Obsah

1. Metrické priestory

1.1. Zobrazenia

Definícia 1. Nech A, B sú neprázdne množiny ($A, B \neq \emptyset$). *Zobrazením* z A do B nazývame predpis alebo pravidlo f, ktorým každému prvku $x \in A$ je priradený bod $y \in B$.
Zobrazenie značíme $f : A \to B$, priradenie prvku značíme $x \mapsto f(x)$.

- Ak $B = \mathbb{R}$, potom sa f nazýva *reálna funkcia* definovaná na množine A.
- Ak $A_1 \subset A$, potom $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$ nazývame *obrazom* A_1.
- Ak $B_1 \subset B$, potom $f^{-1}(B_1) = \{x \in A \mid f(x) \in B_1\}$ nazývame *vzorom* množiny B_1.
- Množinu $D(f) = A$ nazývame *definičným oborom* zobrazenia f.
- Množinu $H(f) = f(A)$ nazývame *oborom hodnôt* zobrazenia f.

Definícia 2. Nech $f : A \to B$. Ak pre každé $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $f(x) = y$, potom f je zobrazenie množiny A na množinu B a hovoríme, že f je *surjektívne*. Ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$, potom f nazývame *injektívnym*. Ak je f injektívne aj surjektívne, nazývame ho *bijektívne*.
Grafom zobrazenia f nazývame množinu všetkých usporiadaných dvojíc $(x, f(x))$, kde $x \in A$.

1.2. Euklidovský n-rozmerný priestor

Definícia 3. Euklidovský n-rozmerný priestor $\mathbb{R}^n$ definujeme ako množinu n-tíc $x = (x_1, \ldots, x_n)$ reálnych čísel $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, pričom kladieme $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in R\}$$

Prvok $x \in \mathbb{R}^n$ sa nazýva *bod priestoru* $\mathbb{R}^n$. Taktiež hovoríme, že $x \in \mathbb{R}^n$ je *n-rozmerný vektor*.

- $\mathbb{R}^1$ – priamka
- $\mathbb{R}^2$ – rovina

Definícia 4. Nech $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}^n$ definujeme operácie sčítavania vektorov a násobenia vektoru skalárom:

1. $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
2. $a\vec{x} = (ax_1, \ldots, ax_n)$

Definícia 5. Reálny lineárny (vektorový) priestor je trojica $(V, +, \cdot)$, kde V je množina, $+, \cdot$ sú binárne operácie definované zobrazeniami

- $\varphi : V \times V \to V$ (hodnotu $\varphi(x, y)$ značíme $x + y$)
- $\psi : \mathbb{R} \times V \to V$ (hodnotu $\psi(\lambda, x)$ značíme λx alebo $\lambda \cdot x$)

s vlastnosťami

1. $\forall x, y \in V$ $\quad x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in V$ $\quad x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\exists \vec{0} \in V \ : \ \forall x \in V$ $\quad x + \vec{0} = \vec{0} + x = x$
4. $\forall x \in V \ : \ \exists (-x) \in V$ $\quad x + (-x) = \vec{0}$
5. $\forall x, y \in V \ : \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
6. $\forall x \in V \ : \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
7. $\forall x \in V \ : \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
8. $\forall x \in V$ $\quad 1 \cdot x = x$

Definícia 6. *Dĺžka vektora* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je číslo $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Ak $n = 1$, potom $x \in \mathbb{R}$ a $||x|| = |x|$.
Číslo $||x||$ sa nazýva *euklidovská norma* vektora x.

Veta 1. Ak $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, potom platí:

1. $||x|| \geq 0$, pričom $||x|| = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$
2. $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq ||x||.||y||$ (Cauchyho nerovnosť)[1]
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Trojuholníková nerovnosť)
4. $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$

Dôkaz:

1. $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \geq 0, \quad \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = 0 \iff x_1 = 0, \dots, x_n = 0.$
2. Ak $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ také, že $x = \lambda y$, potom

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| = \left|\sum_{i=1}^n \lambda y_i^2\right| = |\lambda| \sum_{i=1}^n y_i^2 = |\lambda|.||y||.||y|| = |\lambda|.\left\|\frac{1}{\lambda}x\right\|.||y|| = |\lambda|.\frac{1}{|\lambda|}.||x||.||y|| = ||x||.||y||$$

   Ak také $\lambda \neq 0$ neexistuje, potom $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ :\ \lambda y - x \neq 0$
   $0 < ||\lambda y - x||^2 = \sum(\lambda y_i - x_i)^2 = \sum(\lambda^2 y_i^2 - 2\lambda x_i y_i + x_i^2) = \lambda^2 \sum y_i^2 - 2\lambda \sum x_i y_i + \sum x_i^2$
   Ak položíme $A = \sum y_i^2,\ B = -2\sum x_i y_i,\ C = \sum x_i^2$, potom $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ :\ A\lambda^2 + B\lambda + C > 0$, z čoho vyplýva, že diskriminant musí byť záporný, t.j. $B^2 - 4AC < 0$, teda $4\left(\sum x_i y_i\right)^2 < 4\sum x_i^2 \sum y_i^2$, čo nie je nič iné ako $4\left(\sum x_i y_i\right)^2 < 4||x||^2.||y||^2$, z čoho napokon dostávame $|\sum x_i y_i| < ||x||.||y||$.
3. Výrok $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ je ekvivalentný s výrokom $||x+y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2$, dokazujme teda ten:
   $||x+y||^2 = \sum(x_i + y_i)^2 = \sum(x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) = \sum x_i^2 + \sum 2x_i y_i + \sum y_i^2 = ||x||^2 + 2\sum x_i y_i + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2|\sum x_i y_i| + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||.||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$.
4. $||\lambda x|| = \sqrt{\sum(\lambda x_i)^2} = |\lambda|\sqrt{\sum x_i^2} = |\lambda|.||x||. \quad \square$

Definícia 7. Ak $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, potom definujeme *skalárny súčin* vektorov x, y ako číslo

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Poznámka 1. Z Cauchyho nerovnosti vyplýva $\forall x, y \in \mathbb{R}^n\ :\ |\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y||$.

Veta 2. Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ platí:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. $\langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
   $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$
   $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$ (bilineárnosť)
3. $\langle x, x\rangle \geq 0$
   $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$ (kladná definitnosť)
4. $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
5. $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[||x+y||^2 - ||x-y||^2\right]$

Definícia 8. *Vzdialenosť bodov* $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ je číslo

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

Veta 3.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d(x, y) \geq 0$, pričom $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d(x, y) = d(y, x)$ (symetria)
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (trojuholníková nerovnosť)

[1] Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $y = \lambda x$ pre nejaké $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definícia 9. Nech V je reálny vektorový priestor a $||\cdot|| : V \to \mathbb{R},\ x \mapsto ||x||$ je funkcia s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. $\forall x \in V \qquad ||x|| \geq 0$, pričom $||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall x \in V\ :\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad ||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$
3. $\forall x, y \in V \qquad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Funkcia $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x||$ sa nazýva *norma* na V a číslo $||x||$ je norma prvku (vektora) x. Dvojica $(V, ||\cdot||)$ sa nazýva *normovaný vektorový priestor*.[2]

Definícia 10. Nech X je neprázdna množina a $d : X \times X \to \mathbb{R}$ je funkcia s vlastnosťou

1. $\forall x, y \in X \qquad d(x, y) \geq 0$, pričom $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall x, y \in X \qquad d(x, y) = d(y, x) \qquad$ (vlastnosť symetrie)
3. $\forall x, y, z \in X \qquad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad$ (trojuholníková nerovnosť)

Funkcia d sa nazýva *metrika* na X. Dvojica (X, d) sa nazýva *metrický priestor*.[3]

Definícia 11. Nech (X, d) je metrický priestor, $x \in X, r > 0$. Množina $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ sa nazýva *otvorená guľa v X so stredom x a polomerom r*. Množina $\overline{B(x, r)} = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ sa nazýva *uzavretá guľa v X so stredom v x a polomerom r*.

Definícia 12. Nech (X, d) je metrický priestor. Množina $M \subset X$ sa nazýva *otvorená*, ak $\forall x \in M\ :\ \exists r > 0\ :\ B(x, r) \subset M$ alebo $M = \emptyset$. Množina $M \subset X$ sa nazýva *uzavretá*, ak $M^c = X \setminus M$ je otvorená množina. Množina $M \subset X$ sa nazýva ohraničená, ak existuje číslo $\varrho > 0$, že $\forall x, y \in M\ :\ d(x, y) \leq \varrho$.

Veta 4. Nech (X, d) je metrický priestor. Potom platí:

1. X je otvorená množina.
2. Ak $\mathcal{S} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je ľubovoľný systém otvorených množín v X, (I je ľubovoľná indexová množina) potom $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ je otvorená množina v X.
3. Ak $\mathcal{T} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ je ľubovoľný systém uzavretých množín v X, potom $V = \bigcap_{\beta \in J} V_\beta$ je uzavretá množina v X.
4. Nech $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ je konečný systém otvorených množín v X, potom $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ je otvorená množina.
5. Nech $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ je konečný systém uzavretých množín v X, potom $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ je uzavretá množina.

Dôkaz:

1. Zrejme platí.
2. Nech $x \in U$. Potom existuje také $\alpha_0 \in I$, že $x \in U_{\alpha_0}$ a $\exists r > 0\ :\ B(x, r) \subset U_{\alpha_0} \subset U$.
3. Treba dokázať, že $X \setminus V$ je otvorená množina. Použitím de Morganovho pravidla dostávame: $X \setminus V = X \setminus \bigcap_{\beta \in J} V_\beta = \bigcup_{\beta \in J} \underbrace{(X \setminus V_\beta)}_{\text{otvorená}}$, z čoho podľa (2) je $\bigcup_{\beta \in J}(X \setminus V_\beta)$ otvorená množina, teda $X \setminus V$ je otvorená, tzn. že množina V je uzavretá.
4. Nech $x \in U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$. Potom $x \in U_i$ pre všetky $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ďalej vieme, že pre každé i existuje $r_i > 0$ také, že $B(x, r_i) \subset U_i$. Ak položíme $r = \min\{r_i\}$, vidíme, že $r > 0$ a pre všetky $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $B(x, r) \subset U_i$. Teda $B(x, r) \subset U$.
5. Položme $W = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$. Potom opäť použitím de Morganových pravidiel dostávame $X \setminus W = X \setminus (V_1 \cup \cdots \cup V_n) = (X \setminus V_1) \cap (X \setminus V_2) \cap \cdots \cap (X \setminus V_n)$. Keďže $X \setminus V_i$ sú otvorené množiny pre všetky $i \in \{1, \ldots, n\}$, potom podľa (4) je $X \setminus W$ otvorená množina, a teda W je uzavretá.

Definícia 13. Nech (X, d) je metrický priestor a $M \subset X$. Definujme *vnútro*, *uzáver* a *hranicu* množiny M nasledovným spôsobom:

$$\operatorname{int} M = \bigcup \{U \mid U \subset M \ \wedge\ U \text{ je otvorená množina v } X\}$$
$$\overline{M} = \bigcap \{V \mid M \subset V \ \wedge\ V \text{ je uzavretá v } X\}$$
$$\partial M = \overline{M} \ \cap\ \overline{X \setminus M}$$

[2] Napríklad $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$, $\quad ||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ je normovaný vektorový priestor.

[3] Napríklad $(V, ||\cdot||)$ alebo (V, d), kde $d(x, y) = ||x - y||$ sú metrické priestory. Podobne, aj $(\mathbb{R}, d)$, kde $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ je metrický priestor, ktorý je naviac aj euklidovský, t.j. v ňom platí Pytagorova veta.

Poznámka 2.
- $\operatorname{int} M$ je najväčšia otvorená množina obsiahnutá v M.
- $\overline{M}$ je najmenšia uzavretá množina obsahujúca M.

Definícia 14. Body množiny $\operatorname{int} M$ sa nazývajú *vnútorné body* M. Body množiny ∂M sa nazývajú *hraničné body* M.

Definícia 15. Nech (X,d) je metrický priestor a $x \in X$. Množina $U \subset X$ sa nazýva *okolie bodu* x, ak platí:
1. $x \in U$,
2. existuje otvorená množina $V \subset U$, taká že $x \in V$.

1.3. Kompaktné množiny

Definícia 16. Nech (X,d) je metrický priestor a $M \subset X$. Systém $\mathcal{S} = \{U_i\}_{i\in I}, U_i \subset X$ sa nazýva *pokrytie množiny* M, ak $M \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Ak pre všetky $i \in I$ je U_i otvorená množina, $\mathcal{S}$ sa nazýva *otvorené pokrytie*. Ak I je konečná, $\mathcal{S}$ sa nazýva *konečné pokrytie*. Systém $\mathcal{T} = \{U_j\}_{j\in J}$, kde $J \subset I$, sa nazýva *podpokrytie* pokrytia $\mathcal{S}$, ak $M \subset \bigcup_{j\in J} U_j$. Ak J je naviac konečná množina, tak $\mathcal{T}$ je *konečné podpokrytie* pokrytia $\mathcal{S}$.

Definícia 17. Nech (X,d) je metrický priestor. Množina $M \subset X$ sa nazýva *kompaktná* v X, ak pre ľubovoľné *otvorené* pokrytie $\mathcal{S}$ množiny M existuje jeho *konečné* podpokrytie $\mathcal{T}$. Ak X je kompaktná v X, potom (X,d) sa nazýva *kompaktný priestor*.

Veta 5. (**Borelova-Lebesgueova**). Uzavretý interval $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ je kompaktná množina v $(\mathbb{R},d)$, kde d je euklidovská metrika.

Lema 1. Ak $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ a $r > 0$, potom pre každé $(u,v) \in B_{m+n}((x,y),r)$ existujú otvorené množiny $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ také, že $(u,v) \in U \times V \subset B_{m+n}((x,y),r)$.

Dôkaz: $B = B_{m+n}((x,y),r) = \left\{(p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \;\middle|\; \|(p,q)-(x,y)\| = \sqrt{\|p-x\|_1^2 + \|q-y\|_2^2} < r\right\}$

$\|\cdot\|_1$ – euklidovská norma v $\mathbb{R}^n$
$\|\cdot\|_2$ – eukl. norma v $\mathbb{R}^m$
$\|\cdot\|$ – eukl. norma v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

Nech $(u,v) \in B$. Definujme teraz množiny
$U = \{u_1 \in \mathbb{R}^n \mid \|u_1 - u\|_1 < \varrho_1\}$, $\varrho_1 > 0$,
$V = \{v_1 \in \mathbb{R}^m \mid \|v_1 - v\|_2 < \varrho_2\}$, $\varrho_2 > 0$.
Treba ukázať, že ak ϱ_1, ϱ_2 sú dostatočne malé, tak $(u,v) \in U \times V \subset B$.
Nech $(u_1,v_1) \in U \times V$. Potom $\|u_1 - u\| < \varrho_1$, $\|v_1 - v\| < \varrho_2$.
$\|(u_1,v_1)-(x,y)\| = \sqrt{\|u_1-x\|_1^2 + \|v_1-y\|_2^2} \le \sqrt{(\|u_1-u\|_1 + \|u-x\|_1)^2 + (\|v_1-v\|_2 + \|v-y\|_2)^2} \le \sqrt{(\varrho_1 + \|u-x\|_1)^2 + (\varrho_2 + \|v-y\|_2)^2} \le \sqrt{\varrho_1^2 + 2\varrho_1 R + \varrho_2^2 + 2\varrho_2 R + R^2} < r$.
Predposledná nerovnosť vyplýva zo vzťahu $\|u-x\| + \|v-y\| \le \|(u,v)-(x,y)\| = R < r$. $\square$

Lema 2. Nech $B \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktná množina, $x \in \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{S} = \{W_j\}_{j\in J}$ je ľubovoľné otvorené pokrytie množiny $\{x\} \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Potom existuje taká otvorená množina $U \in \mathbb{R}^n$, že $x \in U$ a množinu $U \times B$ možno pokryť konečným počtom množín systému $\mathcal{S}$.

Dôkaz: Najprv ukážeme, že $\{x\} \times B$ je kompaktná. Nech $\mathcal{T} = \{V_i\}_{i\in I}$ je otvorené pokrytie množiny $\{x\} \times B$. Potom pre každé $i \in I$ je $U_i = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in V_i\} \subset \mathbb{R}^m$ otvorená množina v $\mathbb{R}^m$. Systém $\{U_i\}_{i\in I}$ je otvorené pokrytie množiny B. Keďže B je kompakt, tak existuje konečné podpokrytie $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ tohto systému. Zrejme $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$ je konečné podpokrytie systému $\mathcal{T}$, a teda $\{x\} \times B$ je kompakt.

