3. Číselné rady

$\boxed{\mathbf{204}}$ **1.** napr. $a_n = \frac{1}{4n-3}$; **2.** napr. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; **3.** napr. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$; **4.** napr. $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}$; **5.** napr. $a_n = \frac{2^n}{n!}$; **6.** napr. $a_n = (-1)^{n+1}\frac{3n-1}{2\cdot 3^{n-1}}$;

$\boxed{\mathbf{205}}$ **1.** $a_n = S_n - S_{n-1}$ pre $n > 1$, $a_1 = S_1$; teda $a_1 = 2$, $a_n = -\frac{1}{n(n-1)}$ pre $n > 1$; $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$; **2.** $a_n = \frac{1}{2^n}$, $S = 1$; **3.** $a_n = -2\sin\frac{\pi}{2n(n-1)}\cos\frac{2n^2-1}{2n(n-1)}\pi$ pre $n > 1$, $a_1 = 0$; $S = 0$; **4.** $a_1 = -1$, $a_n = (-1)^n\frac{2n-1}{n(n-1)}$ pre $n > 1$; $S = 0$;

$\boxed{\mathbf{206}}$ **1.** $S_n = -\frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$, $\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{2}{3}$, teda rad konverguje; **2.** $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$, konverguje; **3.** $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\left((-2)^n - 1\right)$, osciluje; **4.** $S_{2n} = n$, $S_{2n-1} = -n$; osciluje; **5.** $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, preto $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, konverguje [1]; **6.** $S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$, konverguje; **7.** $S_n = \frac{5}{36} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{3(n+3)}$, konverguje $\Bigg(a_n = \frac{1}{6n} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{3(n+3)}$; S_n možno zapísať v tvare tabuľky

$$S_n = \begin{array}{cccccccccccccc}
\frac{1}{6} & & & - & \frac{1}{2\cdot 3} & + & \frac{1}{3\cdot 4} & & & & & & & + \\
 & + & \frac{1}{6\cdot 2} & & & - & \frac{1}{2\cdot 4} & + & \frac{1}{3\cdot 5} & & & & & + \\
 & & & + & \frac{1}{6\cdot 3} & & & - & \frac{1}{2\cdot 5} & + & \frac{1}{3\cdot 6} & & & + \\
 & & & & & + & \frac{1}{6\cdot 4} & & & - & \frac{1}{2\cdot 6} & + & \frac{1}{3\cdot 7} & + \\
 & & & & & & & & & & & & & \vdots
\end{array}$$

[1] obr. 9 umožňuje názornú predstavu o konvergencii tohto radu; p, q sú dotýkajúce sa kružnice s polomerom 1, r je ich spoločná dotyčnica, kružnica k_1 sa dotýka kružníc p, q a priamky r, kružnica k_2 sa dotýka kružníc p, q, k_1, atď; potom priemer kružnice k_n má dĺžku $\frac{1}{n(n+1)}$

obr. 9.

$$\begin{array}{cccccccc}
+\dfrac{1}{6(n-3)} & & -\dfrac{1}{2(n-1)} & +\dfrac{1}{3n} & & & & + \\
& +\dfrac{1}{6(n-2)} & & -\dfrac{1}{2n} & +\dfrac{1}{3(n+1)} & & & + \\
& & +\dfrac{1}{6(n-1)} & & -\dfrac{1}{2(n+1)} & +\dfrac{1}{3(n+2)} & & + \\
& & & +\dfrac{1}{6n} & & -\dfrac{1}{2(n+2)} & +\dfrac{1}{3(n+3)} &
\end{array}$$

a využiť rovnosť $\frac{1}{3k}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{6k}=0\Big)$; <u>**8**</u>. $S_n=1-\sqrt{2}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\quad\left(=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\right)$, konverguje; <u>**9**</u>. $S_n=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$, konverguje $\left(a_n=-\sqrt{\frac{n_1}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$; <u>**10**</u>. $S_n=\ln\frac{(n+1)!}{n!}=\ln(n+1)$, diverguje k $+\infty$; <u>**11**</u>. $S_n=q\,\frac{1-q^n}{(1-q)^2}-n\,\frac{q^{n+1}}{1-q}$ pre $q\neq 1$ $\Big($dokážte rovnosť $S_n-qS_n=q+q^2+\cdots+q^n-nq^{n+1}$ a vyjadrite z nej S_n alebo využite výsledok pr. I.303.1$\Big)$, $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$ pre $q=1$, konverguje pre $|q|<1$, diverguje k $+\infty$ pre $q\geq 1$, osciluje pre $q\leq -1$ $\Big($využite, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ pre $a>1$, pozri pr. I.192.1a$\Big)$; <u>**12**</u>. $S_n=3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)-\frac{n}{2^{n-1}}$ $\big($využite vzorec pre čiastočné súčty geometrického radu a pr. 206.11$\big)$, konverguje; <u>**13**</u>. $S_n=\frac{1}{2}\left(\sin\alpha-\sin\frac{\alpha}{2^n}\right)$, konverguje; <u>**14**</u>. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{5}\sin\frac{k!\,\pi}{720}$ pre $n\geq 5$, konverguje $(720=6!\,,\ a_n=0$ pre $n\geq 6)$;

$\boxed{\textbf{207}}$ z vety 3 vyplýva divergencia radov číslo 1 $(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1)$, 2 $(\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$ [2], $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ neexistuje$)$, 4 $\Big(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}\ln\ln n}=1$, na výpočet $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\ln x}{x}$ možno použiť l'Hospitalovo pravidlo$\Big)$, 5 $(\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0.002$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ neexistuje$)$; rad číslo 3 spĺňa nutnú podmienku konvergencie, teda len na základe vety 3 nemožno rozhodnúť, či tento rad konverguje alebo diverguje [3];

$\boxed{\textbf{208}}$ <u>**1.**</u> postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ je vybranou postupnosťou z postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $\big($platí $S_n=s_{p_{n+1}}$, $n\in\mathbf{N}\big)$, z konvergencie postupnosti vyplýva konvergencia každej jej podpostupnosti; <u>**2.**</u> z nezápornosti čísel a_n, $n\in\mathbf{N}$, vyplýva, že $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť; monotónna postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je konvergentná niektorá jej podpostupnosť (toto tvrdenie treba samozrejme dokázať); <u>**3.**</u> napr. $a_n=(-1)^n$, $p_n=2n-1$;

$\boxed{\textbf{209}}$ $q=\frac{1}{5}(7-2\sqrt{6})$ $\Big($číslo $\frac{1}{5}(7+2\sqrt{6})$, ktoré je druhým koreňom rovnice $\frac{q}{(1-q)^2}=\frac{5}{4}$, nemôže byť riešením, pretože pre hľadané q musí platiť $|q|<1$, inak by rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ — a teda aj každý jeho zvyšok — divergoval (pozri vetu 1)$\Big)$;

$\boxed{\textbf{210}}$ $\Big($predovšetkým si uvedomte, že z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ vyplýva konvergencia každého jeho zvyšku$\Big)$ ak $R_n=aq^{n-1}$, tak $a_n=R_{n-1}-R_n=a(1-q)q^{n-2}$, $n\geq 2$ (pri dôkaze rovnosti $a_n=R_{n-1}-R_n$ nezabudnite, že čísla R_n, $n\in\mathbf{N}$, sú definované ako limity$\big)$;

$\boxed{\textbf{211}}$ <u>**1.**</u> pretože $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (veta 3), je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca postupnosť nezáporných čísel alebo

---

[2] pretože platí ekvivalencia $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\iff\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, je zrejme jedno, či pri vyšetrovaní nutnej podmienky konvergencie hľadáme $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ alebo $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$

[3] charakter tohto radu možno vyšetriť napr. pomocou tvrdenia α) vety 4b, ak využijeme rovnosť $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$

neklesajúca postupnosť nekladných čísel; v prvom prípade platí $0 \le na_{2n} \le a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$, z Cauchyho-Bolzanovho kritéria konvergencie vyplýva $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N}, n > N : a_{n+1} + \cdots + a_{2n} < \varepsilon$, preto platí $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N}, n > N : 0 \le na_{2n} < \varepsilon$, odtiaľ vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$, rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0$ vyplýva podobne z nerovností $0 \le (2n+1)a_{2n+1} \le 2(n+1)a_{2n+1} \le 2(a_{n+1} + \cdots + a_{2n+1})$, pre postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} := \{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ teda platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0$, preto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$; v druhom prípade (tj. ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť nekladných čísel) stačí uvažovať postupnosť $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá je nerastúca a nezáporná; **2.** nie, napr. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{ak} \quad n \in \{2^m \,;\, m \in \mathbf{N}\} \\ 0, & \text{ak} \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{2^m \,;\, m \in \mathbf{N}\} \end{cases}$;

212 **1.** táto podmienka nezaručuje konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, vyhovujú jej všetky rady, pre ktoré je splnená nutná podmienka konvergencie (a len také rady), teda napr. aj divergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$; **2.** konverguje $\Big($pre $n = 1$ dostaneme $\lim\limits_{p\to\infty}(a_2 + \cdots + a_{p+1}) = 0$, odtiaľ $\lim\limits_{p\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{p+1}) = a_1$, čo podľa definície súčtu radu znamená $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1\Big)$;

213 **3.** konverguje; **4.** konverguje $\left(a_n \le \dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, **5.** diverguje; **6.** diverguje $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\dfrac{1}{n^{1/2+1/3}}} \text{ je konečná a nenulová}\right)$; **7.** konverguje $\left(\operatorname{arctg} n < \dfrac{\pi}{2}\right)$; **8.** konverguje; **9.** diverguje $\left(a_n = \dfrac{2}{\sqrt{n+2}\,(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{1/n} \text{ je nenulová a konečná}\right)$; **10.** konverguje $\Bigg($rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{3+(-1)^n}{n^2}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{n^2}$ majú rovnaký charakter, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin \dfrac{3+(-1)^n}{n^2}}{\dfrac{3+(-1)^n}{n^2}} = 1$, pritom $\dfrac{3+(-1)^n}{n^2} \le \dfrac{4}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}$, a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2}$ konverguje$\Bigg)$; **12.** konverguje $\left(a_n = \dfrac{1}{n^2\left(1 - \dfrac{\ln n}{n^2}\right)}\right.$, pritom $\left.\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^2} = 0\right)$; **13.** diverguje $\Big(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{1/n} = 1$, využite rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, pozri pr. I.135.2, I.380.1$\Big)$; **15.** konverguje $\left(\text{pripomeňme, že } \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1,\ \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1\right)$; **17.** konverguje $\left(a_n = \dfrac{1}{n^2} - n\left(\dfrac{1}{n^3} - \dfrac{1}{6n^9} + o\left(\dfrac{1}{n^9}\right)\right) = \dfrac{1}{6n^8} + o\left(\dfrac{1}{n^8}\right)\right)$; **18.** konverguje $\Big($využite postupne rovnosti $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$, $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^2 n}{n} = 0$, pozri aj riešenie pr. 213.12$\Big)$;

214 **1.** $\alpha < 1$ $\left(\ln(n^2+1) - \ln n^2 = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right);\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{1/n^{2-\alpha}} \text{ je nenulová a konečná}\right)$; **2.** $\alpha > 0$ $\left(\ln \dfrac{2n+1}{2n-1} = \ln\left(1 + \dfrac{2}{2n-1}\right)\right)$; **3.** $\alpha > \dfrac{1}{2}$ $\left(a_n = 1 - n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = \dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right.$, preto $\left.\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{1/n^2}\right)^{\alpha} \text{ je konečná a nenulová}\right)$; **4.** $\alpha > \dfrac{1}{2}$ $\left(a_n = \left|-\dfrac{2}{(n-1)^2} + o\left(\left(\dfrac{2}{n-1}\right)^2\right)\right| = \left|-\dfrac{2}{(n-1)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right| =[4] \dfrac{2}{(n-1)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$; **5.** pre každé $\alpha > 0$ $\big($prípad $\alpha = 1$

