$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}}{a_{n+1}-a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ má rovnaký charakter ako konvergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$; ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená, tak nie je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie: $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}} > \dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+p+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}} = 1-\dfrac{a_n}{a_{n+p+1}} \to 1$ pre $p\to\infty$;

294 z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ a rastu funkcie f vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{S}{2^n}\right)$, kde $S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; ukážeme, že postupnosť $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(a_n)}{n}$ je zhora ohraničená, využijeme pritom Jensenovu nerovnosť ,,ak funkcia f je konkávna na intervale I, $x_i\in I$, $\lambda_i>0$ $(i=1,\dots,n)$ a $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, tak $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \ge \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$" (pozri aj pr. I.453); potom — pretože $\dfrac{1}{m}\big(f(a_{m+1})+\cdots+f(a_{2m})\big) \le f\left(\dfrac{1}{m}(a_{m+1}+\cdots a_{2m})\right) \le f\left(\dfrac{S}{m}\right)$ — je $P_{2^k} \le f(a_1)+f(a_2)+\dfrac{1}{2}\big(f(a_3)+f(a_4)\big)+\dfrac{1}{4}\big(f(a_5)+\cdots+f(a_8)\big)+\cdots+\dfrac{1}{2^{k-1}}\big(f(a_{2^{k-1}+1})+\cdots+f(a_{2^k})\big) \le f(a_1)+f(a_2)+f\left(\dfrac{S}{2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{S}{2^{k-1}}\right) \le f(a_1)+f(a_2)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{S}{2^n}\right)$;

4. Postupnosti a rady funkcií

295 **1**. $\dfrac{x^2}{3}$, $x\ge 0$; **2**. $f(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ $\big($pre $x\in[0,1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, $f_n(1)=0$ pre všetky $n\in\mathbf{N}\big)$; **3**. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x\ne k\pi/2,\ k\in\mathbf{Z} \\ 1, & \text{ak } x\in\{2k\pi\,;\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\pi/2+2k\pi\,;\ k\in\mathbf{Z}\}\end{cases}$ $\Big(D(f)=\mathbf{R}\setminus\big(\{(2k+1)\pi\,;\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\{-\pi/2+2k\pi\,;\ k\in\mathbf{Z}\}\big)\Big)$; **4**. $f(x)=x^5$ $\left(\text{pre } x\ne 0 \text{ je } \lim\limits_{n\to\infty} n^2x^4\sin\dfrac{x}{n^2+n} = x^5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{n^2+n}}{\dfrac{x}{n^2+n}}\cdot\dfrac{n^2}{n^2+n};\ f_n(0)=0 \text{ pre všetky } n\in\mathbf{N}\right)$; **5**. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x\in(0,1] \\ (x-1)\pi/2, & \text{ak } x>1\end{cases}$ $\left(\text{pripomeňme, že } \lim\limits_{u\to\infty}\operatorname{arctg} u = \dfrac{\pi}{2}\right)$; **6**. $\dfrac{\ln x}{2}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{\ln x}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/2n}\dfrac{e^{(\ln x)/2n}-1}{(\ln x)/2n};\ \text{pripomeňme, že } \lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1 \text{ pre } a>0\right)$; **7**. $f(x)\equiv 0$, $x\ge 0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} n^3e^{-nx} = \lim\limits_{y\to\infty} g(y),\ \text{kde } g(y) = \dfrac{y^3}{(e^x)^y},\ y\in\mathbf{R},\ \text{pritom } \lim\limits_{y\to\infty} g(y) \text{ možno nájsť použitím l'Hospitalovho pravidla}\right)$; **8**. $f(x)\equiv 0$, $x>0$ $\left(\text{podobne ako v pr. 295.7 možno } \lim\limits_{y\to\infty} g(y),\ \text{kde } g(y) = \dfrac{x\ln xy}{y},\ y\in\mathbf{R}^+,\ \text{nájsť použitím l'Hospitalovho pravidla}\right)$; **9**. $\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$ $\big($využite, že $\lim\limits_{y\to\infty} y\operatorname{arcctg} y = 1$ — možno to dokázať použitím l'Hospitalovho pravidla alebo použitím substitúcie $\operatorname{arcctg} y = t\big)$; **10**. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x\in[0,1] \\ x, & \text{ak } x\in(1,2] \\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{ak } x\in(2,\infty)\end{cases}$ $\Big($pre $x\in(0,1)$

je $f_n(x) = \left[\left(1+x^n+\dfrac{x^n}{2^n}\right)^{1/n}\right]$, $f_n(1)=\sqrt[n]{2}\left[\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)^{1/n}\right]$, pre $x\in(1,2)$ je $f_n(x)=x\left[\left(1+\dfrac{1}{x^n}+\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right)^{1/n}\right]$, $f_n(2)=2^{(n+1)/n}\left[\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)^{1/n}\right]$, pre $x>2$ je $f_n(x)=\dfrac{x^2}{2}\left[\left(1+\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^n+\left(\dfrac{2}{x}\right)^n\right)^{1/n}\right]$, pritom funkcie v hranatých zátvorkách sú neurčité výrazy typu 1^∞, ktorých limity možno vypočítať postupom z pr. I.148$\Big)$; **11**. $\operatorname{sgn} x$ (načrtnite si grafy funkcií f_n); **12**. $f(x)\equiv 0$, $x>0$;

$\boxed{296}$ **1.** nech $x<y$, potom z nerovností $f_n(x)\le f_n(y)$, $n\in\mathbf{N}$, vyplýva $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\le \lim\limits_{n\to\infty} f_n(y)=f(y)$; **2.** podobne ako v pr. 296.1 prejdite k limite pre $n\to\infty$ v nerovnosti $f_n(px+qy)\le pf_n(x)+qf_n(y)$, $n\in\mathbf{N}$, kde $x,y\in(a,b)$, $p>0$, $q>0$, $p+q=1$;

$\boxed{297}$ **1.** $x>1$ (pozri vetu 5 z odseku 3.2); **2.** $|x|>1$ $\big($použite vetu 6' alebo 7' z odseku 3.3 [1], prípady $x=1$, $x=-1$ treba vyšetriť samostatne$\big)$; **3**. $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(\left[-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi\right]\right)$; **4**. $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}[2k\pi,(2k+1)\pi]$; **5**. $\mathbf{R}$ (vyplýva to z Leibnizovho kritéria); **6**. $\mathbf{R}\setminus\{-1,-2,-3,\dots\}$; **7**. $[0,\infty)$; **8**. $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$ $\Bigg($možno použiť vetu 6' z odseku 3.3: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x}{1+x^{n+1}}\right| = \begin{cases} |x|, & \text{ak } 0<|x|<1\\ 0, & \text{ak } |x|>1 \end{cases}$ [2], pre $x=1$ dostávame rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$, pre $x=0$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}0\Bigg)$; **9**. $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ (použili sme Raabeho kritérium a prípady $x=1$, $x=-1$ sme vyšetrili samostatne); **10**. $\mathbf{R}$ $\left(\left|\dfrac{\cos\pi nx}{n\ln^2(n+1)}\right|\le\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right.$ pre $n\ge 2$ a rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ konverguje podľa integrálneho kritéria$\Big)$; **11**. $\mathbf{R}\setminus\{2k\pi\,;\,k\in\mathbf{Z}\}$ $\big($použili sme Dirichletovo kritérium, pre dané $x\ne 2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ je postupnosť čiastočných súčtov číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$ ohraničená — pozri riešenie pr. 243.5$\big)$; **12**. $x\in(-1,1)$ $\left(\text{pre } |x|<1 \text{ je } \left|\dfrac{x^n}{1-x^n}\right|\le\dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}\right.$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$ má podľa tvrdenia α) vety 4b z odseku 3.2 rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^n$; pre $|x|>1$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie$\Big)$;

$\boxed{298}$ nech $f_n(x)=a_nx+b_n$, z konvergencie radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_na+b_n)$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nb+b_n)$ vyplýva konvergencia radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$; ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=B$, tak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nx+b_n)=Ax+B$;

$\boxed{299}$ toto tvrdenie možno dokázať rovnako ako implikáciu „$\Longleftarrow$“ z vety 2 alebo ho z tejto implikácie odvodiť $\big($zo vzťahov $\sup\limits_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|\le c_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$ vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|=0\big)$;

$\boxed{300}$ **1.** rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x>0$ $\left(\sup\limits_{x>0}|f_n(x)|=\dfrac{1}{n}\right)$; **2.** rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\ge 0$ $\left(|f_n(x)|\le\dfrac{1}{\ln(n+1)},\ x\ge 0,\ \text{ďalej pozri pr. 299}\right)$; **3.** rovnomerne k $\sin\dfrac{x}{2}$ $\left(\left|\sin\dfrac{1+nx}{2n}-\sin\dfrac{x}{2}\right| = \left|2\sin\dfrac{1}{2n}\cos\dfrac{1+2nx}{2n}\right|\le 2\sin\dfrac{1}{2n},\ x\in\mathbf{R}\right)$; **4.** rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\ge 1$ $\Big($ak použijeme

[1] pripomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, pozri pr. I.135.2 alebo I.380.1

[2] pritom sme využili tvrdenie „ak $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\infty$, tak $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$“

nerovnosť $|\sin u| < |u|$ pre $u > 0$ — pozri riešenie pr. I.352.2 — dostaneme $\left|\dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^4}\sin\dfrac{x^2}{\sqrt{n}}\right| < \dfrac{n^2x^4}{\sqrt{n}(1+n^2x^4)} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$; **5.** nerovnomerne k $f(x) \equiv 0$ $\left(\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}\left|\sin\dfrac{x}{n}\right| = 1 \text{ pre každé } n \in \mathbf{N}\right)$;

6. nerovnomerne k $f(x) \equiv 0,\ x \geq 0$ $\left(\text{pre } x > 0 \text{ je } \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos\frac{\sqrt[4]{x}}{n}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\cdot 0 = 0,\right.$ ale pre každé $n \in \mathbf{N}$ je funkcia f_n neohraničená na M — stačí vypočítať $f_n(x)$ pre $\left. x = n\big((2k+1)\pi\big)^4,\ k \in \mathbf{N}\right)$; **7.** nerovnomerne k $f(x) = x^2,\ x \geq 1$ $\big(\lim\limits_{x\to\infty}|f_n(x) - f(x)| = \infty$ pre každé $n \in \mathbf{N}\big)$; **9a)** nerovnomerne k $f(x) \equiv 0,\ x \in [0,10]$ $\left(\sup\limits_{x\in[0,10]}|f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1\right)$; **9b)** rovnomerne k $f(x) \equiv 0,\ x \geq 1$ $\big(\sup\limits_{x\in[1,\infty)}|f_n(x)| = f_n(1)\big)$; **10.** konverguje rovnomerne k $f(x) \equiv 0,\ x \in (0,1)$ $\big(\sup\limits_{x\in(0,1)}|f_n(x)| = -f_n(1)$, pri hľadaní tohto čísla treba využiť, že $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$ pre každé $n \in \mathbf{N}\big)$; **11a)** rovnomerne k $f(x) \equiv 0,\ x \in [0, 1-\delta]$; **11b)** rovnomerne k $f(x) \equiv 1,\ x \in [1+\delta, \infty)$;

11c) nerovnomerne k $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \in [1-\delta, 1) \\ \frac{1}{2}, & \text{ak } x = 1 \\ 1, & \text{ak } x \in (1, 1+\delta] \end{cases}$ $\left(\sup\limits_{x\in[1-\delta,1+\delta]}|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{2},\ n \in \mathbf{N}\right.$ [3]$\Big)$;

12. nerovnomerne k $f(x) \equiv 0,\ x \in (0,1)$ $\big(\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = 1$, preto f_n musí „vyskočiť" z každého ε–pásu okolo funkcie f pre $0 < \varepsilon < 1\big)$; **13.** rovnomerne k $f(x) = |x|$ $\left(0 < \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \dfrac{(x^2+1/n^2) - x^2}{\sqrt{x^2+1/n^2} + \sqrt{x^2}} < \dfrac{1/n^2}{1/n} = \dfrac{1}{n}\right)$; **14.** rovnomerne k $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in [0,1] \\ x, & \text{ak } x \in (1,2] \end{cases}$ $\Big(|f_n(x) - f(x)| =$ $\begin{cases} \sqrt[n]{1+x^n} - 1 \leq \sqrt[n]{2} - 1 & \text{pre } x \in [0,1] \\ \sqrt[n]{1+x^n} - x \leq \sqrt[n]{2x^n} - x = x\big(\sqrt[n]{2} - 1\big) \leq 2\big(\sqrt[n]{2} - 1\big) & \text{pre } x \in (1,2] \end{cases}$, teda $|f_n(x) - f(x)| \leq 2\big(\sqrt[n]{2} -$

[3]každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, teda „vyskočí" z ε–pásu okolo funkcie f pre $0 < \varepsilon < 0.5$; na obr. 11 je znázornený tento ε–pás pre $\varepsilon = 0.2$ $\big($a $\delta = 0.5\big)$; v tomto ε–páse nemôže ležať graf žiadnej spojitej funkcie $g : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbf{R}$; funkcia g je totiž darbouxovská na $[1-\delta, 1+\delta]$ (pozri vetu 4 pred pr. I.234) a musela by preto nadobúdať všetky hodnoty z intervalu $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $\big($platí totiž $g(x) < \varepsilon$ pre $x \in [1-\delta, 1)$, $g(x) > 1-\varepsilon$ pre $x \in (1, 1+\delta]\big)$, čo ale nie je možné; podobnými úvahami možno dokázať toto tvrdenie (ktoré je špeciálnym prípadom dôsledku vety 7'): „ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií, $f_n \to g$ na M a $g|M$ má bod nespojitosti 1. druhu, tak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M k funkcii g nerovnomerne"

obr. 11.

