že $\inf\limits_{x\in[a_2,b_2]} f(x) > 0$, funkcia $f\chi$ potom nie je spojitá v žiadnom bode intervalu $[a_2,b_2]$, preto podľa pr. 154 $f\chi \notin \mathcal{R}[a_2,b_2]$, ďalej pozri vetu 7 [25];

$\boxed{\mathbf{166}}$ z konkávnosti f vyplýva $f(x) \ge g(x)$ pre $x \in [a,b]$, kde grafom g je spojnica bodov $[a,f(a)]$, $[b,f(b)]$; potom $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$; ďalej pre každé $\xi \in [0,b-a]$ je $f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = f\Big(\frac{a+\xi}{2} + \frac{b-\xi}{2}\Big) \ge \frac{1}{2}(f(a+\xi) + f(b-\xi))$, preto $(b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \ge \frac{1}{2}\Big(\int_0^{b-a} f(a+\xi)\,d\xi + \int_0^{b-a} f(b-\xi)\,d\xi\Big) = \int_a^b f(x)\,dx$ (v prvom integráli subst. $a+\xi = t$, v druhom $b-\xi = z$);

$\boxed{\mathbf{167}}$ uvedieme dva návody: 1. využite nerovnosť $(f')^2 \ge 2f' - 1$; 2. využite nerovnosť $\int_0^1 g^2(x)\,dx \ge \Big(\int_0^1 g(x)\,dx\Big)^2$, ktorá vyplýva z pr. 157 [26];

$\boxed{\mathbf{168}}$ $\frac{1}{2}(b-a)(f(b)-f(a))$ $\Big($označme $a_k := a + k\frac{b-a}{n}$, $k = 0,\ldots,n$; potom $\Delta_n := \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k}(f(x) - f(a_k))\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f'(\xi_k)(x-a_k)\,dx$, nech $m_k := \min\{f'(x)\,;\, x \in [a_{k-1},a_k]\}$, $M_k := \max\{f'(x)\,;\, x \in [a_{k-1},a_k]\}$, $k = 1,\ldots,n$, potom $\sum_{k=1}^{n} m_k\int_{a_{k-1}}^{a_k}(x-a_k)\,dx \le \Delta_n \le \sum_{k=1}^{n} M_k\int_{a_{k-1}}^{a_k}(x-a_k)\,dx$, odtiaľ (po výpočte integrálov a vynásobení nerovností číslom n) $L(f',D) = \frac{1}{2}(b-a)\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{b-a}{n} \le n\Delta_n \le \frac{1}{2}(b-a)\sum_{k=1}^{n} M_k\frac{b-a}{n} = U(f',D)$, kde $D = \{a_0,\ldots,a_n\}$; ďalej použite dôsledok vety 2;

$\boxed{\mathbf{169}}$ použite pr. 76.2 a nerovnosti <u>1.</u> $\frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} = 1 + x^{20}\frac{1-x^{20}}{1+x^{40}} < 1 + x^{20}(1-x^{21})$ pre

---

[25] použitím Lebesguovho kritéria (pozri poznámku k pr. 155) možno dokázať všeobecnejšie tvrdenie: ak $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $f(x) \ne 0$ pre všetky $x \in [a,b]$ a $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená riemannovsky neintegrovateľná funkcia, tak $fg \notin \mathcal{R}[a,b]$

[26] možno použiť aj nerovnosť z pr. 199

$x \in (0,1)$; **2**. $e^{-x^n} > 1 - x^n$, $x \neq 0$ (tá vyplýva z nerovnosti $e^u > 1 + u$ pre $u \neq 0$); **3**. $2 < e^x + e^{-x} < e + \dfrac{1}{e}$ pre $x \in (0,1)$;

170 $\displaystyle\int_0^\pi e^{\sin^2 x}\,dx > \frac{3\pi}{2}$ $\Big($využite nerovnosť $e^{\sin^2 x} > 1 + \sin^2 x$, $x \in (0,\pi)\Big)$;