$\forall y \in B$ je $(x,y) \in W_{j_y} \in \mathcal{S}$ pre nejaké $j_y \in J$. Množina W_{j_y} je otvorená, a preto z definície otvorenosti a z lemy 1 vyplýva, že existujú otvorené množiny $U_{j_y} \subset \mathbb{R}^n$, $V_{j_y} \subset \mathbb{R}^m$ také, že $(x,y) \in U_{j_y} \times V_{j_y} \subset W_{j_y}$. Systém $\Sigma = \{V_{j_y}\}_{y\in B}$ je otvorené pokrytie množiny B. Z kompaktnosti B vyplýva, že existuje jej konečné podpokrytie $V_{j_{y_1}}, \dots, V_{j_{y_k}}$.
Nech $U = U_{j_{y_1}} \cap \dots \cap U_{j_{y_k}}$, čo je zrejme otvorená množina. Potom, ak $(u,v) \in U \times B$, tak $v \in V_{j_{y_l}}$ pre nejaké $l \in \{1,\dots,k\}$. Z definície U vyplýva, že $u \in U_{j_{y_l}}$. Z uvedeného máme $(u,v) \in U_{j_{y_l}} \times V_{j_{y_l}} \subset W_{j_{y_l}} \in \mathcal{S}$. $\square$

Veta 6. Ak množiny $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ sú kompaktné, potom je množina $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ kompaktná.

Dôkaz: Nech $\mathcal{S} = \{U_i\}_{i\in I}$ je otvorené pokrytie množiny $A \times B$. Potom $\mathcal{S}$ pokrýva $\{x\} \times B$ pre všetky $x \in A$. Podľa lemy 2 existuje otvorená množina U_x taká, že $x \in U_x$ a $U_x \times B$ možno pokryť konečným počtom množín z $\mathcal{S}$. Systém $\{U_x\}_{x\in A}$ je otvorené pokrytie A. Z kompaktnosti A vyplýva, že existuje konečné podpokrytie $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}\}$ tohto pokrytia, z čoho ďalej vyplýva, že $\{U_{x_1} \times B, \ldots, U_{x_k} \times B\}$ je konečné pokrytie množiny $A \times B$, teda $A \times B$ má konečné pokrytie množinami systému $\mathcal{S}$, t.j. $A \times B$ je kompakt. $\square$

Tvrdenie 1. Uzavretý interval $I = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle \subset \mathbb{R}^n$ je kompakt.

Dôkaz: Vyplýva z viet 5 a 6. $\square$

Veta 7. Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavretá a ohraničená množina. Potom A je kompakt.

Dôkaz: Z ohraničenosti A vyplýva, že existuje interval $I = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle \subset \mathbb{R}^n$ taký, že $A \subset I$. Podľa tvrdenia 1 je I kompakt. Nech $\mathcal{S} = \{U_i\}_{i\in I}$ je otvorené pokrytie A. Vytvorme systém $\mathcal{T} = \{U_i \mid i \in I\} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$, ktorý je otvoreným pokrytím intervalu I. Z lemy 1 vyplýva existencia konečného podpokrytia $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}, \mathbb{R}^n \setminus A\}$ systému $\mathcal{T}$. Zrejme $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ je konečné podpokrytie systému $\mathcal{S}$ množiny A, teda A je kompakt. $\square$

Definícia 18. Nech (X, d) je metrický priestor. Bod $p \in X$ sa nazýva *hromadným bodom* množiny $A \subset X$, ak pre každé okolie U bodu p existuje bod $q \in U \cap A; q \neq p$. Množina všetkých hromadných bodov množiny A sa nazýva *deriváciou množiny* A a označujeme ju A'.[4]

Veta 8. Nech (X, d) je metrický priestor, $A \subset X$. Potom

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{pre každé okolie } V(x) \text{ bodu } x \text{ je } V(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Dôkaz: Nech $B = \{x \in X \mid \text{pre každé okolie } V(x) \text{ bodu } x \text{ je } V(x) \cap A \neq \emptyset\}$.

1. Ukážeme, že $\overline{A} \subset B$. Nech teda $x \in \overline{A}$, ale $x \notin B$. Z toho vyplýva, že existuje otvorené okolie $V(x)$ bodu x, také že $V(x) \cap A = \emptyset$. Teda $A \subset \underbrace{X \setminus V(X)}_{\text{uzavretá mn.}}$. Pretože $x \notin X \setminus V(x)$, $x \notin \overline{A}$, čo je spor.
2. Dokážme, že $B \subset \overline{A}$. Nech teda $x \in B$, ale $x \notin \overline{A} = \bigcap \{F \supset A \mid F \text{ je uzavretá}\}$. Teda $x \in X \setminus \overline{A}$. Potom existuje uzavretá množina F taká, že $A \subset F$, ale $x \notin F$. Ďalej máme $x \in V = \underbrace{X \setminus F}_{\text{otv.}}$, pričom $V \cap A = \emptyset$ a teda $x \notin B$, čo je opäť spor. $\square$

Veta 9. Nech (X, d) je metrický priestor, $A \subset X$. Potom $\overline{A} = A \cup A'$.

Dôkaz: Z vety 8 $\Longrightarrow A' \subset \overline{A} \Longrightarrow A \cup A' \subset A \cup \overline{A} = \overline{A}$. $\square$

Veta 10. Nech (X, d) je metrický priestor, $A \subset X$. Potom A je uzavretá vtedy a len vtedy, ak $A = \overline{A}$.

Dôkaz:

$\Rightarrow$ Nech A je uzavretá. Z definície uzáveru vyplýva, že $A \subset \overline{A}$. Keďže A je uzavretá, potom $\overline{A} = \overline{A} \cap A$. Z toho vyplýva, že $\overline{A} \subset A$. Teda $\overline{A} = A$.

$\Leftarrow$ Nech $A = \overline{A}$. Teda $A = \cap\{V \mid A \subset V \wedge V \text{ je uzavretá v } X\}$. Nakoľko prienikom ľubovoľného systému uzavretých množín je uzavretá množina, je zrejme potom množina A uzavretá. $\square$

Veta 11. Nech (X, d) je metrický priestor a $A \subset X$ je kompaktná množina. Potom A je uzavretá.

Dôkaz: Dokážeme, že $X \setminus A$ je otvorená. Nech $y \in X \setminus A$. Potom $\forall x \in X \;:\; \exists$ otvorené okolie $U_x(y)$ bodu y a existuje otvorené okolie $U_y(x)$ bodu x také, že $U_x(y) \cap U_y(x) = \emptyset$.
Systém $\{U_y(x)\}_{x\in A}$ je pokrytie A. Z kompaktnosti $A \Longrightarrow \exists$ konečné pokrytie $\{U_y(x_1), \ldots, U_y(x_k)\}$.
$U(A) = \bigcup_{i=1}^k U_y(x_i)$, $V(y) = \bigcap_{i=1}^k U_{x_i}(y)$.
Zrejme z konštrukcie $\Longrightarrow U(A) \cap V(y) = \emptyset$ a $A \subset U(A) \Longrightarrow V(y) \subset X \setminus A$.
Dokázali sme, že $\forall y \in X \setminus A \;:\; \exists$ okolie $V(y)$ bodu y také, že $V(y) \subset X \setminus A \Longrightarrow X \setminus A$ je otvorená $\Longrightarrow A$ je uzavretá. $\square$

Veta 12. Nech (X, d) je metrický priestor, $A \subset X$ je kompaktná množina a $B \subset A$ je uzavretá v X. Potom B je kompaktná.[5]

Dôkaz: Nech $\mathcal{S} = \{U_i\}_{i\in I}$ je otvorené pokrytie B. Potom $\{U_i\}_{i\in I} \cup (X \setminus B)$ je otvorené pokrytie množiny A. Keďže A je kompakt, existuje konečné podpokrytie typu $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}, X \setminus B$ alebo $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$. V druhom prípade je zrejme $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ podpokrytie pokrytia množiny B. V prvom prípade je $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ podpokrytie množiny B. $\square$

---

[4] Pre Cantorove diskontinuum $\mathcal{C}$ platí $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$.

[5] T.j. uzavretá podmnožina kompaktu je kompakt.

Veta 13. Nech (X,d) je metrický priestor, $A \subset X$ je kompaktná a $Z \subset A$ je nekonečná množina. Potom množina Z má v A hromadný bod.

Dôkaz: Sporom. Nech tvrdenie neplatí. Podľa vety 9 je $\overline{Z} = Z \cup Z' \subset \overline{A}$. A je kompaktná a podľa vety 11 je A uzavretá. Podľa vety 10 $\overline{A} = A$. Ďalej dostávame $\overline{Z} = Z \cup Z' \subset \overline{A} = A$. Avšak Z nemá hromadný bod v A, teda $Z' = \emptyset$, z čoho $Z = \overline{Z}$ a teda podľa vety 10 je Z uzavretá.
Máme $Z \subset A \wedge Z$ je uzavretá $\wedge$ A je kompaktná $\overset{\text{veta 12}}{\Longrightarrow}$ Z je kompakt.
Nech $z \in Z$. Pretože Z nemá hromadný bod v A, existuje okolie $U(z)$ také, že $U(z) \cap A \cap Z = \{z\}$. Vytvorme systém $\{U(z)\}_{z \in Z}$. Tento je otvoreným pokrytím Z, Z je kompakt $\Longrightarrow$ existuje konečné podpokrytie $U(z_1), \ldots, U(z_k)$ $\Longrightarrow$ $Z = \left(\bigcup_{i=1}^{k} U(z_i)\right) \cap Z = \bigcup_{i=1}^{k} [U(z_i) \cap Z] = \{z_1, \ldots, z_k\}$, čo je ale spor s nekonečnosťou množiny Z. □

Definícia 19. Nech (X,d) je metrický priestor. Zobrazenie $a : \mathbb{N} \to X$ sa nazýva *postupnosť* (prvkov v X). Namiesto $a(n)$ píšeme a_n a namiesto a píšeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ak $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť prirodzených čísel taká, že $n_1 < n_2 < \ldots$, potom postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sa nazýva *vybraná postupnosť* postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in X$, ak

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq N_0 \ : \ d(a_n, a) < \varepsilon,$$

t.j. $\lim_{n \to \infty} d(a_n, a) = 0$.
Píšeme $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ a hovoríme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentná* a *konverguje* k a

Definícia 20. Nech (X,d) je metrický priestor. Množina $A \subset X$ sa nazýva *sekvenciálne kompaktná*, ak pre každú nekonečnú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n \in A$ existuje vybraná postupnosť $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k nejakému prvku $a \in A$.

Veta 14. Nech (X,d) je metrický priestor a $A \subset X$ je kompakt. Potom A je sekvenciálne kompaktná.

Dôkaz: $Z = \{a_1, a_2, \ldots\}$ je nekonečná podmnožina A. A je kompakt, podľa vety 13 má Z hromadný bod $a \in A$.
Definujme množiny $U_k = \left\{ y \in X \mid d(a,y) < \frac{1}{k} \right\}$, $k = 1, 2, \ldots$
Z definície hromadného bodu vyplýva, že $\forall k \in \mathbb{N} \ : \ \exists n_k \in \mathbb{N} \ : \ a_{n_k} \in U_k \Longrightarrow d(a, a_{n_k}) < \frac{1}{k}$, teda $\lim_{k \to \infty} d(a, a_{n_k}) = 0$, pričom $n_1 < n_2 < \ldots$, teda máme $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a \in A$, t.j. A je sekvenciálne kompaktná.[6] □

Poznámka 3. Platí aj obrátené tvrdenie, t.j. ak (X,d) je metrický priestor, $A \subset X$ je sekvenciálne kompaktná, potom A je kompakt.

Veta 15. Nech (X,d) je metrický priestor, $A \subset X, A \neq \emptyset$, je kompaktná množina. Potom A je uzavretá a ohraničená.

Dôkaz: Uzavretosť z vety 11. Dokážeme ohraničenosť.
Nech A nie je ohraničená. Zvoľme $x_1 \in A$. Potom $\exists x_2 \in A \ : \ d(x_1, x_2) \geq 1$. Ak by neexistovalo, tak $A \subset B(x_1, 1)$. Podobne $\exists x_3 \in A \ : \ d(x_2, x_3) \geq 1 \wedge d(x_1, x_3) \geq 1$. Ak by neexistovalo, tak $A \subset B(x_1, 1) \cup B(x_2, 1)$ a to by bola ohraničená množina.
Indukciou možno zostrojiť postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in A$ takú, že $\forall i, j \in \mathbb{N} \ : \ i \neq j \Longrightarrow d(x_i, x_j) \geq 1$.
Z tejto postupnosti nemožno vybrať konvergentnú postupnosť $\Longrightarrow$ A nie je sekvenciálne kompaktná $\Longrightarrow$ A nie je kompaktná, čo je spor s kompaktnosťou A. □

Veta 16. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktná vtedy a len vtedy, keď je uzavretá a ohraničená.[7]

Dôkaz: Využitím viet 15 a 7. □

[6] Korektne: indukciou, aby bola vybraná postupnosť $\{a_{n_i}\}$ nekonečná, resp. $\{n_i\}$ rastúca.
[7] Toto tvrdenie samozrejme neplatí vo všetkých metrických priestoroch.

1.4. Limita zobrazenia

Definícia 21. Nech (X, d) a (Y, ϱ) sú metrické priestory, $f : M \to Y$, kde $M \subset X$ a nech $a \in X$ je hromadný bod M. Hovoríme, že zobrazenie f má *v bode a limitu* $b \in Y$ (píšeme $\lim_{x\to a} f(x) = b$), ak k ľubovoľnému okoliu $\mathcal{V}(b)$ bodu b existuje také okolie $\mathcal{U}(a)$ bodu a, že pre každé $x \in M \cap [\mathrm{int}\,\mathcal{U}(a) \setminus \{a\}]$ je $f(x) \in \mathcal{V}(b)$.

Definícia 22. Nech sú splnené predpoklady predchádzajúcej definície. Hovoríme, že f má v bode a *limitu*[8] $b \in Y$, ak

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists \delta > 0 \ : \ x \in M \cap B(a, \delta) \setminus \{a\} \implies f(x) \in B(b, \varepsilon).$$

Poznámka 4. Ak $Y = \mathbb{R}$, potom v definíciách 21 a 22 pripustíme hodnoty $b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Ak $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$), hovoríme o *nevlastnej limite*.

Definícia 23. Pod reálnou funkciou n reálnych premenných rozumieme zobrazenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ také, že $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x)$. Nech $M \subset \mathbb{R}^m$. Potom každé zobrazenie $f : M \to \mathbb{R}^n$ je reprezentované n-ticou reálnych funkcií m reálnych premenných $x_1, \ldots, x_m$. Teda $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$, kde $f_i : M \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sú reálne funkcie premenných $x_1, \ldots, x_m$ a $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Funkcie $f_1, \ldots, f_m$ sa nazývajú *zložky* zobrazenia f.

Veta 17. Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov v $\mathbb{R}^m$ a nech $x_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Potom postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $(a_1, \ldots, a_n) = a \in \mathbb{R}^m$ v metrickom priestore $(\mathbb{R}^m, d_m)$ (d_m je euklidovská metrika), t.j. $\lim_{n\to\infty} d_m(x_n, a) = 0$, vtedy a len vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} x_j^n = a_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Dôkaz:

$\Rightarrow$ Nech $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ v $(\mathbb{R}^m, d) \implies \forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq N_0 \ : \ d_m(x_n, a) < \varepsilon$.
$|x_j^n - a_j| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i^n - a_i)^2} = d(x_n, a) < \varepsilon \quad \forall n > N_0,\ j = 1, \ldots, m.$
$\implies \forall j \in \{1, \ldots, m\} \ : \ \lim_{n\to\infty} x_j^n = a_j$.

$\Leftarrow$ Nech $\forall j \in \{1, \ldots, m\} \ : \ \lim_{n\to\infty} x_j^n = a_j$. Potom $\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq N_0 \ : \ |x_j - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Z toho vyplýva, že ak $n \geq N_0$, potom $d(x_n, a) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(x_j^n - a_j\right)^2} < \sqrt{m\frac{\varepsilon^2}{m}} = |\varepsilon|$, teda $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. $\square$

Veta 18. **(O súvislosti limity zobrazenia a limity postupnosti).** Nech (X, d), (Y, ϱ) sú metrické priestory, $M \subset X$ a bod $a \in M$ je hromadným bodom M. Potom zobrazenie $f : M \to Y$ má limitu v bode a rovnú b (t.j. $\lim_{x\to a} f(x) = b$) vtedy a len vtedy, ak pre ľubovoľnú konvergentnú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov z $M \setminus \{a\}$ takú, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (t.j. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$) je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ (t.j. $\lim_{n\to\infty} \varrho(f(x_n), b) = 0$).