1) [4]; pripomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1\Big)$; **15.** nerovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\ge 0$ (načrtnite si grafy funkcií f_n , $n\in\mathbf{N}$) ;

$\boxed{\mathbf{302}}$ $|f(x)-f_n(x)| = \dfrac{1}{n}\big|nf(x)-[nf(x)]\big| < \dfrac{1}{n}$, $x\in[a,b]$;

$\boxed{\mathbf{303}}$ **1.** platí (pre spojitú funkciu $f_n:[0,1]\to\mathbf{R}$ platí implikácia „$|f_n(x)|<\varepsilon$, $x\in[0,1]\cap\mathbf{Q}\Longrightarrow |f_n(x)|\le\varepsilon$, $x\in[0,1]$“, ktorú možno dokázať nasledovne: pre $a\in[0,1]\setminus\mathbf{Q}$ existuje postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\subset[0,1]\cap\mathbf{Q}$ taká, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$, potom — ak v nerovnosti $|f_n(a_k)|<\varepsilon$ prejdeme k limite pre $k\to\infty$ a využijeme spojitosť funkcie $|f_n|$ — dostaneme $|f_n(a)| = \lim\limits_{k\to\infty}|f_n(a_k)|\le\varepsilon$; pozri tiež pr. I.231) ; **2.** neplatí, napr. $f_n(x) = \left(1-\left|x-\dfrac{1}{\sqrt2}\right|\right)^n$, $x\in[0,1]$ $\left(f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt2}\right)=1,\ n\in\mathbf{N}\right)$;

$\boxed{\mathbf{304}}$ nepriamo; ak M nie je konečná, tak existuje prostá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$, nech $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x\in M\setminus\{a_n\}\\ 1, & \text{ak } x=a_n\end{cases}$, potom $f_n\to 0$ na M , ale neplatí $f_n\rightrightarrows 0$ na M ;

$\boxed{\mathbf{305}}$ **1a)** konverguje rovnomerne k $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $|x|\le q$ $\left(S_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x},\ n=0,1,\dots,\ |S_n(x)-S(x)| = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}\le\dfrac{q^{n+1}}{1-q},\ |x|\le q\right)$; **1b)** konverguje nerovnomerne k $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $|x|<1$ (pre každé $n\in\mathbf{N}$ je $|S_n-S|$ neohraničená na $(-1,1)$) ; **2.** konverguje nerovnomerne k $S(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x=1\\ 1, & \text{ak } x\in[0,1)\end{cases}$ $\left(S_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n}(1-x)x^k = 1-x^{n+1},\ n=0,1,2,\dots,\ \sup\limits_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)| = 1\right)$; **3.** konverguje rovnomerne k $S(x)=2x$, $x\ge 1$; **4.** konverguje rovnomerne k $S(x)=x$, $x\in[-1,1]$; **5.** konverguje rovnomerne k $S(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $x>0$ $\left(\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \dfrac{1}{x+n}-\dfrac{1}{x+n+1}\right)$; **6.** konverguje nerovnomerne k $S(x)\equiv 1$, $x>0$ $\left(S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x}{\big((n-1)x+1\big)\big(nx+1\big)} = 1-\dfrac{1}{nx+1},\ \lim\limits_{x\to 0}|S_n(x)-S(x)| = 1\right)$;

$\boxed{\mathbf{306}}$ stačí aplikovať tvrdenie pr. 301 na postupnosť $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ a funkciu g ;

$\boxed{\mathbf{307}}$ **1.** nech $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$, $S := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$; ak pre $n>n_0$ a všetky $x\in M$ platí $|S_n(x)-S(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, tak z nerovností $|S_n(x)-S(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ a $|S_{n+1}(x)-S(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ vyplýva $|f_{n+1}(x)| = |S_{n+1}(x)-S_n(x)| = \big|\big(S_{n+1}(x)-S(x)\big)+\big(S(x)-S_n(x)\big)\big| \le |S_{n+1}(x)-S(x)|+|S_n(x)-S(x)| < \varepsilon$ pre všetky $n>n_0$ a $x\in M$ (uvedené tvrdenie možno odvodiť aj z vety 3);

2a) bodová konvergencia vyplýva napr. z Cauchyho kritéria; pre každé $n\in\mathbf{N}$ je $\lim\limits_{x\to 0} e^{-nx} = 1$, preto neplatí $e^{-nx}\rightrightarrows 0$ na $(0,\infty)$, a teda podľa pr. 307.1 rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ nekonverguje rovnomerne na $(0,\infty)$; **2b)** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite pre $x\ne 0$ rovnosť $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$ a porovnávacie kritérium; $\forall n\in\mathbf{N}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n}\right)^2 = \dfrac{\pi^2}{4}$, preto neplatí $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n}\right)^2\rightrightarrows 0$ na $\mathbf{R}$; **2c)** $\sup\limits_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{5^{1/3}n^{2/3}}\right) = \dfrac{5^{5/6}}{6}n^{1/6}$, kde $f_n(x) := \dfrac{\sqrt{nx}}{1+x^3n^2}$; **2d)** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite rovnosť $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$ a porovnávacie kritérium; pre každé $n\in\mathbf{N}$ je funkcia $f_n(x) := 2^n\sin\dfrac{1}{3^n x}$, $x>0$, neohraničená $\left(\text{stačí vypočítať } f_n\left(\dfrac{2}{3^n\pi(1+2k)}\right),\ k\in\mathbf{N}\right)$; **2e)** bodová konvergencia vyplýva

[4] použili sme vlastne túto elementárnu úvahu: „ak $D(f)=M\cup N$, $f_n\rightrightarrows f$ na M a $f_n\rightrightarrows f$ na N , tak $f_n\rightrightarrows f$ na $M\cup N$“

z nerovnosti $\left|\frac{\sin nx}{(1+nx)\sqrt{nx}}\right| \le \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$; pretože $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin 1}{2}$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$, nemôže platiť $\frac{\sin nx}{(1+nx)\sqrt{nx}} \rightrightarrows 0$ na $(0,\pi)$;

3. napr. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+1}{n}$ (tento rad dokonca nekonverguje pre žiadne $x \in [0,1]$, porovnaj s pr. 373; na týchto dvoch príkladoch vidno rozdiel medzi termímni ,,nekonverguje rovnomerne" a ,,konverguje nerovnomerne");

308 **1.** pre $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ platí $x^2e^{-(n+1)x^2} + x^2e^{-(n+2)x^2} + \cdots + x^2e^{-2nx^2} \ge e^{-2}$; **3.** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite nerovnosť $|\operatorname{arctg} u| \le |u|$ [5]; pre $x = 2n\pi$ je $\frac{x}{n+1}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{n+1} + \frac{x}{n+2}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{n+2} + \cdots + \frac{x}{2n}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{2n} \ge \pi n \operatorname{arctg}\frac{1}{2n}$, pritom $\lim_{n\to\infty} \pi n \operatorname{arctg}\frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$, preto $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n > n_0 : \pi n \operatorname{arctg}\frac{1}{2n} > \frac{\pi}{4}$, teda celkovo $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n > n_0\ \exists x > 1 : \frac{x}{n+1}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{n+1} + \cdots + \frac{x}{2n}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{2n} > \frac{\pi}{4}$; **4.** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite nerovnosť $\left|\frac{\sin nx}{e^{n^2x}}\right| \le \left(\frac{1}{e^x}\right)^{n^2}$ a potom napr. Cauchyho kritérium; pre $x = \frac{1}{n^2}$ je $\frac{\sin(n+1)x}{e^{(n+1)^2x}} + \frac{\sin(n+2)x}{e^{(n+2)^2x}} + \cdots + \frac{\sin 2nx}{e^{(2n)^2x}} \ge \frac{n\sin(1/n)}{e^4}$, pritom $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^4} n \sin\frac{1}{n} = \frac{1}{e^4}$, ďalej pozri záver riešenia pr. 308.3;

309 **1.** ak $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak (ak v uvedenej nerovnosti prejdeme k limite pre $x \to a+$, $x \to b-$) platí $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \le \varepsilon$ pre všetky $x \in [a,b]$, preto: ak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ vyhovuje Cauchyho–Bolzanovmu kritériu na (a,b), tak mu vyhovuje aj na $[a,b]$; **2.** uvedený rad diverguje v bodoch $x = 2$, $x = -2$ (nie je splnená nutná podmienka konvergencie), ďalej pozri pr. 309.1 [6]; nezabudnite dokázať bodovú konvergenciu na $(-2,2)$;

310 $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \le |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)|$, $x \in M$;

311 **1.** $|f_n(x)| \le \frac{1}{n^2}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$; **2.** $|f_n(x)| \le \frac{1}{n^{3/2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$; **3.** $|f_n(x)| \le e^{-\sqrt{n}}$, $x \ge 1$, $n \in \mathbf{N}$, konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ vyplýva z rovnosti $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = 0$ [7] a z porovnávacieho kritéria; **5.** $|f_n(x)| \le \frac{1}{n^{3/2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$; **6.** $|f_n(x)| \le \frac{x^2}{n\ln^2 n} \le \frac{a^2}{n\ln^2 n}$, $x \in [-a,a]$, $n = 2,3\ldots$, ďalej použite integrálne kritérium; **8.** $\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{e^2n^2}$; **9.** $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$; **10.** $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}\,n\ln^{3/2}(n+1)}$, pri vyšetrovaní konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{3/2}(n+1)}$ použite nerovnosť $\frac{1}{n\ln^{3/2}(n+1)} < \frac{1}{n\ln^{3/2} n}$, $n > 1$ $\Bigg($alebo rovnosť $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\ln^{3/2}(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)\ln^{3/2}(n+1)}}$ a tvrdenie α) vety 4b z odseku 3.2$\Bigg)$ a integrálne kritérium; **11.** $|f_n(x)| \le \frac{\sqrt{x}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}}$, $x \ge 0$, pre $g_n(x) := \frac{\sqrt{x}}{n\sqrt{x^2+n^2}}$ platí $\sup_{x\ge 0} g_n(x) = g_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{3/2}}$, teda

---

[5]tá vzhľadom na nepárnosť funkcie arctg vyplýva z nerovností $0 \le \operatorname{arctg} x \le x$, $x \ge 0$, z ktorých druhú možno dokázať na základe vety 12 pred pr. I.352

[6]pri týchto úvahách by sme namiesto tvrdenia z pr. 309.1 mohli rovnako dobre použiť aj vetu 7' z odseku 4.2

[7]možno to dokázať použitím l'Hospitalovho pravidla na výpočet $\lim_{y\to\infty} g(y)$, kde $g(y) := \frac{y^4}{e^y}$, $y \in \mathbf{R}$

$|f_n(x)| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}\,n^{3/2}}$, $x \ge 0$, $n \in \mathbf{N}$; **12**. $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\ge 0} f_n(x) = f_n\left(n^{3/2}\right) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^{3/2}}$, pri vyšetrovaní konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ využite rovnosť $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$ (alebo nerovnosť $\operatorname{arctg} u < u$, $u > 0$ — pozri riešenie pr. 308.3) a porovnávacie kritérium;

$\boxed{\textbf{312}}$ z monotónnosti funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, vyplýva $|f_n(x)| \le \max\left\{|f_n(a)|, |f_n(b)|\right\} \le |f_n(a)| + |f_n(b)|$, $x \in [a,b]$;

$\boxed{\textbf{314}}$ **1.** pre $f_n(x) \equiv (-1)^n$, $g_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$ sú na M splnené predpoklady vety 6; **3.** pre $f_n(x) \equiv \dfrac{(-1)^n}{n}$, $g_n(x) = x^n$ sú na M splnené predpoklady vety 5;

$\boxed{\textbf{315}}$ pre $f_n(x) \equiv a_n$, $g_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ sú splnené predpoklady vety 5;

$\boxed{\textbf{316}}$ **1.** rovnomerne; **2.** rovnomerne; **3.** rovnomerne $\big(M = (-\infty, 0)\big)$; **4.** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie — pozri pr. 307.1; nezabudnite, že treba dokázať bodovú konvergenciu na M); **5.** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie); **6.** rovnomerne $\left(|f_n(x)| \le \dfrac{1}{2n(4+\ln^2 2n)},\ x \ge 2\right)$; **7.** rovnomerne (možno použiť vetu 5); **8.** rovnomerne (pozri myšlienku riešenia pr. 311.11); **9.** rovnomerne $\Bigg($možno použiť vetu 6, pre $x \ne 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, je $\sum\limits_{m=1}^{n} \sin x \sin mx = \sin x \, \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \cos\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right)$, rovnosť $\sum\limits_{m=1}^{n} \sin x \sin mx = \cos\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right)$ platí zrejme aj pre $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; pozri aj pr. 243.4$\Bigg)$; **10a)** rovnomerne $\left(\left|\sum\limits_{m=1}^{n} \sin mx\right| \le \dfrac{1}{\sin(\varepsilon/2)}\right.$ pre $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, v súvislosti s pr. 316.10b si uvedomte, že $\left.\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \dfrac{1}{\sin(\varepsilon/2)} = \infty\right)$; **10b)** nerovnomerne $\Bigg($nie je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium: $\dfrac{\sin(1+1/n)}{n+1} + \dfrac{\sin(1+2/n)}{n+2} + \cdots + \dfrac{\sin(1+n/n)}{n+n} \ge \dfrac{\sin 1}{2}$, $n \in \mathbf{N}$; opäť nezabudnite dokázať bodovú konvergenciu$\Bigg)$; **11a)** rovnomerne $\left(|f_n(x)| \le \dfrac{1}{n\sqrt{n}},\ x \in (0,1)\right)$; **11b)** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie); **12a)** rovnomerne; **12b)** nerovnomerne $\Bigg($nie je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium: $\dfrac{n}{(n+1)^2} \sin\dfrac{n^2}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{n}{(2n)^2} \sin\dfrac{n^2}{(2n)^2} \ge \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{1}{4}$, $n \in \mathbf{N}\Bigg)$; **13a)** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie); **13b)** rovnomerne $\Bigg($pri vyšetrovaní konvergencie majorantného radu využite fakt, že $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$ a porovnávacie kritérium$\Bigg)$; **14.** rovnomerne $\big($využite nerovnosť $|\operatorname{arctg} u| \le |u|$, $u \in \mathbf{R}$, pozri aj riešenie pr. 308.3$\big)$;

$\boxed{\textbf{317}}$ **1**. 1 $\Bigg(= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$; rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n n^x}$ konverguje rovnomerne napr. na $[0,1]$ [8] podľa Weierstrassovho kritéria$\Bigg)$ [9]; **2**. $\dfrac{1}{2}\ln 2$ $\Bigg(= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$, pozri pr. 247.2, pri vyšetrovaní rovnomernej konvergencie

---

[8]za množinu M z vety 7' sme mohli v tomto prípade zvoliť napr. aj $(0,\infty)$, $[0,\infty)$ alebo ľubovoľný interval $[0,a]$, $(0,a)$

[9]treba si uvedomiť, že vety 7 a 7' možno použiť aj pri výpočte jednostranných limít, pretože napr. $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ je definovaná rovnosťou $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)|D(f) \cap (a, a+\varepsilon)$

na niektorom okolí bodu 1 použite Abelovo kritérium$\Big)$ [10]; $\underline{\mathbf{3}}$. 1 $\left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\,;\ \left|\frac{x^2}{1+n(n+1)x^2}\right| \le \frac{1}{n(n+1)}\,,\ x \in \mathbf{R} \right)$; $\underline{\mathbf{4}}$. 1 $\Big($v tomto prípade nie sme oprávnení použiť vetu 7', rad $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$ bodove konverguje k funkcii $f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{ak } x \in (-1,1) \\ 0\,, & \text{ak } x = 1 \end{cases}$, ale táto konvergencia nie je rovnomerná na žiadnom z intervalov $(\varepsilon, 1)$, kde $-1 < \varepsilon < 1\Big)$;