---

[4]táto rovnosť platí počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$ $\Big($ak využijeme, že $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = o\left(\dfrac{1}{(n-1)^2}\right)$,

je zrejmý; pre $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$ je $a_n = e^{\frac{1}{n}\ln\alpha} + e^{-\frac{1}{n}\ln\alpha} - 2 = 1 + \dfrac{\ln\alpha}{n} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\alpha}{n}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ [5] $+ 1 - \dfrac{\ln\alpha}{n} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\alpha}{n}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 2 = \dfrac{\ln^2\alpha}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\Bigg)$; **6.** pre všetky $\alpha > 0$ $\Big($pre $\alpha \neq 1$ je $a_n = \alpha^{1/(n+1)}\big(\alpha^{1/n-1/(n+1)} - 1\big)$, ďalej využite, že $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u - 1}{u} = 1\Big)$[6]; **7.** pre všetky $\alpha \in \mathbf{R}$ $\Big(a_n = \dfrac{1}{n^{3/2}} \cdot \dfrac{\ln^\alpha n}{\sqrt{n}}$ [7], využite, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^\alpha n}{n^\varepsilon} = 0$ pre každé $\alpha \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0\Big)$; **8.** pre $\alpha > 1$ $\Big($pre $\alpha \leq 1$ je $\dfrac{\ln n}{n^\alpha} \geq \dfrac{1}{n^\alpha}$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}\Big)$;

215 konverguje; postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ čiastočných súčtov je rastúca, jej ohraničenosť zhora[8] vyplýva z nerovností $S_n \leq 2s_n \leq 2s$, kde s_n, resp. s je n–tý čiastočný súčet, resp. súčet radu $\sum\limits_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^2}$;

216 ak $na_n \leq K$, tak $a_n^2 \leq \dfrac{K}{n^2}$;

217 uvedieme dva návody: 1. pre rad $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie $\big($dokážte nerovnosť $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq \max\big\{|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}|, |c_{n+1} + \cdots + c_{n+p}|\big\}$ a využite, že pre rady $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$, $\sum\limits_{n=1}^\infty c_n$ je Cauchyho–Bolzanovo kritérium splnené$\big)$; 2. z konvergencie radov $\sum\limits_{n=1}^\infty c_n$, $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^\infty (c_n - b_n)$, z nerovností $0 \leq a_n - b_n \leq c_n - b_n$, $n \in \mathbf{N}$, a vety 4a) vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^\infty (a_n - b_n)$, z konvergencie radov $\sum\limits_{n=1}^\infty (a_n - b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$;

218 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, preto počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$ platí $0 \leq a_n < 1$; ak $0 \leq a_n < 1$, tak $a_n^2 \leq a_n$; obrátená implikácia neplatí;

219 využite nerovnosti $2|ab| \leq a^2 + b^2$, $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, $\dfrac{2a}{n} \leq a^2 + \dfrac{1}{n^2}$;

220 $\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, n–tý čiastočný súčet má tvar $S_n = \left(\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{n}\right) - \ln(n+1)$; (3.2) dostaneme, ak položíme $C := \sum\limits_{n=1}^\infty \left(\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$ a využijeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = C$;

---

tak $a_n := -\dfrac{2}{(n-1)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = -\dfrac{2}{(n-1)^2}\left(1 - 2o\left(\dfrac{1}{(n-1)^2}\right)\Big/\dfrac{1}{(n-1)^2}\right)$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - 2 \cdot (n-1)^2 o\left(\dfrac{1}{(n-1)^2}\right)\right) = 1$; odtiaľ už vyplýva, že $a_n < 0$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$, porovnaj tiež s poznámkou za riešením pr. 213.16$\Big)$, pri zápise sme využili rovnosť $-o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

[5]zrejme $o\left(\left(\dfrac{\ln\alpha}{n}\right)^2\right) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

[6]pokiaľ zvolíme postup ako v pr. 214.5, treba použiť rozvoj $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} = o(x^2)$; keby sme využili len rozvoj $e^x = 1 + x + o(x)$, dostaneme $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\ln\alpha + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, čo pre naše potreby nestačí

[7]alebo všeobecnejšie $a_n = \dfrac{1}{n^{2-\varepsilon}} \cdot \dfrac{\ln^\alpha n}{n^\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1)$

[8]na rovnakej myšlienke je založený dôkaz vety 4a)

$\boxed{\mathbf{221}}$ $\underline{1}$. konverguje; $\underline{2}$. konverguje; $\underline{3}$. konverguje; $\underline{4}$. diverguje; $\underline{7}$. konverguje (pripomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$); $\underline{8}$. konverguje $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3\right)$; $\underline{9}$. diverguje (najprv ukážte, že daný rad má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 6\cdots(3n)}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n}$, na to použite rovnosť $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\arcsin u}{u} = 1$); $\underline{10}$. konverguje $\left(\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{3}\right.$; možno tiež využiť nerovnosť $a_n \le \dfrac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$ a konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$ dokázať pomocou limitného tvaru Cauchyho alebo d'Alembertovho kritéria$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{222}}$ $\underline{3}$. pri dôkaze rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0$ využite výsledok pr. 222.1;

$\boxed{\mathbf{223}}$ napr. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{16}, \ldots$;

$\boxed{\mathbf{224}}$ napr. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ (alebo všeobecnejšie: každý rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť kladných čísel a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le 1$);

$\boxed{\mathbf{225}}$ $\underline{1}$. diverguje; $\underline{3}$. konverguje, ak $b-a>d$; diverguje, ak $b-a\le d$ (v prípade $b-a=d$ možno použiť tvrdenie b) vety 9 alebo priamo dosadením zistiť, že vtedy má daný rad tvar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a+n\alpha}$, a porovnať ho s harmonickým radom $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$); $\underline{4}$. konverguje; $\underline{5}$. diverguje; $\underline{6}$. konverguje pre $p>2$, diverguje pre $p\le 2$ (pre $p=2$ možno použiť tvrdenie b) vety 9); $\underline{7}$. diverguje (najprv dokážte, že daný rad má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)\cdot 2\cdot 5\cdots(3n+2)}{n!\,(n+1)!\,9^n}$);

$\boxed{\mathbf{226}}$ $\underline{1}$. napr. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť z riešenia pr. 223; $\underline{2}$. napr. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p>0$ (práve na porovnávaní s týmito radmi je založené Raabeho kritérium);

$\boxed{\mathbf{227}}$ $\underline{1}$. konverguje; $\underline{2}$. konverguje pre $p>1$, diverguje pre $0<p\le 1$; $\underline{3}$. konverguje pre $p>1$, diverguje pre $0<p\le 1$; $\underline{4}$. konverguje pre $p>1$, diverguje pre $0<p\le 1$; $\underline{5}$. diverguje (využite, že $n!\le n^n$, $n\in\mathbf{N}$); $\underline{7}$. konverguje (daný rad má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$);

$\boxed{\mathbf{228}}$ (predovšetkým si uvedomte, že z monotónnosti funkcie f vyplýva jej riemannovská integrovateľnosť na každom uzavretom ohraničenom intervale $I\subset[1,\infty)$) $\underline{1}$. označme $P_n := S_n - \displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx$; ak využijeme nerovnosti $f(x)\le f(i)$ pre $x\in[i,i+1]$, $i\in\mathbf{N}$, a $f(i)-f(x)\le f(i)-f(i+1)$ pre $x\in[i,i+1]$, $i\in\mathbf{N}$, zistíme, že postupnosť $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca $\left(P_{n+1} = P_n + f(n+1) - \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx = P_n + \int_{n+1}^{n+2}\big(f(n+1)-f(x)\big)\,dx \ge P_n\right)$ a zhora ohraničená $\left(P_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(f(i) - \int_i^{i+1} f(x)\,dx\right) = \sum_{i=1}^{n}\int_i^{i+1}\big(f(i) - f(x)\big)\,dx \le \sum_{i=1}^{n}\big(f(i)-f(i+1)\big) = f(1)-f(n+1)\le f(1)\right)$; na obr. 10 je geometrická interpretácia uvedených úvah v prípade spojitej funkcie f (plošný obsah vyšrafovanej plochy je číslo P_3);

$\underline{2}$. odhad pre S vyplýva z nerovností $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le S_n \le f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$, postup pre R_k je analogický (z nezápornosti funkcie f vyplýva, že funkcia $F(t) := \displaystyle\int_1^t f(x)\,dx$ je neklesajúca, z nerovností $F(n)\le S_n\le S$ vyplýva, že F je zhora ohraničená, preto existuje konečná $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$, a teda aj $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)$);

obr. 10.

$\boxed{229}$ (využite odhad pre R_k z pr. 228.2) **1.** stačí sčítať prvé 4 členy $\left(\frac{2}{3\cdot 5^{3/2}}+\frac{1}{5^{5/2}}\approx 0.077\,5\,,\ \frac{2}{3\cdot 4^{3/2}}+\frac{1}{4^{5/2}}\approx 0.114\,6\right)$; **2.** stačí sčítať prvých 13 členov;

$\boxed{230}$ **1.** napr. $f(x)=\sin^2\pi x\,,\ x\geq 1$; **2.** napr. $f(x)=$ $\begin{cases} 1+nx-n^2\,, & \text{ak}\quad x\in[n-1/n,]\,,\ n\geq 2\\ 1-nx+n^2\,, & \text{ak}\quad x\in[n,n+1/n]\,,\ n\geq 2\\ 0 & \text{pre všetky ostatné}\quad x\in[1,\infty)\end{cases}$ (teda grafom f je „lomená čiara", vrcholy ktorej sú určené funkčnými hodnotami $f(1)=0\,,\ f\left(n-\frac{1}{n}\right)=0\,,\ f(n)=1\,,\ f\left(n+\frac{1}{n}\right)=0\,,\ n\in\mathbf{N}$);

$\boxed{231}$ **1.** konverguje; **2.** konverguje; **3.** konverguje; **4.** konverguje pre ľubovoľné $\alpha\in\mathbf{R}$; **5.** diverguje; **6.** konverguje; **7.** konverguje $\left(n^{(\ln n)/n}=e^{(\ln n)^2/n}\right)$; **8.** diverguje (preverte nutnú podmienku konvergencie); **9.** konverguje pre $\alpha\geq 0$, diverguje pre $\alpha<0$ (nezabudnite sa presvedčiť, či ide skutočne o rad s nezápornými, resp. nekladnými členmi); **10.** konverguje pre $q>1$, diverguje pre $q\leq 1$; **11.** diverguje; **12.** konverguje; **13.** diverguje; **14.** diverguje; **15.** diverguje (preverte nutnú podmienku konvergencie); **16.** konverguje pre každé $a>0\,,\ b>0\,,\ b\neq 1$ $\left(\log_r s=\frac{\ln s}{\ln r}\right)$; **17.** konverguje $\left(a_n=\frac{2n+3}{3(2n-1)^3}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right.$; pozor: rovnosť $a_n=-\frac{1}{(2n-1)^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, ktorú dostaneme, ak použijeme len rozvoj $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$, pre naše potreby nestačí$\Big)$; **18.** diverguje; **19.** konverguje $\left(a_n\right.$ najprv rozšírte výrazom $\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ a využite, že $\left.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n}+\sqrt{\ln(1+1/n)}}{1/\sqrt{n}}=2\right)$; **20.** diverguje $\left(a_n=\frac{1}{ne^k}\right)$; **21.** konverguje (využite, že $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=0$ pre každé $k\in\mathbf{R}$); **22.** konverguje; **23.** diverguje (využite, že $\lim\limits_{x\to 0}x^k\ln x=0$ pre $k>0$); **24.** konverguje pre $\alpha<-1$, diverguje pre $\alpha\geq -1$ (pre $\alpha<0$ má daný rad rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\ln n$); **25.** konverguje $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(i!)<(n+1)!\right)$; **26.** konverguje pre $\alpha>2$, diverguje pre $\alpha\leq 2$ ($2^n\leq n!\leq n^n$ počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$); **27.** konverguje, ak $\alpha>1$ alebo ak $\alpha=1$ a $\beta>1$; diverguje, ak $\alpha<1$ alebo ak $\alpha=1$ a $\beta\leq 1$; **28.** konverguje pre $\alpha>0$, diverguje pre $\alpha\leq 0$ $\Big($pre $\alpha>0$ využite, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^{\alpha})}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha\ln n+\ln(1+1/n^{\alpha})}{\ln n}=\alpha\Big)$;

$\boxed{232}$ **1a)** konverguje ($c_n\leq a_n+b_n$); **1b)** konverguje; **2a)** diverguje; **2b)** môže divergovať (napr. $a_n = b_n = 1$) aj konvergovať $\Big($napr. $a_n = \big(1-(-1)^n\big)n$, $b_n = \big(1+(-1)^n\big)n\Big)$; **3a)** diverguje; **3b)** konverguje;