172 $\approx \dfrac{1}{6}10^{12}$ $\displaystyle\Big(= 100^6 \int_0^1 x^5\,dx\Big)$;

173 **1**. $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ $\displaystyle\Big(S_n$ rozšírte výrazom $\dfrac{\pi}{n}$ a využite, že $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = 1\Big)$; **2**. $x + \dfrac{1}{2}$ $\displaystyle\Big(= \int_0^1 (x+t)\,dt$; $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(nx+k) \le S_n \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(nx+k+1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(x + \frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{n}\Big)$; **3**. $\dfrac{1}{\ln 2}$ $\displaystyle\Big(S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$, kde $\displaystyle S_n^{(1)} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k/n}$, $\displaystyle|S_n^{(2)}| := \Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{1/k}{n(n+1/k)}2^{k/n}\Big| \le \frac{2}{n}\Big)$; **4**. $\dfrac{5\pi}{6}$ $\Big($ak na vyjadrenie hodnoty $\sin x$ použijeme Taylorov vzorec so zvyškom v Lagrangeovom tvare, tak $\sin x = x - \dfrac{x^2}{2}\sin\vartheta$; potom $S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$, kde $\displaystyle S_n^{(1)} := \frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(1 + \frac{k}{n}\Big)$, $\displaystyle|S_n^{(2)}| := \Big|\frac{\pi^2}{2n^4}\sum_{k=1}^{n-1}k^2\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\sin\vartheta_k^{(n)}\Big| \le \frac{\pi^2}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 < \frac{\pi^2}{n}\Big)$; **5**. $\ln 2$; **6**. ∞ $\displaystyle\Big(S_n = n - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\vartheta_k^{(n)}}{(n+k)\sqrt{n+k}}$, pritom limita druhého člena je $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ a limita tretieho člena je $0\Big)$; **7**. ∞ $\displaystyle\Big(S_n = \sqrt{n}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k/n}} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\vartheta_k^{(n)}}{n+k}$; pri odhade druhého člena využite nerovnosti $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k} < 2$ a $0 \le \sin\vartheta_k^{(n)} \le \sin\frac{1}{n}$ pre $k = 0,1,\dots,n\Big)$;

174 **1**. $\dfrac{\pi}{2}$ $\displaystyle\Big($využite rovnosť $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}\cos 2kx = \frac{\sin(2m-1)x}{2\sin x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ktorá sa odvodí podobne ako analogická rovnosť z riešenia pr. 60.3$\Big)$; **2**. $\dfrac{n\pi}{2}$ $\displaystyle\Big($využite rovnosť $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sin(2k-1)x = \frac{1-\cos 2mx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 mx}{\sin x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, a výsledok pr. 174.1$\Big)$; **3**. π, ak n je nepárne (pozri pr. 174.1); 0, ak n je párne $\Big($použite substitúciu $x - \dfrac{\pi}{2} = t$ a pr. 93.1$\Big)$;

175 **1**. $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$; **2**. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\arcsin\frac{\sqrt{2}\,b}{b^2+1} - \arcsin\frac{\sqrt{2}\,a}{a^2+1}\Big)$;

176 **1**. nech $b - a = P$ (dôkaz v ostatných prípadoch prenechávame na čitateľa), označme $\displaystyle M := \sup_{x\in[0,P]}|\varphi(x)|$, $a_k := a + \dfrac{k}{n}(b-a)$, $k = 0,1,\dots,n$; potom $\displaystyle\int_{a_{k-1}}^{a_k}\varphi(nx)\,dx = 0$ (pozri pr. 93.2) a $\displaystyle|I_n| := \Big|\int_a^b f(x)\varphi(nx)\,dx\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} f(a_k)\int_{a_{k-1}}^{a_k}\varphi(nx)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k}(f(x)-f(a_k))\varphi(nx)\,dx\Big| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k}|f(x)-f(a_k)||\varphi(nx)|\,dx \le M\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k}|f(x)-f(a_k)|\,dx$; z rovnomernej spojitosti f na $[a,b]$ vyplýva $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \,:\, |a_k - a_{k-1}| < \delta \Rightarrow \displaystyle\int_{a_{k-1}}^{a_k}|f(x)-f(a_k)|\,dx \le \varepsilon(a_k - a_{k-1})$; celkovo teda $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \in \mathbf{N},\ n > N \,:\, |I_n| \le M(b-a)\varepsilon$;