318 $\underline{\mathbf{1}}$. $D(f) = \left[\frac{1}{e}, e\right]$, každá z fukcií $f_n(x) := \frac{\ln^n x}{n^2}$ je spojitá na $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ podľa Weierstrassovho kritéria, preto podľa dôsledku vety 7' je f spojitá funkcia; $\underline{\mathbf{2}}$. spojitá na $D(f) = [0, \infty)$ (daný rad konverguje rovnomerne na $[0,\infty)$ podľa Weierstrassovho kritéria); $\underline{\mathbf{3}}$. spojitá na $\mathbf{R}$ (daný rad konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$); $\underline{\mathbf{4}}$. spojitá na $D(f) = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ (daný rad konverguje lokálne rovnomerne na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ [11]; ak $[a-\varepsilon\,,\,a+\varepsilon] \subset D(f)$, tak $\left|e^{-n^2x^2}\cos nx\right| < e^{-n^2(|a|-\varepsilon)}$ pre $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$); $\underline{\mathbf{6}}$. $D(f) = \mathbf{R}$, f nie je spojitá v bode 0 [12] $\left(\text{daný rad je geometrický pre každé pevné } x\text{, nie je teda ťažké nájsť jeho súčet: } f(x) = \begin{cases} 1/x\,, & \text{ak } x \ne 0 \\ 0\,, & \text{ak } x = 0 \end{cases}\right)$;

319 $|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$, pri odhade prvej, resp. druhej absolútnej hodnoty vpravo využite fakt, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$, resp. spojitosť funkcie f;

320 nech je dané $\varepsilon > 0$, zvoľme $n \in \mathbf{N}$ tak, aby $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $x \in M$; existuje $\delta > 0$ tak, že platí implikácia $|x - y| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $x, y \in M$; potom $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ (špeciálne v prípade $M = [a,b]$ vyplýva tvrdenie pr. 320 z vety 6 pred pr. I.251 a z dôsledku vety 7; v prípade $M = (a,b)$, kde $a, b \in \mathbf{R}$, z vety 7 a pr. I.255);

321 $\underline{\mathbf{1}}$. áno, napr. $f(x) = \frac{1}{n}\chi(x)$, kde χ je Dirichletova funkcia; $\underline{\mathbf{2}}$. áno, napr. $f_n = f$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$, kde f je daná nespojitá funkcia;

324 $\underline{\mathbf{1}}$. $\frac{3}{4}$ $\Big($podľa Weierstrassovho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ konverguje rovnomerne na $[\ln 2, \ln 5]$, preto podľa vety 8' je $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 5} ne^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{5^n}\right)\Big)$; $\underline{\mathbf{2}}$. π;

325 $\ln 2 - \frac{1}{2}$ $\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^{2n-2}(1-t)^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-2}(1-t)^2\,dt$, daný rad je geometrický pre každé $t \in [0,1]$, rovnomernú konvergenciu možno dokázať napr. Weierstrassovým

---

[10] Pri riešení tohto príkladu (aj pr. 317.1) sme vlastne využili tento dôsledok vety 7': *Ak každá z funkcií* $f_n : M \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, *je spojitá v bode* $a \in M$ *a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje rovnomerne na* M, *tak funkcia* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je spojitá v bode* a.

[11] ale nekonverguje rovnomerne na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, pretože $\lim_{x\to 0} e^{-nx^2}\cos nx = 1$, a na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ teda nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie

[12] z vety 7', resp. z jej dôsledku formulovaného v poznámke [10] k riešeniu pr. 317.2 potom vyplýva, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ nemôže konvergovať rovnomerne na žiadnom okolí bodu 0

kritériom [13] $\left(\text{pretože } \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n-2} = e^{-2}\,,\right.$ má majorantný číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n-2}\dfrac{1}{n^2}$ rovnaký charakter ako rad $\left.\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\right)$;

326 pretože $[a,b]\setminus M \subset D(f) \subset [a,b]$ $\left(\text{rad } \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\right.$ môže konvergovať aj v niektorých bodoch množiny $\left.M\right)$, vzťahuje sa na funkciu f poznámka 2 za vetou 6 z odseku 2.1, nech $\overline{f}_n(x) := \begin{cases} f_n(x)\,, & \text{ak } x\in[a,b]\setminus M \\ 0\,, & \text{ak } x \in M\end{cases}$, $n\in\mathbf{N}$, $\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x)\,, & \text{ak } x\in[a,b]\setminus M \\ 0\,, & \text{ak } x \in M\end{cases}$; potom $\int_a^b \overline{f}_n(x)\,dx = \int_a^b f_n(x)\,dx$, $\int_a^b \overline{f}(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n \rightrightarrows \overline{f}$ na $[a,b]$ (pozri pozn. [4] k riešeniu pr. 300.14) a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n$ možno integrovať člen po člene;

327 1. $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^{2n+2}-x^{2n}\right) = \begin{cases} -x^2\,, & \text{ak } |x|<1 \\ 0\,, & \text{ak } |x|=1\end{cases}$, podľa vety 6 z odseku 2.1 je $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} x^2\,dx$; pozri tiež pr. 383.1;

330 1. rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^{5/2}}$ konverguje napr. v bode 0 a rad derivácií $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^{3/2}}$ konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$, na ohraničenom intervale $(-a,a)$ sú teda splnené predpoklady vety 9', rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^{5/2}}$ možno preto derivovať člen po člene v každom bode $x\in(-a,a)$; táto úvaha platí pre každé $a>0$, preto $f'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^{3/2}}$; spojitosť funkcie f' vyplýva priamo z dôsledku vety 7'; 2. rovnomernú konvergenciu radu derivácií na $\mathbf{R}$ možno dokázať Weierstrassovým kritériom, dôkaz rovnomernej konvergencie radu derivácií na každom z intervalov $(-a,a)$ — čo pre naše potreby stačí— je jednoduchší: $\left|\dfrac{2\cdot(-1)^{n+1}x}{(n+x^2)^2}\right| \le \dfrac{2a}{n^2}$, $x\in(-a,a)$; 3. pri dôkaze rovnomernej konvergencie radu derivácií na $\mathbf{R}$ použite nerovnosť $|\cos nx|\le 1$ a integrálne kritérium;

331 2a) $D(f) = (1,\infty)$, rad k–tych derivácií $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \ln^k n}{n^x}$ konverguje rovnomerne na každom intervale (a,∞), kde $a>1$, podľa Weierstrassovho kritéria (k dôkazu konvergencie majorantného číselného radu pozri návod k pr. 214.7); na každom ohraničenom intervale (a,b), kde $a>1$, sú splnené predpoklady tvrdenia z pr. 331.1, a daný rad možno teda k–krát derivovať člen po člene v každom bode $x\in(a,b)$; spojitosť funkcie $f^{(k)}$ vyplýva z jej diferencovateľnosti;

332 nech $F_n:[a,b]\to\mathbf{R}$ je primitívna funkcia k funkcii f_n taká, že $F_n(a)=0$, potom postupnosť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovuje predpokladom vety 9;

333 1. neplatí napr. $I=\mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{2^n}$; 2. platí, dôkaz sa zakladá na myšlienkach použitých pri riešení pr. 330.1;

334 2. pozri pr. 300.13 alebo pr. 192 a 193, ktoré umožňujú skonštruovať postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ požadovaných vlastností k ľubovoľnej spojitej funkcii $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, pre ktorú neexistuje $f'(0)$;

335 1. $\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ $\left(a=-1\,,\ R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}}=\dfrac{1}{3}\right)$; 2. $(-2,6)$ $\left(a=2\,,\ R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| =\right.$

[13] alebo — čo je oveľa jednoduchšie — *Diniho kritériom: Ak* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť spojitých nezáporných funkcií a rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje na kompaktnej množine* M *bodove k spojitej funkcii, tak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje rovnomerne na* M (pozri [24,str. 134, dôsledok vety 2] alebo [10, odst. 431, veta 2]).

$4\Big)$; **3**. $(-e^3, e^3)$; **4**. $R = 0$, pre mocninové rady s polomerom konvergencie 0 sme pojem intervalu konvergencie nezaviedli; **5**. $(-\infty, \infty)$ pre $a \in (0,1)$, $(-1,1)$ pre $a = 1$; pre $a > 1$ je $R = 0$; **6**. $(2,4)$ $\Big($pri výpočte R na základe vety 11 využite, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^2 n}{n} = 0\Big)$; **7**. $(-e, e)$ $\Big($na výpočet R možno použiť vetu 12 alebo využiť rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$, pozri poznámku za pr. $224\Big)$; **8**. $(-2^{-1/4}, 2^{1/4})$ [14]; **9**. $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ $\Big($v postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $b_n := \sqrt[n]{|a_n|}$, konvergujú podpostupnosti $\{b_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_{4k-2}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_{4k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{k\to\infty} b_{4k} = \lim\limits_{k\to\infty} b_{2k-1}$, pozri aj riešenie pr. I.160$\Big)$; **10**. $(1,5)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{\sin(n^2/2^n)}{n^2/2^n}} \cdot \dfrac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \dfrac{1}{2}\right)$;

336 **1**. $(-1,1)$ pre $p \le 0$, $[-1,1)$ pre $p \in (0,1]$, $[-1,1]$ pre $p > 1$; **2**. $(-3,-1)$ $\Big(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt[n]{n})^4 \sqrt[n]{1+3/n^4}}{(\sqrt[n]{n})^3 \sqrt[n]{1+4/n^2}}$, možno tiež použiť vetu $12\Big)$ [15]; **3**. $(-4,4)$ $\Big($divergencia v bodoch $x = 4$ a $x = -4$ vyplýva z vety 6' v odseku 3.3: $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| > 1$, $n \in \mathbf{N}$, kde $b_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$, resp. $b_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n\Big)$; **4**. $(-1,1)$ $\Big(\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k!]{k!}$ $(= \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{m})$ $= 1$, pozri tiež postup v bode a) poznámky [14] k riešeniu pr. $335.8\Big)$; **5**. $\{0\}$ pre $a \in (0,1]$, $\mathbf{R}$ pre $a > 1$ $\Big($možno použiť vetu 12 aj vetu 11: $\sqrt[n]{\dfrac{n!}{a^{n^2}}} = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} \cdot \dfrac{n}{a^n}$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{e}$, pozri poznámku za pr. $224\Big)$; **6**. $[-2,0)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sin\alpha_n)/\alpha_n}{(\sin\alpha_{n+1})/\alpha_{n+1}} \cdot \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\alpha_n}\right.$, kde $\alpha_n :=$

---

[14] treba si uvedomiť, že postupnosťou $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ koeficientov tohto mocninového radu nie je postupnosť 0,2,4,8,16,..., ale postupnosť 0,0,0,0,2,0,0,0,4,0,0,0,8,0,0,0,16,0,... (pozri tiež poznámku [21] k úvodu odseku 4.3.1), pri hľadaní čísla R možno v tomto prípade zvoliť niektorý z nasledujúcich postupov:

a) použiť priamo vetu 11: postupnosťou $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť $0, 0, 0, \sqrt[4]{2}, 0, 0, 0, \sqrt[8]{4}, 0, \ldots, \sqrt[4n]{2^n}, 0, 0, 0, \ldots$, ktorej hromadnými hodnotami sú čísla 0 a $\sqrt[4]{2}$ (pozri riešenie pr. I.160), preto $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$;

b) použiť substitúciu $x^4 = t$, ktorou dostaneme mocninový rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n t^n}{n^2}$ s polomerom konvergencie $R_1 = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n}} = \dfrac{1}{2}$; podľa definície polomeru konvergencie rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n t^n}{n^2}$ konverguje pre $|t| < R_1$ a diverguje pre $|t| > R_1$, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^{4n}}{n^2}$ konverguje pre $|x^4| < R_1$ a diverguje pre $|x^4| > R_1$;

c) na vyšetrenie konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^{4n}}{n^2}$ použiť d'Alembertovo alebo Cauchyho kritérium (vety 6' a 7' z odseku 3.3, z nich sú napokon odvodené aj vety 11, 12), pozri tiež pr. 339.3

[15] nie ja ťažké dokázať nasledujúce tvrdenie: „ak Q je racionálna funkcia, ktorá je kladná na $[1,\infty)$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[k]{Q(n)}\, x^n$ má polomer konvergencie 1" (vyšetrenie oboru konvergencie tohto radu prenechávame snaživému čitateľovi)

$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, podobne možno pomocou rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\alpha_n}{\alpha_n}=1$ nájsť aj $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$; v bode 0 má daný rad rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, konvergencia v bode -2 vyplýva z Leibnizovho kritéria$\Big)$; **7**. $[-2,0]$ $\Big($postupujte ako v pr. 336.6, využite rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}=1$, kde $\alpha_n=-\dfrac{4}{3n+2}\Big)$; **8**. $[-1,1)$ $\Big($využite rovnosť $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{a^u-1}{u}=\ln a$, $a>0\Big)$; **9**. $\left(-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)$ $\Big($pre $x=\dfrac{1}{e}$, $x=-\dfrac{1}{e}$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie [16]$\Big)$; **10**. $(-1,1)$ (z nerovností $1\le|a_n|\le n$ vyplýva $1\le\sqrt[n]{|a_n|}\le\sqrt[n]{n}$, preto $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$ [17]); **11**. $\left[-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ $\Big(\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{3\sqrt[n]{1+(-2/3)^n}}{\sqrt[n]{n}}$; v prípade $x=-\dfrac{2}{3}$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n3^n}$ súčtom radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$, z ktorých prvý diverguje a druhý konverguje; postup pre $x=-\dfrac{4}{3}$ je obdobný$\Big)$; **12**. $(-a,a)$; **13**. $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ $\Big($rad $\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{2m}$, kde $a_n:=\dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$, diverguje v bodoch $\dfrac{1}{4}$ a $-\dfrac{1}{4}$, rad $\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{2m-1}$ v týchto bodoch konverguje, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje pre $x=\dfrac{1}{4}$ a $x=-\dfrac{1}{4}\Big)$; **14**. $[-1,1)$ (pozri pr. 240);

338 $R=1$ $\big($konvergencia pre $|x|<1$ vyplýva z vety 10, keby daný rad konvergoval pre niektoré x také, že $|x|>1$, musel by podľa vety 10 konvergovať absolútne v bode 1$\big)$;