Dôkaz:

$\Rightarrow$ Nech $\lim_{x\to a} = b$, t.j. $\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in M \ : \ 0 < d(x, a) < \delta \implies \varrho(f(x), b) < \varepsilon$.
Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov z $M \setminus \{a\}$ taká, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Z toho vyplýva, že $\forall \delta > 0 \ : \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq N_0 \ : \ d(x_n, a) < \delta$, a ďalej $\forall n \geq N_0 \ : \ \varrho(f(x_n), b) < \varepsilon$, z čoho napokon vyplýva $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

$\Leftarrow$ Nech $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ pre ľubovoľnú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov z $M \setminus \{a\}$, takú že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
Predpokladajme, že tvrdenie neplatí, t.j. $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$.
Potom $\exists \varepsilon_0 > 0 \ : \ \forall \delta > 0 \ : \ \exists x \in M \setminus \{a\} \ : \ 0 < d(x, a) < \delta \wedge \varrho(f(x), b) \geq \varepsilon_0$.
Zvoľme $\delta_n = \frac{1}{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje $\overline{x_n} \in M \setminus \{a\}$ také, že $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ a $\varrho(f(\overline{x_n}), b) \geq \varepsilon_0$.
Z toho ďalej vyplýva $\lim_{n\to\infty} x_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} \varrho(f(\overline{x_n}), b) \neq 0$, a teda $\lim_{n\to\infty} f(\overline{x_n}) \neq b$, čo je spor. $\square$

Veta 19. Nech $M \subset \mathbb{R}^m$, $f : M \to \mathbb{R}^k$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ a nech $a \in \mathbb{R}^m$ je hromadný bod množiny M. Potom $\lim_{x\to a} f(x) = b = (b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{R}^k \iff \forall j \in \{1, \ldots, k\} \ : \ \lim_{x\to a} f_j(x) = b_j$.

Dôkaz: Podľa vety 18 je výrok $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ekvivalentný s výrokom: pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in M \setminus \{a\}$ také, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

[8] Z definície okolia vyplýva, že okolie $\mathcal{U}(a)$ obsahuje otvorenú guľu $B(a, \delta)$ pre nejaké $\delta > 0$, okolie $\mathcal{V}(b)$ obsahuje otvorenú guľu $B(b, \varepsilon)$ pre nejaké $\varepsilon > 0$. Táto definícia je preto ekvivalentná s definíciou 21.

Avšak $f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n), \ldots, f_k(x_n))$.
Z vety 17 vyplýva ekvivalencia $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b \iff (\forall j \in \{1,\ldots,k\} : \lim_{n\to\infty} f_j(x_n) = b_j) \iff \forall j \in \{1,\ldots,k\} : \lim_{x\to a} f_j(x) = b_j$. $\square$

1.5. Spojitosť zobrazenia

Definícia 24. Nech (X,d), (Y,d) sú metrické priestory a $M \subset X$. Hovoríme, že zobrazenie $f : M \to Y$ je *spojité v bode* $a \in M$, ak pre každé okolie $\mathcal{V}$ bodu $f(a)$ existuje okolie $\mathcal{U}$ bodu a také, že $\forall x \in M \cap \mathcal{U}$: $f(x) \in \mathcal{V}$. Zobrazenie $f : M \to Y$ je *spojité na* M, ak je spojité v každom bode M.

Definícia 25. Nech sú splnené predpoklady predchádzajúcej definície. Hovoríme, že zobrazenie $f : M \to Y$ je *spojité v bode* $a \in M$, ak platí $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in M : d(x,a) < \delta \implies \varrho(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Poznámka 5. Definície 24 a 25 sú ekvivalentné.

Veta 20. Nech (X,d), (Y,d) sú metrické priestory, $M \subset X$. Nech $a \in M$ je hromadný bod množiny M. Zobrazenie $f : M \to Y$ je spojité v bode a vtedy a len vtedy, ak $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Dôkaz:

- $\Rightarrow$ Nech f je spojité. Teda pre všetky okolia $\mathcal{V}$ bodu $f(a)$ existuje okolie $\mathcal{U}$ bodu a také, že $\forall x \in M \cap \mathcal{U} : f(x) \in \mathcal{V}$. Z toho ďalej vyplýva $\forall x \in M \cap (\mathrm{int}\,\mathcal{U}) : f(x) \in \mathcal{V}$, a teda $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- $\Leftarrow$ Nech $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Potom zrejme je f je spojité v bode a. Pretože $f(a) \in \mathcal{V}$ pre ľubovoľné okolie $\mathcal{V}$ bodu $f(a)$, tak podľa definície 24 je f spojité v bode a. $\square$

Veta 21. Nech $f : M \to \mathbb{R}^k$, kde $M \subset \mathbb{R}^m$, $f = (f_1,\ldots,f_k)$. Potom je zobrazenie f spojité v bode $a \in M$ vtedy a len vtedy, ak sú spojité funkcie $f_1,\ldots,f_k$ v bode a.

Dôkaz:

- $\Rightarrow$ Nech f je spojité v $a \in M \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in M : d_m(x,a) < \delta \Rightarrow d_k(f(x), f(a)) < \varepsilon$. ($d_m$, d_k sú euklidovské metriky na $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^k$).
  Avšak $|f_i(x) - f_i(a)| \le \sqrt{\sum_{j=1}^k (f_j(x) - f_j(a))^2} = d_k(f(x), f(a)) < \varepsilon$ pre všetky $i \in \{1,\ldots,k\}$, teda f_i sú spojité v bode a pre všetky $i \in \{1,\ldots,k\}$.
- $\Leftarrow$ Nech $f_1,\ldots,f_k$ sú spojité v $a \in M$. Potom $\forall i \in \{1,\ldots,k\} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_i > 0 : \forall x \in M : d_m(x,a) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$.
  Nech $0 < \delta \le \min\{\delta_1,\ldots,\delta_k\}$, $x \in M$, $d_m(x,a) < \varepsilon$.
  Potom $d_k(f(x), f(a)) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (f_j(x) - f_j(a))^2} < \sqrt{k\frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon \implies f$ je spojité v a. $\square$

Veta 22. Nech $M \subset \mathbb{R}^m$, $f : M \to \mathbb{R}^k$, $f = (f_1,\ldots,f_k)$. Potom zobrazenie f je spojité na M vtedy a len vtedy, ak sú spojité na M všetky funkcie $f_1,\ldots,f_k$.

Veta 23. Nech (X,d) a (Y,ϱ) sú metrické priestory a $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie. Potom, ak $V \subset Y$ je otvorená množina, tak aj $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ je otvorená množina.

Dôkaz: Nech $V \subset Y$ je otvorená množina. Ak $f^{-1}(V) = \emptyset$, potom je zrejme otvorená. Nech ale $f^{-1}(V) \ne \emptyset$ a $p \in f^{-1}(V)$, t.j. $f(p) \in V$. Z definície spojitosti f vyplýva, že existuje otvorené okolie $\mathcal{U}(p)$ bodu p také, že $f(\mathcal{U}(p)) \subset V$, t.j. $\mathcal{U}(p) \in f^{-1}(V)$. Keďže p bolo ľubovoľné, tak $f^{-1}(V) = \bigcup_{p\in f^{-1}(V)} \mathcal{U}(p)$ je otvorená množina. $\square$

Veta 24. Nech sú splnené predpoklady predchádzajúcej vety. Potom ak $M \subset Y$ je uzavretá, tak $f^{-1}(M)$ je uzavretá v X.

Dôkaz: Nech M je uzavretá v Y, potom $Y \setminus M$ je otvorená. Z vety 23 $f^{-1}(M \setminus Y) = X \setminus f^{-1}(M)$ je otvorená $\implies f^{-1}(M)$ je uzavretá. $\square$

1.6. Rovnomerná spojitosť zobrazenia

Definícia 26. Nech (X, d), (Y, ϱ) sú metrické priestory, $M \subset X$. Zobrazenie $f : M \to Y$ sa nazýva *rovnomerne spojité* na M, ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \;:\; \exists \delta > 0 \;:\; \forall x_1, x_2 \in M \;:\; d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \varrho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Veta 25. Nech (X, d), (Y, ϱ) sú metrické priestory, $M \subset X$ a $f : M \to Y$ je rovnomerne spojité na M. Potom f je spojité na M.

Veta 26. Nech $f : M \to \mathbb{R}^k$, $M \subset \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_k)$. Zobrazenie f je rovnomerne spojité na M vtedy a len vtedy, ak $f_1, \ldots, f_k$ sú rovnomerne spojité na M.[9]

1.7. Vlastnosti spojitých zobrazení na kompaktoch

Lema 3. Nech (X, d), (Y, ϱ) sú metrické priestory, $M \subset X$ a $f : M \to Y$ je spojité zobrazenie. Potom platí: Ak $V \subset Y$ je otvorená množina v Y, potom buď $f^{-1}(V) = \emptyset$ alebo existuje otvorená množina $U \subset X$ taká, že $f^{-1}(V) = U \cap M$.

Dôkaz: Nech $V \subset Y$ je otvorená a $f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Nech $p \in f^{-1}(V)$. Zo spojitosti f vyplýva existencia otvoreného okolia $\mathcal{U}(p)$ v X takého, že $f(\mathcal{U}(p) \cap M) \subset V$.
Množina $U = \bigcup_{p \in f^{-1}(V)} \mathcal{U}(p)$ je otvorená a $\mathcal{U} \cap M = f^{-1}(V)$. $\square$

Veta 27. Nech (X, d), (Y, ϱ) sú metrické priestory, $M \subset X$, $N \subset M$, $f : M \to Y$ je spojité zobrazenie. Nech N je kompaktná množina. Potom je množina $f(N)$ kompaktná v množine Y.

Dôkaz: Nech $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je ľubovoľné otvorené pokrytie množiny $Z = f(N)$ (kde N je kompakt). Pretože f je spojité zobrazenie, tak podľa lemy 3 platí $\forall \alpha \in I \;:\; f^{-1}(\mathcal{V}_\alpha) = U_\alpha \cap M$, kde U_α je otvorená množina v X. Systém $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otvorené pokrytie kompaktnej množiny N. Z kompaktnosti vyplýva existencia konečného podpokrytia $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}\}$ tohto pokrytia. Potom $\{\mathcal{V}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{V}_{\alpha_k}\}$ je konečné pokrytie množiny $Z = f(N)$, z čoho vyplýva, že Z je kompaktná množina v Y.[10] $\square$

Definícia 27. Nech (X, d) je metrický priestor. Hovoríme, že systém $M = \{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ neprázdnych podmnožín priestoru X je *centrovaný*, ak $M_{\alpha_1} \cap \cdots \cap M_{\alpha_n} \neq \emptyset$ pre ľubovoľný konečný podsystém $\{M_{\alpha_1} \cap \cdots \cap M_{\alpha_n}\}$ systému M.
Nech $Y \subset X$. Hovoríme, že Y má *vlastnosť konečného prieniku*, ak platí nasledujúci výrok:
Ak $M = \{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je ľubovoľný systém neprázdnych uzavretých podmnožín X, pričom $\forall \alpha \in I \;:\; M_\alpha \subset Y$ (t.j. $\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \subset Y$) a M je centrovaný, potom $\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha \neq \emptyset$.

Veta 28. Ak (X, d) je metrický priestor a $K \subset X$ je kompaktná množina, potom množina K má vlastnosť konečného prieniku.

Dôkaz: Predpokladajme, že K nemá vlastnosť konečného prieniku. Potom existuje systém neprázdnych uzavretých množín $M = \{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\forall \alpha \in I \;:\; M_\alpha \subset K$, ktorý je centrovaný a $\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha = \emptyset$. Potom ale $\bigcup_{\alpha \in I}(X \setminus M_\alpha) = X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha = X \implies \{X \setminus M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otvorené pokrytie X, a teda aj množiny K. Pretože K je kompaktná, tak existuje konečné podpokrytie $\{X \setminus M_{\alpha_1}, \ldots, X \setminus M_{\alpha_n},\}$ množiny K. Z toho ďalej: $K = \bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus M_{\alpha_i}) \cap K = \bigcup_{i=1}^{k} [(X \cap K) \setminus M_{\alpha_i}] = \bigcup_{i=1}^{k} K \setminus M_{\alpha_i} = K \setminus \bigcap_{i=1}^{k} M_{\alpha_i} \implies \bigcap_{i=1}^{k} M_{\alpha_i} = \emptyset$, čo je spor s centrovanosťou systému $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$. $\square$

Veta 29. Nech (X, d) je metrický priestor, $K \subset X$ je kompaktná množina a $f : X \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f je ohraničená na K ($\exists L > 0 \;:\; \forall x \in K \;:\; |f(x)| \leq L$)[11] a nadobúda svoje maximum a minimum na K.[12]

[9] Vetu možno dokázať podobným spôsobom ako vetu 21.
[10] Využili sme predpoklad, že $\{V_\alpha\}$ pokrýva Z pretože f je spojitá.
[11] Prvá Weierstrassova veta
[12] Druhá Weierstrassova veta

Dôkaz:

1. Pre ukázanie ohraničenosti stačí dokázať, že $\sup_{x\in K} f(x) < +\infty$ a $\inf_{x\in K} f(x) > -\infty$.
   Sporom. Nech $\sup_{x\in K} f(x) = +\infty$. Nech $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť reálnych čísel, teda $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$.
   Definuje teraz množiny $U_n = \{x \in X \mid f(x) < r_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Zrejme $U_{n+1} \supset U_n$.
   Pretože $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$, tak $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Z definície $U_n \implies U_n = f^{-1}((-\infty, r_1))$. Z vety 23 vyplýva otvorenosť množiny U_n.
   Systém $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ je otvorené pokrytie X, a teda aj K. Z kompaktnosti K vyplýva existencia konečného podpokrytia $\{U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_k}\}$, $n_1 \leq n_2, \leq \dots \leq n_k$. Pretože $\forall n : U_{n+1} \supset U_n$, tak $U_{n_1} \subset U_{n_2} \subset \dots \subset U_{n_k}$. Keďže K je pokrytie U_{n_k}, potom $\forall x \in K : f(x) < r_{n_k}$, čo je spor s predpokladom.
2. Dokážeme, že K nadobúda na K svoje maximum. Z definície supréma $\implies \forall n \in \mathbb{N} : \exists s_n \in \mathbb{R}$ také, že pre $\alpha = \sup_{x\in K} f(x)$ je $0 \leq \alpha - s_n < \frac{1}{n}$ a $\exists x_n \in K : f(x_n) = s_n$.
   Dostávame číselnú postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in K$ takú, že $\lim_{n\to\infty} s_n = \alpha$ a $f(x_n) = s_n$ pre všetky n.
   Nech $W_n = \{x \in K \mid f(x) \geq s_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ Je zrejmé, že $W_n = f^{-1}(\langle s_n, \infty)) \cap K$ je uzavretá množina. Z definície $W_n \implies \forall n \geq 1 : W_{n+1} \subset W_n$, t.j. $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ je centrovaný systém uzavretých množín v K.
   Pretože K je kompakt, tak podľa vety 28 je $W_* = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n \neq \emptyset$. Ak $x_* \in W_*$, potom $f(x_*) = \alpha = \sup_{x\in K} f(x)$. Ak by to neplatilo, potom by $f(x_*) < \alpha$. Ale potom by $\exists N \in \mathbb{N} : f(x_*) < s_N$, z čoho vyplýva $x_* \notin W_N$, čo je spor s $x_* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$.
   Minimum sa dokáže analogicky $g(x) = -f(x)$, $\min f(x) = \max g(x)$. $\square$

Veta 30. Nech (X, d), (Y, ϱ) sú metrické priestory a $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie a $M \subset X$ je kompaktná množina. Potom je zobrazenie f rovnomerne spojité na M.[13]

Dôkaz: Sporom. Nech f nie je rovnomerne spojité. Potom $\exists \varepsilon > 0 : \forall k \in \mathbb{N} : \exists x_k, y_k \in M : d(x_k, y_k) < \frac{1}{k}^{(*)} \wedge \varrho(f(x_k), f(y_k)) \geq \varepsilon^{(**)}$.
Pretože M je kompakt, M je sekvenciálne kompaktná. Teda existuje vybraná postupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ postupnosti $\{x_n\}_{x=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k nejakému $x_0 \in M$. Pretože f je spojitá, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Z (*) $\implies \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0 \overset{\text{spoj.}}{\implies} \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_0)$.
Avšak $\varepsilon \leq \varrho(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \underbrace{\varrho(f(x_{n_k}), f(x_0))}_{\to 0} + \underbrace{\varrho(f(x_0), f(y_{n_k}))}_{\to 0}$, čo je spor s (**).

1.8. Súvislé množiny

Definícia 28. Nech (X, d) je metrický priestor. Uzavretá množina $M \subset X$, $M \neq 0$ sa nazýva *súvislá*, ak neexistujú neprázdne uzavreté množiny $A \subset X$, $B \subset X$ také, že $A \cap B = \emptyset$ a $M = A \cup B$.

Veta 31. Uzavretý interval $\langle a, b\rangle$ je súvislá množina.