$\boxed{\mathbf{233}}$ **2a)** konverguje; **2b)** diverguje $\left(\text{pri výpočte } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n} \ (=0) \text{ použite substitúciu } \ln n = t\right)$; **2c)** konverguje $\left(\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = \dfrac{n^{4/3}\left(\ln 3 - \dfrac{3\ln n!}{n^{4/3}}\right)}{\ln n}\right.$, pritom $0 \le \dfrac{\ln n!}{n^{4/3}} \le \dfrac{n\ln n}{n^{4/3}} = \dfrac{\ln n}{n^{1/3}}$, preto $\left.\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\ln n!}{n^{4/3}} = 0\right)$;

$\boxed{\mathbf{234}}$ **1b)** rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má podľa pr. 208.1,2 rovnaký charakter [9] ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_1 = a_1$, $A_{n+1} = \sum\limits_{n^2+1}^{(n+1)^2} a_n$ $(n\in\mathbf{N})$; pritom (pretože $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel) platí $(2n+1)a_{n^2} \ge A_{n+1} \ge (2n+1)a_{(n+1)^2}$, a teda aj $(*)$ $3na_{n^2} \ge A_{n+1} \ge (n+1)a_{(n+1)^2}$; preto z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n^2}$ (to je dôsledok druhej nerovnosti v $(*)$) a z divergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ vyplýva divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n^2}$; **2a)** konverguje $\left(\text{využite pr. 234.1b a Cauchyho kritérium; nezabudnite preveriť, že } \left\{\dfrac{1}{(n-\sqrt{n})^{\sqrt{n}}}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ je nerastúca postupnosť}\right)$; **2b)** konverguje (vyplýva to napokon aj z porovnania s radom z pr. 233.2a); **2c)** konverguje;

$\boxed{\mathbf{235}}$ nech $q < \dfrac{1}{2}$ $\left(\text{prípad } q > \dfrac{1}{2} \text{ prenechávame čitateľovi}\right)$, z podmienky $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{a_n} < \dfrac{1}{2}$ vyplýva, že pre niektoré $M\in\mathbf{N}$ a $\varepsilon > 0$ platí $\forall n\in\mathbf{N}$, $n\ge M$: $\dfrac{a_{2n}}{a_n} \le q+\varepsilon < \dfrac{1}{2}$, označme $Q := q+\varepsilon$, zvoľme $N\in\mathbf{N}$ tak, aby $2^N \ge M$; rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n$, kde $A_n := \sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_n$ [10], pritom z nerovností $a_{2n} + a_{2n+1} \le 2a_{2n}$, $a_{2n} \le Qa_n$ $(n\ge 2^N)$ vyplýva $A_{n+1} = (a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}+1}) + \cdots + (a_{2^{n+2}-2} + a_{a^{n+2}-1}) \le 2(a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}+2} + \cdots + a_{2^{n+2}-2}) \le 2Q(a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) = 2QA_n$ $(n\ge N)$; rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ teraz stačí porovnať s geometrickým radom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_1(2Q)^{n-1}$ (alebo — čo je to isté — použiť na vyšetrenie jeho konvergencie d'Alembertovo kritérium);

$\boxed{\mathbf{236}}$ **2.** využite, že $|\cos^3 n| \le 1$ a $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$; **3.** $\left|\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)\right| = \begin{cases} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & \text{pre } n \text{ párne} \\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right) & \text{pre } n \text{ nepárne, } n\ne 1 \end{cases}$, preto $\left|\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)\right| \le \ln\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)$, $n > 1$;

4. $|a_n| = \dfrac{2^n(1+n^2/2^n)}{3^n(1+n^3/3^n)}$, využite, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0$ pre $a > 1$, $k\in\mathbf{R}$; **6.** $|a_n| = \left|\dfrac{1-\dfrac{n}{2}\sin\dfrac{2}{n}}{n\sin\dfrac{1}{n}}\right| =$

---

[9] pri tejto úvahe využívame, že rad s nezápornými členmi môže konvergovať alebo divergovať k $+\infty$, ale nemôže oscilovať

[10] z radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sme teda vynechali prvých $2^N - 1$ členov a takto vzniknutý rad sme „uzátvorkovali“, pritom využívame tvrdenie z pr. 208 a vetu 1

$\left|\dfrac{1-\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{3!}\cdot\left(\dfrac{2}{n}\right)^3+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)}{n\sin\dfrac{1}{n}}\right| = \dfrac{\dfrac{2}{3n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\sin\dfrac{1}{n}}$ (posledná rovnosť platí počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$, pozri poznámku [4] k riešeniu pr. 214.4), preto $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{1/n^2}=\dfrac{2}{3}$;

237 vyplýva to z rovností $a_n^+=\frac{1}{2}\big(|a_n|+a_n\big)$, $a_n^-=\frac{1}{2}\big(|a_n|-a_n\big)$, $a_n=a_n^+-a_n^-$ a z faktu, že nenulový k–násobok konvergentného (divergentného) radu je konvergentný (divergentný) rad, súčet konvergentných radov je konvergentný rad, súčet konvergentného a divergentného radu je divergentný rad;

dôkaz rovnosti (3.3): $\dfrac{S_n^+}{S_n^-}=1+\dfrac{S_n}{S_n^-}$, kde S_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^-=\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ je konečná;

238 „$\Longrightarrow$“: ak $|b_n|\le K$, tak $|a_nb_n|\le K|a_n|$, preto $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ absolútne konverguje; „$\Longleftarrow$“: stačí zvoliť $b_n=\operatorname{sgn}a_n$;

239 **1.** konverguje pre $p>0$ (pre $p\le 0$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie); **3.** $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$ [11], konverguje; **4.** konverguje; **5.** konverguje; **6.** diverguje (nie je splnená nutná podmienka konvergencie); **7.** konverguje $\left(\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)=\sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)+n\pi\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\dfrac{k^2}{n+\sqrt{n^2+k^2}}\right)\right)$; **8.** konverguje $\Bigg($ak $f(x):=\dfrac{\ln\ln(x+2)}{\ln(x+1)}$, $x>0$, tak $f'(x)=\dfrac{1-\dfrac{x+2}{x+1}\cdot\dfrac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}\ln\ln(x+2)}{(x+2)\ln(x+1)\ln(x+2)}$, pritom limita čitateľa je $-\infty$ a menovateľ je kladný, preto pre dostatočne veľké x je $f'(x)<0\Bigg)$;

240 $\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ln\left(1-\dfrac{1}{2n+2}\right)$, preto $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ má rovnaký charakter ako $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln a_n}$, pritom $\ln a_n=\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)+\ln a_1$ [12]; rýdza monotónnosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva z nerovnosti $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$;

241 stačí sčítať prvých **1.** sto členov; **2.** jedenásť členov $\big(2^{11}\cdot 11^{5/2}\approx 821\,886$, $2^{12}\cdot 12^{5/2}\approx 2\,043\,210\big)$;

242 neplatí, napr. $a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$ alebo $a_n=\begin{cases} b_k\,, & \text{ak } n=2k\\ c_k\,, & \text{ak } n=2k-1\end{cases}$, kde $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ je konvergentný rad, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ je divergentný rad vyhovujúci nutnej podmienke konvergencie, $b_n>0$, $c_n>0$ $(n\in\mathbf{N})$, pozri pr. 237.3;

243 **1.** konverguje $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\right.$ konverguje podľa Leibnizovho kritéria a $\left.\cos\dfrac{\pi}{n}\nearrow 1\right)$; **2.** konverguje; **3.** konverguje $\Bigg($obor hodnôt postupnosti $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je konečný, preto je táto postupnosť

---

[11] $\cos n\pi=(-1)^n$, $n\in\mathbf{N}$

[12] inou možnosťou dôkazu rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0$ je nerovnosť z pr. I.11.2

ohraničená; ak $f(x) := \dfrac{\ln^{100} x}{x}$, tak $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ a $f'(x) < 0$ pre $x > e^{100}$, ďalej pozri poznámku za vetou 12$\Big)$; **5.** konverguje pre $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ $\Big($pre $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ide o harmonický rad, pre $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, je $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\Big)$; **7.** konverguje $\Big($daný rad je rozdielom radov $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\ln^2(n+1)}$ a $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln^2(n+1)}$, ktorých konvergencia vyplýva z Dirichletovho kritéria$\Big)$; **8.** konverguje pre $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ $\Big($vtedy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln\ln(n+2)}$ konverguje podľa Dirichletovho kritéria a $\cos\frac{1}{n} \nearrow 1\Big)$, diverguje pre $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ $\Big($vtedy ide o rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\ln(n+2)}\cos\frac{1}{n}$ s kladnými členmi, ktorý má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\ln(n+2)}\Big)$; **9.** diverguje $\Big($daný rad je rozdielom divergentného radu $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ a konvergentného radu $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}\Big)$; **10.** konverguje $\Big($daný rad je súčtom konvergentných radov $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ a $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos 2n}{n}$, konvergencia druhého z nich vyplýva z Dirichletovho kritéria [13]$\Big)$;

244 **1.** Leibnizovo: postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovuje predpokladu 2 vety 14 a postupnosť čiastočných súčtov radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ je ohraničená; Abelovo: ak $\lim\limits_{n\to\infty} b_n =: b$, tak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = b\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$, pritom prvý z radov na pravej strane tejto rovnosti konverguje podľa predpokladu 1 vety 13 a konvergencia druhého vyplýva z Dirichletovho kritéria $\Big($postupnosť čiastočných súčtov konvergentného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je iste ohraničená$\Big)$;

245 **1.** konverguje; **2.** konverguje $(\sqrt[n]{n} \searrow 1)$; **3.** konverguje (stačí použiť vetu 11); **4.** konverguje; **5.** konverguje, ak $-\frac{1}{2} < \sin x \leq \frac{1}{2}$; diverguje, ak $\sin x = -\frac{1}{2}$ alebo $|\sin x| > \frac{1}{2}$ $\big($možno použiť vetu 6' alebo 7' a prípad $|2\sin x| = 1$ vyšetriť samostatne$\big)$; **6.** konverguje; **7.** konverguje; **8.** konverguje $\Big($možno použiť Leibnizovo kritérium alebo daný rad zapísať v tvare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\Big(1 - \frac{100}{n+100}\Big)$ a použiť Abelovo kritérium$\Big)$; **9.** diverguje (n–tý člen radu rozšíriť výrazom $\sqrt{n} + (-1)^n$); **10.** konverguje; **11.** konverguje $\Big($konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ vyplýva z Dirichletovho kritéria, resp. z pr. 244.2$\Big)$; **12.** konverguje (pozri riešenie pr. 243.10); **13.** konverguje $\Big(\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$ [14],

---

[13] ak S_n je n–tý čiastočný súčet radu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cos 2k$, tak $S_{2n} = \cos 2 - \cos 4 + \cos 6 - \cos 8 + \cdots - \cos 4n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(4k-2) - \sum_{k=1}^{n}\cos 4k = \Big(\cos 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos 4k + \sin 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin 4k\Big) - \sum_{k=1}^{n}\cos 4k$, pritom $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos 4k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 4k$ možno vyjadriť pomocou vzorcov z riešenia pr. 243.4,5 (pre $x = 4$), odtiaľ už vyplýva ohraničenosť postupnosti $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$; ohraničenosť postupnosti $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva potom napr. z nerovností $|S_{2n-1}| = |S_{2n} + \cos 4n| \leq |S_{2n}| + |\cos 4n| \leq |S_{2n}| + 1$

odtiaľ $\sin^3\alpha = \frac{3}{2}\sin\alpha\cdot(1+\cos 2\alpha) - \sin 3\alpha = \frac{3}{2}\sin\alpha + \frac{3}{4}(\sin 3\alpha - \sin\alpha) - \sin 3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha\Big)$; **14.** konverguje $\left(\sin^4\alpha - \frac{3}{8} = \left(\frac{1-\cos 2n}{2}\right)^2 - \frac{3}{8} = \cdots = -\frac{1}{2}\cos 2n + \frac{1}{8}\cos 4n\right)$; **15.** diverguje (pozri pr. 237.3);