339 **1a**) $R=\min\{R_1,R_2\}$ $\Big($rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ konverguje, ak $|x|<R_1\wedge|x|<R_2$ (súčet dvoch konvergentných radov konverguje) a iste diverguje, ak $R_2<|x|<R_1$ (súčet konvergentného a divergentného radu diverguje)$\Big)$; **1b**) $R\ge R_1$ $\big($ak zvolíme $a_n=-b_n$ tak, že rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ má konečný polomer konvergencie, vidíme, že skutočne môže nastať prípad $R>R_1\big)$; **2a**) $r=R^k$, ak $R\in\mathbf{R}_0^+$; $r=\infty$, ak $R=\infty$ $\big($ak $b_n\ge0$, $n\in\mathbf{N}$, a $\limsup\limits_{n\to\infty}b_n=R\in\mathbf{R}_0^+$, tak $\limsup\limits_{n\to\infty}b_n^k=R^k$: podpostupnosť $\{b_{n_s}\}_{s=1}^{\infty}$ totiž konverguje k číslu b práve vtedy, keď $\lim\limits_{s\to\infty}b_{n_s}^k=b^k$ $(k>0)$, preto množina H_1 hromadných hodnôt postupnosti $\{b_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ má tvar $H_1=\{h^k\,;\,h\in H\}$, kde H je množina hromadných hodnôt postupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, v prípade $R=\infty$ je postup rovnaký$\big)$; **2b**) $r=\sqrt[k]{R}$, ak $R\in\mathbf{R}_0^+$; $r=\infty$, ak $R=\infty$ (pozri postup b) v poznámke [14] k riešeniu pr. 335.8); **3**. na vyšetrenie konvergencie daého radu použite d'Alembertovo kritérium (veta 6' z odseku 3.3);

341 **1**. podľa vety 10 rad konverguje v bode $x=1$, a teda tam spĺňa nutnú podmienku konvergencie; **2**. podľa vety 11 je $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$, preto aspoň jedna podpostupnosť $\left\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right\}_{k=1}^{\infty}$ má limitu väčšiu ako 1 alebo rovnú ∞, potom $\lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_k}|=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right)^{n_k}=\infty$ (možno tiež dokazovať nepriamo: ak

---

[16] $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\Big/e^n=e^{E(n)}$, kde $E(n)=n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-n=n^2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)-n=n-\dfrac{1}{2}+n^2o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)-n=-\dfrac{1}{2}+n^2o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, preto $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\Big/e^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-1/2+n^2o(1/n^2)}=e^{-1/2}$; pripomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty}n^2o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=0$

[17] pri výpočte polomeru konvergencie R sme mohli tiež využiť vzťah $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=\ln n+\varepsilon_n$, kde $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ (pozri pr. 220), potom $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\cdots+1/n}{1+\cdots+1/(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n+\varepsilon_n}{\ln(n+1)+\varepsilon_{n+1}}=1$

$|a_k| \le K$, $n \in \mathbf{N}$, tak $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{K} = \lim \sqrt[n]{K} = 1\big)$;

$\boxed{\mathbf{342}}$ $\underline{\mathbf{2}}$. $\dfrac{2x}{(1-x)^3}$, $x \in (1,1)$ $\Big($ak $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$, tak $\int_0^x f(t)\,dt = x^2 g(x)$, kde $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$; $\int_0^x g(t)\,dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = -1 + \dfrac{1}{1-x}$, $x \in (-1,1)$; preto $f(x) = \left(x^2\left(-1+\dfrac{1}{1-x}\right)'\right)'$, $x \in (-1,1)\Big)$; $\underline{\mathbf{3}}$. $\dfrac{2x(6-x)}{(2-x)^3}$, $|x| < 2$ $\Big($najprv sme použili substitúciu $\dfrac{x}{2} = t$; nech $f(t) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)t^n$, zrejme $f(0) = 0$, pre $t \in (-1,1)$, $t \ne 0$ je $f(t) = \dfrac{1}{t}\,g(t)$, kde $g(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)t^{n+1}$; pre g dostávame $g(t) = \left(t^3\left(-1+\dfrac{1}{1-t}\right)'\right)' = \dfrac{t^2(3-t)}{(1-t)^3}$, $|t| < 1$, teda pre $t \in (-1,1)$, $t \ne 0$ je $f(t) = \dfrac{t(3-t)}{(1-t)^3}$; pretože pravá strana má pre $t = 0$ hodnotu 0 , môžeme tento predpis použiť aj pre $t = 0\Big)$; $\underline{\mathbf{4}}$. $\dfrac{x(x-3)}{3(x+3)^3}$, $|x| < 3$;

$\boxed{\mathbf{343}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$; $\underline{\mathbf{2}}$. 0 pre $x = 0$, $\dfrac{1}{4x^2}\left(2\operatorname{arctg} 2x + \ln\dfrac{1+2x}{1-2x}\right)$ pre $x \in \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ (použili sme substitúciu $2x = t$) ; $\underline{\mathbf{3}}$. $2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$, $|x| \le 1$ (pre body $x = 1$, $x = -1$ sme využili poznámku 1 za riešením pr. 343.4);

$\boxed{\mathbf{344}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. $\ln 2$; $\underline{\mathbf{3}}$. $\dfrac{3}{2}$ $\left(= g\left(\dfrac{1}{3}\right)\right.$, kde $\left. g(t) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 t^n\right)$; $\underline{\mathbf{4}}$. $2 - 2\ln 2$ $\Big(= g(1)$, kde $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}\Big)$;

$\boxed{\mathbf{345}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. napr. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n$; $\underline{\mathbf{2}}$. nech $f_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_n x^n$, $x \in [0,1]$; $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in [0,1)$; postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je neklesajúca pre každé $x \in [0,1]$, preto $f_n(x) \le f(x)$, $n = 0,1,\ldots$, $x \in [0,1)$, a $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \lim\limits_{x\to 1-} f_n(x) \le \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = S$, teda $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\left(= \{f_n(1)\}_{n=0}^{\infty}\right)$ je zhora ohraničená neklesajúca — tj. konvergentná — postupnosť, odtiaľ už na základe poznámky za riešením pr. 344.2 vyplýva dokazované tvrdenie [18]; tento príklad ukazuje, že za istých predpokladov možno implikáciu z poznámky za riešením pr. 344.2 obrátiť;

$\boxed{\mathbf{346}}$ podľa poznámky za riešením pr. 344.2 je $A = \lim\limits_{x\to 1-} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to 1-} g(x)$, kde $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$; rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ je Cauchyho súčin radov $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, ktoré absolútne konvergujú v každom bode intervalu $(-1,1)$ (pozri vetu 10), preto podľa vety 17 z odseku 3.4 pre každé $x \in (-1,1)$ platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x)g(x)$, potom — opäť podľa poznámky za riešením pr. 344.2 — $C = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \lim\limits_{x\to 1-} f(x)g(x) = AB$;

$\boxed{\mathbf{347}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. derivácia párnej (nepárnej) funkcie (pokiaľ existuje) je nepárna (párna) funkcia, pritom pre nepárnu funkciu g platí $g(0) = 0$; $\underline{\mathbf{2}}$. ak f je súčet radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tak $f(x) = 0$ pre $x \in [0,\varepsilon)$ (vyplýva to z predpokladov a zo spojitosti funkcie f v bode 0), potom podľa vety 17 je $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{f_+^{(n)}(0)}{n!} =$

---

[18] toto tvrdenie možno dokázať aj bez použitia uvedenej poznámky, v takom prípade zostáva dokázať rovnosť $S = \sup\{f_n(1)\,;\, n \in \mathbf{N}\}$, na to okrem predchádzajúceho využijeme ešte skutočnosť, že funkcie f_n ($n = 0,1,\ldots$) a f sú neklesajúce (pozri pr. 296.1), potom druhá vlastnosť suprema vyplýva z nerovnosti $S - f_n(1) = \big(S - f(1-\delta)\big) + \big(f(1-\delta) - f_n(1-\delta)\big) + \big(f_n(1-\delta) - f(1)\big) \le \big(S - f(1-\delta)\big) + \big(f(1-\delta) - f_n(1-\delta)\big)$ a z tvrdení $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta \in (0,1)\ :\ S - f(1-\delta) < \varepsilon/2$ (ktoré vyplýva z rovnosti $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = S$) a $\forall\varepsilon > 0\ \forall\delta \in (0,1)\ \exists n \in \mathbf{N}\ :\ f(1-\delta) - f_n(1-\delta) < \varepsilon/2$ $\big($to platí, pretože $f_n \to f$ na $[0,1)\big)$

$\dfrac{0}{n!} = 0\,,\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\,;$

$\boxed{\mathbf{348}}$ **1**. $a^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\ln^n a}{n!}\, x^n\,,\ x \in \mathbf{R}\,;$ **2**. $\operatorname{ch} ax = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^{2n} x^{2n}}{(2n)!}\,,\ x \in \mathbf{R}\,;$ **3**. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(n+1)!}\,,\ x \in \mathbf{R}\,;$ **4**. $x \sin 2x \cos 3x = \dfrac{1}{2} x(\sin 5x - \sin x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{5^{2n-1} - 1}{2(2n-1)!}\, x^{2n}\,,\ x \in \mathbf{R}\,;$ **5**. $\sin^3 x = \sin x \cdot \left(\dfrac{1 - \cos 2x}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \sin x - \dfrac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \dfrac{3}{4} \sin x - \dfrac{1}{4} \sin 3x = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3(-1)^n}{4(2n-1)!} (3^{2n-2} - 1) x^{2n-1}$ [19], $x \in \mathbf{R}\,;$ **6**. $\dfrac{1}{a + bx} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{b}{a} x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}}\, x^n\,,\ |x| < \left|\dfrac{a}{b}\right|\,;$ **7**. $\dfrac{5x - 4}{x + 2} = 5 - 7 \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{2}} = -2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7(-1)^{n-1}}{2^n}\, x^n\,,\ |x| < 2\,;$ **8**. $\dfrac{1}{x^2 - 2x - 3} = -\dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{3}} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{1 + x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4}\left((-1)^{n+1} - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right) x^n\,,\ |x| < 1\,;$ **9**. $\dfrac{1}{1 + x + x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$ kde $a_n = \begin{cases} 1\,, & \text{ak}\quad n = 3k\,,\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \\ -1\,, & \text{ak}\quad n = 3k + 1\,,\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \\ 0\,, & \text{ak}\quad n = 3k + 2\,,\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \end{cases}$ (to možno zapísať aj v tvare $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \sin \dfrac{2\pi(n+1)}{3}$), $|x| < 1$ (pre $x \neq 1$ je $\dfrac{1}{1 + x + x^2} = \dfrac{1 - x}{1 - x^3}$); **10**. $\dfrac{x}{(1 - x^3)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{3n+1}\,,\ |x| < 1$ (Maclaurinov rad funkcie $\dfrac{1}{(1-u)^2}$ môžeme nájsť napr. derivovaním člen po člene Maclaurinovho radu funkcie $\dfrac{1}{1-u}$); **11**. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} = \dfrac{1}{a} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!\, a^{2n+1}} x^{2n}\,,\ |x| \le a\,;$ **12**. $\ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,\ |x| < 1\,;$ **13**. $\ln(12 - x - x^2) = \left(\ln 3 + \ln\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)\right) + \left(\ln 4 + \ln\left(1 + \dfrac{x}{4}\right)\right) = \ln 12 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{4^n} - \dfrac{1}{3^n}\right) x^n\,,\ x \in [-3, 3)\,;$ **14**. $\ln(1 + x + x^2 + x^3) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n\,,$ kde $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\,, & \text{ak}\quad n = 2k - 1 \quad \text{alebo} \quad n = 4k - 2\,,\ k \in \mathbf{N} \\ -\dfrac{3}{n}\,, & \text{ak}\quad n = 4k\,,\ k \in \mathbf{N} \end{cases}$, $x \in (-1, 1]$ (daný rad má polomer konvergencie $R = 1$, pričom je súčtom dvoch radov, z ktorých jeden konverguje v bode $x = 1$ a diverguje v bode $x = -1$ a druhý konverguje v bode $x = 1$ aj v bode $x = -1$); **15**. $(1+x)\ln(1+x) = x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n(n-1)}\,,$ táto rovnosť platí pre $x \in (-1, 1]$, oborom konvergencie uvedeného radu je interval $[-1, 1]$, jeho súčet má v bode -1 hodnotu 0 $\left(= -1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)} = \lim\limits_{x \to -1+} (1+x)\ln(1+x)\right)$, funkciu $(1+x)\ln(1+x)\,,\ x \in (-1, 1]$, možno teda v bode -1 „spojite dodefinovať“

$\boxed{\mathbf{349}}$ **1**. $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\,,\ |x| \le 1\,;$ **3**. $\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) = \ln a + \dfrac{x}{a} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!\, a^{2n+1} (2n+1)}\, x^{2n+1}\,,\ |x| \le a$ (Maclaurinov rad funkcie f' konverguje v bodoch $x = a$, $x = -a$ — pozri riešenie pr. 348.11, preto tam podľa tvrdenia b) vety 16 konverguje aj Maclaurinov

---

[19] $= \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{3(-1)^{m+1}}{4(2n+1)!} (3^{2m} - 1) x^{2m+1}\,,$ ak položíme $m = n - 1$

rad funkcie f [20]); **4**. $f'(x) = \dfrac{x}{1+\dfrac{x^4}{4}}$, $|x| \neq \sqrt{2}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{2+x^2}{2-x^2} = \dfrac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)2^{2n+1}}$, táto rovnosť platí pre $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, oborom konvergencie uvedeného radu je interval $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ $\Big($funkciu $\operatorname{arctg}\dfrac{2+x^2}{2-x^2}$, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, možno teda „spojite dodefinovať" v bodoch $-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}\Big)$; **5**. $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} = -1 + \dfrac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}\, x^{2n+2}$; **6**. $x\operatorname{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$, $|x| \le 1$; **7**. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)}$, $x \in \mathbf{R}$ [21]; **8**. $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, oborom konvergencie tohto radu je interval $[-1,1]$ (existujú teda konečné limity $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1+} f(x)$ [22]);

$\boxed{\mathbf{350}}$ **1**. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, kde $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $\Big($nech I je interval konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, potom pre $x \in J := I \cap (-1,1)$ $\Big((-1,1)$ je interval konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, tj. Maclaurinovho radu funkcie $\dfrac{1}{1-x}\Big)$ konvergujú rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolútne (veta 10), preto podľa vety 17 z odseku 3.4 konverguje na intervale J ich Cauchyho súčin k funkcii $\dfrac{f(x)}{1-x}\Big)$; **2a**) $\ln^2(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \in [-1,1)$ (najprv nájdite Maclaurinov rad funkcie f', ten má polomer konvergencie $R=1$ (pozri pr. 336.10), preto aj náš rad má ten istý polomer konvergencie (veta 15), konvergencia uvedeného radu v bode -1 vyplýva z Leibnizovho kritéria (pozri tiež pr. I.171, I.172)); **2b**) $(\operatorname{arctg}x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}\right)\dfrac{x^{2n}}{n}$, $|x| \le 1$ (v bodoch 1 a -1 konverguje uvedený rad relatívne, preto jeho polomer konvergencie je $R=1$, pozri riešenie pr. 338);