Dôkaz: Sporom. Nech $I = \langle a, b\rangle$ nie je súvislá množina. Potom $I = A \cup B$, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, A, B sú uzavreté. Nech $a \in A$, a nech $\sigma = \sup A$. Zrejme $a \leq \sigma \leq b$. Ukážeme, že $\sigma \notin A \cup B$. Nech $\sigma \in A$. Z toho vyplýva, že $\sigma < b$. Z definície $\sigma \implies (\sigma, b) \subset B$. Avšak σ je hromadný bod B, z uzavretosti $B \implies \sigma \in B \implies \sigma \in A \cap B = \emptyset$, čo je spor.
Analogicky naopak. Dokázali sme $\sigma \notin A \cup B = I$, čo je spor s uzavretosťou I. $\square$

Definícia 29. Nech (X, d) je metrický priestor. Množina $M \subset X$ (nie nutne uzavretá) sa nazýva *súvislá*, ak pre každé 2 body $a, b \in M$ existuje uzavretá súvislá množina $S \subset M$ taká, že $a \in S \wedge b \in S$.

Veta 32. Ľubovoľný interval (nie nutne uzavretý) $J \subset \mathbb{R}$ je súvislá množina.

Dôkaz: Nech $a, b \in J$. Potom $I = \{x \in J \mid a \leq x \leq b\}$ je súvislá množina podľa vety 31. Z uvedeného vyplýva, že aj $J \subset \mathbb{R}$ je súvislá množina. $\square$

Definícia 30. Nech (X, d) je metrický priestor $a, b \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to X$ je spojité zobrazenie a nech $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Potom sa množina $\varphi(\langle \alpha, \beta\rangle)$ nazýva *cesta* (oblúk) spájajúci body a, b.

[13] T.j. $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$ také, že ak $x_1, x_2 \in M$, $d(x_1, x_2) < \delta$, potom $\varrho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Veta 33. Nech $\varphi : \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathbb{R}^m$, kde $\langle\alpha,\beta\rangle \subset \mathbb{R}$, je spojité zobrazenie. Potom je $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$ uzavretá ohraničená súvislá množina.

Dôkaz: Podľa vety 5 je $\langle\alpha,\beta\rangle$ kompaktná množina. Podľa vety 27 je $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$ tiež kompaktná množina. Z vety 16 vyplýva, že je uzavretá a ohraničená.
Nech $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$ nie je súvislá.
$\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle) = A \cup B$, $A, B \neq \emptyset$ uzavreté, $A \cap B = \emptyset$. Podľa vety 24 sú $\varphi^{-1}(A)$, $\varphi^{-1}(B)$ uzavreté.
$A \cap B = \emptyset \implies \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B) = \emptyset$
$\langle\alpha,\beta\rangle = \varphi^{-1}(A) \cup \varphi^{-1}(B)$ – spor so súvislosťou intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$. $\square$

Veta 34. Ak je $M \subset \mathbb{R}^m$ oblúkovo súvislá, t.j. ak pre všetky $x, y \in M$ existuje cesta v M spájajúca x, y, potom je M súvislá.[14]

Dôkaz: Nech $a, b \in M$. Z predpokladu vyplýva, že existuje spojité zobrazenie $\varphi : \langle\alpha,\beta\rangle \to M$ také, že $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$. Podľa vety 33 je $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$ uzavretá, ohraničená a súvislá. Z definície 29 vyplýva, že M je súvislá. $\square$

Dôsledok 1.
- $B_m(a, r) \subset \mathbb{R}^m$ je súvislá, aj oblúkovo súvislá množina.
- Všetky konvexné množiny v $\mathbb{R}^m$ sú súvislé, aj oblúkovo súvislé.

1.9. Úplné metrické priestory

Definícia 31. Nech (X, d) je metrický priestor. Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ sa nazýva *Cauchyovská* (alebo fundamentálna), ak platí

$$\forall\varepsilon > 0 \;:\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;:\; \forall p, q \in \mathbb{N} \;:\; p, q \geq n_0 \implies d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Metrický priestor sa nazýva *úplný*[15], ak každá Cauchyovská postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \in X$ je konvergentná v X, t.j.

$$\exists x \in X \;:\; \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Veta 35. Metrický priestor $(\mathbb{R}^m, d_m)$ je úplný.

Dôkaz: Nech $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \in \mathbb{R}^m$ je Cauchyovská, nech $x_n = (x_1^n, \dots, x_m^n)$. Potom $\forall\varepsilon > 0 \;:\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;:\; \forall p, q \geq n_0 \;:\; d_m(x_p, x_q) < \varepsilon$.
$d_m(x_p, x_q) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j^p - x_j^q)^2} < \varepsilon$
Pre pevné j: $|x_j^p - x_j^q| < d_m(x_p, x_q) \leq \varepsilon$
$\implies \{x_j^n\}_{n=1}^\infty$ je Cauchyovská v $\mathbb{R}$ pre $\forall j \in \{1, \dots, m\}$. $\mathbb{R}$ je úplný $\implies \forall j \in \{1, \dots, m\} \;:\; \exists \overline{x}_j \in \mathbb{R} \;:\; \lim_{n\to\infty} x_j^n = \overline{x}_j \implies \lim_{n\to\infty} x_n = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_m) \in \mathbb{R}^m$. $\square$

Veta 36. Nech (X, d) je úplný metrický priestor. Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \in X$ je konvergentná vtedy a len vtedy, ak $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je Cauchyovská.

Dôkaz:
- $\Leftarrow$ Vyplýva z definície 31.
- $\Rightarrow$ Nech $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je konvergentná v X, t.j. $\forall\varepsilon > 0 \;:\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;:\; \forall n \geq n_0 \;:\; d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ pre nejaké $a \in X$. Nech $p, q \geq n_0$. Potom $d(x_p, x_q) \leq \underbrace{d(x_q, a)}_{\varepsilon/2} + \underbrace{d(x_p, a)}_{\varepsilon/2} < \varepsilon$, z čoho vyplýva, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je Cauchyovská. $\square$

[14] Opačné tvrdenie samozrejme neplatí.
[15] Napríklad euklidovský metrický priestor $((0,1), d)$ nie je úplny.

1.10. Banachova veta o pevnom bode

Definícia 32. Nech (X, d) je metrický priestor. Bod $x \in X$ sa nazýva *pevný bod zobrazenia* $f : X \to X$, ak $f(x) = x$.

Poznámka 6. x sa nazýva n-periodický bod, ak $f^n(x) = x \ \wedge \ \forall j \in \{1, \ldots, n-1\} \ : \ f^j(x) \neq x$.

Definícia 33. Nech (X, d) je metrický priestor. Zobrazenie $f : X \to X$ sa nazýva *kontraktívne na* X[16], ak existuje konštanta $k \in (0, 1)$ taká, že

$$\forall x_1, x_2 \in X \ : \ d(f(x_1), f(x_2)) \leq k\, d(x_1, x_2). \tag{1}$$

Veta 37. (Banachova veta o pevnom bode). Nech (X, d) je úplny metrický priestor a $f : X \to X$ je kontraktívne zobrazenie. Potom f má práve jeden pevný bod $x \in X$.

Dôkaz: Nech $x_0 \in x$ je ľubovoľný bod X. Definujme postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$ takto:

$$x_{n+1} = f(x_n), \ n = 0, 1, \ldots \quad \text{– tzv. postupné aproximácie}$$

Máme teda postupnosť $x_0, \ x_1 = f(x_0), \ x_2 = (f \circ f)(x_0), \ \ldots$
Platí:

$$\begin{aligned}
d(x_2, x_1) &= d(f(x_1), f(x_0)) \leq k\, d(x_1, x_0) \\
d(x_3, x_2) &= d(f(x_2), f(x_1)) \leq k\, d(x_2, x_1) \leq k^2 d(x_1, x_0) \\
&\ \vdots \\
d(x_{n+1}, x_n) &\leq k^n d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

Nech $m, n \in \mathbb{N}, \ m > n$. Použitím zovšeobecnenej trojuholníkovej nerovnosti dostávame:

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\
&\leq k^{m-1} d(x_1, x_0) + k^{m-2} d(x_1, x_0) + \cdots + k^n d(x_1, x_0) = \\
&= (k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n) d(x_1, x_0) = \\
&= k^n (1 + k + \cdots + k^{m-n-1}) d(x_1, x_0) \leq \\
&\leq k^n \left(\sum_{q=0}^{\infty} k^q \right) d(x_1, x_0) = \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall m, n > n_0 \ : \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$, teda postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská. Z úplnosti (X, d) vyplýva $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in X$.
Keďže f je kontraktívne, je aj spojité, a teda $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x)$.
Vieme, že $x_{n+1} = f(x_n)$, teda $x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Teda f má aspoň jeden pevný bod.
Teraz už treba len ukázať, že f nemá viac pevných bodov.
Nech $f(x_1) = x_1$ a $f(x_2) = x_2, \ x_1, x_2 \in X, \ x_1 \neq x_2$.
$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq k\, d(x_1, x_2)$
$0 \leq d(x_1, x_2)(1-k) \leq 0 \implies d(x_1, x_2) = 0 \implies x_1 = x_2$, čo je spor. $\square$

Poznámka 7. V predchádzajúcom dôkaze sa nachádza nerovnosť $\forall m \geq n \ : \ d(x_m, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$. Keďže $\lim_{m\to\infty} x_m = x$, potom platí:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0). \tag{2}$$

[16] Z kontraktívnosti zobrazenia vyplýva jeho rovnomerná spojitosť.

2. Diferenciálny počet funkcií viac premenných

2.1. Lineárne zobrazenia

Definícia 34. Zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sa nazýva *lineárne*, ak platí:
1. $\forall x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n \quad L(x+y) = L(x) + L(y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R} \quad L(\lambda x) = \lambda L(x)$

Namiesto $L(x)$ píšeme $L\,x$. $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$.

Tvrdenie 2. Nech $l_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, až $l_m = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^m$ je báza v $\mathbb{R}^m$ a nech $\bar{l}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, až $\bar{l}_n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ je báza v $\mathbb{R}^n$.
Ak $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, potom $x = x_1 l_1 + \cdots + x_m l_m$.
$y = (y_1, \ldots, y_n) = L(x) = L(x_1 l_1 + \cdots + x_m l_m) = x_1 L(l_1) + \cdots + x_m L(l_m)$
Ale zároveň $y = y_1 \bar{l}_1 + y_2 \bar{l}_2 + \cdots + y_n \bar{l}_n$. Nech $L(l_j) = a_{1j}\bar{l}_1 + a_{2j}\bar{l}_2 + \cdots + a_{nj}\bar{l}_n$. Potom:

$$\begin{aligned} y_1\bar{l}_1 + y_2\bar{l}_2 + \cdots + y_n\bar{l}_n = x_1(a_{11}\bar{l}_1 + a_{21}\bar{l}_2 + \cdots + a_{n1}\bar{l}_n) + \\ + x_2(a_{12}\bar{l}_1 + a_{22}\bar{l}_2 + \cdots + a_{n2}\bar{l}_n) + \\ \vdots \\ + x_m(a_{1m}\bar{l}_1 + a_{2m}\bar{l}_2 + \cdots + a_{nm}\bar{l}_n), \end{aligned}$$

čo je to isté ako:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{am}x_m \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m, \end{aligned}$$

t.j.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

Teda $y^T = A\,x^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Dohoda 1.
Označme symbolmi
- A_L – maticu A.
- $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ – množinu všetkých lineárnych zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$.
- $M(m, n)$ – množinu všetkých matíc typu $n \times m$ nad $\mathbb{R}$.

Veta 38.
1. Ak $L, M \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, potom zobrazenie $K = \lambda L + \mu M$ definované ako $K(x) = \lambda L(x) + \mu M(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ je lineárne zobrazenie.[17]
2. Ak $A, B \in M(m, n)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, potom $C = \mu A + \lambda B \in M(m, n)$.[18]
3. Zobrazenie $\varphi : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to M(m, n)$, $L \mapsto A_L$, kde A_L je zo vzťahu (3), φ je lineárne zobrazenie, pričom je bijektívne a inverzné zobrazenie φ^{-1} ku φ je lineárne zobrazenie.[19]

Veta 39. Zobrazenie $L = (L_1, \ldots, L_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je lineárne vtedy a len vtedy, ak každé zobrazenie $L_1, \ldots, L_n$ je lineárne.

---
[17] Teda $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.
[18] $M(m, n)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.
[19] φ je lineárny izomorfizmus.

Dôkaz: L_j je spojité:

$$y_j = L_j(x) = a_{1j}x_1 + \cdots + a_{mj}x_m. \quad \square \tag{4}$$

Veta 40. Každé lineárne zobrazenie $L = (L_1, \ldots, L_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je spojité.

Dôkaz: Vyplýva z vety 21[20] a vzťahu (4). $\square$

2.2. Derivácia a diferenciál

Definícia 35. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $a \in A$ je hromadný bod množiny A. Hovoríme, že zobrazenie $f : A \to \mathbb{R}^n$ je *diferencovateľné v bode a*, ak existuje také lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, že

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|_n}{\|x-a\|_m} = 0, \quad \text{kde } \begin{matrix} \|\cdot\|_m \\ \|\cdot\|_n \end{matrix} \text{ sú euklidovské normy v } \begin{matrix} \mathbb{R}^m \\ \mathbb{R}^n \end{matrix}. \tag{5}$$

Lineárne zobrazenie L nazývame *diferenciálom* (deriváciou) zobrazenia f v bode a a označujeme ho $\mathrm{d}f(a)$. Príslušnú maticu $A_{\mathrm{d}f(a)}$ označujeme $f'(a)$ (resp. $J_f(a)$) a nazývame ju *Jacobiho maticou* zobrazenia f v bode a.[21] Hovoríme, že zobrazenie $f : A \to \mathbb{R}^n$ je *diferencovateľné* na A, ak je diferencovateľné v každom bode $x \in A$. Zobrazenie $\mathrm{d}f : A \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ sa nazýva *derivácia zobrazenia f* a zobrazenie $f' : A \to M(n,m)$, $x \mapsto f'(x)$ *reprezentácia zobrazenia* $\mathrm{d}f$. Zobrazenie $\mathrm{d}f(a)$ sa nazýva tiež Frichetova derivácia zobrazenia f v bode a (resp. F-diferenciál zobrazenia f v bode a).[22]

Poznámka 8. Rovnosť (5) je ekvivalentná tvrdeniu

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists \delta > 0 \ : \ \|x-a\|_m < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a) - L(x-a)\|_n < \varepsilon \|x-a\|_m \tag{6}$$

Rozdiel $f(x) - f(a)$ nazývame prírastok zobrazenia f zodpovedajúci prírastku $x - a$. $\varepsilon\|x-a\|_m$ je chyba, ktorej sa dopustíme, keď prírastok $f(x) - f(a)$ nahradíme hodnotou diferenciálu $L(x-a) = \mathrm{d}f(a).(x-a)$ $f(x) \approx f(a) + \mathrm{d}f(a).(x-a)$ Ak $\|x-a\| < \delta$, chyba je $\varepsilon\delta$.

Poznámka 9. Rovnosť (5) z definície 35 je ekvivalentná rovnosti

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\|x-a\|_m} [f(x) - f(a) - L(x-a)] = 0 \tag{7}$$

Veta 41. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina a $f : A \to \mathbb{R}^n$, kde $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Potom zobrazenie f je diferencovateľné v a vtedy a len vtedy, ak jeho zložky sú diferencovateľné v bode a. Naviac platí:

$$\mathrm{d}f(a) = (\mathrm{d}f_1(a), \mathrm{d}f_2(a), \ldots, \mathrm{d}f_n(a)) \tag{8}$$

Dôkaz: Nech $L = (L_1, \ldots, L_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je lineárne zobrazenie. Potom $\lim_{x\to a} \frac{1}{\|x-a\|_m}[f(x) - f(a) - L(x-a)] = \lim_{x\to a} \frac{1}{\|x-a\|_m}(f_1(x) - f_1(a) - L_1(x-a), \ldots, f_n(x) - f_n(a) - L_n(x-a))$.
Z vety 19 o limitách zobrazení vyplýva, že podmienka (7) je ekvivalentná nasledovnému systému podmienok:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\|x-a\|_m}[f_i(x) - f_i(a) - L_i(x-a)] = 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{9}$$

čo je práve vtedy, keď všetky funkcie $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sú diferencovateľné v a. Ak sú podmienky (9) splnené, potom $\mathrm{d}f_i(a) = L_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, a teda dostávame $\mathrm{d}f(a) = (\mathrm{d}f_1(a), \ldots, \mathrm{d}f_n(a))$. $\square$

Veta 42. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina. Potom je zobrazenie $f = (f_1, \ldots, f_n) : A \to \mathbb{R}^n$ diferencovateľné na A vtedy a len vtedy, ak sú diferencovateľné všetky $f_1, \ldots, f_n$ na A. Naviac platí:

$\mathrm{d}f : A \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$\mathrm{d}f(x) \mapsto (\mathrm{d}f_1(x), \ldots, \mathrm{d}f_n(x))$,

kde $\mathrm{d}f_i : A \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, $x \mapsto \mathrm{d}f_i(x)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

---

[20] Ak sú všetky zložky spojité, tak aj celé zobrazenie je spojité.

[21] Prečo existuje práve jedno také zobrazenie?

[22] Ukážte, že ak $K \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^m$, potom $\mathrm{d}K(a) = K$.