246 **1.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1)$, diverguje pre $p \le 0$; **2.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1)$ $\left(n^{1/n} \searrow 1\right)$, diverguje pre $p \le 0$; **3.** konverguje absolútne; **4.** konverguje absolútne; **5.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1)$ $\left(\text{pre } \varepsilon \in (0,p) \text{ je } a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{p-\varepsilon}}\cdot\frac{\ln^2 n}{n^\varepsilon},\ \text{pritom } \frac{\ln^2 n}{n^\varepsilon} \searrow 1\right)$, diverguje pre $p \le 0$; **6.** diverguje (preverte nutnú podmienku konvergencie); **7.** konverguje relatívne (možno využiť pr. 244.2); **8.** konverguje relatívne (pozri poznámku za riešením pr. 243.6); **9.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1]$; **10.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1]$; **11.** diverguje $\left(\cos^4 n = \left(\frac{1+\cos 2n}{2}\right)^2 = \cdots = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2n + \frac{1}{8}\cos 4n,\right.$ pritom — ako vieme z riešenia pr. 243.5 — rady $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ a $\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{n}$ konvergujú$\Big)$; **12.** konverguje relatívne $\left(\text{rad } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{\sqrt[4]{n}}\cos\frac{1}{n} \text{ má rovnaký charakter ako rad } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{\sqrt[4]{n}}\right)$; **13.** konverguje relatívne $\left(a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n}}\cdot\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2},\ \text{pritom } \sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} \searrow 1,\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} \nearrow 1\right)$; **14.** konverguje relatívne $\left(a_n = \frac{\sin n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{1-(\ln n)/n^2}\right)$; **15.** konverguje relatívne $\Big((12k-6)$–ty čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(n\pi/12)|}{\ln n}$ je väčší ako k–ty čiastočný súčet divergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(12n-6)}$, $k \ge 2\Big)$; **16.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1]$ $\Big($pre $\varepsilon \in (0,p)$ je $a_n = \frac{\sin 2n}{n^{p-\varepsilon}}\cdot\frac{\ln^2 n}{n^\varepsilon}$, pritom $\frac{\ln^2 n}{n^\varepsilon} \searrow 0$; ďalej pre $p \le 1$ je $\frac{|\sin 2n|}{n^p}\ln^2 n > \frac{|\sin 2n|}{n^p}$, $n > 2$; pre $p > 1$ a $\varepsilon \in (0, p-1)$ je $\left|\frac{\sin 2n}{n^{p-\varepsilon}}\cdot\frac{\ln^2 n}{n^\varepsilon}\right| \le \frac{|\sin 2n|}{n^{p-\varepsilon}}$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}\Big)$;

247 **1.** $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $\eta_n = \varepsilon_{2n} - \frac{1}{2}\varepsilon_n$; **2.** $\sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^{n+1}}{n} =$ [15] $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\ln\sqrt{4n} + \frac{C}{2} + \eta_n\right) - \frac{1}{2}\left(\ln n + C + \varepsilon_n\right)\right) = \ln 2$ [16];

---

[14] možno to odvodiť z Moivreovej vety „$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, $n \in \mathbf{N}$"

[15] podľa Leibnizovho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje, tj. existuje konečná limita postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov; na nájdenie limity konvergentnej postupnosti stačí nájsť limitu niektorej jej podpostupnosti

[16] rovnosť $(*)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ môžeme odvodiť aj z rovnosti $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ (možno ju dokázať matematickou indukciou), ak na výpočet $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$ použijeme pr. 83.4 alebo pr. I.353; ďalšou možnosťou dôkazu rovnosti $(*)$ je použiť na vyjadrenie hodnoty $\ln 2$ Taylorov vzorec so zvyškom v Lagrangeovom tvare pre funkciu $\ln(1+x)$; túto rovnosť dokážeme znova v pr. 344.1

2a) $\frac{3}{2}\ln 2$ $\left(=\lim_{n\to\infty} S_{3n}\right.$ [17] $= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$; **2b)** $\frac{1}{2}\ln 2$ [18]; **2c)** 0 $\left(=\lim_{n\to\infty} S_{5n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{k}\right)\right)$;

248 **1.** $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{4n-3}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{2k}\frac{1}{2n-1}+\sum_{n=1}^{2k}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\ln\sqrt{4\cdot(2k)}+\frac{C}{2}+\eta_{2k}\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\tau_{2k}\right)\right)$, kde $\tau_s:=\sum_{n=1}^{s}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}-\frac{\pi}{4}$; **2a)** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\ln 2$; **2b)** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\ln 2$;

249 **1.** $\frac{\pi^2}{12}$; **2.** $\frac{\pi^2}{12}$ $\left(\text{rad } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \text{ je absolútne konvergentný, pozri vetu 16}\right)$;

250 $S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)>\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4k}}+\frac{1}{\sqrt{4k}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\to\infty$ pre $n\to\infty$, teda $\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\infty$, preto nemôže existovať konečná $\lim_{n\to\infty}S_n$;

251 konverguje pre $p\ge 1$ $\left(\text{pre } p>1 \text{ je to prerovnanie absolútne konvergentného radu } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p},\right.$ $\left.\text{pre } p=1 \text{ pozri pr. 247.2a}\right)$, diverguje pre $p<1$ (v prípade $p\le 0$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie; pre $p\in(0,1)$ označme P_n n–tý čiastočný súčet daného radu, $S_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$, potom $P_{3n}=S_{2n}+\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(2k+1)^p}\ge S_{2n}+n\frac{1}{(4n)^p}=S_{2n}+\frac{n^{1-p}}{4^p}$, pritom $\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ je konečná, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}}{4^p}=\infty$);

252 **1.** ak S_n, resp. S'_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty}a_{p(n)}$, tak $|S_n-S'_n|\le \sum_{k=n-c+1}^{n+c}|a_n|$ pre $n\ge c$, pritom $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n-c+1}^{n+c}|a_n|=0$ (vyplýva to z nutnej podmienky konvergencie); **2.** $\ln 2$ $\left(\text{daný rad vznikne prerovnaním radu } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right.$, pričom sú splnené predpoklady tvrdenia z pr. 252.1, súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pozri v pr. 247.2);

253 **1a)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$; **1b)** $\sum_{n=0}^{\infty}q^{n+1}\frac{n+1}{n+2}$ $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\right.$

[17] Pri riešení pr. 247.2a-c,3 a 248 využívame toto tvrdenie (ktoré je špeciálnym prípadom pr. 271): Nech $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, nech $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ a nech $k\in\mathbf{N}$. Ak existuje $\lim_{n\to\infty}S_{kn}$, tak existuje aj $\lim_{n\to\infty}S_n$ a platí $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{kn}$. (Náznak dôkazu: z rovností $S_{kn+1}=S_{kn}+a_{kn+1}$, $S_{kn+2}=S_{kn+1}+a_{kn+2}$, …, $S_{kn+(k-1)}=S_{kn+(k-2)}+a_{kn+(k-1)}$ a z predpokladu $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ vyplýva, že postupnosti $\{S_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_{kn+1}\}_{n=1}^{\infty}$, …, $\{S_{kn+(k-1)}\}_{n=1}^{\infty}$ majú všetky tú istú limitu, preto existuje $\lim_{n\to\infty}S_n$)

[18] špeciálne v tomto prípade možno postupovať aj nasledovne: $S_{3n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2(2n-1)}\right)-\frac{1}{4n}=\frac{1}{2}S'_{2n}$, kde S'_{2n} je $2n$–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, potom $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}S'_{2n}=\frac{1}{2}\ln 2$

$1-\dfrac{1}{n+2}\Big)$; **1c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ $\displaystyle\Big(c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\cdot\frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}2^k 3^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{n-k} = \frac{1}{n!}(2+3)^n$, posledná rovnosť vyplýva z binomickej vety$\Big)$; **1d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; **2a)** túto rovnosť možno chápať dvoma spôsobmi: ako rovnosť dvoch radov (pričom na pravej strane je v tom prípade rad $1+0+0+\cdots+0+\cdots$) alebo ako rovnosť dvoch čísel; **2b)** (druhú mocninu radu chápeme ako jeho Cauchyho súčin so sebou samým) túto rovnosť možno v prípade $|q|<1$ chápať dvoma spôsobmi ako v pr. 253.2a, v prípade $|q|\geq 1$ je to rovnosť dvoch divergentných radov;

$\boxed{\mathbf{254}}$ ak S_n, resp. S'_n je n–tý čiastočný súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, resp. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ [19], tak $S'_n\geq a_1S_n$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$;

$\boxed{\mathbf{255}}$ c_n := [19] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^{n+3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{n-k+1}}$; ak použijeme nerovnosť $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{n-k+1}}\geq\frac{2}{n+1}$, ktorá vyplýva z nerovnosti $\sqrt{ab}\leq\frac{1}{2}\big(|a|+|b|\big)$, dostaneme $|c_n|\geq\dfrac{2n}{n+1}$; teda rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ nesplňa nutnú podmienku konvergencie;

$\boxed{\mathbf{256}}$ ak $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ je Cauchyho súčin daných radov, tak $c_0=a_0b_0=1\cdot1=1$, pre $n\geq1$ je $\displaystyle c_n=\sum_{k=0}^{n}a_nb_{n-k}=a_n+b_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_kb_{n-k}=-\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k\left(\frac{3}{2}\right)^{n-k-1}\left(2^{n-k}+\frac{1}{2^{n-k+1}}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}2^{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{n-k+1}}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2\sum_{k=0}^{n-2}2^k+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^k}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(-\frac{3}{2}+2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-2\big(2^{n-1}-1\big)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1-1/2^{n-1}}{1/2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^n$;

$\boxed{\mathbf{257}}$ nech $A:=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $B:=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$, nech $p(1)=(j_1,k_1)$, ..., $p(n)=(j_n,k_n)$, nech $j=\max\{j_1,\dots,j_n\}$, $k=\max\{k_1,\dots,k_n\}$; potom $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}|c_m|\leq\left(\sum_{m=1}^{j}|a_m|\right)\left(\sum_{m=1}^{k}|b_m|\right)\leq AB$, odtiaľ vyplýva konvergencia radu $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}|c_m|$; prerovnanjme a uzátvorkujme rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ nasledovne: $a_1b_1+\big(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1\big)+\big(a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1\big)+\cdots$ alebo nasledovne: $a_1b_1+\big(a_1b_2+a_2b_1\big)+\big(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1\big)+\cdots$, tj. schematicky:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \hline
1 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \dots \\
2 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \dots \\
3 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \dots \\
4 & a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
\qquad \text{alebo} \qquad
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \hline
1 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \dots \\
2 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \dots \\
3 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \dots \\
4 & a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov takto vzniknutého radu $\Big($ktorý má podľa vety 16 a riešenia pr. 208.1

---

[19] treba si uvedomiť, že Cauchyho súčinom radov $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ je rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n$, kde $\displaystyle c_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}$

ten istý súčet ako rad $\left.\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right)$ je v prvom prípade $\{A_nB_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$; v druhom prípade dostávame Cauchyho súčin radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ďalej stačí použiť vetu 17 [20];

258 **1**. 0 $\left(\forall x \in [1,\infty) : 0 \le \frac{\ln x}{x - \ln x} \le \frac{\ln e}{e - \ln e}\right)$; **2**. $\frac{31}{18}$; **3**. $\ln\frac{2}{3}$ $\Big(= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+1)}(n^2+n+1)$; $\ln\frac{n^3-1}{n^3+1} = \ln\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$, pritom $(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+k+1\Big)$; **4**. 1 $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(k+2)} = \frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}\right)$; **5**. $\frac{\pi}{3}$ $\Big(= \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\sqrt{3}\,\frac{n}{n+1}$; využili sme vzorec $\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, $xy<1$, pozri riešenie pr. I.87.1$\Big)$; **6**. $\frac{\pi}{4}$ $\left(= \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}\right)$; **7**. 0 pre $x = 0$; $\ln\frac{\sin x}{x}$ $\Big(= \lim_{n\to\infty} \ln\frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$; využite rovnosti $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sin(x/2)}$, $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4} = \frac{\sin x}{2\cdot 2\sin(x/2)\cdot\cos(x/4)}\cos\frac{x}{4} = \frac{\sin x}{4\cos(x/4)}$ atď$\Big)$ pre $x \in (-\pi,\pi)\setminus\{0\}$; **8**. 0 pre $x = 0$, $\frac{1}{x} - \operatorname{ctg}x$ $\Big(= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg}x\right)$; $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}\right) = -\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{x}{2^k}\right)' = -\left(\ln\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}\right)'\Big)$ pre $x \in (-\pi,\pi)\setminus\{0\}$;