$\boxed{\mathbf{351}}$ **1**. $\dfrac{1}{(x^2-2x+3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)(x-1)^{2n}}{2^{n+2}}$, $|x-1| < \sqrt{2}$ $\Big($podľa návodu stačí nájsť Maclaurinov rad funkcie $f(t+a) = \dfrac{1}{(t^2+2)^2}$: derivovaním člen po člene Maclaurinovho radu funkcie $\dfrac{1}{(2+u)}$ $\left(=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+u/2}\right)$ nájdeme Maclaurinov rad funkcie $\dfrac{1}{(2+u)^2}$ a do neho dosadíme $u =$

---

[20] konvergenciu v bodoch $x=a$, $x=-a$ sme samozrejme rovnako dobre mohli dokázať aj Leibnizovým kritériom

[21] pripomeňme, že na integrál $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6 z odseku 2.1

[22] čísla $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} := \lim_{x\to 1-} f(x)$, $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} := \lim_{x\to -1+} f(x)$ sú tzv. *nevlastné Riemannove integrály*, pozri napr. [1] alebo [10]; z hľadiska Newtonovho integrálu (pozri poznámku za odsekom 2.5) z konvergencie uvedeného radu v bodoch 1 a -1 vyplýva existencia $\displaystyle(N)\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ a $\displaystyle(N)\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$; zrejme v tomto prípade pojmy Newtonovho integrálu $\displaystyle(N)\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left(\displaystyle(N)\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\right)$ a nevlastného Riemannovho integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left(\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\right)$ splývajú

$t^2\Big)$; **2**. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-10x+29}} = \dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2n-1)!!\,(x-5)^{2n}}{2^{2n+1}\,(2n)!!}$ [23], $|x-5| \le 2$; **3**. $(2x+1)\sin x \sin(x+1) = (\cos 1 - 1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}$, $x \in \mathbf{R}$; **4**. $\ln(x^2-9x+20) = \ln 2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)(x-3)^n$, $x \in [1,5)$ (pre $t \in (-\infty,1)$ je $\ln(t^2-3t+2) = \ln(1-t)+\ln(2-t)\big)$;

352 (pozri tiež riešenia pr. 342, 343) **1**. $e^{x^2}(1+2x^2)$ $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)x^{2n}}{n!} = \left(x\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x^2)^n}{n!}\right)' = \left(xe^{x^2}\right)'\right)$; **2**. $\dfrac{1}{4}e^{x/2}(x+2)^2$ $\left(= f_1\left(\dfrac{x}{2}\right) + f_2\left(\dfrac{x}{2}\right),\right.$ kde $f_2(t) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}$, $f_1(t) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2t^n}{n!} = t\big(t(e^t-1)'\big)'\Big)$; **3**. $\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x - \dfrac{x}{2}\sin x$ $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2n^2x^{2n}}{(2n)!} = x\left(-\dfrac{1}{2}\,x\sin x\right)'\right)$; **4**. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$ $\Big($pre $x \in (-1,1)$, $x \ne 0$ je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\,x^{2n} = \dfrac{1}{x^2}\int_0^x t\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}-1\right)dt$, výsledok pre $x=1$, $x=-1$ vyplýva z poznámky 1 za riešením pr. 343.4, resp. poznámky za riešením pr. 344.2 (konvergenciu uvedeného radu v týchto bodoch dokážeme Raabeho kritériom) alebo z pr. 345.2 (kedy konvergenciu v bodoch $x=1$, $x=-1$ netreba samostatne dokazovať)$\Big)$;

353 (pozri tiež riešenie pr. 344) **1**. $2e$; **2**. $3e^2$; **3**. $\dfrac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1)$ $\left(= \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\lim_{x\to1-}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} - \lim_{x\to1-}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}\right)\right.$; iná možnosť: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = g(1)$, kde $g(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{(2n+1)!}\,x^{2n-1}\Big)$; **4**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1$; **5**. $\dfrac{\pi}{2}$ $\big(= \arcsin 1$, pozri tiež pr. 349.2$\big)$;

354 ak použijeme Lagrangeov tvar zvyšku Taylorovho polynómu, dostaneme (pre pevné $x \in (a,b)$) : $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right| = \left|\dfrac{f^{(n+1)}\big(\vartheta_n(x)\big)}{(n+1)!}\right||x-x_0|^{n+1} \le \dfrac{Mc^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$; pritom $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{Mc^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (možno to dokázať postupom z pr. 222);

355 napr. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ak } x \ne 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$;

356 **2**. $1.968\,0 \pm 0.000\,1$ $\left(\sqrt[4]{15} = 2\sqrt[4]{1-\dfrac{1}{16}}\right.$; pri odhade R_n sme použili postup z poznámky za riešením pr. 356.2, $|R_n| \le \dfrac{2}{4(n+1)}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{16}\right)^k\Big)$; **3**. $0.245\,0 \pm 0.000\,1$; **4**. $0.182\,3 \pm 0.000\,1$; **5**. $2.718\,282 \pm 0.000\,001$ (pri odhade R_n sme použili Lagrangeov tvar zvyšku; postup výpočtu možno ľahko „zmechanizovať“: vypočítanú aproximáciu n–tého člena stačí vydeliť číslom $n+1$, aby sme dostali aproximáciu $(n+1)$–vého člena) ;

357 nájdite Maclaurinov rad funkcie $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ a zvoľte a tak, aby platilo $\dfrac{1+a}{1-a} = 1+\dfrac{1}{n}$; $\ln 2 = 0.693\,147 \pm 0.000\,001$, $\ln 3 = 1.098\,61 \pm 0.000\,01$ $\Big($každý z prvých štyroch členov radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(2n-1)5^{2n-1}}$ sme vypočítali s presnosťou 10^{-7}, pre štvrtý zvyšok R_4 tohto radu platí $|R_4| \le \dfrac{1}{18\cdot 25^4} < 1.5\cdot 10^{-7}$;

---

[23] $= \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n (2n-1)!!\,(x-5)^{2n}}{2^{3n+1}\,n!}$

pripočítali sme číslo $\ln 2$ vypočítané s presnosťou 10^{-6} a výsledok sme zaokrúhlili na 5 desatinných miest (absolútna chyba, ktorej sme sa tým dopustili, nie je väčšia než $5\cdot 10^{-6}$); pre absolútnu chybu ε takto získanej aproximácie čísla $\ln 3$ platí $\varepsilon \le 4\cdot 10^{-7}+1.5\cdot 10^{-7}+10^{-6}+5\cdot 10^{-6}=65.5\cdot 10^{-7}<10^{-5}\Big)$;

$\boxed{\textbf{358}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. $3.141\,59 \pm 0.000\,01$; $\underline{\mathbf{2}}$. $0.309\,0 \pm 0.000\,1$ $\left(\sin 18^\circ = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n-1}}{(2n-1)!\,10^{2n-1}}\right.$; čísla $\frac{3.141\,59}{10}$, $-\frac{(3.141\,59)^3}{6\cdot 10^3}$, $\frac{(3.141\,59)^5}{120\cdot 10^5}$ sú aproximáciami čísel $\frac{\pi}{10}$, $-\frac{\pi^3}{6\cdot 10^3}$, $\frac{\pi^5}{120\cdot 10^5}$, ktorých absolútna chyba nie je väčšia ako 10^{-6}, overenie tohto tvrdenia prenechávame čitateľovi$\Big)$;

$\boxed{\textbf{359}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. 1.605 ± 0.001 (pred použitím odhadu $|R_n|\le |b_{n+1}|$ nezabudnite preveriť monotónnosť postupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$); $\underline{\mathbf{2}}$. 0.905 ± 0.001; $\underline{\mathbf{4}}$. 0.026 ± 0.001 (podobne ako v poznámke 2 za riešením pr.356.1 — ak naviac ešte využijeme nerovnosť $n!\ge 2^{n-1}$ — možno dokázať odhad $|R_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{k!\,(2k+3)27\cdot 9^k} \le \frac{4}{27}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k\,9^k\,(2k+3)} \le \frac{4}{27(2n+5)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{18}\right)^k\Big)$;

$\boxed{\textbf{360}}$ nech r je polomer kružnice; $\triangle OAC$ má plochu $\frac{d}{2}r\cos\vartheta = r\sin\vartheta\cdot r\cos\vartheta = \frac{1}{2}r^2\sin 2\vartheta$, plocha kruhového segmentu zodpovedajúceho uhlu 2ϑ je $r^2\vartheta$, preto $p = r^2\vartheta - \frac{1}{2}r^2\sin 2\vartheta = r^2\left(\vartheta - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right) = r^2\left(\vartheta - \frac{1}{2}\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{6}+\frac{\vartheta^5}{120}-\cdots\right)\right) = r^2\left(\frac{2\vartheta^3}{3}-\frac{2\vartheta^5}{15}+\cdots\right)$, súčasne $\frac{2}{3}dh = \frac{2}{3}(2r\sin\vartheta)(r-r\cos\vartheta) = \frac{4}{3}r^2\sin\vartheta(1-\cos\vartheta) = \frac{4}{3}r^2\left(\vartheta-\frac{\vartheta^3}{6}+\frac{\vartheta^5}{120}-\cdots\right)\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^4}{24}+\cdots\right)$, ak použijeme Cauchyho súčin radov, dostávame $\frac{2}{3}dh = r^2\left(\frac{2\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^5}{6}+\cdots\right)$, teda rady pre p a pre $\frac{2}{3}dh$ sa líšia až členmi s ϑ^5, čo slovne vyjadrujeme „s presnosťou do ϑ^5 platí $p\approx \frac{2}{3}dh$";

$\boxed{\textbf{361}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. $(1,\infty)$ $\left(\text{pre pevné } x\in\mathbf{R} \text{ má daný rad rovnaký charakter ako rad } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\right)$; $\underline{\mathbf{2}}$. $(-2,2)$ (v bodoch $x=2$, $x=-2$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie [24]); $\underline{\mathbf{3}}$. $\mathbf{R}\backslash\{1\}$ (pre $x=-1$ pozri pr. 240); $\underline{\mathbf{4}}$. $(-1,\infty)$ (pre $x\le -1$ je $\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{n-x}{n+1}\ge 1$, pre $x>-1$, $x\notin\mathbf{N}\cup\{0\}$ použite postup z pr. 240); $\underline{\mathbf{5}}$. konverguje na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ pre $|a|>1$, diverguje v každom bode pre $|a|\le 1$ (v prípade $x=0$ alebo $|a|\le 1$ má daný rad rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; využite rovnosť $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$ — pozri poznámku za pr. 224); $\underline{\mathbf{6}}$. $\mathbf{Z}$ (pozri bod 2 v poznámke [34] k riešeniu pr. 243.4); $\underline{\mathbf{7}}$. $[0,\infty)\cup\{-k\pi\,;\,k\in\mathbf{N}\}$ (v prípade $e^x<1\wedge x\ne k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, je $\lim_{n\to\infty}e^{-nx}=\infty$ a $\lim_{n\to\infty}\sin nx$ neexistuje); $\underline{\mathbf{8}}$. $(0,\pi)$ pre $q>p$ (možno použiť Dirichletovo kritérium), diverguje v každom bode $x\in(0,\pi)$ pre $q\le p$ (nie je splnená nutná podmienka konvergencie); $\underline{\mathbf{9}}$. $\mathbf{R}$ (pozri pr. I.156.5); $\underline{\mathbf{10}}$. diverguje pre každé $x\in\mathbf{R}$ (nie je splnená nutná podmienka konvergencie [25];

---

[24] v prípade $x=2$ je $\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(e^{2/n}-1\right)^n = \left(\left(1+h(n)\right)^{1/h(n)}\right)^{g(n)}$, kde $h(n)=\frac{n}{2}(e^{2/n}-1)-1$, $g(n)=nh(n)=1+no\left(\frac{1}{n}\right)$, v prípade $x=-2$ je $\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(e^{-2/n}-1\right)^n = (-1)^n e^{-2}\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(e^{2/n}-1\right)^n$

[25] z nerovností $\cos\cos x > x$ pre $x\in(-\infty,a)$, $\cos\cos x<x$ pre $x\in(a,\infty)$, kde a je jediné riešenie rovnice $\cos\cos x = x$ (pre $f(x)=\cos\cos x - x$ je $f'(x)\le 0$, pričom $f'(x)=0$ len pre $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, preto f je klesajúca, ďalej $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0<f(0)\Big)$, $|\cos\cos x|\le 1$, $x\in\mathbf{R}$, a z rastu funkcie $\cos\cos x$ na

$\boxed{362}$ **1.** $\dfrac{x}{1-x}$, $x \in (-1,1)$ $\left(S_n(x) = x\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left|1+x^{2^{k-1}}\right|\right)' = x\left(\ln\left|\dfrac{1-x^{2^n}}{1-x}\right|\right)'\right.$ pre $x \neq 1$, $x \neq -1$, pre $|x|<1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n x^{2^n} = 0$ (subst. $2^n = t$), pre $x \notin [-1,1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nevlastná$\Big)$; **2.** $-\operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{x}$ pre $0<|x|<\pi$, 0 pre $x=0$ $\left(S_n(x) = -\left(\ln\left|\prod_{k=1}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k}\right|\right)' \text{ pre } 0<|x|<\pi\right)$;

$\boxed{363}$ **1.** platí (použite matematickú indukciu) $K_n(x) := \dfrac{a_1}{x} - \left(\dfrac{a_1}{a_2+x} + \cdots + \dfrac{a_1\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right) = \dfrac{a_1\cdots a_{n+1}}{x(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)} = \dfrac{a_1}{x}\, e^{E(x)}$, kde $E(x) = -\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\dfrac{x}{a_k}\right)$, rad $-\sum_{k=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{a_k}\right)$ diverguje k $-\infty$ $\left(\text{má rovnaký charakter ako rad } -x\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{a_k}\right)$, preto $\lim\limits_{n\to\infty} K_n(x) = 0$ pre každé $x>0$; **2.** $\dfrac{1}{x-1} - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{k!}{(x+1)\cdots(x+k)} = \dfrac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)}$, $x>1$; z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)}$, $x>1$, vyplýva rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)} = 0$ pre každé $x>1$; **3a)** $\dfrac{1}{x}$ $\left(\text{v pr. 363.1 stačí položiť } a_n = \dfrac{1}{n}\right)$; **3b)** $\dfrac{x}{1-x}$ pre $|x|<1$, $\dfrac{1}{1-x}$ pre $|x|>1$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{y^{2^{n-1}}}{1-y^{2^n}} = \dfrac{y}{1-y^2}\left(1+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{y}{1+y^2}\cdot\dfrac{y^2}{1+y^4}+\cdots\right)\right.$, pre $y\in(0,1)$ položte v pr. 363.1 $x=1$, $a_n = y^{2^{n-1}}$; pre $y>1$ použite substitúciu $t = \dfrac{1}{y}\Big)$; **3c)** $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ pre $|x|>1$, $\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ pre $|x|<1$ $\left(f_n(x) = \dfrac{x}{1-x}\left(\dfrac{1}{1-x^n} - \dfrac{1}{1-x^{n+1}}\right)\right)$;