2.3. Parciálne derivácie funkcií

Definícia 36. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $f : A \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$.
$A(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_m) = \{x_k \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m) \in A\}, \ k = 1, \dots, m$
Funkcia $\varphi_k : A(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_m) \to \mathbb{R}, \ x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m)$ sa nazýva *parciálna funkcia* funkcie f v premennej x_k pre bod $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$.
Ak existuje $\lim_{x_k \to a_k} \frac{\varphi_k(x_k) - \varphi_k(a_k)}{x_k - a_k} = \frac{\mathrm{d}\varphi_k(a_k)}{\mathrm{d}x_k}$, potom hodnotu $\frac{\mathrm{d}\varphi_k(a_k)}{\mathrm{d}x_k}$ nazývame *parciálnou deriváciou* funkcie f podľa premennej x_k v bode a a označujeme ju

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_k}.$$

Definícia 37. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $f : A \to \mathbb{R}$ a existuje parciálna derivácia $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ v každom bode $x \in A$. Potom je definovaná funkcia

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : A \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$$

a nazývame ju *parciálna derivácia* funkcie f podľa premennej x_k.

Definícia 38. Nech sú splnené podmienky predchádzajúcej definície. Potom vektor

$$\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_m} \right) = f'(a)$$

sa nazýva *gradient funkcie* f a označujeme ho buď $\operatorname{grad} f(a)$ alebo $\nabla f(a)$.

Veta 43. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina a $f : A \to \mathbb{R}$ je funkcia diferencovateľná v bode $a = (x_1, \dots, x_m) \in A$. Potom existujú parciálne derivácie $\frac{\partial f(a)}{\partial x_k}$, $k = 1, \dots, m$. Ak $[\mathrm{d}f(a)]$ je reprezentácia zobrazenia $\mathrm{d}f(a) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, t.j. $f'(a) = [\mathrm{d}f(a)]$ – Jacobiho matica zobrazenia f v a, potom $f'(a) = [\mathrm{d}f(a)] = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_m} \right)$.

Dôkaz: Nech $\mathrm{d}f(a) = L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je lineárne zobrazenie.
$L(x - a) = l_1(x_1 - a_1) + \dots + l_m(x_m - a_m)$.
$[L] = (l_1, \dots, l_m), \ l_i \in \mathbb{R}, \ i \in \{1, \dots, m\}$
$x = (x_1, \dots, x_m), \ a = (a_1, \dots, a_m)$.
Pretože f je diferencovateľná v bode a, tak funkcia $r : A \to \mathbb{R}$:

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{||x - a||}[f(x) - f(a) - L(x - a)], & x \neq a, \\ 0 & x = a \end{cases}$$

je spojitá a $r(a) = 0$.
Z uvedeného vyplýva, že ak $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m) \in A$, potom $f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m) - f(a) - l_k(x_k - a_k) = r(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m)|x_k - a_k|$.
Ďalej, pretože $r(a) = 0$, a r je spojité, tak $\varphi_k(x_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m)$ je diferencovateľná v bode $x_k = a_k$ a platí $\frac{\mathrm{d}\varphi_k(a_k)}{\mathrm{d}x_k} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}$, $(k \in \{1, \dots, m\})$.
Ďalej:
$f(x) - f(a) = L(x - a) + r(x)||x - a||$,
$L(x - a) = l_1(x_1 - a_1) + \dots + l_m(x_m - a_m)$
$l_k = \frac{\mathrm{d}\varphi_k(a_k)}{\mathrm{d}x_k} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}$
z čoho vyplýva, že
$f'(a) = L = (l_1, \dots, l_m) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_m} \right) = \operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a)$. $\square$

Poznámka 10. Dôsledkom viet 41 a 43 je nasledujúca veta:

Veta 44. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina a $f : A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľné zobrazenie v bode $a \in A$. Nech $f = (f_1, \dots, f_n)$. Potom reprezentácia zobrazenia $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je Jacobiho matica.

$$f'(a) = [\mathrm{d}f(a)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_n(a) \end{pmatrix}$$

Poznámka 11. Lineárna aproximácia zobrazenia f v okolí bodu a je reprezentovaná lineárnym zobrazením.

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_n(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{pmatrix}$$

Dôkaz: Z vety 41 vyplýva: $\mathrm{d}f(a)y = (\mathrm{d}f_1(a)y, \dots, \mathrm{d}f_n(a)y), \quad y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Z vety máme:

$$\mathrm{d}f_1(a) = \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} y_1 + \dots + \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_m} y_m$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{d}f_n(a) = \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} y_1 + \dots + \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_m} y_m,$$

z čoho ďalej pre reprezentáciu zobrazenia $\mathrm{d}f(a)$ dostávame:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \quad \square$$

2.4. Postačujúca podmienka diferencovateľnosti

Veta 45. (Lagrangeova veta o strednej hodnote). Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $r > 0$, $B_m(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|a - x\| < r\} \subset A$ a nech existujú parciálne derivácie $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}$ vo všetkých bodoch $x \in B_m(a, r)$. Potom pre každé $x \in B_m(a, r)$ existujú čísla $t_i \in (0, 1)$, $i \in \{1, \dots, m\}$ také, že

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(c_i)}{\partial x_i}(x_i - a_i),$$

kde $c_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t_i(x_i - a_i), a_{i+1}, \dots, a_m)$.

Dôkaz: Ak $x = a$, tak rovnosť je zrejmá. Nech $x \in B_m(a, r)$, $x \neq a$, potom

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) = {} & [f(x_1, \dots, x_m) - f(a_1, x_2, \dots, x_m)] + \\ & + [f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, x_3, \dots, x_m)] + \\ & \vdots \\ & + [f(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m) - f(a_1, \dots, a_m)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Pre $i \in \{1, \dots, m\}$ definujme funkciu $F_i : M_i \to \mathbb{R}$, $F_i(y) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_m)$, kde $M_i = \{z \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, z, a_{i+1}, \dots, a_m) \in B_m(a, r)\}$ a nech $G_i : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R}$, $t \mapsto a_i + t(x_i - a_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$.

$$f(x) - f(a) = [F_1(x_1) - F_1(a_1)] + [F_2(x_2) - F_2(a_2)] + \dots + [F_m(x_m) - F_m(a_m)] \tag{11}$$

Pretože existuje $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$, $i \in \{1,\dots,m\}$, existujú aj derivácie $\frac{\mathrm{d}F_i(y)}{\mathrm{d}y} = F_i'(y)$ pre všetky $y \in B_m(a,r)$, z čoho vyplýva, že existujú derivácie $(F_i \circ G_i)'(t)$ pre všetky $t \in (0,1)$.

$$(F_i \circ G_i)'(t) = F_i'(G_i(t)).G_i'(t) = \frac{\partial f(a_i + t(x_i - a_i))(x_i - a_i)}{\partial x_i}$$

Funkcie $(F_i \circ G_i)$ spĺňajú predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote pre funkciu jednej premennej, a teda existuje $t_i \in (0,1)$ také, že

$$F_i(x_i) - F_i(a_i) = (F_i \circ G_i)(1) - (F_i \circ G_i)(0) = (F_i \circ G_i)'(t_i) = \frac{\partial f(a_i + t_i(x_i - a_i))(x_i - a_i)}{\partial x_i}$$

Dostadením do vzťahu (11) dostávame rovnosť z vety 45. □

Veta 46. **(Postačujúca podmienka diferencovateľnosti).** Nech $M \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená, $a \in M$, $B_m(a,r) \subset M$ a funkcia $f : M \to \mathbb{R}$ má parciálne derivácie $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i \in \{1,\dots,m\}$ pre všetky $x \in B_m(a,r)$, pričom funkcie $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, $i \in \{1,\dots,m\}$ sú spojité v a. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode a a $\mathrm{d}f(a) = L$, $L : x = (x_1,\dots,x_m) \mapsto \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}x_1 + \dots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_m}x_m$.

Dôkaz: Nech $L\,x = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}x_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}x_m$. Potom

$$|f(x) - f(a) - L(x-a)| = \left| f(x) - f(a) - \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}(x_1 - a) - \dots - \frac{\partial f(a)}{\partial x_m}(x_m - a) \right| \tag{12}$$

Podľa vety 45 je

$$\forall x \in B_m(a,\varrho) \ : \ f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(c_i)}{\partial x_i}(x_i - a_i) \tag{13}$$

pre nejaké $\varrho > 0$, pričom $c_i \in B_m(a,\varrho)$. Teraz dosadíme (13) do (12):

$$|f(x) - f(a) - L(x-a)| = \left| \left(\frac{\partial f(c_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \right)(x_1 - a_1) + \dots + \left(\frac{\partial f(c_m)}{\partial x_m} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_m} \right)(x_m - a_m) \right|$$

Z Cauchyho nerovnosti $|\langle u,v \rangle| \le \|u\|.\|v\|$ vyplýva:

$$\left| \left(\frac{\partial f(c_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \right)(x_1 - a_1) + \dots + \left(\frac{\partial f(c_m)}{\partial x_m} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_m} \right)(x_m - a_m) \right| \le$$
$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f(c_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \right)^2} . \ \|x - a\|_m,$$

kde $\|x - a\|_m = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2}$.
Máme teraz

$$\|f(x) - f(a) - L(x-a)\| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f(c_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \right)^2} . \ \|x - a\|_m, \tag{14}$$

kde $c_i(x) = (a_1,\dots,a_{i-1}, a_i + t(x_i - a_i), x_{i+1},\dots,x_n)$.
Platí $\lim_{x \to a} c_i(x) = a$. Zo spojitosti funkcií $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_m}$ v bode a vyplýva

$$\lim_{x \to a} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f(c_i(x))}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right)^2} = 0,$$

a preto z nerovnosti (14) dostávame, že $\lim_{x \to a} \frac{1}{\|x-a\|}[f(x) - f(a) - L(x-a)] = 0$, z čoho vyplýva diferenovateľnosť funkcie f v bode a a rovnosť $\mathrm{d}f(a) = L$. □

Poznámka 12. Spojitosť parciálnych derivácií v a nie je pre diferencovateľnosť f v bode a nutná.

Veta 47. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená, $f : A \to \mathbb{R}^n$ a $g : A \to \mathbb{R}^n$ sú diferencovateľné zobrazenia v a, $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom platí:

1. Zobrazenie $(f+g) : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + g(x)$ je diferencovateľné zobrazenie v a a $\mathrm{d}(f+g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)$.
2. Zobrazenie $(\lambda f) : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda f(x)$ je diferencovateľné v a a $\mathrm{d}(\lambda f)(a) = \lambda\,\mathrm{d}f(a)$.

Veta 48. **(Leibnitzova formula o derivovaní zloženej funkcie).** Nech $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ sú otvorené množiny, $f : A \to B$ je diferencovateľná v bode $a \in A$ a $g : B \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $b = f(a)$. Potom zobrazenie $h = (g \circ f) : A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľné v a a platí:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g \circ f)(a) &= \mathrm{d}g(a) \circ \mathrm{d}f(a) \\ (g \circ f)'(a) &= g'(b).f'(a) \end{aligned} \tag{15}$$

Dôkaz: Označme $L = \mathrm{d}f(a)$, $M = \mathrm{d}g(b)$, $b = f(a)$. Potom existujú spojité zobrazenia $r : A \to \mathbb{R}^n$, $s : B \to \mathbb{R}^n$ také, že

$$\forall x \in A \ : \ f(x) - f(a) = L(x-a) + r(x)\|x-a\|_m \tag{16}$$

$$\forall y \in B \ : \ g(y) - g(b) = L(y-b) + s(y)\|y-b\|_n, \tag{17}$$

pričom $\lim_{x \to a} r(x) = 0$ a $\lim_{y \to b} s(y) = 0$.

$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) = g(f(x)) - g(f(a)) = M(f(x) - f(a)) + s(f(x))\|f(x) - f(a)\|_n \overset{(16)}{=} M(L(x - a) + r(x)\|x-a\|_m) + s(f(x))\,\|L(x-a) + r(x)\|x-a\|_m\|_n = ML(x-a) + \|x-a\|_m Mr(x) + s(f(x))\|x - a\|_m \left\| L(\frac{1}{\|x-a\|_m}(x-a)) + r(x) \right\|_n$

Dostávame: $(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) = ML(x-a) + w(x)\|x-a\|_m$, kde $w : A \to \mathbb{R}^n$,

$$w(x) = \begin{cases} Mr(x) + s(f(x))\|L\left(\frac{1}{\|x-a\|}(x-a)\right) + r(x)\|_n, & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$$

Množina $\left\{z \in \mathbb{R}^m \mid z = \frac{1}{\|x-a\|}(x-a),\ x \in \mathbb{R}^m \setminus \{a\}\right\} = \{z \in \mathbb{R}^m \mid \|z\|_m = 1\}$ je kompaktná $\Longrightarrow$ uzavretá a ohraničená.

Vieme, že $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie $\Longrightarrow$ L je ohraničené na $\{z \in \mathbb{R}^m \mid \|z\|_m = 1\}$. Pretože $\lim_{x \to a} r(x) = 0$, existuje $\varrho > 0$ také, že $x \mapsto L(\frac{1}{\|x-a\|}(x-a)) + r(x)$ je ohraničené na $B_m(a, \varrho)$. Z (17) $\Longrightarrow$ $\lim_{x \to a} s(f(x)) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to a} s(f(x))\|L\left(\frac{1}{\|x-a\|}(x-a)\right) + r(x)\|_n = 0$.

Pretože $\lim_{x \to a} Mr(x) = 0$, tak $\lim_{x \to a} w(x) = 0 = w(a)$. Dostávame, že h je dif. v a a $\mathrm{d}h(a) = \mathrm{d}(g \circ f)(a) = ML = \mathrm{d}g(b).\,\mathrm{d}f(a)$. $\square$

2.5. Derivácia v smere a jej geometrický význam

Definícia 39. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $a \in A$. Hovoríme, že zobrazenie $f : A \to \mathbb{R}^n$ je *diferencovateľné v bode a v smere vektora $v \in \mathbb{R}^m$*, ak existuje limita

$$\mathrm{D}f(a)v = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(a+tv) - f(a)\right].$$

Hodnotu $\mathrm{D}f(a)v$ nazývame G-diferenciál (Gâteauxov diferenciál) zobrazenia f v bode a v smere v.

Ak existuje $\mathrm{D}f(a)v$ pre všetky $v \in \mathbb{R}^m$ a zobrazenie $\mathrm{D}f(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto \mathrm{D}f(a)v$ je spojité a lineárne, potom sa toto zobrazenie $\mathrm{D}f(a)$ nazýva *G-derivácia zobrazenia f v bode a*.

Poznámka 13. Ak $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina a f má G-deriváciu v smere $l_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, kde číslo 1 sa nachádza na i-tej pozícii, potom

$\mathrm{D}f(a)l_i = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(a + tl_i) - f(a)] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m)] = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$.

Pretože $\mathrm{D}f(a)$ je lineárne zobrazenie a $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, môžeme písať v tvare $x = x_1 l_1 + x_2 l_2 + \cdots + x_m l_m$, tak $\mathrm{D}f(a)(x) = \mathrm{D}f(a)(x_1 l_1 + \cdots + x_m l_m) = x_1\,\mathrm{D}f(a)l_1 + \cdots + x_m\,\mathrm{D}f(a)l_m = x_1 \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} + \cdots + x_m \frac{\partial f(a)}{\partial x_m}$.

Veta 49. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $f : A \to \mathbb{R}^n$ je F-diferencovateľná v $a \in A$ a $v \in \mathbb{R}^m$. Potom existuje G-derivácia $\mathrm{D}f(a)v$ zobrazenia f v bode a v smere v a platí

$$\mathrm{D}f(a)v = \mathrm{d}f(a)v.$$

Dôkaz: Nech f je F-diferencovateľná. Z toho vyplýva, že $f(x) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(x-a) + r(x)\|x-a\|_m$, kde $r : A \to \mathbb{R}^n$ je spojité a $\lim_{x\to a} r(x) = 0$.
$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(a+tv) - f(a)] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\mathrm{d}f(a)(tv) + r(a+tv)\|tv\|_m] = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} t\,\mathrm{d}f(a)v}_{\mathrm{d}f(a)v} +$
$\underbrace{\lim_{t\to 0} r(a+tv)t\|v\|_m}_{=0} = \mathrm{d}f(a)v.$ □

Poznámka 14. Ak $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$, tak
$\mathrm{D}f(a)v = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_m}v_m, \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$
$\Gamma = \Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A)\}$ – graf funkcie f.
Definujeme tzv. tangenciálny priestor ku Γ v bode $(a, f(x))$, kde $a \in A$:

$$T_a\Gamma = \left\{ \underbrace{\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_m}v_m}_{\langle \operatorname{grad} f(a), v\rangle} \;\middle|\; v = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

$w = \langle \operatorname{grad} f(a), v\rangle$ – tangenciálny vektor ku Γ v bode $(a, f(a))$

Veta 50. Nech $A = (a_{ij})$ je matica typu $m \times n$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\begin{aligned} &\|Ax\|_m \le \|A\|\ \|x\|_n\ , \\ &\text{kde } \|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}\ , \end{aligned} \qquad \text{pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď pre všetky } i \text{ platí } v_i = \lambda_i x, \text{ pre nejaké } \lambda_i\mathbb{R}. \tag{18}$$

Dôkaz:
$$\|Ax\|_m^2 = (\underbrace{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n}_{(v_1,x)})^2 + (\underbrace{a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n}_{(v_2,x)})^2 + \cdots + (\underbrace{a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n}_{(v_m,x)})^2.$$
$v_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1m}), \ldots, v_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$
$|(v_i, x)| \le \|v_i\|_n \|x\|_n,\ i \in \{1, \ldots, m\}$
$\|Ax\|_m^2 \le (a_{11}^2 + \cdots + a_{1n}^2)\|x\|_n^2 + \cdots + (a_{m1}^2 + \cdots + a_{mn}^2)\|x\|_n^2 = \|A\|^2\|x\|_n^2.$ □

Veta 51. Nech $f : A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$, kde $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina a $\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_m}\right) \ne (0, \ldots, 0)$. Potom

$$\sup_{v \in S^{m-1}} \mathrm{D}f(a)v = \mathrm{D}f(a)w = \|\operatorname{grad} f(a)\|_m\ , \tag{19}$$

kde $w = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(a)\|_m} \operatorname{grad} f(a)$ alebo $w = \frac{-1}{\|\operatorname{grad} f(a)\|_m} \operatorname{grad} f(a)$ a $S^{m-1} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|y\|_m = 1\}$.