259 matematickou indukciou vzhľadom na m; pre $m = 1$: $a_k = \frac{1}{d}\cdot\frac{u_{k+1}-u_k}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}\right)$, teda $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$; druhý krok indukcie: $\frac{1}{u_k u_{k+1}\cdots u_{k+m+1}} = \frac{1}{(m+1)d}\cdot\frac{u_{k+m+1}-u_k}{u_k u_{k+1}\cdots u_{k+m+1}} = \frac{1}{(m+1)d}\left(\frac{1}{u_k\cdots u_{k+m}} - \frac{1}{u_{k+1}\cdots u_{k+m+1}}\right)$, pritom podľa indukčného predpokladu $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{u_k\cdots u_{k+m}} = \frac{1}{md u_1\cdots u_m}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{u_{k+1}\cdots u_{k+m+1}} = \frac{1}{md u_2\cdots u_{m+1}}$;

260 množina bodov nespojitosti funkcie f je podmnožina množiny $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbf{N}\setminus\{1\}\right\}$ (f môže a nemusí byť spojitá v bode 0), preto podľa vety 5b z odseku 2.1 je $f \in \mathcal{R}[0,1]$, podľa vety 14a z odseku 2.3 platí $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{1/(n+1)}^{1} f(x)\,dx$;

261 $0 \le a_n b_n c_n \le \max\{a_n^3, b_n^3, c_n^3\} \le a_n^3 + b_n^3 + c_n^3$, $n \in \mathbf{N}$;

262 podľa pr. 211.1 je $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) = 0$, preto pre niektoré $k > 0$ a počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$ platí $a_n^2 = \left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)\left(n\,\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) \le k\,\frac{a_n}{\sqrt{n}}$;

263 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{3}{2}$ pre $n \ge 2$ $\Big($matematickou indukciou: pre $n = 2, 3$ uvedené tvrdenie platí; ak $a_{n-1} \ge \frac{3}{2}a_{n-2}$, $a_n \ge \frac{3}{2}a_{n-1}$, tak $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n \ge \frac{3}{2}a_{n-2} + \frac{3}{2}a_{n-1} = \frac{3}{2}a_n\Big)$;

264 **1**. konverguje $\left(n^{-n/3}\sqrt[3]{n!+1} \le \sqrt[3]{2n^{-n}n!} =: a_n, \ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$; **2**. konvergu-

---

[20] napokon samotnú vetu 17 možno pre absolútne konvergentné rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dokázať týmto postupom pomocou prvého uvedeného prerovnania a uzátvorkovania

je $\left(\text{daný rad má rovnaký charakter ako rad } \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{3^n n!}\right)$; **3.** konverguje $\left(b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+2)^{n+1}}{(2n+2)!}\right.$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e}{4}$, preto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ (pozri pr. 222)$\Big)$; **4.** diverguje $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{n^{1/\sqrt{n}}} = \infty\right.$, využite rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ (pozri poznámku za pr. 224) a fakt, že $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/\sqrt{x}} = 1\Big)$; **5.** konverguje pre $p < \frac{1}{2}$, diverguje pre $p \geq \frac{1}{2}$ $\Big($pre $p = \frac{1}{2}$ je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) =$[21] $1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{8} + no\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, preto $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}\Big)$;

6. konverguje pre $q + \frac{p}{2} > 1$, diverguje pre $q + \frac{p}{2} \leq 1$ $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} =\right.$[22] $1 + \frac{1}{n}\left(q + \frac{p}{2}\right) + \frac{1}{8n^2}(4q^2 - 4q + 4pq + p^2 - 3p) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$[23], preto $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q + \frac{p}{2}$; pre $q + \frac{p}{2} = 1$ je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1 + \frac{1}{4n}(q-1) + o\left(\frac{1}{n}\right)$, preto pre $q + \frac{p}{2} = 1$, $q < 1$ je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$; prípad $q = 1$, $p = 0$ sa ľahko vyšetrí samostatne[24]$\Big)$; **7.** konverguje pre $p(q-1) > 1$, diverguje pre $p(q-1) \leq 1$ $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p(q-1)}{n} + \frac{p(q-1)\big(p(q-1) - q - 1\big)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$; **8.** konverguje $\Big($na základe vzorcov $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ možno daný rad napísať v tvare $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2\sin\frac{\pi}{2^n}\Big)$; **9.** konverguje; **10.** konverguje pre $\alpha = 0$, diverguje pre $\alpha \neq 0$ $\Big($použite vzorec $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, daný rad má rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha n + \beta}{n^2 + \alpha n + \beta}\Big)$; **11.** konverguje pre $p > 1$, diverguje pre $p \in (0, 1]$ $\Big(a_n =$

---

[21] $= n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) - 1\right) = n\left(\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) - 1\right) = n\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{2n(2n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$

[22] $= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = \left(1 + \frac{q}{n} + \frac{q(q-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$

[23] využili sme, že $\frac{p}{2n+1} = \frac{p}{2n} - \frac{p}{2n(2n+1)} = \frac{p}{2n} - \frac{p}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\frac{pq}{n(2n+1)} = \frac{pq}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} = \frac{p(p-1)}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

[24] Daný rad diverguje aj v prípade $q + \frac{p}{2} = 1$, $q > 1$; túto skutočnosť nemožno dokázať použitím Raabeho kritéria, ale možno ju odvodiť z rovnosti $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}(q-1) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ na základe *Bertrandovho kritéria* (pozri pr. 267) alebo *Gaussovho kritéria*, ktoré možno formulovať nasledovne: *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi, nech existujú konštanty* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ *a ohraničená postupnosť* $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tak, že* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\vartheta_n}{n^2}$. *Potom rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, ak* $\lambda > 1$ *alebo* $\lambda = 1$, $\mu > 1$, *a diverguje, ak* $\lambda < 1$ *alebo* $\lambda = 1$, $\mu \leq 1$. (Toto kritérium možno odvodiť z d'Alembertovho, Raabeho a Bertrandovho kritéria, pozri [10, str. 281, §372].)

$1 - e^{n \ln\left(1 + (\cos(1/n^p) - 1)\right)}$, ďalej využite, že $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$, $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$, $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1-\cos u}{u^2} = \dfrac{1}{2}\Big)$; **12.** konverguje pre $p > 1$, diverguje pre $p \le 1$ $\left(a_n = e^p\left(1 - e^{-1/2n + o(1/n)}\right)^p\right)$; **13.** diverguje $\left(a_n = {}^{25} \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^n \left(e^{2/n + o(1/n)} - 1\right)\right)$; **14.** konverguje $\Big($pre $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ je $\arcsin \sin x = x$, preto $\arccos \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^3}} = \arcsin \sin \arccos \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^3}} = \arcsin\, n^{-3/2}\Big)$; **15.** diverguje $\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin \dfrac{n}{n+1} = \arcsin \dfrac{\sqrt{2n+1}}{n+1}\right)$; **16.** konverguje, ak $p > 1$ alebo $p = 1$, $q > 2$; diverguje, ak $p < 1$ alebo $p = 1$, $q \le 2$ $\Big($pre $p \ne 1$ možno použiť Cauchyho kritérium; pre $p = 1$ je $a_n = e^{E(n)}$, kde $E(n) = n \ln\left(\dfrac{1-q}{n+q} - \dfrac{(1-q)^2}{2(n+q)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (1-q)\ln n + \underbrace{\left(-\dfrac{q}{n+q} - \dfrac{n \ln n \cdot (1-q)^2}{2(n+q)^2} + n \ln n + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)}_{E_1(n)}$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} e^{E_1(n)} = 1\Big)$; **17.** konverguje len pre $a = \dfrac{1}{2}$ $\left(a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \dfrac{a}{n}} - \sqrt[4]{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{b}{n^2}}\right) = \sqrt{n}\left(\dfrac{2a-1}{4n} - \dfrac{4a^2 + 8b - 3}{32n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right)$; **18.** konverguje; **19.** konverguje len pre $c = 0$, $\dfrac{a}{d} < -1$; **20.** konverguje len pre $a = \sqrt{bc}$; **21.** konverguje len pre $p > \dfrac{1}{2}$ $\Big(a_n = \ln\left(1 + \left(\dfrac{\sin\, n^{-p}}{n^p} - 1\right)\right)$, využite, že $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$, $\sin \dfrac{1}{n^p} - \dfrac{1}{n^p} = -\dfrac{1}{6n^{3p}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3p}}\right)\Big)$; **22.** konverguje len pre $a + b > 1$ $\left(a_n = \dfrac{1}{n^{a+b}}\left(\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1 + \dfrac{b}{n}\right)^{n+a}\right)^{-1}\right)$; **23.** konverguje, ak $c \ln a > 0$ alebo ak $c \ln a = 0$, $b \ln a > 1$; v ostatných prípadoch diverguje $\left(a_n = \dfrac{1}{n^{\ln a \cdot (b + c \ln n)}}\right)$; **24.** konverguje $\left(\displaystyle\int_0^{1/n} \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx \le \dfrac{1}{n} \sup_{x\in[0,1/n]} \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2} \le \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$; **25.** konverguje $\left(\displaystyle\int_0^n \sqrt{1+x^4}\, dx > \int_0^n x^2\, dx\right)$; **26.** diverguje $\left(\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{\sin^2 x}{x}\, dx \ge \dfrac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x\, dx\right)$; **27.** konverguje $\Big(\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\, dx \le e^{-\sqrt{n}}$, ďalej pozri návod k pr. 231.21$\Big)$; **28.** konverguje $\left(\sin x < x \text{ pre } x > 0, \text{ preto } \displaystyle\int_0^{\pi/n} \dfrac{\sin^3 x}{1+x}\, dx \le \int_0^{\pi/n} x^3\, dx\right)$; **29.** konverguje, ak $p > 1$ alebo $p = 1$, $q > 1$ alebo $p = q = 1$, $r = 1$; diverguje v ostatných prípadoch $\Big($vlastná (nevlastná) $\lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_3^x \dfrac{dt}{t \ln^q t (\ln\ln t)^r}$ existuje práve vtedy, keď existuje vlastná (nevlastná) $\lim\limits_{y\to\infty} \displaystyle\int_{\ln 3}^y \dfrac{dt}{t^q \ln^r t}$ (použite substitúciu $\ln t = z$), podľa vety 10 majú preto pre $q > 0$, $r \in \mathbf{R}$ a $q = 0$, $r \ge 0$ [26] rady $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^q n (\ln\ln n)^r}$ a $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^q \ln^r n}$ rovnaký charakter$\Big)$; **30.** konverguje $\Big($daný rad

---

[25] $= \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^n \left(e^{(n+1)\ln(1+1/n) - n \ln\left(1 + 1/(n+1)\right)} - 1\right) =$

[26] len pre $q > 0$, $r \in \mathbf{R}$ alebo $q = 0$, $r \ge 0$ vyhovuje rad $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^q \ln^r n}$ predpokladom vety 10 (nie je ale ťažké dokázať, že uvedené rady majú rovnaký charakter aj pre $q < 0$ a pre $q = 0$, $r < 0$)

má rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln\ln n}{n\ln^3 n}$, o ktorom možno podobnou úvahou ako v riešení pr. 264.29 ukázať, že má rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^3}\Big)$; **31.** konverguje $\left(\ln(e^n+n^2)=n+\ln\left(1+\dfrac{n^2}{e^n}\right)\right.$, daný rad má rovnaký charakter ako rad $\left.\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right)$; **32.** konverguje len pre $p<-2$; **33.** konverguje $\Big($funkcia $F(x)=x\ln^2 x-2x\ln x+2x$, $x\ge 1$, je primitívna k neklesajúcej nezápornej funkcii $f(x)=\ln^2 x$, $x\ge 1$, preto $f(n)\le F(n+1)-F(n)\le f(n+1)$, odtiaľ $F(n)-F(1)\le f(2)+\cdots+f(n)\le F(n+1)-F(2)$, preto $\dfrac{1}{(\ln 2)^2+\cdots+(\ln n)^2}\le\dfrac{1}{n\ln^2 n-2n\ln n+2n-2}=:b_n$, rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n$ má rovnaký charakter ako rad $\left.\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right)$; **34.** diverguje $\Big($využite, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}1/k}{\ln n}=1$, čo vyplýva z pr. 220 alebo z poznámky k pr. 228.1$\Big)$; **35.** diverguje $\left(a_n=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\,e^{-E(n)}\right.$, kde $E(n)=\dfrac{1}{n}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right)$, pritom $\left.\lim\limits_{n\to\infty}E(n)=\displaystyle\int_0^1\ln(1+x)\,dx=2\ln 2\right)$; **36.** konverguje len pre $p>\dfrac{5}{2}$ $\Big($analogicky ako v riešení pr. 264.33 možno odvodiť odhad $\left.\dfrac{2}{3}n^{3/2}\le\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{n}\le\dfrac{2}{3}\big((n+1)^{3/2}-1\big)\le\dfrac{2^{5/2}}{3}n^{3/2}\right)$;