$\boxed{364}$ z nerovností z pr. 228.2 vyplýva $-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} < F(x) - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x>0$;

$\boxed{365}$ **1.** konverguje nerovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$ $\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(f_n(x)-f(x)\right) = \infty,\ n\in\mathbf{N}\right)$; **2.** rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\in[0,\alpha]$ $\left(|f_n(x)| \le nx\sin\dfrac{\pi x^n}{2} \le \dfrac{\pi}{2}nx^{n+1} \le \dfrac{\pi}{2}n\alpha^{n+1}\right)$; **3.** rovnomerne k $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$; **4a)** nerovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$ $\left(\lim\limits_{x\to 0}|f_n(x)-f(x)| = \sqrt{n},\ n\in\mathbf{N}\right)$; **4b)** rovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x>1$; **5.** rovnomerne k $f(x) = \dfrac{\pi x}{2}$, $x>0$ $\left(|f_n(x) - f(x)| =^{[26]} |x|\left|\operatorname{arctg}\dfrac{1}{nx}\right| \le |x|\dfrac{1}{|nx|} = \dfrac{1}{n}\right)$; **6.** nerovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ $\left(\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)| = f_n\left(\sqrt[n]{\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}}\right)\right)$; **7.** nerovnomerne k $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z} \\ 0, & \text{ak } x = k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}$ (pozri tvrdenie z poznámky [3] k riešeniu pr. 300.11c); **8.** rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\ge 0$ (z nerovnosti $\ln(1+x)\le x$, $x>-1$, vyplýva pre $x\in(-1,0)$: $|\ln(1+x)| \le \dfrac{|x|}{1-|x|}$ [27], pre $x\ge 0$ je $|\ln(1+x)| \le |x| \le \dfrac{|x|}{1-|x|}$;

$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ vyplýva, že pre každé $y\in[0,1]$ je postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $y_1 = y$, $y_{n+1} = \cos\cos y_n$, ohraničená a monotónna, teda konvergentná, pritom (pozri pr. I.156) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$; odtiaľ vyplýva rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, kde $x_1 = \cos x$, $x_{n+1} = \cos x_n$ (stačí uvažovať postupnosti $\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$), zrejme $a\neq 0$

[26] $= |x|\left|\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} nx - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)\right| = |x|\left|\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} nx\right)\right)\right| =$

[27] $|\ln(1+x)| = \ln\dfrac{1}{1+x} = \ln\left(1-\dfrac{x}{1+x}\right) \le -\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{|x|}{1-|x|}$, $x\in(-1,0)$

pritom $\left|\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,,\ x\ge 0\Big)$; **9a)** nerovnomerne k $f(x)=\dfrac{1}{x}\,,\ x\in(0,2)$ $\Big(\lim\limits_{x\to 0+}\big(f(x)-f_n(x)\big)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}\Big(1-nx\ln\Big(1+\dfrac{1}{nx}\Big)\Big)=\infty\Big)$; **9b)** rovnomerne k $f(x)=\dfrac{1}{x}\,,\ x>2$; **10.** rovnomerne k $f(x)=\ln x\,,\ x\in[1,a]$ $\Big($ak funkciu e^y zapíšeme pomocou jej Maclaurinovho polynómu a zvyšku v Lagrangeovom tvare a položíme $y=\dfrac{\ln x}{n}$, dostaneme $|f_n(x)-f(x)|=\big|n\big(e^{(\ln x)/n}-1\big)-\ln x\big|=\left|n\Big(1+\dfrac{\ln x}{n}+\dfrac{\ln^2 x}{2n^2}\,e^{(\vartheta_n\,\ln x)/n}-1\Big)-\ln x\right|\le\dfrac{1}{2n}\ln^2 a\cdot e^{(\ln a)/n}$; pripomeňme, že $\vartheta_n\in(0,1)\Big)$; **11.** rovnomerne k $f(x)\equiv 1\,,\ x\in(0,10)$ $\left(|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{x}{2n\Big(1+\dfrac{\vartheta_n\cdot x}{n}\Big)^2}\,,\ x\in(0,10)\right)$; **12a)** rovnomerne k $f(x)=e^x\,,\ x\in[a,b]$ $\Big(|f_n(x)-f(x)|=|e^x|\big|1-e^{E_1(x)}\big|\le e^b\big(1-e^{E_2}\big)\,,\ x\in[a,b]\,,$ kde $E_1(x)=-\dfrac{x^2}{2n}\cdot\dfrac{1}{\Big(1+\vartheta_n\dfrac{x}{n}\Big)^2}\,,\ E_2=-\dfrac{M^2}{2n}\cdot\dfrac{1}{\Big(1-\dfrac{M}{n}\Big)^2}\,,$ pričom $M=\max\{|a|,|b|\}\Big)$; **12b)** nerovnomerne k $f(x)=e^x\,,\ x\in\mathbf{R}$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-f_n(x)|=\lim\limits_{x\to\infty}e^x\Big(1-\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^n\Big/e^x\Big)=\infty\right)$;

$\boxed{\mathbf{367}}$ **2.** $n\Big(f\Big(x+\dfrac{1}{n}\Big)-f(x)\Big)=f'\Big(x+\vartheta_n\dfrac{1}{n}\Big)$, kde $\vartheta_n\in(0,1)$, pri odhade $|f_n(x)-f(x)|\,,\ x\in[a,b]$, využite rovnomernú spojitosť funkcie f' na $[a,b+1]$; **3.** $f_n\to\displaystyle\int_0^1 f(x+y)\,dy\,,\ x\in[a,b]$; $\left|f_n(x)-\displaystyle\int_0^1 f(x+y)\,dy\right|=\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\Big(f\Big(x+\frac{k}{n}\Big)-f(x+y)\Big)\,dy\right|\le\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|f\Big(x+\frac{k}{n}\Big)-f(x+y)\right|dy\,,\ x\in[a,b]$, ďalej využite rovnomernú spojitosť funkcie f na intervale $[a,b+1]$: ak platí implikácia $\xi,\eta\in[a,b+1]\,,\ |\xi-\eta|<\delta\Longrightarrow|f(\xi)-f(\eta)|<\varepsilon$ a $\dfrac{1}{n}<\delta$, tak $\displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|f\Big(x+\frac{k}{n}\Big)-f(x+y)\right|dy\le\frac{\varepsilon}{n}\,,\ k=0,1,\dots,n-1$;

$\boxed{\mathbf{368}}$ **1.** platí (funkcia x^α je rovnomerne spojitá na $[0,\infty)$ pre $\alpha\in(0,1]$ (rovnomerná spojitosť na $[0,a]$ vyplýva z vety 6 pred pr. I.251, rovnomerná spojitosť na $[a,\infty)$ z pr. I.342.1), tj. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ :\ r,s>0\wedge|r-s|<\delta\Longrightarrow|r^\alpha-s^\alpha|<\varepsilon$, teda ak $\forall n>n_0\ :\ |f_n(x)-f(x)|<\delta$, tak $\forall n>n_0\ :\ |f_n^\alpha(x)-f^\alpha(x)|<\varepsilon$ [28]); **2.** neplatí (platilo by, keby sme naviac predpokladali napr. ohraničenosť funkcí $f\,,\ g$: $|f_ng_n-fg|\le|f_n||g_n-g|+|g||f_n-f|\big)$;

$\boxed{\mathbf{369}}$ **1a)** konverguje rovnomerne k $f(x)=1+x^4\,,\ x\in[a,b]$ (daný rad je geometrický, teda ľahko možno nájsť jeho súčet aj čiastočné súčty); **1b)** nerovnomerne k $f(x)=\begin{cases}1+x^4, & \text{ak } x\in[a,b]\setminus\{0\}\\ 0, & \text{ak } x=0\end{cases}$ (pozri tvrdenie v poznámke [3] k riešeniu pr. 300.11c); **2.** konverguje rovnomerne; **3.** konverguje rovnomerne $\Big($konvergencia majorantného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{[n/2]!}$ vyplýva z konvergencie radov $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{2k}}{k!}$ a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{2k-1}}{(k-1)!}\Big)$; **4.** konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$ $\Big($majorantný rad je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\,\ln^{3/2}(n+1)}\Big)$; **5.** konverguje nerovnomerne $\Big($nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(n)=\dfrac{\pi}{2}\Big)$; **6a)** konverguje nerovnomerne na $(0,1)$ $\Big($vypočítajte $f_n\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)$; **6b)** konverguje rovnomerne na $(1,\infty)$ $\Big($majorantným číselným radom je napr. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 2n}\Big)$; **7a)** konverguje nerovnomerne na $(0,\delta)$ (nekonverguje totiž v bode 0, pozri pr. 309); **7b)** konverguje rovnomerne na (δ,∞); **8.** kon-

---

[28] analogicky možno dokázať tvrdenie ,,ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných funkcií rovnomerne konverguje na (a,b) k ohraničenej funkcii f, tak pre každé $\alpha>0$ platí $f_n^\alpha\rightrightarrows f^\alpha$“

verguje nerovnomerne $\left(\text{vypočítajte } f_n(2^{-n})\right)$; **9a)** konverguje rovnomerne na $[\alpha, \infty)$; **9b)** konverguje nerovnomerne na $(0, \infty)$ (daný rad nekonverguje v bode 0 [29]); **10.** konverguje rovnomerne na $[1, \infty)$ (Abelovo kritérium); **11a)** konverguje nerovnomerne na $[0, \delta]$ $\left(\text{pre } x = \dfrac{1}{n^2} \text{ je } \dfrac{nx}{(1+x)\cdots(1+nx)} + \cdots + \dfrac{(n+n)x}{(1+x)\cdots(1+2nx)} \geq n\,\dfrac{1/n}{(1+2/n)^{2n}} \to e^{-4} \text{ pre } n \to \infty\right)$ [30]; **11b)** konverguje rovnomerne na $[\delta, \infty)$ $\left(\text{majorantný rad je } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta)^{n-1}}\right)$; **12.** konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$ $\left(\text{použite Abelovo kritérium, ku konvergencii radu } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \text{ pozri pr. 274.11}\right)$;

370 $\alpha > 2$ (pre $\alpha > 2$ použite Weierstrassovo kritérium; pre $\alpha < 0$ je $\lim\limits_{x\to 0+} f_n(x) = \infty$, pre $\alpha = 0$ je $\lim\limits_{x\to 0+} f_n(x) = 1$, preto pre $\alpha \leq 0$ nie je na $(0, \infty)$ splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie; pre $\alpha \in (0, 2]$ nájdite súčet $S(x)$ daného radu (ktorý je geometrický) a využite, že pre $\alpha = 2$ je $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = 1 \neq S(0) = 0$, pre $\alpha \in (0, 2)$ je $\lim\limits_{x\to 0+} S(x) = \infty$);

372 z konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ vyplýva rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{|a - a_n|} \Big/ \dfrac{1}{|a_n|}\right) = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{|b - a_n|} \Big/ \dfrac{1}{|a_n|}\right)$, preto rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$ konverguje absolútne v bodoch a, b; ďalej pozri pr. 312;

373 nie, uvažujte napr. $f_n(x) = \dfrac{\sin \pi n x}{n}$;

374 platí;

375 z každého otvoreného pokrytia kompaktu I možno vybrať konečné podpokrytie; ak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na každej z množín K_1, K_2, ..., K_p, tak rovnomerne konverguje aj na ich zjednotení;

376 **1.** $D(f) = \mathbf{R}$, f je spojitá $\left(\text{rad } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1 + (x/n)^2} \text{ konverguje rovnomerne a rad } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2} \text{ lokálne rovnomerne na } \mathbf{R}\right)$; **2.** $D(f) = \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$, f je spojitá, $\lim\limits_{x\to n} f(x) = \infty$ pre každé $n \in \mathbf{N}$ (pri vyšetrovaní lokálne rovnomernej konvergencie uvedeného radu možno použiť napr. myšlienku riešenia pr. 372, ďalej pozri poznámku 2 k riešeniu pr. 330.4); **3.** $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{2k\pi\,;\, k \in \mathbf{Z}\}$, f je spojitá;

377 F má periódu ω;

378 **1.** v každom bode intervalu I má každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, vlastné jednostranné limity, preto podľa vety 7 aj funkcia f má v každom bode intervalu I vlastné jednostranné limity; **2.** $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } |x| < \dfrac{1}{n\pi} \\ \sin\dfrac{1}{x}, & \text{ak } |x| \geq \dfrac{1}{n\pi} \end{cases}$;

379 nech je dané $\varepsilon > 0$; f je rovnomerne spojitá na $[a, b]$, preto existuje $\delta > 0$ tak, že $(*)$ $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; rozdeľme interval $[a, b]$ deliacimi bodmi $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ na konečný počet častí, z ktorých každá je kratšia ako δ; platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_m) = f(x_m)$ pre $m = 0, \ldots, k$,

---

[29] z neexistencie $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ vyplýva neexistencia $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\sqrt{n}$, preto pre niektorú podpostupnosť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ postupnosti $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje nenulová $\lim\limits_{k\to\infty} \sin\sqrt{n_k}$, potom $\lim\limits_{k\to\infty} n_k \sin\sqrt{n_k}$ je nevlastná, preto v bode 0 nie je splnená nutná podmienka konvergencie; ďalej pozri pr. 309

[30] iná možnosť: $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x)\cdots(1+(n-1)x)} - \dfrac{1}{(1+x)\cdots(1+nx)}$, odtiaľ $S_n(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)\cdots(1+nx)}$, $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 0 \\ 1, & \text{ak } -x \notin \mathbf{N} \end{cases}$

preto $(**)$ $\exists N \in \mathbf{N}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > N$ $\forall m \in \{0,1,\ldots,k\}$: $|f_n(x_m) - f(x_m)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; nech $n > N$ a $x \in [x_m, x_{m+1}]$, $m \in \{0,1,\ldots,k-1\}$, predpokladajme, že funkcia f_n je neklesajúca a $f_n(x) > f(x)$ (postup v ostatných prípadoch je analogický), potom $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) \le f_n(x_{m+1}) - f(x) = |f_n(x_{m+1}) - f(x)| \le |f_n(x_{m+1}) - f(x_{m+1})| + |f(x_{m+1}) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$ (v závere sme využili nerovnosti $(*)$ a $(**)$), teda $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbf{N}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > N$ $\forall x \in [a,b]$: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ [31];

380 pozri pr. 296.2 a I.458;