Dôkaz: Ak $v \in S^{m-1}$, z vety 50 vyplýva $\mathrm{D}f(a)v \le |\mathrm{D}f(a)v| = \left|\left(\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_m}\right), (v_1, \ldots, v_m)\right)\right| \le \|\mathrm{D}f(a)\|\ \|v\|_m = \|\mathrm{D}f(a)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_m}\right)^2} = \|\operatorname{grad} f(a)\|_m$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď existuje nejaké $0 \ne \alpha \in \mathbb{R}$ také, že $\alpha v = \operatorname{grad} f(a)$, t.j. $v = \lambda \operatorname{grad} f(a)$, $\lambda = 1/\alpha$.
$\|v\|_m = |\lambda|\ \|\operatorname{grad} f(a)\|_m \implies |\lambda| = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(a)\|_m}$
$|\mathrm{D}f(a)\underbrace{\lambda \operatorname{grad} f(a)}_{w}| = \|\operatorname{grad} f(a)\|_m.$ □

2.6. Derivácie vyšších rádov

Definícia 40.

$$L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$
$$L^{k+1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^m, L^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$$
$$L^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^{m^k.n}$$

Existuje izomorfizmus $i : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{m.n}$.

Definícia 41. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $f : A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľné zobrazenie na A a $\mathrm{d}f : A \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ je jeho derivácia. Ak zobrazenie $\mathrm{d}f$ je diferencovateľné na A, potom zobrazenie $\mathrm{d}^2 f : A \to L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f)$ sa nazýva *druhá derivácia* zobrazenia f na A. Indukciou možno definovať k-tu deriváciu zobrazenia f na A:

$\mathrm{d}^k f : A \to L^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$
$\mathrm{d}^k f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{k-1} f)$

Definícia 42. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená, $f : A \to \mathbb{R}$ a nech existuje parciálna derivácia $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ funkcie f podľa premennej x_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$ v každom bode $x \in A$. Potom ak pre funkcie $g_k : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ existuje parciálna derivácia $\frac{\partial g_k(x)}{\partial x_j}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, tak túto deriváciu nazývame *parciálnou deriváciou druhého rádu* funkcie f v bode x podľa j-tej a k-tej premennej a označujeme ju $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j}$.
Indukciou možno definovať *parciálnu deriváciu k-teho rádu*, ak sú definované parciálne derivácie $(k-1)$-ho rádu:

$$\frac{\partial^{k-1} f(x)}{\partial x_{j_{k-1}} \ldots \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}} \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{k-1} f(x)}{\partial x_{j_{k-1}} \ldots \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}\right) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_j \partial x_{j_{k-1}} \ldots \partial x_{j_1}}$$

Definícia 43. Zadefinujme funkciu g nasledovne: $g : x \mapsto \mathrm{D}f(x) y_1$, kde $\mathrm{D}f(x) y_1$ je G-derivácia funkcie f v bode x v smere y_1. Ak g má G-deriváciu v smere y_2, potom $\mathrm{D}g(x) y_2$ sa nazýva *2. G-derivácia funkcie f v smere $y_1 y_2$* a označujeme ju $\mathrm{D}^2 f(x) y_1 y_2$. Indukciou možno definovať *k-tu deriváciu funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ v smere $y_1 y_2 \ldots y_k$*, $y_i \in A, i \in \{1, \ldots, k\}$.
$\mathrm{D}^k f(x) y_1 \ldots y_k$

Veta 52. Nech $l_1, \ldots, l_m$ je báza jednotkových vektorov v $\mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $f : A \to \mathbb{R}$ a existuje k-ta derivácia $\mathrm{D}^k f(a)\ l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_k}$ v smere $l_{i_1} \ldots l_{i_k}$, $a \in A$, potom

$$\mathrm{D}^k f(a)\ l_{i_1} \ldots l_{i_k} = \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} \tag{20}$$

Dôkaz: Vieme, že $\mathrm{D}f(x) l_i = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Dôkaz možno uskutočniť indukciou pre $k > 1$. □

Veta 53. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $u, v \in \mathbb{R}^m$, a nech pre všetky $x \in A$ existujú derivácie $\mathrm{D}f(x)u$, $\mathrm{D}f(x)v$, $\mathrm{D}^2 f(x)uv$, $\mathrm{D}^2 f(x)vu$ a funkcie

$g_1 : A \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{D}^2 f(x)uv,$
$g_2 : A \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{D}^2 f(x)vu$

sú spojité. Potom $\mathrm{D}^2 f(x)uv = \mathrm{D}^2 f(x)vu$ pre všetky $x \in A$.

Dôkaz: Definujme funkcie g a h takto:

$g(x) = f(x + tu) - f(x),$
$h(x) = f(x + sv) - f(x).$

Nech $a \in A$. $Q_{ts} = [f(a+tu+sv) - f(a+sv)] - [f(a+tu) - f(a)] = g(a+sv) - g(a) = h(a+tu) - h(a)$.
Použijeme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote na funkciu g. Podľa nej existuje číslo $\sigma \in (0, 1)$ také, že

$Q_{ts} = \mathrm{D}g(a + \sigma sv)sv = s[\mathrm{D}f(a + tu + \sigma sv)v - \mathrm{D}f(a + \sigma sv)v]$

Opätovne použijeme Lagrangeovu vetu, podľa ktorej existuje $\tau \in (0, 1)$ také, že

$\mathrm{D}f(a + tu + \sigma sv)v - \mathrm{D}f(a + \sigma sv)v = t\,\mathrm{D}^2 f(a + \sigma sv + \tau tu)vu.$

Z uvedeného ďalej vyplýva, že

$Q_{ts} = st\,\mathrm{D}^2 f(a+\sigma sv+\tau tu)vu$.
Avšak $Q_{ts} = h(a+tu) - h(a)$. Analogicky dostaneme, že $Q_{ts} = ts\,\mathrm{D}^2 f(a+\mu sv+\nu tu)uv$ pre nejaké $\mu,\nu \in (0,1)$.
$\mathrm{D}^2 f(a+\mu sv+\nu tu)vu = \mathrm{D}^2 f(a+\sigma sv+\tau tu)uv$.
Zo spojitosti $\mathrm{D}^2 f(x)uv, \mathrm{D}^2 f(x)vu$ vyplýva, že ak $t,s\to 0$, tak dostávame, že $\mathrm{D}^2 f(a)vu = \mathrm{D}^2 f(a)uv$. $\square$

Dôsledok 2. Ak $u=l_i$, $v=l_j$ vo vete, potom $\mathrm{D}^2 f(a)l_il_j = \mathrm{D}^2 f(a)l_jl_i$ (t.j. $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j\partial x_i} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\partial x_j}$).

Lema 4. Nech $A\subset\mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $f: A\to\mathbb{R}$, $a\in A$, $r>0$ je také číslo, že $B_m(a,r) = \{y\in\mathbb{R}^m \mid \|y-a\|_m < r\}\subset A$ a nech pre $\forall x\in B_m(a,r)$ existujú parciálne derivácie $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}$. Potom existujú čísla $\sigma_i\in(0,1)$, $i\in\{1,\dots,m\}$ také, že $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^m \mathrm{D}f(c_i)l_i(x_i-a_i)$, $x\in B_m(a,r)$, $c_i = (a_1,\dots,a_{i-1},a_i+\sigma_i(x_i-a_i),x_{i+1},\dots,x_m)$.

Dôkaz:
$g(a+sv)-g(a) = \sum_{i=1}^m \mathrm{D}g(c_i)l_i(sv_i) = s\sum_{i=1}^m \mathrm{D}g(c_i)l_iv_i$,
kde $c_i = (a_1,\dots,a_{i-1},a_i+\sigma_isv_i,a_{i+1},\dots,a_m) \xrightarrow{s\to 0} a$.
$\mathrm{D}g(x) = \mathrm{D}f(x+tu) - \mathrm{D}f(x)$
$\mathrm{D}g(c_i)l_i = \mathrm{D}f(c_i+tu)l_i - \mathrm{D}f(c_i)l_i = \sum_{i=1}^m \mathrm{D}^2 f(d_j)l_itu_i$
$d_j = d_j(s,t) \xrightarrow{s,t\to 0} a$.
$Q_{ts} = st\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \mathrm{D}^2 f(d_j)l_ju_i\right) l_iv_i$
Analogicky $Q_{ts} = st\sum_{i=1}^m \left(\mathrm{D}^2 f(\tilde{d}_j)l_jv_i\right) l_iu_i \qquad \tilde{d}_j \xrightarrow{s,t\to 0} a$.
Ak $s,t\longrightarrow 0$ potom (s využitím spojitosti g_1,g_2):

$$\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^m \mathrm{D}^2 f(d_i)l_ju_j\right)l_iv_i = \sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^m \mathrm{D}^2 f(\tilde{d}_j)l_jv_i\right)c_iu_i$$
$$\sum_{i=1}^m \mathrm{D}^2 f(a)ul_iv_i = \sum_{i=1}^m \mathrm{D}^2 f(a)vl_iu_i$$
$$\mathrm{D}^2 f(a)uv = \mathrm{D}^2 f(a)vu$$

Dôsledok 3. Nech sú splnené predpoklady vety 53. Potom $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}$.

2.7. Taylorova veta

Definícia 44. Nech $A\subset\mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $f: A\to\mathbb{R}$ je k-krát diferencovateľná v bode $a\in A$, t.j. existujú $\mathrm{d}^i f(a)$, $1\le i\le k$. Potom zobrazenie $T_kf(a):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ také, že

$$T_kf(a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(a)(x-a) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathrm{d}^k f(a)(x-a)^k,$$

kde $(x-a)^j = \underbrace{(x-a).\dots.(x-a)}_{j}$ sa nazýva *Taylorov polynóm* k-teho stupňa funkcie f v bode a.

Poznámka 15. Vieme, že ak $\mathrm{d}^k f(a)$ existujú, potom existujú aj $\mathrm{D}^k f(a)$ a tiež vieme, že:

$$\mathrm{d}f(a)(x-a) = \mathrm{D}f(a)(x-a) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i-a_i)$$
$$\mathrm{d}^2 f(a)(x-a)^2 = \mathrm{D}^2 f(a)(x-a)^2 = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^m \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\partial x_j}(x_i-a_i)(x_j-a_j)$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{d}^k f(a)(x-a)^k = \mathrm{D}^k f(a)(x-a)^k = \sum_{\substack{i_1=1,\dots\\ i_k=1}}^m \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(x_{i_1}-a_{i_1})\dots(x_{i_k}-a_{i_k})$$

Veta 54. **(Taylorova).** Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $a \in A$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je $(k+1)$-krát spojite diferencovateľná na $B_m(a, \varrho) \subset A$ pre nejaké $\varrho > 0$. Potom pre všetky $x \in B_m(a, \varrho)$ existuje také $t \in (0, 1)$, že

$$f(x) = T_k f(a)(x) + \frac{1}{(k+1)!}\,\mathrm{d}^{k+1} f(a + t(x-a))(x-a)^{k+1}. \tag{21}$$

Dôkaz: Nech $x \in B_m(a, \varrho)$. Definujme funkciu $g : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, $g(s) = f(a + s(x-a))$, kde $\varepsilon > 0$ je tak malé, že $a + s(x-a) \in B_m(a, \varrho)$ pre všetky $s \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Vieme, že g je $(k+1)$-krát spojite diferencovateľná v bode $s = 0$.
Použitím Leibnitzovej formuly dostávame:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g(s)1 &= \mathrm{d}f(a + s(x-a))(x-a) \\ &\vdots \\ \mathrm{d}^i g(s)(1, 1, \ldots, 1) &= \mathrm{d}^i f(a + s(x-a))(x-a)^i, \qquad 1 \le i \le k+1, \end{aligned} \tag{22}$$

teda:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g(s)1 = \mathrm{D}g(s)1 &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[g(s + 1t) - g(s)] = \frac{\mathrm{d}g(s)}{\mathrm{d}s} \\ &\vdots \\ \mathrm{d}^i g(s)(1, 1, \ldots, 1) &= \frac{\mathrm{d}^i g(s)}{\mathrm{d}s^i} \end{aligned} \tag{23}$$

Použijeme Taylorovu formulu pre funkciu g v bode $s = 0$.

$$g(s) = g(0) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \cdot \frac{\mathrm{d}^i g(0)}{\mathrm{d}s^i} s^i + \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{k+1} g(ts)}{\mathrm{d}s^{k+1}}, \quad t \in (0, 1) \tag{24}$$

Položme $s = 1$, $g(1) = f(x)$, $g(0) = f(a)$. Zo vzťahu (24) vyplýva:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\,\mathrm{d}^i f(a)(x-a)^i}_{T_k f(a)(x-a)} + \frac{1}{(k+1)!}\,\mathrm{d}^{k+1} f(a + t(x-a))(x-a)^{k+1}$$

2.8. Extrémy funkcií viac premenných

Definícia 45. Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. Hovoríme, že funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ má v bode $a \in A$ *ostré lokálne minimum*, resp. *ostré lokálne maximum*, ak existuje okolie $\mathcal{U}(a)$ bodu a také, že $\forall x \in \operatorname{int}\mathcal{U}(A) \cap A$ je $f(x) > f(a)$, resp. $\forall x \in \operatorname{int}\mathcal{U}(A) \cap A$ je $f(x) < f(a)$. Ak v uvedených výrokoch zameníme ostré nerovnosti $f(x) > f(a)$, resp. $f(x) < f(a)$ za neostré nerovnosti, dostaneme definície *lokálneho minima*, resp. *lokálneho maxima*.
Hovoríme, že funkcia f má *najmenšiu*, resp. *najväčšiu hodnotu* na A (*globálny extrém*), ak existuje $c \in A$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \ge f(c)$, resp. $f(x) \le f(c)$.

Veta 55. **(Eulerova nutná podmienka).** Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina a $f : A \to \mathbb{R}$ má v bode $a \in A$ lokálny extrém. Nech existuje derivácia $\mathrm{D}f(a)v$ v bode a v smere $v \in \mathbb{R}^m$. Potom $\mathrm{D}f(a)v = 0$.

Dôkaz: Definujme funkciu $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a + tv)$, kde $\varepsilon > 0$ je také, že $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \ : \ a + tv \in A$.

$$\frac{\mathrm{d}g(0)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{D}f(a)v$$

Ak by $\frac{\mathrm{d}g(0)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{D}f(a)v \neq 0$, tak g by nemala v 0 lokálny extrém. Pretože $g(0) = f(a)$, tak by ani f nemala v bode a lokálny extrém $\implies \mathrm{D}f(a)v = 0$. $\square$

Veta 56. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $a \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$ má parciálne derivácie

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(a)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_m}.$$

Nech f má v bode a lokálny extrém. Potom

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_m} = 0.$$

Dôkaz: Z vety 55 vyplýva rovnosť $\mathrm{D}f(a)l_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0$ pre všetky $i \in \{1, \dots, m\}$. $\square$

Definícia 46. Bod $a \in A$, pre ktorý $\frac{\partial f(a)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(a)}{\partial x_m} = 0$ sa nazýva *stacionárny bod* funkcie f.

Veta 57. (Lagrangeova postačujúca podmienka). Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $f : A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia v okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu $a \in A$, pričom platí:

(1) Bod a je stacionárny bod funkcie f, t.j. $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$ pre všetky $i \in \{1, \dots, m\}$

(2) Pre každé $x \in \mathcal{U}(a)$ existuje derivácia $\mathrm{d}^2 f(x)$, pričom pre všetky $v \in \mathbb{R}^m$ je zobrazenie $\Phi_v : \mathcal{U}(a) \to \mathbb{R}$, $\Phi_v(x) = \mathrm{d}^2 f(x)v^2$ spojité v bode a.