265 napr. $a_n=\dfrac{1}{\ln n}$;

266 pozri pr. 228.2;

267 **1.** použijeme porovnávacie kritérium v podobe „ak $a_n>0$, $b_n>0$ $(n\in\mathbf{N})$ a počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$ platí $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\ge\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$, tak z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$“; zvoľme $q\in(1,p)$, nech $b_n=\dfrac{1}{n\ln^q n}$, potom $\dfrac{b_n}{b_{n+1}}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^q=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{q\ln(1+1/n)}{\ln n}+o\left(\dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\right)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{q\big(1/n+o(1/n)\big)}{\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right)$ [27] $=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{q}{n\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right)=1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n\ln n}\left(q+n\ln n\cdot o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right)$, súčasne z (3.6) vyplýva $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\ge 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{p}{n\ln n}$ počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$; pretože $\lim\limits_{n\to\infty}\left(q+n\ln n\cdot o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right)=q<p$, platí počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$ $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\ge 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{p}{n\ln n}\ge 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n\ln n}\left(q+n\ln n\cdot o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right)=\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$, pritom rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n$ konverguje;

2. podľa predpokladu $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\le 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n\ln n}$, pre $b_n:=\dfrac{1}{n\ln n}$ platí $\dfrac{b_n}{b_{n+1}}=1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n}+\dfrac{\ln(1+1/n)}{n\ln n}$; na dôkaz nerovnosti $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\le\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$ stačí dokázať nerovnosť $x<\ln(1+x)+x\ln(1+x)$, $x>0$ (na to možno použiť napr. vetu 12 pred pr. I.352) a potom položiť $x=\dfrac{1}{n}$;

268 **1.** zvoľme $a\in(A,1)$, z predpokladov nášho tvrdenia vyplýva $(*)$ $\exists b_0>1$ $\forall x>b_0$: $f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)<af(x)$; nech $b_1:=\varphi(b_0),\dots,b_{n+1}:=\varphi(b_n)$, $n\in\mathbf{N}$, potom $b_{n+1}>b_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ $\big($sporom: keby $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\in\mathbf{R}$, tak by zo vzťahu $b_{n+1}=\varphi(b_n)$ a zo spojitosti funkcie φ vyplývalo $\varphi(b)=b\big)$; podľa vety 10 stačí dokázať existenciu konečnej $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$, čo je ekvivalentné s existenciou

---

[27] pretože $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+1/n)}{1/n}=1$, je $o\left(\dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)=o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$ pre $n\to\infty$

konečnej $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{b_0}^{b_n} f(t)\,dt$ $\Big($využite, že $F(x) := \int_1^x f(t)\,dt$ je rastúca$\Big)$; podľa $(*)$ a podľa vety o substitúcii pre určitý integrál je $\int_{b_{i+1}}^{b_{i+2}} f(t)\,dt = \int_{b_i}^{b_{i+1}} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt < a\int_{b_i}^{b_{i+1}} f(t)\,dt$, preto $\int_{b_0}^{b_n} f(t)\,dt = \int_{b_0}^{b_1} + \int_{b_1}^{b_2} + \cdots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} \le \int_{b_0}^{b_1} + a\int_{b_0}^{b_1} + a^2\int_{b_0}^{b_1} + \cdots + a^{n-1}\int_{b_0}^{b_1} = \dfrac{a^n-1}{a-1}\int_{b_0}^{b_1} f(t)\,dt < \dfrac{1}{1-a}\int_{b_0}^{b_1} f(t)\,dt$; teda $\left\{\int_{b_0}^{b_n} f(t)\,dt\right\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená rastúca postupnosť, preto existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{b_0}^{b_n} f(t)\,dt$;

269 zrejme $a_1,\ldots,a_{p_1} \ge \frac{1}{2}$; $a_{p_1+1},\ldots,a_{p_2} \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$, ..., $a_{p_{n-1}+1},\ldots,a_{p_n} \in \left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right)$, teda $p_k - p_{k-1}$ je počet prvkov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ležiacich v intervale $\left[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right)$, $k \ge 2$; označme S_n, resp. σ_n n–tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, resp. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k 2^{-k}$; ak využijeme nerovnosť $\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^m} < \sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}}$, $k>1$, dostaneme $\sigma_m = p_1\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)+(p_2-p_1)\left(\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)+\cdots+(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^m} \le p_1+\frac{1}{2}(p_2-p_1)+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}(p_m-p_{m-1}) = 2\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{2^2}(p_2-p_1)+\cdots+\frac{1}{2^m}(p_m-p_{m+1})\right) \le 2S_{p_m}$; súčasne $\sigma_m \ge (p_2-p_1)\frac{1}{2^2}+\cdots+(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^m} \ge \frac{1}{2}(S_{p_m}-S_{p_1})$; z nerovností $\frac{1}{2}(S_{p_m}-S_{p_1}) \le \sigma_m \le 2S_{p_m}$ už vyplýva uvedené tvrdenie [28];

270 <u>**1.**</u> diverguje $\Big($$n$–tý člen radu rozšírte $2\sqrt[3]{n}-(-1)^{n+1}$, uvedený rad tak možno zapísať ako súčet konvergentného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2\sqrt[3]{n}}{4\sqrt[3]{n^2}-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 2}{\sqrt[3]{n}}\cdot\dfrac{1}{4-1/\sqrt[3]{n^2}}$ a divergentného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4\sqrt[3]{n^2}-1}\Big)$; <u>**2.**</u> konverguje absolútne pre $p>1$, konverguje relatívne pre $p\in(0,1]$, diverguje pre $p\le 0$ $\left(a_n := \dfrac{(-1)^n}{\big(n+(-1)^n\big)^p} =^{29} \dfrac{(-1)^n}{n^p} - \dfrac{1}{n^{p+1}}\left(p+o\left(\dfrac{1}{n^{p+1}}\right)n^{p+1}\right)\right.$, teda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je pre $p>0$ rozdielom dvoch konvergentných radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}\left(p+o\left(\dfrac{1}{n^{p+1}}\right)n^{p+1}\right)$ $\Big($druhý z týchto radov je rad s kladnými členmi, ktorý má rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}\Big)$, inou možnosťou je využiť tvrdenie pr. 252.1, pozri tiež riešenie pr. 252.2$\Big)$; <u>**3.**</u> konverguje absolútne pre $p>2$, konverguje relatívne pre $p\in(1,2]$, diverguje pre $p\le 1$ $\left(a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{p/2}} - \dfrac{1}{n^{(p+1)/2}}\left(p+n^{(p+1)/2}o\left(\dfrac{1}{n^{(p+1)/2}}\right)\right)\right)$; <u>**4.**</u> konverguje absolútne pre $p>1$, konverguje relatívne pre $p\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, diverguje pre $p\le\frac{1}{2}$

---

[28]tvrdenie pr. 269 zostane v platnosti, ak predpoklad „$a_{n+1}\ge a_n$, $n\in\mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$“ nahradíme predpokladom „$a_n\ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$“ (každú postupnosť nezáporných čísel s limitou 0 možno prerovnať tak, aby vznikla nerastúca postupnosť s limitou 0, ľubovoľným prerovnaním sa charakter radu s nezápornými členmi nezmení)

[29]$= \dfrac{(-1)^n}{n^p}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)^{-p} = \dfrac{(-1)^n}{n^p}\left(1-p\,\dfrac{(-1)^n}{n^p}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) =$

$\left(a_n = {}^{30}\, \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n^p} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos(n\pi/2)}{n^{2p}} - \left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^{2p}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2p}}\right)\right)\right)$, ďalej počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$ platí $\dfrac{|\sin(n\pi/4)|}{2n^p} \le \dfrac{|\sin(n\pi/4)|}{|n^p + \sin(n\pi/4)|} \le \dfrac{2}{n^p}$; pritom pre $p \le 1$ rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n\pi/4)|}{2n^p}$ diverguje $\Bigl($jeho $(2k-1)$–vý čiastočný súčet je väčší ako k–ty čiastočný súčet divergentného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(2n-1)^p}$, $k \ge 2\Bigr)\Bigr)$; **5.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$, diverguje pre $p \le 0$ $\Bigl(a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^p} - \left(\dfrac{1}{2(n+1)^{2p}} + o\left(\dfrac{1}{(n+1)^{2p}}\right)\right)$, $|a_n| = \ln\left(1 + \dfrac{1}{(n+1)^p}\right)$ pre n nepárne, $|a_n| = \ln\left(1 + \dfrac{1}{(n+1)^p - 1}\right)$ pre n párne, teda $\ln\left(1 + \dfrac{1}{(n+1)^p}\right) \le |a_n| \le \ln\left(1 + \dfrac{1}{(n+1)^p - 1}\right)$, $n \in \mathbf{N}\Bigr)$; **6.** konverguje absolútne pre $p \ge 0$, konverguje relatívne pre $p \in (-1, 0)$, diverguje pre $p \le -1$ $\Bigl($uvedomte si, že rad $\displaystyle\sum_{n=|[p]|+1}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}$ je rad so striedavými znamienkami; $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1$ pre $p \le -1$, teda vtedy $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ pre $p > -1$, teda $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ je vtedy klesajúca postupnosť, rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ pre $p > -1$ možno dokázať ako v riešení pr. $240\Bigr)$; **7.** konverguje absolútne pre $p > 2$, konverguje relatívne pre $p \in (0, 2]$, diverguje pre $p \le 0$ (pozri pr. 225.6 a návod k pr. 240); **8.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \le 1$ $\Bigl(a_n = \dfrac{\sin nx}{n^{\varepsilon}} \cdot \dfrac{1}{n^{1-\varepsilon}\ln^p(n+1)}$ pre $\varepsilon \in (0, 1)$, pozri tiež riešenie pr. 246.16; $|a_n| \ge \dfrac{\sin^2 nx}{n\ln^p(n+1)} = \dfrac{1}{2n\ln^p(n+1)} - \dfrac{\cos 2nx}{2n\ln^p(n+1)}$, pritom rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2n\ln^p(n+1)}$ konverguje pre každé $p \in \mathbf{R}\Bigr)$; **9.** konverguje absolútne pre $p > 1$, $q > 1$; konverguje relatívne pre $0 < p = q \le 1$, diverguje v ostatných prípadoch $\Bigl($daný rad konverguje absolútne práve vtedy, keď konvergujú rady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^p}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^q}$, pozri pr. 237; nech $p > q$, $q \in (0, 1)$, označme S_n n–tý čiastočný súčet nášho radu, potom $S_{2n} = P_{2n} + Q_n$, kde P_{2n} je $2n$–tý čiastočný súčet konvergentného radu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$, $Q_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^q}\left(1 - \frac{1}{(2k)^{p-q}}\right)$, pritom — pretože $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{(2k)^{p-q}} = 0$ — rad $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^q}\left(1 - \frac{1}{(2k)^{p-q}}\right)$ má rovnaký charakter ako divergentný rad $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^q}\Bigr)$;

271 pozri poznámku [17] k riešeniu pr. 247.2a;

272 nech a_{n_k} je posledný člen v k–tej zátvorke, S_n je n–tý čiastočný súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, potom S_{n_k}, S_{n_k+1}, S_{n_k+2}, $\ldots$, $S_{n_{k+1}}$ $(k \in \mathbf{N})$ je konečná monotónna postupnosť, teda hodnoty $S_{n_k+1}, \ldots, S_{n_{k+1}-1}$ „ležia medzi číslami S_{n_k} a $S_{n_{k+1}}$"; ak neexistuje $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}$, tak zrejme neexistuje ani $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$; nech $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} =: S \in \mathbf{R}$: ak $|S_{n_k} - S| < \varepsilon$ a číslo c „leží medzi S_{n_k} a $S_{n_{k+1}}$", tak aj pre c platí $|c - S| < \varepsilon$; analogickú úvahu možno použiť v prípade $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = -\infty$;

273 z každej konvergentnej postupnosti — teda aj z postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — možno vybrať monotónnu konvergentnú podpostupnosť;