381 **1.** napr. $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kde f_1 je funkcia s periódou 1, pričom $f_1(x) = |x|$ pre $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, $f_n(x) = \dfrac{1}{4^{n-1}} f_1\left(4^{n-1}x\right)$; spojitosť f vyplýva z rovnomernej konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $\mathbf{R}$; pre $x = \dfrac{k}{4^m}$ $(k \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ a $n > m$ je $f(x) = 0$; nech $a = \dfrac{k}{4^m}$, $h = \dfrac{1}{4^{2m+1}}$, potom $f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{m} \left(f_k(a+h) - f_k(a)\right) + \sum_{k=m+1}^{2m+1} f_k(a+h) \ge -mh + (m+1)h > 0$, analogicky $f(a-h) - f(a) > 0$; pritom pre každý interval I existujú $k \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ tak, že $\dfrac{k}{4^m} - \dfrac{1}{4^{2m+1}}$, $\dfrac{k}{4^m}$, $\dfrac{k}{4^m} + \dfrac{1}{4^{2m+1}} \in I$;

2. za g možno zvoliť primitívnu funkciu k funkcii $f|[0,1]$, kde f je funkcia z pr. 381.1, pritom využite tvrdenie „ak f je konvexná (konkávna) a diferencovateľná na I, tak f' je neklesajúca (nerastúca) na I“ (na jeho dôkaz stačí prejsť k limite pre $z \to x+$, resp. $z \to y-$ v nerovnostiach $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$, resp. $\dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} \ge \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ $(x,y,z \in I$, $x < z < y)$);

382 **1.** napr. $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kde $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\operatorname{sgn}(x - a_n)$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť obsahujúca všetky racionálne čísla; uvedený rad konverguje rovnomerne (Weierstrassovo kritérium), každá z funkcií f_n je spojitá v každom iracionálnom čísle, preto aj f je spojitá v každom iracionálnom čísle; funkcia $\sum_{\substack{n=1\\ n\ne k}}^{\infty} f_n$ je spojitá v bode a_k, $\lim\limits_{x\to a_k+} f_k(x) > f_k(a_k) > \lim\limits_{x\to a_k-} f_k(x)$, preto $\lim\limits_{x\to a_k+} f(x) > f(a_k) > \lim\limits_{x\to a_k-} f(x)$;

383 **1.** nech $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $|f_n(x)| < K$ pre $x \in [a,b)$, $n \in \mathbf{N}$; pretože $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b-\delta]$ pre každé $\delta \in (0, b-a)$ (pozri pr. 375), platí podľa vety 8 $f \in \mathcal{R}[a, b-\delta]$ pre každé $\delta \in (0, b-a)$, súčasne f je ohraničená na $[a,b]$, preto $f \in \mathcal{R}[a,b]$ (pozri pr. 147 a poznámku 2 za vetou 6 z odseku 2.1); $\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx = \int_a^{b-\delta} + \int_{b-\delta}^b$, pritom $\int_{b-\delta}^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le 2K\delta$ (ak $|f_n(x)| \le K$ a $f_n \to f$ na $[a,b)$, tak $|f(x)| \le K$ na $[a,b)$ a $|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x)| + |f(x)| \le 2K$); ak pre $n > N$ a $x \in \left[a, b - \dfrac{\varepsilon}{4K}\right]$ je $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, tak $\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ pre $n > N$;

2. napr. $f_n(x) = \begin{cases} 2nx^2, & \text{ak } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right) \\ 0, & \text{ak } x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$;

384 **1.** 0 $\Big(x^n \ln x \rightrightarrows 0$ na $(0,1]$, ďalej pozri pr. 301, nezabudnite preveriť integrovateľnosť

[31] nie je ťažké dokázať, že ak f je nekonštantná funkcia, tak existuje $M \in \mathbf{N}$ tak, že f_n sú neklesajúce pre všetky $n > M$ alebo f_n sú nerastúce pre všetky $n > M$, potom (pozri pr. 296.1) f je neklesajúca, resp. nerastúca

funkcií $\frac{x^n \ln x}{1+x^2}$ na $[0,1]\Big)$; $\underline{2}$. 0 $\big(\sin^n x$ konverguje na $[0,1)$ lokálne rovnomerne k 0, pozri pr. 383.1, porovnaj s riešením pr. 113.4$\big)$; $\underline{3}$. 0 $\Big($z nerovnosti $\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}} \le \frac{nx}{n\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, $x \in (0,1]$, vyplýva rovnomerná ohraničenosť postupnosti $\left\{\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ na $(0,1]$; $\left|\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{n\sqrt{a}}$ pre $x \in [a,1]$, preto $\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}} \rightrightarrows 0$ na $[a,1]$, $a>0$, možno použiť pr. 383.1 [32]$\Big)$; $\underline{4}$. 0 $\left(\int_0^{1+1/n} = \int_0^1 + \int_1^{1+1/n}\right.$, pritom $x^n \ln x \rightrightarrows 0$ na $(0,1]$; $|x^n \ln x| \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $x \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$, a preto $\int_1^{1+1/n} x^n \ln x\, dx \le \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$ pre $n \to \infty\Big)$; $\underline{5}$. 0 $\left(\left\{\frac{1}{1+nx}\right\}_{n=1}^{\infty}\right.$ konverguje na $(0,1]$ lokálne rovnomerne k 0, f je ohraničená, ďalej pozri pr. 301, 383.1$\Big)$;

385 $\ln\frac{3}{2}$ (pozri pr. 362.2);

386 $\underline{1}$. napr.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak } x \in [0,1]\setminus \mathbf{Q} \quad \text{alebo} \quad x=0 \\ 1\,, & \text{ak } x = \dfrac{p}{q}\,, \quad p,q \in \mathbf{N} \text{ sú nesúdeliteľné}, \quad p \le q\,, \quad q \in \{1,2,\dots,n\} \\ \dfrac{1}{q-n}\,, & \text{ak } x = \dfrac{p}{q}\,, \quad p,q \in \mathbf{N} \text{ sú nesúdeliteľné}, \quad p \le q\,, \quad q > n \end{cases};$$

$f = \chi|[0,1]$ (riemannovská integrovateľnosť funkcie f_n na $[0,1]$ sa dokáže rovnako ako v prípade Riemannovej funkcie χ — pozri pr. 64, nerovnomernú konvergenciu možno dokázať priamo z definície alebo na základe vety 8); $\underline{2}$. napr. $f_n(x) = x^n\chi(x)$, $x \in [0,1]$, $f(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$;

387 podľa pr. 192 a 193 existuje postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojite diferencovateľných monotónnych funkcií taká, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$; potom aj $gf_n \rightrightarrows gf$ na $[a,b]$; podľa pr. 119 $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists c_n \in [a,b]$: $\int_a^b f_n(x)g(x)\,dx = f_n(a)\int_a^{c_n} g(x)\,dx + f_n(b)\int_{c_n}^b g(x)\,dx$; z postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyberme konvergentnú postupnosť $\{c_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, nech $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k} = c \in [a,b]$, potom $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b f_{n_k}(x)g(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\left(f_{n_k}(a)\int_a^{c_{n_k}} g(x)\,dx + f_{n_k}(b)\int_{c_{n_k}}^b g(x)\,dx\right) = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx$;

388 $\underline{1}$. $D(f) = \mathbf{R}$, $D(f') = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ $\left(f'_+(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \ne -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = f'_-(0)\right.$; na výpočet $f'_+(0)$, resp. $f'_-(0)$ stačí použiť vetu 9' na intervale $I=[0,1]$, resp. $I=[-1,0]\Big)$; $\underline{2}$. $D(f) = [0,\infty)$, $D(f') = (0,\infty)$ $\Big(f'(0) = -\infty$: každá z funkcií $g_n(x) := \frac{n}{1+n^2}e^{-nx}$ je klesajúca na $(0,\infty)$, preto $g := \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ je nerastúca na $(0,\infty)$, teda existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{x\to 0+} g(x)$; keby platilo $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) \in \mathbf{R}$, musel by rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ konvergovať v bode 0 (vyplýva to z podobných úvah ako v riešení pr. 345.2), čo je spor; preto $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+}\big(-g(x)\big) = -\infty$, ďalej pozri pr. I.384.1$\Big)$;

389 využite, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n$ konverguje rovnomerne na každom kompaktnom intervale $I' \subset I$ (pozri pr. 375) a vetu 9';

390 pripomeňme, že pre $x \ne 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx$;

[32] z uvedeného vyplýva dokonca rovnomerná konvergencia postupnosti $\left\{\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ na $(0,1]$

$\boxed{391}$ podľa vety 9 je $\varphi'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(f^{(n)}(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$; z rovnosti $\varphi' = \varphi$ vyplýva $\varphi(x) = Ce^x$ $\Big(\varphi(x) \equiv 0 \quad (= 0 \cdot e^x)$ je zrejme riešením rovnice $\varphi' = \varphi$; ak $\varphi(a) \neq 0$ pre niektoré $a \in \mathbf{R}$, uvažujme maximálny interval $I \subset \mathbf{R}$ taký, že $a \in I$, $\varphi(x) \neq 0$ pre $x \in I$ (zo spojitosti funkcie φ vyplýva, že taký interval existuje a je otvorený; ak $I = (b,c)$ a $b \in \mathbf{R}$, tak $\varphi(b) = 0$, podobne $\varphi(c) = 0$ v prípade $c \in \mathbf{R}$); pre $x \in I$ platí $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \left(\ln|\varphi(x)|\right)' = 1$, preto $\ln|\varphi(x)| = x + K$, odtiaľ $|\varphi(x)| = e^K e^x$; φ nemení na I znamienko, preto $\varphi(x) = e^K e^x$ (ak $\varphi(a) > 0$), $x \in I$, alebo $\varphi(x) = -e^K e^x$, $x \in I$; pretože získaná funkcia je nenulová na $\mathbf{R}$, platí $I = \mathbf{R}\Big)$;

$\boxed{392}$ nech $n \in \mathbf{N}$, $a, x \in I$, $x > a$, nech $K_n \cap (a,x) = \{k_1, \ldots, k_m\}$, pričom $k_0 := a < k_1 < k_2 < \cdots < k_m < x =: k_{m+1}$; potom (ak použijeme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote) $\left|f_n(x) - f_n(a)\right| \leq \sum\limits_{p=0}^{m} \left|f_n(x_{p+1}) - f_n(x_p)\right| = \sum\limits_{p=0}^{m} \left|f_n'(\vartheta_p)\right| |x_{p+1} - x_p| \leq a_n \sum\limits_{p=0}^{m} |x_{p+1} - x_p| = a_n|x-a|$; analogicky sa postupuje pre $x < a$; odtiaľ $|f_n(x)| \leq |f_n(a)| + a_n|x-a|$, z čoho vyplýva rovnomerná konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ na $[b,c]$, kde $b \leq a \leq c$ $\left(|x-a| \leq \max\left\{|b-a|, |c-a|\right\}\right)$; rovnako možno dokázať nerovnosť $\left|\dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}\right| \leq a_n$ pre ľubovoľné $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, z ktorej na základe vety 7' vyplýva tvrdenie o derivovaní člen po člene;

$\boxed{393}$ __1.__ diferencovateľnosť funkcie f v každom bode $x \in (0,1) \setminus \mathbf{Q}$ vyplýva z pr. 392, pre $x = a_k$ ($k \in \mathbf{N}$) zapíšme funkciu f v tvare $f(x) = \dfrac{|x - a_k|}{3^k} + \sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty} \dfrac{|x - a_n|}{3^n}$, druhý zo sčítancov má deriváciu v bode a_k (pr. 392), prvý má v bode a_k navzájom rôzne jednostranné derivácie;

$\boxed{394}$ __1__. $[-1,3]$ pre $p > 2$, $[-1,3)$ pre $0 < p \leq 2$, $(-1,3)$ pre $p \leq 0$ (pozri pr. 225.6 a 270.7); __2__. $\mathbf{R}$ $\left(\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot \dfrac{n}{e^{n^{\alpha-1}}}\right.$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$ — pozri poznámku za pr. $\left.224\right)$; __3__. $(-9,9)$ $\Big($postupujte ako v pr. 336.6, využite rovnosti $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$, $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1 - \cos u}{u^2} = \dfrac{1}{2}\Big)$; __4__. $\mathbf{R}$ pre $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $[-1,1]$ pre $m \in (0,\infty) \setminus \mathbf{N}$, $(-1,1]$ pre $m \in (-1,0)$, $(-1,1)$ pre $m \leq -1$ $\left(|f_n(1)| = 1 \text{ pre } m = -1,\ \left|\dfrac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)}\right| > 1 \text{ pre } m < -1\right.$, v prípade $m \in (-1,0)$, $x = 1$ pozri pr. $\left.270.6\right)$; __5__. $\left[-\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a}\right)$ pre $a \geq b > 0$, $\left[-\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{b}\right]$ pre $0 < a < b$ $\left(\sqrt[n]{\dfrac{a^n}{n} + \dfrac{b^n}{n^2}} = \dfrac{a}{\sqrt[n]{n}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right)^{1/n}\right.$ pre $a \geq b$, podobne postupujte pre $\left.b > a\right)$; __6__. $[-4,-2]$ (použite vetu 6' z odseku 3.3); __7__. $[-1,1]$ pre $a > 1$, $(-1,1)$ pre $a \in (0,1]$ $\Big($pri vyšetrovaní konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{-\sqrt{n}}$, $a > 1$, možno použiť porovnávacie kritérium — z rovnosti $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{a^x} = 0$ vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a^{\sqrt{n}}} = 0$ — alebo pr. 234.1b a d'Alembertovo kritérium$\Big)$; __8__. $[-1,1]$; __9__. $(-1,1]$ $\left(\dfrac{f_n(-1)}{f_{n+1}(-1)} = e^E\right.$, kde $E =$ [33] $\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, preto $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{f_n(-1)}{f_{n+1}(-1)} - 1\right) = \dfrac{1}{2}$; $\ln\left|\dfrac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)}\right| = -1 + n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, ďalej použite postup z pr. $\left.240\right)$; __10__. $(0,2)$ $\big(\nu(n) = [\log n] + 1$, v bodoch 0