Potom platia nasledujúce tvrdenia:

(i) Ak 2. derivácia funkcie f v bode a je kladne definitná, t.j. $\forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \ : \ \mathrm{d}^2 f(a)v^2 > 0$, potom má funkcia f ostré lokálne minimum v bode a.

(ii) Ak 2. derivácia funkcie f v bode a je záporne definitná, t.j. $\forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \ : \ \mathrm{d}^2 f(a)v^2 < 0$, potom má funkcia f ostré lokálne maximum v bode a.

(iii) Ak existujú smery $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ také, že $(\mathrm{d}^2 f(a)v_1^2)(\mathrm{d}^2 f(a)v_2^2) < 0$, potom nemá funkcia f v bode a lokálny extrém.[23]

Dôkaz: Keďže a je stacionárny bod funkcie f, potom $\forall i \in \{1, \dots, m\} \ : \ \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$. Nech $\varrho > 0$ je také, že $B_m(a, \varrho) \subset A$. Ak je toto číslo dostatočne malé, potom z Taylorovej vety vyplýva, že

$$\forall x \in B_m(a, \varrho) \ : \ f(x) = f(a) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a + t(x-a))(x-a)^2. \tag{25}$$

Z predpokladu (2) máme rovnosť $\lim_{x\to a} \mathrm{d}^2 f(a+t(x-a)) = \mathrm{d}^2 f(a)$, z čoho vyplýva, že ak $\forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \ :$ $\mathrm{d}^2 f(a)v^2 \neq 0$, tak $\forall x \in B_m(a, \varrho) \setminus \{a\} \ : \ \mathrm{sgn}(\mathrm{d}^2 f(a)v^2) = \mathrm{sgn}(\mathrm{d}^2 f(a + t(x-a))(x-a)^2)$, kde $\varrho > 0$ je dostatočne malé. Položme teraz ϱ tak malé. Rozoberme teraz postupne prípady (i) až (iii):

(i) $\mathrm{d}^2 f(a)v^2 > 0 \implies \forall x \in B_m(a, \varrho) \setminus \{a\} \ : \ \mathrm{d}^2 f(a + t(x-a))(x-a)^2 > 0$.
Potom zo vzťahu (25) vyplýva $\forall x \in B_m(a, \varrho) \setminus \{a\} \ : \ f(x) > f(a)$.

(ii) Analogicky (zámenou znamienok).

(iii) Existujú $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ také, že $(\mathrm{d}^2 f(a)v_1^2)(\mathrm{d}^2 f(a)v_2^2) < 0$. Ďalej existujú čísla $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ a vektory $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^m$ také, že $v_1 = k_1(p_1 - a)$ a $v_2 = k_2(p_2 - a)$.

Potom $(\mathrm{d}^2 f(a)v_1^2)(\mathrm{d}^2 f(a)v_2^2) = k_1^2 k_2^2 (\mathrm{d}^2 f(a)(p_1 - a)^2)(\mathrm{d}^2 f(a)(p_2 - a)^2) < 0$, z čoho vyplýva:

Buď (a) $\mathrm{d}^2 f(a)(p_1 - a)^2 < 0, \quad \mathrm{d}^2 f(a)(p_2 - a)^2 > 0$,
alebo (b) $\mathrm{d}^2 f(a)(p_1 - a)^2 > 0, \quad \mathrm{d}^2 f(a)(p_2 - a)^2 < 0$.

Zo vzťahu (25) vyplýva:

(a) $f(p_1) < f(a), \ f(p_2) > f(a)$ nie je extrém v a.
(b) $f(p_1) > f(a), \ f(p_2) < f(a)$ nie je extrém v a. $\square$

Zaoberajme sa teraz tým, čomu sa rovná $P(x) = \mathrm{d}^2 f(a)(x-a)^2, \ x \in A \subset \mathbb{R}^m$.

$$\mathrm{d}^2 f(a)(x-a)^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - a_i)(x_j - a_j) \tag{26}$$

[23] Hovoríme, že 2. derivácia funkcie f v bode a je indefinitná.

Ak $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ sú spojité pre všetky $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, potom $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$.
Možno si všimnúť, že rovnosť teraz nadobúda tvar $P(x) = (x-a)Q(x-a)^T$, kde Q je matica tvaru

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}.$$

Táto matica sa nazýva *Hessova matica* funkcie f v bode a. Budeme ju tiež označovať $H\,f(a)$.

Nech a je stacionárny bod funkcie f. Použitím transformácie $x = a+y$, dostaneme funkciu $g(y) = f(y+a)$.
Funkcia f má v a stacionárny bod práve vtedy, keď g má v bode $y=0$ stacionárny bod. Potom
$d^2 f(a)(x-a)^2 = d^2 g(0) y^2$.
Ďalej uvažujme o funkcii g v okolí stacionárneho bodu $y = 0$
$P(x) = d^2 f(a)(x-a)^2$
$\widetilde{P}(y) = P(y+a) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 g(0)}{\partial y_i \partial y_j} y_i y_j = yQy^T$, kde $Q = H\,f(a) = H\,g(0)$.
Transformácia kvadratickej formy $\widetilde{P}(y)$
$y^T = R\,z^T$, $\quad z \in \mathbb{R}^m$, R je matica typu $m \times m$, z^T je transformácia ku z.
$y = z\,R^T$
$\overline{P}(z) = \widetilde{P}(z\,R^T) = z\,R^T Q R\,z^T$, $(R^T Q R = \overline{Q})$.

Veta 58. (Sylvestrova normálna forma). Ak $\det Q \neq 0$, potom existuje regulárna matica R a prirodzené číslo k, $0 \le k \le n$ také, že transformácia $y^T = R\,z^T$ transformuje kvadratickú formu yQy^T do tvaru

$$\overline{P}(z) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \cdots - z_m^2. \tag{27}$$

Definícia 47. Číslo k z predchádzajúcej definície sa nazáva *index* kvadratickej formy yQy^T a kvadratická forma $\overline{P}(z)$ sa nazýva *Sylvestrova normálna forma* formy yQy^T.

Poznámka 16. $d^2 f(a)(x-a)^2$ je kladne definitná práve vtedy, keď $d^2 g(0) y^2$ je kladne definitná.
Zrejme
$\overline{P}(z)$ je kladne definitná $\iff k = m$,
$\overline{P}(z)$ je záporne definitná $\iff k = 0$,
$\overline{P}(z)$ je indefinitná $\iff 0 \le k \le m$.

Veta 59. Kvadratická forma $P(x) = xQx^T$ je kladne definitná vtedy a len vtedy, ak

$$\Delta_1 = q_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \quad \det Q > 0,$$

kde $Q = (q_{ij})$.[24]

Dôkaz: Najprv dokážeme implikáciu ($\Rightarrow$). Nech $P(x)$ je kladne definitná. Budeme postupovať indukciou vzhľadom na počet premenných:
$m = 1: \quad P(x) = ax^2$ – kladne definitná $\Longrightarrow a > 0$.
Nech tvrdenie platí pre $m-1$ premenných. Dokážeme, že platí aj pre m premenných. Nech $x = (x_1, \ldots, x_m)$.
$P(x) = P_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) \; + \; 2\sum_{i=1}^{m-1} q_{im} x_i x_m \; + \; q_{mm} x_m^2$
$Q = (q_{ij})_{i,j=1}^m$, $Q_1 = (q_{ij})_{i,j=1}^{m-1}$
$P_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) = uQ_1u^T$, $u = (x_1, \ldots, x_{m-1})$
$P(x) = xQx^T$
Potom, ak $\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_{m-1}$ sú hlavné minory matice Q_1 a $\Delta_1, \ldots, \Delta_{m-1}, \Delta_m$ sú hlavné minory matice Q, tak $\widetilde{\Delta}_1 = \Delta_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_{m-1} = \Delta_{m-1}$.
Teda ak $P(x)$ je kladne definitná, tak aj $P_1(u)$ je kladne definitná. Ak by totiž $P_1(u)$ nebola kladne definitná, potom by existovali $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_{m-1}^\circ$ také, že $P_1(u_0) < 0$, $u_0 = (x_1^\circ, \ldots, x_{m-1}^\circ)$, z čoho vyplýva, že $P(u_0, 0) = P_1(u_0) < 0$ čo by bol spor s kladnou definitnosťou $P(x)$.

[24] T.j. ak sú kladné všetky hlavné minory matice Q.

Dostávame, že $P_1(u)$ je kladne definitná. $P_1(u) = uQ_1u^T$.
Z indukčného predpokladu:
$\Delta_1 = \widetilde{\Delta}_1 > 0, \dots, \Delta_{m-1} = \widetilde{\Delta}m - 1 > 0$.
Treba teda už len ukázať, že $\Delta_n = \det Q > 0$. Z vety vyplýva, že existuje regulárna transformácia $x^T = Ry^T$ transformujúca P do
$P(yR) = y\, RQR^T\, y^T = y_1^2 + \dots + y_m^2$
$\widetilde{Q} = \operatorname{diag}(1, \dots, 1)$
$1 = \det \widetilde{Q} = \det(RQR^T) = (\det R)\underbrace{(\det R^T)}_{\det R}(\det Q) = \underbrace{(\det R)^2}_{>0}(\det Q)$
$\implies \det Q = \Delta_m > 0$.

Teraz dokážeme implikáciu ($\Leftarrow$). Opäť budeme postupovať indukciou vzhľadom na m:
$m = 1: \quad P(x) = ax^2 - a > 0 \implies P(x)$ je kladne definitná.
Nech tvrdenie platí pre $m-1$. Nech $x = (x_1, \dots, x_m)$.
$P(x) = P_1(x_1, \dots, x_{m-1}) \; + \; 2\sum_{i=1}^{m-1} q_{im}x_ix_m \; + \; q_{mm}x_m^2$
Vieme, že $\Delta_1 = \widetilde{\Delta}_1, \dots, \Delta_{m-1} = \widetilde{\Delta}_{m-1}$, kde $\widetilde{\Delta}_1, \dots, \widetilde{\Delta}_{m-1}$ sú hlavné minory matice Q_1, $P_1 = uQ_1u^T$.
Pretože $\widetilde{\Delta}_1 = \Delta_1 > 0, \dots, \widetilde{\Delta}_{m-1} = \Delta_{m-1} > 0$, z indukčného predpokladu vyplýva, že $P_1(u)$ je kladne definitná. Podľa vety existuje regulárna transformácia $(x_1, \dots, x_{m-1})^T = S(y_1, \dots, y_{m-1})^T$.
$P_1((y_1, \dots, y_{m-1})S^T) = y_1^2 + \dots + y_{m-1}^2$.
Ak $x_m = y_m$, potom $P_2(y) = P((y_1, \dots, y_{m-1})S^T, y_m) = y_1^2 + \dots + y_{m-1}^2 + 2\sum_{i=1}^m \widetilde{q}_{im}y_iy_m + \widetilde{q}_{mm}y_m^2$, kde $\widetilde{q}_{mm} \in \mathbb{R}$ a $\widetilde{q}_{im} \in \mathbb{R}$ pre všetky $i \in \{1, \dots, m-1\}$.
P je kladne definitná práve vtedy, keď P_2 je kladne definitná.
$y_i^2 = 2\widetilde{q}_{im}y_iy_m = (\underbrace{y_i + \widetilde{q}_{im}y_m}_{z_i})^2 - \widetilde{q}_{im}^2y_m^2$

$z_i = y_1 + \widetilde{q}_{im}y_m$ pre $i \in \{1, \dots, m-1\}$,
$z_m = y_m$.
$P_3(z) = [(y_1 + \widetilde{q}_{1m}y_m)^2 - \widetilde{q}_{1m}^2y_m^2] + \dots + [(y_{m-1} + \widetilde{q}_{m-1\,m}y_m)^2 - \widetilde{q}_{m-1\,m}^2y_m^2] + \widetilde{q}_{mm}y_m^2 = z_1^2 + \dots + z_{m-1}^2 + cz_m^2$, $c = \widetilde{q}_{mm} - \widetilde{q}_{1m}^2 - \dots - \widetilde{q}_{m-1\,m}^2$.

$$P_3(z) = (z_1, \dots, z_m)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{Q_3}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

$c = \det Q_3 = (\det Q)(\det L)^2$, $\quad L$ je lineárna transformácia transormujúca xQx^T do $P_3(z)$.
Podľa predpokladu $\Delta_m = \det Q > 0 \implies c > 0 \implies P_3$ je kladne definitná $\implies P$ je kladne definitná. $\square$

2.9. Veta o inverznom zobrazení

Lema 5. Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina, $f : A \to \mathbb{R}^n$ je spojite diferencovateľná na A, $a \in A$ a $B_m(a, \varrho) \subset A$, $\varrho > 0$. Potom existuje také kladné číslo $L > 0$, že

$$\forall x, y \in B_m(a, \varrho) \; : \; \|f(x) - f(y)\|_n \leq L\, \|x - y\|_m, \tag{28}$$

Dôkaz: Nech $f = (f_1, \dots, f_n)$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Potom $\mathrm{d}f_i(x) = \mathrm{D}f_i(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, $x \in A$. Keďže $\mathrm{d}f_i(x)$ sú podľa predpokladu spojité, tak aj $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ sú spojité na A.
Keďže $\overline{B_m} = \overline{B_m(a, \varrho)}$ je kompakt, tak potom

$$\sup_{x \in \overline{B_m}} \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right| = \max_{x \in \overline{B_m}} \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right| = M_{ij} < \infty.$$

Z Lagrangeovej vety vyplýva, že ak $x, y \in \overline{B_m}$, tak existujú také čísla c_{ij}, že

$$f_i(x) - f_i(y) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(c_{ij})}{\partial x_j}(x_j - y_j),$$

a ďalej:

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial f_i(c_{ij})}{\partial x_j} \right| |x_j - y_j| \leq M \sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j|,$$

kde $M = \max\{M_{ij} \mid i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\}$.
Z Cauchyho nerovnosti dostávame:

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq M\sqrt{m}\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(x_j - y_j)^2} = M\sqrt{m}||x - y||_m$$

a ďalej:

$$||f(x) - f(y)||_m = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(f_i(x) - f_i(y)\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} M^2 m\, ||x - y||_m^2} =$$
$$= \sqrt{M^2 mn}\, ||x - y||_m = L\, ||x - y||_m,$$

kde $L = |M|\sqrt{mn} > 0$ je hľadané číslo. $\square$

<u>Veta 60.</u> (O inverznom zobrazení). Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina, $f : A \to \mathbb{R}^n$ je spojite diferencovateľné zobrazenie, $a \in A$ a $\det[\mathrm{d}f(a)] \neq 0$. ($[\mathrm{d}f(a)]$ je maticová reprezentácia zobrazenia $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$). Potom existuje otvorené okolie V bodu a, otvorené okolie W bodu $b = f(a)$ také, že $g = f|_V : V \to W$ je bijektívne zobrazenie, zobrazenie g^{-1} k nemu inverzné je spojite diferencovateľné a platí

$$\forall y \in W \;:\; [\mathrm{d}g^{-1}(y)] = [\mathrm{d}f(f^{-1}(y))]^{-1}. \tag{29}$$

<u>Dôkaz:</u> Nech $H = \mathrm{d}f(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Pretože $\det[\mathrm{d}f(a)] \neq 0$, tak existuje H^{-1} a platí: $\mathrm{d}(H^{-1} \circ f)(a) = \underbrace{\mathrm{d}H^{-1}(f(a))}_{H^{-1}} \circ \underbrace{\mathrm{d}f(a)}_{H} = H^{-1} \circ H = \mathrm{Id}$.