2. tvrdenie najprv dokážte pre konštantnú funkciu f a ľubovoľný interval $[a,b]$, ďalšie úvahy sú podobné ako v riešení pr. 176.1 $\left(\left|\int_a^b f(x)|\sin nx|\,dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \sum_{k=1}^{m}\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f(a_k)||\sin nx|\,dx + |f(a_k)|\cdot\left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} |\sin nx|\,dx - \frac{2}{\pi}(a_k - a_{k-1})\right| + \frac{2}{\pi}\int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(a_k) - f(x)|\,dx\right)\right.$, kde $m \in \mathbf{N}$ je vhodne zvolené číslo, $\left. a_k := a + \frac{k}{m}(b-a)\,,\ k = 0, 1, \ldots, m\right)$;

177 $\frac{3}{2}e^{5/2}$ $\left(\text{na výpočet } \int_{1/2}^{2} e^{x+1/x}\,dx \text{ použite metódu per partes: } u' = 1\,,\ v = e^{x+1/x}\right)$;

178 pozri pr. 96.2; podľa binomickej vety $(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2k}$;

179 $B(m,n) = \frac{n-1}{m}B(m+1, n-1)$;

180 $I(m,n) = \frac{n-1}{m+1}I(m+2, n-2)\,,\ n \ge 2$, ďalej pozri výsledok pr. 96.1;

181 $\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{\pi}{2}\,,\ n \in \mathbf{N}$;

182 1. $K_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ (použite metódu per partes: $u' = \cos nx$, $v = \cos^n x$; k obidvom stranám získanej rovnosti pripočítajte K_n, pri úprave pravej strany využite vzorec $\cos(n-1)x = \cos nx\cos x + \sin nx \sin x$; tak dostanete rekurentný vzťah $2K_n = K_{n-1}\,,\ n \in \mathbf{N}$); 2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k(n-k+1)}$ $\left(2L_n = \frac{1}{n} + L_{n+1}\right)$;

183 1. na výpočet $\int_0^{\pi/2}\cos^\alpha x \sin\alpha x\,dx$ použite metódu per partes, integrál na pravej strane získanej rovnosti preveďte na jej ľavú stranu a použite vzorec $\sin(\alpha+1)x = sin\alpha x\cos x + \cos\alpha x\sin x$;

185 funkcia $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt$ je spojitá, $F(a) < 0\,,\ F(b) > 0$;

186 1. 2; 2. 1;

187 $g'(x) = \dfrac{f(x)\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt}{\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\right)^2} > 0$ pre $x > 0$;

188 primitívna funkcia F k funkcii f je párna, derivácia párnej funkcie je nepárna funkcia;

189 „$\Longrightarrow$“: stačí položiť $\lambda := \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$; „$\Longleftarrow$“: pre primitívnu funkciu F k funkcii f platí $\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha} \ge \lambda$ $(a \le \alpha < \beta \le b)$, preto $f(x) = F'(x) \ge \lambda\,,\ x \in [a,b]$;

190 napr. $f(x) = \begin{cases} \sin\ln|x| + \cos\ln|x|\,, & \text{ak } x \in [-1,0)\cup(0,1] \\ 0\,, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, potom $F(x) = \begin{cases} x\sin\ln|x|\,, & \text{ak } x \in [-1,0)\cup(0,1] \\ 0\,, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$ (pozri pr. 87);

191 $F(x) = \int_{-1}^{x}(g'(t) - h(t))\,dt$, kde $g(t) = \begin{cases} t^2\cos\frac{1}{t}\,, & \text{ak } t \ne 0 \\ 0\,, & \text{ak } t = 0 \end{cases}$, $h(t) = \begin{cases} 2t\cos\frac{1}{t}\,, & \text{ak } t \ne 0 \\ 0\,, & \text{ak } t = 0 \end{cases}$, diferencovateľnosť funkcií $\int_{-1}^{x} g'(t)\,dt$, resp. $\int_{-1}^{x} h(t)\,dt$ vyplýva z vety 11, resp. 14b);