---

[30] $= \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n^p}\left(1 + \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n^p}\right)^{-1} = \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n^p}\left(1 - \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n^p} + o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)\right) =$

$\boxed{274}$ **1.** konverguje $\left(|a_n| = \left|\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \frac{\sin^3 n}{6n^2} + o\left(\frac{\sin^3 n}{n^2}\right)\right)\right| = \left|\frac{\sin^3 n}{6n^2}\right|\left|1 + \frac{6n^2}{\sin^3 n}\cdot o\left(\frac{\sin^3 n}{n^2}\right)\right| \le \frac{1}{6n^2}\right.$ počínajúc niektorým $\left. n_0 \in \mathbf{N}\right)$; **2.** konverguje $\left(a_n = (-1)^{n+1}\sin\left(\pi\frac{n-1}{n^2+1}\right)\right.$, pozri tiež riešenie pr. $\left.239.7\right)$; **3.** konverguje $\left(a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi}{n+1}\right)$; **4.** konverguje (možno využiť pr. 244.2); **5.** diverguje $\left(a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{8} + no\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right.$, teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rozdielom konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ a radu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ s kladnými členmi, ktorý má rovnaký charakter ako rad $\left.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)$; **6.** konverguje $\left(a_n = \frac{\sin n}{n} + \sin n\cdot\left(\frac{1}{n + 10\sin n} - \frac{1}{n}\right)\right.$; ak pre funkciu $y = \frac{1}{x}$ na intervale s koncovými bodmi $n + 10\sin n$, n použijeme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote, dostaneme $\frac{1}{n + 10\sin n} - \frac{1}{\sin n} = -\frac{1}{c^2}\big((n + 10\sin n) - n\big) = -\frac{10\sin n}{c^2}$, pričom pre c iste platí $c > n - 10$ $(n > 10)$; preto $a_n = \frac{\sin n}{n} - \frac{10\sin^2 n}{c^2}$, konvergencia radu $\sum_{n=11}^{\infty}\frac{10\sin^2 n}{c^2}$ vyplýva z nerovností $\left. 0 \le \frac{10\sin^2 n}{c^2} \le \frac{10}{(n-10)^2}\right)$; **7.** konverguje $\left(a_n = \frac{\sin n}{\ln\ln n}\cos\frac{1}{n} + \frac{\cos n}{\ln\ln n}\sin\frac{1}{n}\right.$, pritom $\cos\frac{1}{n} \nearrow 1$, $\sin\frac{1}{n} \searrow 1$ a konvergencia radov $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln\ln n}$ a $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n}{\ln\ln n}$ vyplýva z Dirichletovho $\left.\text{kritéria}\right)$; **8.** konverguje $\Big($podľa Taylorovho vzorca so zvyškom v Lagrangeovom tvare je $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin\vartheta(x)}{24}x^4$, preto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 n}{6n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\vartheta_n}{24}\cdot\frac{\sin^4 n}{n^{4/3}}$, pritom konvergencia druhého radu vyplýva z návodu k pr. 245.13 a konvergencia tretieho radu z nerovnosti $\left.\left|\frac{\sin\vartheta_n}{24}\cdot\frac{\sin^4 n}{n^{4/3}}\right| \le \frac{1}{24n^{4/3}}\right)$; **9.** konverguje $\Big(\left|\sin\pi(2+\sqrt{3})^n\right| = \sin\pi(2-\sqrt{3})^n$; z binomického rozvoja vyplýva, že rozdiel $(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n$ je celé $\text{číslo}\Big)$; **10.** diverguje $\left(S_{5n} = P_n + Q_n\right.$, kde $P_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k\ln(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)\ln(3k+2)}\right)$ je n–tý súčet radu, ktorého konvergencia vyplýva z Leibnizovho kritéria, a $Q_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+2)\ln(3k+3)}$ je n–tý súčet radu, ktorého divergencia vyplýva z integrálneho $\left.\text{kritéria}\right)$; **11.** konverguje pre $p > \frac{1}{2}$ $\Big($pre $p > 1$ konverguje absolútne, pre $p \le 1$ stačí podľa pr. 272 vyšetrovať konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n := \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k^p}$; pretože $A_n = \frac{1}{n^{2p}} + \cdots + \frac{1}{(n^2+2n)^p} > \frac{2n+1}{(n^2+2n)^p} > \frac{2n}{3n^{2p}}$, nie je pre $p \le \frac{1}{2}$ splnená nutná podmienka konvergencie; pre $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje podľa Leibnizovho kritéria: pretože $A_n < \frac{2n+1}{n^{2p}}$, je $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$; pretože podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote je $a_k := \frac{1}{(n^2+k)^p} - \frac{1}{(n^2+2n+1+k)^p} = \frac{p(2n+1)}{c^{p+1}} > \frac{p(2n+1)}{(n^2+2n+1+k)^{p+1}} > \frac{2np}{(n^2+4n+2)^{p+1}}$ pre $k = 0, 1, \ldots, 2n$, a pretože $b := \frac{1}{(n^2+4n+2)^p} + \frac{1}{(n^2+4n+3)^p} < \frac{2}{(n^2+4n+2)^p}$, dostávame $A_n - A_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{2n} a_k\right) - b > (2n +$

1) $\dfrac{2np}{(n^2+4n+2)^{p+1}} - \dfrac{2}{(n^2+4n+2)^p} > \dfrac{4n^2p}{(n^2+4n+2)^{p+1}} - \dfrac{2}{(n^2+4n+2)^p} = \dfrac{n^2(4p-2)-8n-4}{(n^2+4n+2)^{p+1}}$, teda pre $p > \dfrac{1}{2}$ a dostatočne veľké $n \in \mathbf{N}$ je $A_n - A_{n+1} > 0$; **12.** diverguje $\Bigg($pre $A_n := \dfrac{1}{[e^{n-1}]+1} + \cdots + \dfrac{1}{[e^n]}$, $n \geq 2$, platí $A_n \geq \dfrac{[e^n]-[e^{n-1}]}{[e^n]} \geq \dfrac{e^n - 1 - e^{n-1}}{e^n} = 1 - \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e^n} \geq 1 - \dfrac{2}{e}$, teda pre rad $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} A_n$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie, ďalej pozri pr. 272 a 208.1$\Bigg)$;

275 ak u_n, resp. w_n je n–tý čiastočný súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, resp. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) S_n$, tak $u_n = a_1 S_1 + a_2(S_2 - S_1) + \cdots + a_n(S_n - S_{n-1}) = (a_1 - a_2)S_1 + (a_2 - a_3)S_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)S_{n-1} + a_n S_n = w_{n-1} + a_n S_n$;

276 vyplýva to z pr. 275;

277 označme $a_0 := 0$, $b_0 := -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; z nerovnosti $|a_n| \leq \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} |a_i - a_{i+1}|$, $n \in \mathbf{N}$, a z predpokladu (ii) vyplýva ohraničenosť postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$; ďalej platí $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = 0$, kde S'_n je n–tý čiastočný súčet radu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$; odtiaľ na základe pr. 275 vyplýva konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$;

278 na dôkaz nerovnosti $S_p < 1$ stačí daný rad ,,uzátvorkovať“ nasledovne: $1 - \left(\dfrac{1}{2^P} - \dfrac{1}{3^p}\right) - \left(\dfrac{1}{4^p} - \dfrac{1}{5^p}\right) - \cdots$[31]; na dôkaz nerovnosti $\dfrac{1}{2} < S_p$,,uzátvorkujme“ náš rad takto: $\left(1 - \dfrac{1}{2^p}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{(2n-1)^p} - \dfrac{1}{(2n)^p}\right) + \cdots$; podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote $\left(\text{použitej pre funkciu } \dfrac{1}{x^p} \text{ na intervale } [2n-1, 2n]\right)$ je $\dfrac{1}{(2n-1)^p} - \dfrac{1}{(2n)^p} = \dfrac{p}{c^{p+1}}$ pre niektoré $c \in (2n-1, 2n)$, preto $S_p > \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{p}{(2n)^{p+1}}$, ďalej stačí použiť nerovnosť $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{p}{(2n)^{p+1}} \geq \int_1^{\infty} \dfrac{p}{(2x)^{p+1}}\, dx$ (pozri pr. 228.2);

279 v prípade $p = m$ možno použiť Dirichletovo kritérium, resp. kritérium z pr. 244.2; pre $p < m$ (prípad $p > m$ je analogický) platí $S_{k(m+p)} = \left[1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} - \cdots - \dfrac{1}{2p}\right] - \left(\dfrac{1}{2p+1} + \cdots + \dfrac{1}{p+m}\right) + \cdots + \left[\dfrac{1}{(k-1)(p+m)+1} + \cdots + \dfrac{1}{kp+(k-1)m} - \dfrac{1}{kp+(k-1)m+1} - \cdots - \dfrac{1}{(k+1)p+(k-1)m}\right] - \left(\dfrac{1}{(k+1)p+(k-1)m+1} + \cdots + \dfrac{1}{k(p+m)}\right)$, pričom súčet čísel v hranatých zátvorkách je čiastočný súčet konvergentného radu (stačí použiť Dirichletovo kritérium, resp. kritérium z pr. 244.2) a súčet čísel v okrúhlych zátvorkách je čiastočný súčet divergentného radu;

280 **1.** pozri pr. 247.3; **2.** napr. nasledujúce prerovnanie: 1 kladný člen, 1 záporný, 1 kladný, 3 záporné, 1 kladný, 5 záporných, …, jeho (n^2+n)–tý čiastočný súčet $\left(\text{ktorý je súčtom prvých } n \text{ kladných a prvých } n^2 \text{ záporných členov radu } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ je podľa pr. 247.1 rovný $-\dfrac{1}{2}\ln 4n + \dfrac{1}{2}\varepsilon_n - \eta_{n^2}$;

281 podľa pr. I.173.2 každé prerovnanie postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnú 0, pre postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov prerovnaného radu teda platí $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = 0$, tvrdenie pr. 281 potom vyplýva z pr. I.202 (analógia tvrdenia pr. I.202 pre neohraničené postupnosti má rovnaký dôkaz ako pr. I.202);

282 **1.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - \sin a_k) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$ (pozri pr. I.156.5),

[31] toto je myšlienka dôkazu odhadu pre R_n v Leibnizovom kritériu

súčasne $a_n - \sin a_n = a_n - \left(a_n - \frac{a_n^3}{6} + o(a_n^3)\right) = \frac{a_n^3}{6} + o(a_n^3)$, preto rady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \sin a_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ majú rovnaký charakter $\Big($uvedomte si, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ je rad s konštantným znamienkom$\Big)$; **2.** $\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$, pritom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, súčasne — pretože $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$ pre $n \to \infty$ a $\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ — má rad $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$ rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right)$, ktorý má $\left(\text{pretože } 1 - \frac{\sin a_n}{a_n} = \frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2)\right)$ rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$; **3.** konverguje len pre $x \in [-1, 1)$ $\Big($použite vetu 6' z odseku 3.3 a fakt, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$; pre $x = 1$ využite skutočnosť, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je postupnosť s konštantným znamienkom, nerovnosť $|a_n| \geq a_n^2$ a pr. 282.2; pre $x = -1$ využite monotónnosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pr. 282.2 a návod k pr. 240$\Big)$;

283 **1.** konverguje $\left(\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{5}{16}\right.$, preto rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ konvergujú$\Big)$; **2.** konverguje (použite pr. I.156.5 a Dirichletovo kritérium, resp. kritérium z pr. 244.2); **3.** diverguje $\Big(\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená klesajúca postupnosť, jej limita je riešením rovnice $x = \ln(1+x))$; hľadajme $p \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo $\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^p - a_n^p\right)$ je konečná a nenulová: $a_{n+1}^p - a_n^p = \ln^p(1+a_n) - a_n^p = \left(a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)\right)^p - a_n^p = a_n^p\left(1 - \frac{a_n}{2} + o(a_n)\right)^p - a_n^p = a_n^p\left(1 - \frac{pa_n}{2} + o(a_n)\right) - a_n^p = -\frac{pa_n^{p+1}}{2} + a_n^p \cdot o(a_n)$, odtiaľ vidno, že treba zvoliť $p = -1$; potom $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}$, odtiaľ podľa pr. I.171 vyplýva $\lim_{n\to\infty} \frac{1/a_{n+1} - 1/a_1}{n}$ $\left(= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)\right]\right) = \frac{1}{2}$, preto $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{1/n} = 2$, teda podľa porovnávacieho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje$\Big)$; **4.** konverguje len pre $a = 0$, $a = 1$ $\Big($postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v prípade $a \in (0, 1)$ a postupnosť $\{-a_n\}_{n=2}^{\infty}$ v prípade $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ sú klesajúce postupnosti s limitou 0; podobne ako v riešení pr. 283.3 zistíme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{1/n}$ [32] $= 1$; stačí si uvedomiť, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je pre $a \neq 0$, $a \neq 1$ radom s konštantným znamienkom, a použiť porovnávacie kritérium$\Big)$;