---

[33] $= 1 + n\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 + n\left(-\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{n}{2n^2} - \left(\dfrac{n}{2(n+1)^2} - \dfrac{n}{2n^2}\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right) =$

a 2 nie je splnená nutná podmienka konvergencie) ; **11**. $[-1,1]$ (pri výpočte $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ možno využiť pr. I.206.1; konvergencia radu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n(1)$ vyplýva z konvergencie radov $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{2k+1}(1)$ (Dirichletovo kritérium), $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{4k}(1)$ (Leibnizovo kritérium) a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{4k-2}(1)$; podobne možno postupovať v prípade $x = -1$) ; **12**. $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right),\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{4k-2}\left(\frac{1}{3}\right),\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{8k-4}\left(\frac{1}{3}\right)\right.$ konvergujú a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{8k}\left(\frac{1}{3}\right)$ diverguje, preto $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n$ diverguje v bode $x=\frac{1}{3}$, podobne pre $\left.x=-\frac{1}{3}\right)$; **13**. $[-1,1]$ (pre $x=1$ pozri pr. 274.11; konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}$ vyplýva z konvergencie radov $\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq k^2,\ k\in\mathbf{N}}}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}$ (Leibnizovo kritérium) a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[k]+k^2}}{k^2}$) ; **14**. konverguje len v bode 0 (množinou hromadných hodnôt postupnosti $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ je interval $[-1,1]$, pozri [13, str. 74, kap. 2, §2, pr. 6]) ;

$\boxed{\textbf{395}}$ **1**. $R \geq R_1R_2$ (využite pr. I.206.2; viete uviesť príklad, v ktorom bude platiť $R > R_1R_2$?) ; **2**. $R=\max\{1,R_1\}$ (ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť, tak $R_1\geq 1$ (pozri pr. 341.2) a z nerovností $0\leq |a_n|\leq K$ dostávame $\frac{|a_n|}{1+K}\leq\frac{|a_n|}{1+|a_n|}\leq |a_n|$, $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{1+K}}\leq\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{1+|a_n|}}\leq \limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ (pri výpočte $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{1+K}}$ využite rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1+K}}=1$ a pr. I.206.1) ; ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená postupnosť, tak $R_1\leq 1$ (pozri pr. 341.1) a existuje podpostupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_k}|=\infty$, potom $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|a_{n_k}|}{1+|a_{n_k}|}=1$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{\frac{|a_{n_k}|}{1+|a_{n_k}|}}=1$, súčasne z nerovnosti $\frac{|a_n|}{1+|a_n|}<1$ vyplýva $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{1+|a_n|}}\leq 1$, preto $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{1+|a_n|}}=1$) ; **3**. $R\geq\min\{R_1,R_2\}$ (vyplýva to z vety 17 z odseku 3.4 a z vety 10); ak $a_n>0$, $b_n>0$, $n\in\mathbf{N}$, tak $R=\min\{R_1,R_2\}$ (využite pr. 254; príklad dokumentujúci nerovnosť $R>\min\{R_1,R_2\}$ možno odvodiť z pr. 256);

$\boxed{\textbf{396}}$ **1**. $\mu x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\,\mu(1^2-\mu^2)(3^2-\mu^2)\cdots((2n-1)^2-\mu^2)x^{2n+1}$; $I=\mathbf{R}$, ak $\mu=0$ alebo $\mu\in\{2k+1\,;\,k\in\mathbf{Z}\}$; $I=[-1,1]$ v ostatných prípadoch (platí $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+\mu^2f(x)=0$, $x\in(-1,1)$, ďalej pozri postup z pr. I.327.6 [34]) ; **2**. $\frac{1}{7}\left(\ln 3-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2\cdot 18^n-1}{2n\cdot 9^n}x^{2n}\right)$; $I=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (pri hľadaní intervalu I sme využili poznámku 2 za riešením pr. 348.16); **3**. $-2x^2+2x^4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}\,2^{2n+1}(x^{4n+4}-x^{4n+2})$, $I=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ (využili sme výsledok pr. 349.2); **4**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{[n/2]}x^{2n+1}}{(2n+1)2^n}$, $I=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; **5**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$, $I=(-1,1)$; **6**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, $I=[-1,1]$; **7**. $\ln\pi+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{2^{4n}(4n+1)}$, $I=$

[34] existencia $f^{(n)}(0)$, $n\in\mathbf{N}$ (porovnaj s poznámkou za riešením pr. I.327.6) vyplýva z nasledujúceho tvrdenia (pozri [10, odsek 446]): ak funkcie f, g sú súčty mocninových radov so stredom 0 a $f(0)$ je vnútorný bod množiny $D(g)$, tak funkciu $g\circ f$ možno v niektorom okolí bodu 0 rozložiť do mocninového radu so stredom 0

$(-2,2)$; **8**. $\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2(2n+1)}$, $I=[-1,1]$ $\left(f'(x)=\dfrac{1}{2(1+x^2)}\right)$; **9**. $2x+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,x^{2n+1}$, $I=[-1,1]$ $\Bigg(f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{sgn}(1-2x^2)$, súčtom uvedeného radu je funkcia $S(x)=\begin{cases} f(x)\,, & \text{ak } |x|\le 1/\sqrt{2}\\ \pi-f(x)\,, & \text{ak } x\in(1/\sqrt{2},1]\\ -\pi-f(x)\,, & \text{ak } x\in[-1,-1/\sqrt{2})\end{cases}\Bigg)$; **10**. $\sum_{n=0}^{\infty}x^{16n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{16n+1}$, $I=(-1,1)$ $\left(f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{1-x^{16}}\,, & \text{ak } x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}\\ \dfrac{1}{16}\,, & \text{ak } x=1\end{cases}\right)$;

$\boxed{\textbf{397}}$ **1.** pri hľadaní Maclaurinovho radu derivácie ľavej strany použite Cauchyho súčin radov; konvergencia v bodoch $x=1$, $x=-1$ vyplýva z Leibnizovho kritéria, pri dôkaze rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{k}=0$ využite rovnosť (3.2) z pr. 220; nezabudnite, že treba zdôvodniť, prečo sa pravá strana dokazovanej rovnosti rovná jej ľavej strane; **2.** najprv nájdite Maclaurinov rad funkcie $\ln^2(1+x)$ (pozri pr. 396.5); konvergencia v bode 1 vyplýva z Leibnizovho kritéria podobne ako v pr. 397.1, z rovnosti (3.2) z pr. 220 vyplýva aj divergencia uvedeného radu v bode $x=-1$; **3.** pre $f(x)=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$ platí $(1+x^2)f'(x)=1-xf(x)$, z čoho možno odvodiť rekurentný vzťah $f^{(n+1)}(0)=-f^{(n-1)}(0)$, $n\in\mathbf{N}$; konvergencia v bodoch $x=1$, $x=-1$ vyplýva z Leibnizovho kritéria (použite postup z pr. 240); pri dokazovaní rovnosti pravej a ľavej strany využite fakt, že Maclaurinove rady funkcií $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ a $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ konvergujú na $(-1,1)$ k týmto funkciám, a vetu 17 z odseku 3.4; **4.** pre $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ platí $(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1$, z čoho možno odvodiť rekurentný vzťah $f^{(n+1)}(0)=n^2f^{(n-1)}(0)$, $n\in\mathbf{N}$; **5.** pri hľadaní Maclaurinovho radu derivácie ľavej strany využite výsledok pr. 397.3;

$\boxed{\textbf{399}}$ $F(x)=2\pi\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$, $x\in(-1,1)$ [35] $\Bigg($z rovnosti $\ln(1-u)=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{u^n}{n}$, $u\in[-1,1)$, vyplýva $F(x)=-\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n\cos^n t}{n}\,dt$; získaný rad konverguje pre pevné $x\in(-1,1)$ rovnomerne na $[0,2\pi]$, preto $F(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^n}{n}\int_0^{2\pi}\cos^n t\,dt\right)=-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{x^{2n}}{n}$ $\Big($ využili sme rovnosti $\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^n t\,dt=\int_{\pi}^{3\pi/2}\cos^n t\,dt=(-1)^n\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt=(-1)^n\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos^n t\,dt$ a výsledok pr. 96.1 spolu s pr. 93.3a$\Big)$, potom $F'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2\pi}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,x^{2n}=-\dfrac{2\pi}{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right), & \text{ak } 0<|x|<1\\ 0\,, & \text{ak } x=0\end{cases}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$, pri hľadaní primitívnej funkcie použite substitúciu $1+\sqrt{1-x^2}=t$ a uvážte, že $F(0)=0\Bigg)$;

---

[35]pokiaľ má čitateľ ešte stále pochybnosti o elementárnosti funkcie F $\Bigg($nedôveru môže vzbudzovať definičný obor: definičným oborom elementárnej funkcie $2\pi\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$ je totiž intrval $[-1,1]\Bigg)$, nech si jej predpis zapíše napr. v tvare $\dfrac{x^2-1}{x^2-1}\,2\pi\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$

$\boxed{400}$ $\underline{1}$. $\operatorname{ch} x$; $\underline{2}$. x, $x>0$; $\underline{3}$. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\underline{4}$. x pre $|x|<1$, $\dfrac{1}{x}$ pre $|x|\ge 1$ $\Bigg(\dfrac{1}{2}t+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{t^{2n+1}}{2n+2} = \begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}, & \text{ak } 0<|t|\le 1\\ 0, & \text{ak } t=0\end{cases} = \dfrac{t}{1+\sqrt{1-t^2}}\Bigg)$; $\underline{5}$. $\cos\sqrt{x}$ pre $x\ge 0$; $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$ pre $x<0$ (pre $x\ge 0$ $(x<0)$ použite substitúciu $x=t^2$ $(x=-t^2)$); $\underline{6}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}=$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right), & \text{ak } x>0\\ 0, & \text{ak } x=0\\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{-x}}\sin\sqrt{-x}-\cos\sqrt{-x}\right), & \text{ak } x<0\end{cases} \quad \Bigg(= x\big(xg'(x)\big)', \text{ kde } g(x)=$$

$$\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1, & \text{ak } x\ge 0\\ \dfrac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}-1, & \text{ak } x<0\end{cases}\Bigg);$$

$\underline{7}$. $\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{-1/3}-1$, $-2\le x<2$ (k oboru konvergencie daného radu pozri vzorec 5 z úvodu k odseku 4.3.2);

$\boxed{401}$ $\underline{1}$. $3-2\ln 2-\dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$ $\left(=\displaystyle\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}-3\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}\right)$; $\underline{2}$. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$ $\left(=\displaystyle\lim_{x\to 1-}\left(x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right)$; $\underline{3}$. $-\dfrac{1}{2}\ln^2 2$ (využite pr. 396.5); $\underline{4}$. $-\dfrac{\pi^2}{16}$ $\left(\text{rad } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n-1} \text{ je Cauchyho súčinom radov } \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n} \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}\right)$;

$\boxed{402}$ ak $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \rightrightarrows f(x)$ na $\mathbf{R}$, tak z nutnej podmienky rovnomernej konvergencie vyplýva $\exists\, n_0\in\mathbf{N}$ $\forall n\in\mathbf{N}$, $n>n_0$ $\forall x\in\mathbf{R}$: $|a_nx^n|<1$, preto $\forall n\in\mathbf{N}$, $n>n_0$: $a_n=0$;

$\boxed{403}$ rad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ má polomer konvergencie $R=\infty$ $\Big($zo vzťahov $|a_n|\le\dfrac{M}{n!}$ a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{M}{n!}}=0$ — pozri pr. I.186.3 alebo poznámku za pr. 224 — vyplýva $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0\Big)$, z tvrdenia c) vety 16 vyplýva: pre $x\in(-b,b)$ platí $|f^{(k)}(x)|=\left|\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_nx^{n-k}\right|\le\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}|a_n||x|^{n-k}\le\sum_{n=k}^{\infty}M\,\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}=Me^b$, ďalej pozri dôkaz pr. 354;

$\boxed{404}$ $\underline{1a)}$ $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\int_0^1 e^{-x\ln x}\,dx=\int_0^1 e^{-\varphi(x)}\,dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\varphi^n(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\int_0^1\varphi^n(x)\,dx\right)$, kde $\varphi(x)=\begin{cases}x\ln x, & \text{ak } x\in(0,1]\\ 0, & \text{ak } x=0\end{cases}$ $\Bigg($rovnomerná konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\varphi^n(x)$ vyplýva z lokálne rovnomernej konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$ na $\mathbf{R}$ a z ohraničenosti funkcie $\varphi\Bigg)$, z rekurentného vzťahu $\displaystyle\int_0^1 x^m\ln^n x\,dx=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m\ln^{n-1}x\,dx$ vyplýva $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$;

$\underline{1b)}$ pozri riešenie pr. 399; $\underline{2a)}$ $1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)^2}$; $\underline{2b)}$ $2-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\left(\displaystyle\int_0^1\ln x\ln(1-x)\,dx=\right.$

$- \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ln x \right) dx \; = \; - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n \ln x \, dx \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$; rovnomerná konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \ln x$ na $(0, 1]$ vyplýva z Weierstrassovho kritéria$\Big)$ [36];

405 $\pi = 3.141\,592\,654 \pm 10^{-9}$, pri dôkaze rovnosti (4.19) sme použili vzorce $2 \operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ pre $\alpha^2 < 1$, $\operatorname{arctg} \alpha - \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$ pre $\alpha\beta > 0$ (pozri riešenie pr. I.87.1);

406 $\ln 2 = 0.693\,147\,2 \pm 10^{-7}$, $\ln 3 = 1.098\,612\,3 \pm 10^{-7}$, $\ln 5 = 1.609\,437\,9 \pm 10^{-7}$, $\ln 6 = 1.791\,760 \pm 10^{-6}$, $\ln 10 = 2.302\,585 \pm 10^{-6}$ $\Bigg($inverzná matica k matici $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ je $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \\ -16 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\ln \frac{9}{10} = -0.105\,360\,516 \pm 10^{-9}$, $\ln \frac{24}{25} = -0.040\,821\,995 \pm 10^{-9}$, $\ln \frac{81}{80} = 0.012\,422\,520 \pm 10^{-9}\Bigg)$;

407 **1**. $2.835\,4 \pm 10^{-4}$ $\left(\int_2^4 e^{1/x} \, dx \; = \; \int_2^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, x^n} \, dx \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \int_2^4 \frac{dx}{x^n} \right) \right.$, približnú hodnotu $\ln 2$ pozri v riešení pr. 357$\Big)$; **2**. $8.040\,5 \pm 10^{-4}$ $\left(\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx \; = \; \int_{10}^{100} \frac{\ln(1 + 1/x) + \ln x}{x} \, dx \; = \; \int_{10}^{100} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n x^{n+1}} \right) dx + \int_{10}^{100} \frac{\ln x}{x} \, dx \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \int_{10}^{100} \frac{dx}{x^{n+1}} \right) + \frac{3}{2} \ln^2 10 \right.$, približnú hodnotu $\ln 10$ pozri v riešení pr. 406; treba si uvedomiť, že Maclaurinov rad funkcie $\ln(1+x)$ nekonverguje v žiadnom bode intervalu $[10, 100]$, preto sme použili uvedené úpravy$\Big)$;

---

[36]dosadením $x = \pi$ do rovnosti z poznámky [37] k pr. 249 možno dokázať rovnosť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (iný spôsob dôkazu tejto rovnosti pozri v [10, odsek 440, pr. 7, alebo odsek 511, pr. 4])