192 4. z nerovnosti $f(x+t) > f(y+t)$ pre $x > y$ a z pr. 162 vyplýva $F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x +$

$t)\,dt > \dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} f(y+t)\,dt = F_\delta(y)$ pre $x > y$; **6**. platí $|f(x) - F_\delta(x)| \le \dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x+t)|\,dt$, z rovnomernej spojitosti funkcie f na intervale $[a-\delta, b+\delta]$ vyplýva $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$: $|t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x+t)| < \varepsilon$;

193 nech $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(a), & \text{ak } x < a \\ f(x), & \text{ak } x \in [a,b] \\ f(b), & \text{ak } x > b \end{cases}$, z pr. 192.2,6 vyplýva, že existuje spojite diferencovateľná funkcia $\overline{f}_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ taká, že $\forall\, x \in [a,b]$: $|\overline{f}(x) - \overline{f}_1(x)| < \dfrac{\varepsilon}{n}$ $\Big($a teda $\forall\, x \in [a,b]$: $|f(x) - \overline{f}_1(x)| < \dfrac{\varepsilon}{n}\Big)$; z pr. 192.3,6 $\Big($použitého pre interval $[a,b]$, číslo $\dfrac{\varepsilon}{n}$ a funkciu $\overline{f}_1\Big)$ vyplýva existencia dvakrát spojite diferencovateľnej funkcie $\overline{f}_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pre ktorú platí $\forall\, x \in [a,b]$: $|\overline{f}_1(x) - \overline{f}_2(x)| < \dfrac{\varepsilon}{n}$, atď; pre funkciu $f_\varepsilon := \overline{f}_n|[a,b]$ potom platí $|f(x) - f_\varepsilon(x)| \le |f(x) - \overline{f}_1(x)| + |\overline{f}_1(x) - \overline{f}_2(x)| + \cdots + |\overline{f}_{n-1}(x) - \overline{f}_n(x)| < \varepsilon$;

194 dokážeme prvú nerovnosť (druhá sa dokazuje obdobne); nech $\gamma(x) := \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ $\Big($potom $\gamma(x) \le x - a$, teda $a \le \gamma(x) + a \le x\Big)$, označme $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)g(t)\,dt$, $G(x) := \displaystyle\int_a^{a+\gamma(x)} f(t)\,dt$, potom $F(a) = G(a)$ a $F'(x) \ge G'(x)$ pre $x \in [a,b]$;

195 označme $A := \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, $c := \sup\{x \in [0,1]; f(x) \ge A\}$, potom $\displaystyle\int_c^1 f(x)\,dx \le A(1-c)$ $\Big(= (1-c)\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\Big)$, k obidvom stranám tejto nerovnosti pripočítajte $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$;

196 $f(0)$ $\Big(\displaystyle\int_0^1 = \int_0^{1/\sqrt{n}} + \int_{1/\sqrt{n}}^1$, nech $M := \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$, potom $\Big|\displaystyle\int_{1/\sqrt{n}}^1\Big| \le \Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) M \cdot \max\limits_{x\in[1/\sqrt{n},1]} ne^{-nx} \to 0$ pre $n \to \infty$, $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{n}} = f(c_n) \cdot \int_0^{1/\sqrt{n}} ne^{-nx}\,dx = f(c_n)(1 - e^{-n}) \to f(0)$ pre $n \to \infty$, pozri aj riešenie pr. 113.3$\Big)$;