284 z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx_0}$ vyplýva ohraničenosť postupnosti $\{a_n e^{-nx_0}\}_{n=1}^{\infty}$, preto pre niektoré $K > 0$ platí $\left|a_n e^{-nx}\right| = \left|a_n e^{-nx_0} \cdot \left(e^{(x_0 - x)}\right)^n\right| \leq K\left(\frac{1}{e^{x - x_0}}\right)^n$;

285 použijeme nasledujúce tvrdenie [33]: „ak $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ a pre čísla $b_1 \ldots, b_n$ platí $|b_1| \leq A$, $|b_1 + b_2| \leq A$, $\ldots$, $|b_1 + \cdots + b_n| \leq A$, tak $|a_1 b_1 + \cdots a_n b_n| \leq 2Aa_n$“; z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-p}$ vyplýva ohraničenosť postupnosti jeho čiastočných súčtov $\left(\left|\sum_{k=1}^{n} a_k k^{-p}\right| \leq B\right.$ pre niektoré $B > 0$

[32] pre $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosťou záporných čísel, postup z pr. 283.3 preto uplatňujeme na postupnosť $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$

[33] toto tvrdenie sa dokazuje pomocou *Abelovej parciálnej sumácie* (pozri napr. [24, str.135-136, dôkaz Abelovej lemy])

a všetky $n \in \mathbf{N}\Big)$ a — ak je dané $\varepsilon > 0$ — podľa vety 2 $\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N}\,,\ n > N \quad \forall q \in \mathbf{N}\ :\ \big|a_n n^{-p} + \cdots + a_{n+q}(n+q)^{-p}\big| < \frac{\varepsilon}{4}$; nech $n > N$, potom $\left|\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \left|\frac{a_1}{1^p}\left(\frac{1}{n}\right)^p + \frac{a_2}{2^p}\left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \frac{a_N}{N^p}\left(\frac{N}{n}\right)^p\right| + \left|\frac{a_{N+1}}{(N+1)^p}\left(\frac{N+1}{n}\right)^p + \cdots + \frac{a_n}{n^p}\cdot 1^p\right| \le 2B\left(\frac{N}{n}\right)^p + 2\cdot\frac{\varepsilon}{4}\cdot 1^p$, preto pre $n > \max\left\{N, N\left(\frac{4B}{\varepsilon}\right)^{1/p}\right\}$ je $\left|\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$;

286 <u>**1.**</u> ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ majú rovnaký charakter, pretože $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n/(1+a_n)}{a_n} = 1$; ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje alebo sa nerovná 0, možno z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrať podpostupnosť $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ takú, že existuje $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n(k)} =: A \in \mathbf{R}^*$, $A \ne 0$; potom rad $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{n(k)}}{1+a_{n(k)}}$ nespĺňa nutnú podmienku konvergencie $\left(\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{n(k)}}{1+a_{n(k)}} = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } A = \infty \\ \dfrac{A}{1+A}\,, & \text{ak } A \in \mathbf{R}\end{cases}\right)$; pretože $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ je rad s kladnými členmi, vyplýva z divergencie radu $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{n(k)}}{1+a_{n(k)}}$ divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$;

<u>**2.**</u> pre $p = 1$: ukážeme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ nespĺňa Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie: $\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} > \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$, pritom — pretože $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ — platí $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists p \in \mathbf{N}\ :\ \frac{S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}$;

pre $p > 1$: ak na intervale $[S_n, S_{n+1}]$ použijeme pre funkciu $\frac{1}{x^{p-1}}$ Lagrangeovu vetu o strednej hodnote, dostaneme $\frac{1}{S_n^{p-1}} - \frac{1}{S_{n+1}^{p-1}} = \frac{p-1}{c^p}(S_{n+1} - S_n) = \frac{(p-1)a_{n+1}}{c^p}$ pre niektoré $c \in (S_n, S_{n+1})$, preto $\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}^p} \le \frac{a_{n+1}}{c^p} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_n^{p-1}} - \frac{1}{S_{n+1}^{p-1}}\right)$, pritom rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_n^{p-1}} - \frac{1}{S_{n+1}^{p-1}}\right)$ konverguje $\Bigg($jeho n–tý čiastočný súčet je $\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_1^{p-1}} - \frac{1}{S_{n+1}^{p-1}}\right)$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty\Bigg)$; v prípade $p < 1$ možno postupovať podobne ako pre $p > 1$ alebo využiť nerovnosť $\frac{a_n}{S_n} < \frac{a_n}{S_n^p}$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$;

287 <u>**1.**</u> $\frac{a_n}{R_n} + \frac{a_{n+1}}{R_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{R_{n+p}} \ge \frac{a_n + \cdots + a_{n+p}}{R_n} \to 1$ pre $p \to \infty$, preto rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n}$ nespĺňa Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie; <u>**2.**</u> podobne ako pri riešení prípadu $p > 1$ v pr. 286.2 dostaneme $\sqrt{R_{n+1}} - \sqrt{R_n} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\,a_n$ pre niektoré $c \in (R_{n+1}, R_n)$, preto $\frac{a_n}{\sqrt{R_n}} < 2\big(\sqrt{R_{n+1}} - \sqrt{R_n}\,\big)$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$;

288 nech S_n, resp. P_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; potom $S_n = [(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1})] + [(a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1})] + \cdots + [(a_k - a_{k+1}) + \cdots + (a_n - a_{n+1})] + \cdots + [a_n - a_{n+1}] = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_{n+1} = P_n - na_{n+1}$, odtiaľ na základe pr. 211.1 vyplýva: ak existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$, tak postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tú istú limitu [34]; nech teraz $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \infty$, nech $m \in \mathbf{N}$ je dané, potom — pretože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ — existuje $N \in \mathbf{N}$ tak, že $a_{N+1} < \frac{a_1}{2}, \ldots, a_{N+1} < \frac{a_m}{2}$, potom $S_N = (a_1 - a_{N+1}) + (a_2 - a_{N+1}) + \cdots + (a_m - a_{N+1}) + [(a_{m+1} - a_{N+1}) + \cdots + (a_N - a_{N+1})] >$

[34] toto tvrdenie je špeciálny prípad pr. 275 (stačí zvoliť $b_n \equiv 1$)

$\frac{1}{2}(a_1+\cdots+a_m)=\frac{P_m}{2}$ (číslo v hranatej zátvorke je nezáporné, pretože $a_{m+1}\ge a_{m+2}\ge\cdots\ge a_{N+1}$);

$\boxed{\mathbf{289}}$ napr. rad

$$1-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\cdots\underbrace{-\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\cdots-\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}}_{n\text{–krát}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\cdots;$$

konvergenciu tohto radu možno dokázať na základe pr. 272; divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ vyplýva z pr. 237.3;

$\boxed{\mathbf{290}}$ označme $P_n:=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $S_n:=\sum_{k=1}^{n}a_{p_k}$; z nerovností $a_{p_k}\ge a_{(k-1)c+1}$, $k\in\mathbf{N}$ (táto nerovnosť vyplýva z nerovnosti $p_k\le(k-1)c+1$ a monotónnosti postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$) a $ca_{(k-1)c+1}\ge a_{(k-1)c+1}+a_{(k-1)c+2}+\cdots+a_{kc}$, $k\in\mathbf{N}$, dostávame $S_n\ge\sum_{k=1}^{n}a_{(k-1)c+1}\ge\frac{1}{c}[(a_1+\cdots+a_c)+(a_{c+1}+\cdots+a_{2c})+\cdots+(a_{(n-1)c+1}+\cdots+a_{nc})]=\frac{1}{c}P_{cn}$;

$\boxed{\mathbf{291}}$ pozri pr. 287.2;

$\boxed{\mathbf{292}}$ **2.** v pr. 292.1 položte $a_n=x_{n+1}-x_n$, $b_n=y_{n+1}-y_n$, ďalej využite rovnosť $\frac{x_n}{y_n}=\left(\frac{x_n-x_1}{y_n-y_1}\right)\left(1-\frac{y_1}{y_n}\right)+\frac{x_1}{y_n}$; **3a)** $\frac{1}{p}$ [35] $\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^{p-1}}{(n+1)^p-n^p}\right.$, pritom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote $(n+1)^p-n^p=pc^{p-1}$ pre niektoré $c\in(n,n+1)$, preto $\frac{(n+1)^{p-1}}{p(n+1)^{p-1}}\le\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\le\frac{(n+1)^{p-1}}{pn^{p-1}}$, a teda $\left.\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{1}{p}\right)$; **3b)** $\frac{1}{2}$ [36] $\Big($ak $x_n:=p1^{p-1}+\cdots+pn^{p-1}-n^p$, $y_n:=pn^{p-1}$,

tak $$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{pn^{p-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1}-n^p\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right)}{pn^{p-1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1}-1\right)}=$$

$$=\frac{pn^{p-1}\left(1+\frac{p-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-n^p\left(\left(1+\frac{p}{n}+\frac{p(p-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\right)}{pn^{p-1}\left(\left(1+\frac{p-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)}=$$

$=\dfrac{n^{p-2}\left(\frac{p(p-1)}{2}+pno\left(\frac{1}{n}\right)+n^2o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n^{p-2}\left(p(p-1)+pno\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$; **4.** stačí dokázať, že $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{a_n}{S_n}}{\ln S_n-\ln S_{n-1}}=1$ a použiť tvrdenie z pr. 292.1; podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote je $\ln S_n-\ln S_{n-1}=\frac{1}{c_n}(S_n-S_{n-1})=\frac{a_n}{c_n}$ pre niektoré $c_n\in(S_{n-1},S_n)$; c_n možno zapísať v tvare $c_n=S_n-\vartheta_na_n$, kde $\vartheta_n\in(0,1)$, potom $\dfrac{\frac{a_n}{S_n}}{\ln S_n-\ln S_{n-1}}=\dfrac{\frac{a_n}{S_n}}{\frac{a_n}{S_n-\vartheta_na_n}}=1-\vartheta_n\dfrac{a_n}{S_n}$;

$\boxed{\mathbf{293}}$ ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, tak existuje konečná nenulová $\lim_{n\to\infty}a_n$ a

[35] pozri tiež pr. 83.2

[36] na výpočet tejto limity možno použiť v prípade $p\ge2$ výsledok pr. 168, ak v ňom zvolíme $f(x)=x^{p-1}$, $a=0$, $b=1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}}{a_{n+1}-a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ má rovnaký charakter ako konvergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$; ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená, tak nie je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie: $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}} > \dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+p+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}} = 1-\dfrac{a_n}{a_{n+p+1}} \to 1$ pre $p\to\infty$;

$\boxed{\mathbf{294}}$ z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ a rastu funkcie f vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{S}{2^n}\right)$, kde $S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; ukážeme, že postupnosť $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(a_n)}{n}$ je zhora ohraničená, využijeme pritom Jensenovu nerovnosť ,,ak funkcia f je konkávna na intervale I, $x_i\in I$, $\lambda_i>0$ $(i=1,\ldots,n)$ a $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, tak $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \geq \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$“ (pozri aj pr. I.453); potom — pretože $\dfrac{1}{m}\big(f(a_{m+1})+\cdots+f(a_{2m})\big) \leq f\left(\dfrac{1}{m}(a_{m+1}+\cdots a_{2m})\right) \leq f\left(\dfrac{S}{m}\right)$ — je $P_{2^k} \leq f(a_1)+f(a_2)+\dfrac{1}{2}\big(f(a_3)+f(a_4)\big)+\dfrac{1}{4}\big(f(a_5)+\cdots+f(a_8)\big)+\cdots+\dfrac{1}{2^{k-1}}\big(f(a_{2^{k-1}+1})+\cdots+f(a_{2^k})\big) \leq f(a_1)+f(a_2)+f\left(\dfrac{S}{2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{S}{2^{k-1}}\right) \leq f(a_1)+f(a_2)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{S}{2^n}\right)$;