197 predpokladajme, že g je nezáporná funkcia (v ostatných prípadoch stačí položiť $G(x) := g(x) - g(a)$ a z nerovnosti pre f, G odvodiť nerovnosť pre f, G), nech $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = f(c)$, potom $\displaystyle\int_0^c (f(c) - f(x))\,dx = \int_c^1 (f(x) - f(c))\,dx$; nech $\displaystyle\int_0^c (f(c) - f(x))g(x)\,dx = g(c_1)\int_0^c (f(c) - f(x))\,dx$, $c_1 \in [0,c]$; $\displaystyle\int_c^1 (f(x) - f(c))g(x)\,dx = g(c_2)\int_c^1 (f(x) - f(c))\,dx$, $c_2 \in [c,1]$; potom $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 (f(x) - f(c))g(x)\,dx = \int_0^c + \int_c^1 = (g(c_2) - g(c_1))\int_c^1 (f(x) - f(c))\,dx \ge 0$;

198 stačí dokázať, že f je monotónna; ak f nie je monotónna, tak existujú $p, q, r \in [a,b]$, $p < q < r$, tak, že pre funkciu $F = f$ alebo funkciu $F = -f$ platí $F(p) < F(q)$, $F(r) < F(q)$; predpokladajme $F = f$; nech $\eta := \min\{f(q) - f(p),\ f(q) - f(r)\}$, nech $a_1 := \sup\{x \in [p,q); f(x) \le f(q) - \eta\}$, $b_1 := \inf\{x \in (q,r]; f(x) \le f(q) - \eta\}$, potom platí: pre $x \in [a_1, b_1]$ je $f(x) \in [f(q) - \eta, f(q)]$, $f(a_1) = f(b_1) = f(q) - \eta$, pre každé $\vartheta \in [f(q) - \eta, f(q))$ existujú aspoň dve rôzne čísla $c_1, c_2 \in [a_1, b_1]$ také, že $f(c_1) = f(c_2) = \vartheta$; preto f svoju strednú hodnotu na $[a_1, b_1]$ nadobúda aspoň v dvoch rôznych bodoch z $[a_1, b_1]$;

199 označme $F(\lambda) := \displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,dx$; potom F je nezáporná kvadratická funkcia, preto jej diskriminant je nekladný;

200 kvadratická funkcia $F(\lambda) := \int_a^b \left(f^2(x) + \lambda\left(\sqrt{\frac{PQ}{pq}} + \sqrt{\frac{pq}{PQ}}\right) f(x)g(x) + \lambda^2 g^2(x)\right) dx$ nadobúda nezáporné aj nekladné hodnoty $\left(\left(f(x) - \frac{P}{q}\, g(x)\right)\left(f(x) - \frac{p}{Q}\, g(x)\right) \le 0\right.$ pre všetky $\left. x \in [a,b]\right)$, preto jej diskriminant je nezáporný;

201 ukážte, že pre deriváciu funkcie $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} g(t)\,dt - xf(x)$ platí $F'(x) = 0$ pre $x \ge 0$, teda F je konštantná na $[0,\infty)$ [27]; na dôkaz (2.8) zvoľte $f(x) = x^{p-1}$, $x \ge 0$;

202 označme $N_p(f) := \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $N_q(g) := \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/q}$; v nerovnosti (2.8) z pr. 201 položte $u = \frac{|f(x)|}{N_p(f)}$, $v = \frac{|g(x)|}{N_q(g)}$, $x \in [a,b]$, a získanú nerovnosť zintegrujte;

203 **1.** $1 < I < \sqrt{2} \approx 1.414\,213\,562$; **2.** $1.030\,776\,406 \approx \sqrt{1 + \frac{1}{2^4}} \le I \le \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1.207\,106\,781$ (funkcia $\sqrt{1+x^4}$ je konvexná; ak $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá konvexná funkcia, tak pre funkciu $-f$ platí nerovnosť z pr. 166); **3.** $I < 1.1$; **4.** $I \le \sqrt{\int_0^1 (1+x^4)\,dx} = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1.095\,445\,115$.

---

[27] rovnosť $\int_0^a f(t)\,dt = af(a) - \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\,dt$ možno dokázať aj použitím metódy per partes ($u' = 1$, $v = f(t)$) a potom substitúcie $f(t) = z$, všimnite si tiež veľmi názornú geometrickú interpretáciu tejto rovnosti