Ak veta platí pre $H^{-1} \circ f$, tak platí aj pre f. Preto stačí predpokladať, že $\mathrm{d}f(a) = Id$. Nech $G = f - Id$, t.j. $G(x) = f(x) - x$, $x \in A$. Nech $\varrho > 0$ je také, že $B_n(a, \varrho) \subset A$. Z lemy 5 a z jej dôkazu vyplýva

$$\forall x, y \in B_n(a, \varrho) \;:\; ||G(x) - G(y)||_n \leq L_\varrho ||x - y||_n, \tag{30}$$

kde

$$L_\varrho = M_\varrho n. \tag{31}$$

Potom máme:

$$M_\varrho = \max\{M_{ij}(\varrho),\ i, j \in \{1, \ldots, n\}\},$$
$$M_{ij}(\varrho) = \max_{x \in B_n(a,\varrho)} \left| \frac{\partial G_i(x)}{\partial x_j} \right|, \quad G = (G_1, \ldots, G_n).$$

Vieme, že $G(x) = f(x) - x$, $\mathrm{d}G(a) = \mathrm{d}f(a) - Id = 0$, z čoho vyplýva $\frac{\partial G_i(a)}{\partial x_j} = 0$ pre všetky $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Zo spojitosti $\frac{\partial G_i(a)}{\partial x_j}$ vyplýva nasledujúce: Ak $\varrho > 0$ je dostatočne malé, potom $M_\varrho \leq \frac{1}{2n}$, a teda

$$L_\varrho \leq \frac{1}{2}. \tag{32}$$

Zo vzťahu (30) vyplýva

$$\forall x, y \in B_n(a, \varrho) \;:\; ||G(x) - G(y)||_n \leq \frac{1}{2}||x - y||_n, \tag{33}$$

$$||x - y||_n - ||f(x) - f(y)||_n \leq ||\underbrace{f(x) - x}_{G(x)} - \underbrace{(f(y) - y)}_{G(y)}||_n \leq \frac{1}{2}||x - y||_n$$

$$\forall x \in B_n(a,\varrho) \ : \ \frac{1}{2}||x-y||_n \leq ||f(x)-f(y)||_n. \tag{34}$$

Ale z toho vyplýva, že $f|_{B_n(a,\varrho)} : B_n(a,\varrho) \to f(B_n(a,\varrho))$ je bijektívne. Teda dostávame, že existuje $f^{-1} : W \to V$. Zo vzťahu (34) vyplýva

$$\forall u, v \in W \ : \ ||f^{-1}(u) - f^{-1}(v)||_n \leq 2.||u-v||_n, \tag{35}$$

z čoho dostávame, že f^{-1} je spojité.
Teraz dokážeme, že f^{-1} je diferencovateľné v bode $y = f(x)$, $x \in V$. Keďže f je diferencovateľné, tak

$$f(x_1) = f(x) + \mathrm{d}f(x)(x_1 - x) + r(x_1 - x), \tag{36}$$

kde

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{r(x_1-x)}{||x_1-x||_n} = 0. \tag{37}$$

Pretože $\det[\mathrm{d}f(a)] \neq 0$, tak $\det[\mathrm{d}f(x)] \neq 0$ pre všetky $x \in B_n(a,\varrho)$, ak ϱ je dostatočne malé, z čoho dostávame, že

$$\forall x \in B_n(a,\varrho) \ : \ \exists K = [\mathrm{d}f(x)]^{-1}. \tag{38}$$

Zo vzťahu (36) dostávame, že $K[f(x_1) - f(x)] = \underbrace{K\,\mathrm{d}f(x)}_{Id}(x_1 - x) + K\,r(x_1 - x)$.

$$x_1 = x + K[f(x_1) - f(x)] - K\,r(x_1 - x).$$

Nech $y_1 = f(x_1)$, $y = f(x)$. Potom $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x = f^{-1}(y)$, z čoho ďalej vyplýva $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y) + K(y_1 - y) - K(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))$. Stačí dokázať, že (pre diferencovateľné $f^{-1}(y_1)$) platí:

$$\lim_{y_1 \to y} \left[r(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))\right] \frac{1}{||y_1 - y||_n} = 0.$$

Počítajme teda:

$$\frac{1}{||y_1-y||_n}||r(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))||_n = \frac{||r(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))||_n}{||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)||_n} \cdot \frac{||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)||_n}{||y_1 - y||_n}. \tag{39}$$

Dokázali sme, že f^{-1} je spojité na W, teda $f^{-1}(y_1) \stackrel{y_1 \to y}{\longrightarrow} f^{-1}(y)$. Preto zo vzťahu (37) vyplýva

$$\frac{||r(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))||_n}{||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)||_n} \stackrel{y_1 \to y}{\longrightarrow} 0$$

Zo vzťahu (35) vyplýva $\frac{||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)||_n}{||y_1 - y||_n} \leq 2$, a preto platí, že podiel z rovnosti (39) ide k nule. □

2.10. Veta o implicitnej funkcii

Veta 61. (Veta o implicitnej funkcii). Nech $A \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $B \subset \mathbb{R}^{m_2}$ sú otvorené množiny, $f : A \times B \to \mathbb{R}^m$ je spojite diferencovateľné zobrazenie, $m = m_1 + m_2$, $a \in A$, $b \in B$ sú také, že

$$f(a,b) = 0 \tag{40}$$

a pre zobrazenie $g : B \to \mathbb{R}^m$, $y \mapsto f(a,y)$ je

$$\det[\mathrm{d}g(b)] \neq 0. \tag{41}$$

Potom existujú $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 > 0$ také, že $B_{m_1}(a,\varrho_1) \subset A$, $B_{m_2}(b,\varrho_2) \subset B$ a práve jedno diferencovateľné zobrazenie $\varphi : B_{m_1}(a,\varrho_1) \to B_{m_2}(a,\varrho_2)$ také, že $\varphi(a) = b$.

$$\forall x \in B_{m_1}(a,\varrho_1) \ : \ f(x,\varphi(x)) = 0. \tag{42}$$

Poznámka 17. Máme riešiť rovnicu $f(x,y)=0$ a vieme, že $f(a,b)=0$. Chceme zistiť, kedy majú všetky riešenia tejto rovnice tvar $(x,\varphi(x))$ pre nejaké φ.

Dôkaz: Prevedením na vetu o inverznom zobrazení. Definujme zobrazenie $F : A\times B\to\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ také, že $\forall (x,y)\in A\times B \ : \ F(x,y)=(x,f(x,y))$. Nech $f=(f_1,\dots,f_{m_2})$. Počítajme teraz $[\mathrm{d}F(a,b)]$.

$$[\mathrm{d}F(a,b)]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\ \frac{\partial f_1(a,b)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a,b)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(a,b)}{\partial x_{m_1}} & \frac{\partial f_1(a,b)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1(a,b)}{\partial y_{m_2}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_{m_2}(a,b)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{m_2}(a,b)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{m_2}(a,b)}{\partial x_{m_1}} & \frac{\partial f_{m_2}(a,b)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_{m_2}(a,b)}{\partial y_{m_2}} \end{pmatrix}$$

Keďže $g : x\to f(a,y)$, tak

$$[\mathrm{d}g(b)]=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a,b)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1(a,b)}{\partial y_{m_2}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_{m_2}(a,b)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_{m_2}(a,b)}{\partial y_{m_2}} \end{pmatrix},$$

z čoho vyplýva $\det[\mathrm{d}F(a,b)]=\det[\mathrm{d}g(b)]\neq 0$ (podľa predpokladu). Z vety o inverznom zobrazení vyplýva, že existujú $\varrho_1,\varrho_2>0$ také, že $B_{m_1}(a,\varrho)\subset A$, $B_{m_2}(b,\varrho_2)\subset B$ a ku $G|_{B_{m_1}(a,\varrho_1),B_{m_2}(b,\varrho_2)}$ existuje inverzné zobrazenie G^{-1}. Nech $G^{-1}(u,v)=(H_1(u,v),H_2(u,v))$. Definujme $\varphi(u)=H_2(u,0)$ pre $u\in B_{m_1}(a,\varrho_1)$. Potom $(u,0)=F(G^{-1}(u,0))=F(H_1(u,0),H_2(u,0))=(H_1(u,0),f(H_1(u,0),H_2(u,0)))$ je ekvivalentné s výrokom $u=H_1(u,0)\ \wedge\ \forall u\in B_{m_1}(a,\varrho_1)\ :\ f(u,\varphi(u))=0$. $\square$

2.11. Plochy definované ako hladiny funkcií

Definícia 48. Nech $A\subset\mathbb{R}^{n+1}$ je otvorená množina, $f : A\to\mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia, $c\in\mathbb{R}$ je také, že $f^{-1}(c)\neq\emptyset$. Potom sa množina $H_c(f)\overset{\text{def}}{=}f^{-1}(c)$ nazýva *hladina funkcie f*.

Definícia 49. Nech $A\subset\mathbb{R}^{n+1}$ je otvorená množina, $f : A\to\mathbb{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia a $c\in\mathbb{R}$ je také, že $H_c(f)\neq\emptyset$. Ak $\operatorname{grad} f(p)=\left(\frac{\partial f(p)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(p)}{\partial x_{n+1}}\right)\neq(0,\dots,0)$ pre všetky $p\in H_c(f)$, potom sa množina $H_c(f)$ nazýva *regulárna plocha* v $\mathbb{R}^{n+1}$.

Veta 62. Nech $A\subset\mathbb{R}^{n+1}$ je otvorená množina, $f : A\to\mathbb{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia a pre $c\in\mathbb{R}$ je $H_c(f)=f^{-1}(c)\neq\emptyset$ regulárna plocha v $\mathbb{R}^{n+1}$. Potom pre každé $p_0=(p_0^1,\dots,p_0^n,p_0^{n+1})\in H_c(f)$ existuje $i\in\{1,\dots,n+1\}$ okolie V bodu $p_0\in\mathbb{R}^{n+1}$ a spojite diferencovateľná funkcia $\varphi_i : V_i\to\mathbb{R}$, kde V_i je otvorené okolie bodu $(p_0^1,\dots,p_0^{i-1},p_0^{i+1},\dots,p_0^n,p_0^{n+1})\in\mathbb{R}^n$ také, že $H_c(f)\cap V=\{x=(x_1,\dots,x_{n+1})\in V \mid x_i=\varphi_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_{n+1}),\ \text{kde } (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_{n+1})\in V_i\}$.

Dôkaz: Pomocou vety o implicitnej funkcii. Nech $p_0=(p_0^1,\dots,p_0^{n+1})\in H_c(f)$. Z regularity $H_c(f)$ vyplýva, že $\operatorname{grad} f(p_0)\neq(0,\dots,0)$, z čoho ďalej $\exists i\in\{1,\dots,n+1\}\ :\ \frac{\partial f(p_0)}{\partial x_i}\neq 0$.
Definujme teraz funkciu $F : A\to\mathbb{R}$ tak, že $F(x)=f(x)-c$. Vieme, že $F(p_0)=f(p_0)-c=0$. Teda $\frac{\partial F(p_0)}{\partial x_i}=\frac{\partial f(p_0)}{\partial x_i}\neq 0$. Z vety o implicitnej funkcii vyplýva, že existuje $\varphi_i : V_i\to\mathbb{R}$ s vlastnosťami ako vo vete také, že $F(x_1,\dots,x_{i-1},\varphi_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_{n+1}),x_{i+1},\dots,x_{n+1})=0$. $\square$

Definícia 50. Nech $H_c(f)\subset\mathbb{R}^{n+1}$ je regulárna plocha a nech $\dot\gamma(0)=\frac{\mathrm{d}\gamma(0)}{\mathrm{d}t}$. Potom sa množina

$$T_p(H_c(f))=\left\{\dot\gamma(0)=\left(\frac{\mathrm{d}\gamma_1(0)}{\mathrm{d}t},\dots,\frac{\mathrm{d}\gamma_{n+1}(0)}{\mathrm{d}t}\right)\ \middle|\ \begin{matrix}\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to H_c(f)\subset\mathbb{R}^{n+1}\\ \text{je spojite dif. zobrazenie}\end{matrix}\ \bigwedge\ \begin{matrix}\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_{n+1})\\ \gamma(0)=p\end{matrix}\right\}$$

nazýva *tangenciálny priestor* ku ploche $H_c(f)$ v bode p a body tohto priestoru sa nazývajú *tangenciálne vektory* ku $H_c(f)$ v bode p.

Veta 63. Nech $A\subset\mathbb{R}^{n+1}$ je otvorená množina, $f : A\to\mathbb{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia, $H_c(f)=f^{-1}(c)\neq\emptyset$ je regulárna plocha. Potom $\operatorname{grad} f(p)\perp T_p(H_c(f))$ pre všetky $p\in H_c(f)$, t.j. $\forall v\in T_p(H_c(f))\ :\ \langle\operatorname{grad} f(p),v\rangle=0$, kde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je skalárny súčin v $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dôkaz: Nech $V \in T_p(H_c(f))$. Z toho dostávame, že existuje krivka $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H_c(f)$, $\varepsilon > 0$, spojite diferencovateľná taká, že $\dot\gamma(0) = v$. Potom $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\ :\ f(\gamma(t)) = c$.
$0 = \frac{\partial f(\gamma(0))}{\partial x_1}\underbrace{\dot\gamma_1(0)}_{=v_1} + \cdots + \frac{\partial f(\gamma(0))}{\partial x_{n+1}}\underbrace{\dot\gamma_{n+1}(0)}_{=v_{n+1}} = \langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle,\ v = (v_1, \ldots, v_{n+1})$. $\square$

Veta 64. Nech sú splnené predpoklady vety 63. Potom platí:
1. $T_p(H_c(f)) = [\operatorname{grad} f(p)]^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle = 0\}$.
2. $T_p(H_c(f))$ je lineárny podpriestor v $\mathbb{R}^{n+1}$ dimenzie n.

Dôkaz:
1. Z vety 63 priamo vyplýva, že $T_p(H_c(f)) \subset [\operatorname{grad} f(p)]^{\perp}$. Opačná inklúzia: Nech $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ je také, že $v \in [\operatorname{grad} f(p)]^{\perp}$. Treba ukázať, že existuje diferencovateľná krivka $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H_c(f)$, $\varepsilon > 0$ taká, že $\dot\gamma(0) = v$.
Definujme zobrazenie $g : A \to \mathbb{R}^{n+1}$ takto:
$$g(x) = v - \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x)\|^2}\ \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle\ \operatorname{grad} f(x). \tag{43}$$
Zobrazenie g je spojité a platí:
$$\langle g(x), \nabla f(x)\rangle = \langle v, \nabla f(x)\rangle - \frac{1}{\|\nabla f(x)\|^2}\ \langle \nabla f(x), v\rangle\ \underbrace{\langle \nabla f(x), \nabla f(x)\rangle}_{\|\nabla f(x)\|^2} = 0. \tag{44}$$
Z toho vyplýva, že $g(x) \in T_x(H_c(f))$ pre všetky $x \in H_c(f)$.
Nech $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\varepsilon > 0$ spĺňa:
$$\begin{aligned} &\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\ :\ \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = g(\gamma(t)) \\ &\gamma(0) = p. \end{aligned} \tag{45}$$
Z vety o riešení diferenciálnych rovníc vyplýva existencia takého γ.[25] Potom platí $\dot\gamma(0) = \frac{\mathrm{d}\gamma(0)}{\mathrm{d}t} = g(\gamma(0)) = g(p) \in T_p(H_c(\gamma))$ a zo vzťahov (44) a (45) vyplýva
$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\ :\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle = \langle \nabla f(\gamma(t)), g(\gamma(t))\rangle = 0$, z čoho ďalej $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\ :\ f(\gamma(t)) = K$. Avšak $\gamma(0) = p$ a $f(p) = c$, z čoho vyplýva rovnosť $c = K$, a teda aj $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\ :\ \gamma(t) \in H_c(f)$, z čoho $v \in T_p(H_c(f))$. $\square$

2.12. Viazané extrémy

Definícia 51. Nech $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ je otvorená množina, $k \geq 1$, $g : A \to \mathbb{R}$ a nech je daný systém funkcií $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Nech $M = \{x \in A \mid f_1(x) = 0, \ldots, f_k(x) = 0\} = f^{-1}(0)$, $f = (f_1, \ldots, f_k)$. Nech $M \neq \emptyset$. Hovoríme, že funkcia g má v bode $x_0 \in M$ *lokálny (globálny) extrém s väzbou* $f_i(x) = 0$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $x \in A$. (Hovoríme tiež, že vzhľadom na množinu M, resp. že extrém je viazaný na množinu M), ak zúženie $g|_M : M \to \mathbb{R}$ má *lokálny (resp. globálny) extrém v bode* x_0.

Veta 65. Nech $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otvorená množina, $f : A \to \mathbb{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia, $c \in \mathbb{R}$ je také, že $H_c(f) = f^{-1}(c) \neq \emptyset$ je regulárna plocha. Nech $g : A \to \mathbb{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia a g má v bode $p \in H_c(f)$ viazaný extrém na $H_c(f)$. Potom existuje reálne číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ také, že
$$\operatorname{grad} g(p) = \lambda \operatorname{grad} f(p).$$

Poznámka 18. Číslo λ v predchádzajúcej vete sa nazýva *Lagrangeov multiplikátor*.

Dôkaz: Z vety 64 vyplýva, že $\dim T_p(H_c(f)) = n$. Teda $\dim[T_p(H_c(f))]^{\perp} = 1$. Keďže vieme, že $\operatorname{grad} f(p) \perp T_p(H_c(f))$, tak $[T_p(H_c(t))]^{\perp}$ je vytvorený vektorom $\operatorname{grad} f(p)$, t.j. $\forall v \in [T_p(H_c(f))]^{\perp}\ :\ \exists \nu \in \mathbb{R}, \nu \neq 0\ :\ v = \nu \operatorname{grad} f(p)$.
Nech g má v bode $p \in H_c(f)$ viazaný extrém na $H_c(f)$. Potom, ak $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H_c(f)$, $\varepsilon > 0$ je (spojite?) diferencovateľná, tak pre $t = 0$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(\gamma(t)) = \langle g(p), \dot\gamma(0)\rangle = 0,$$

[25] Táto veta bude vyslovená neskôr.

lebo $g(\gamma(t))$ má v $t = 0$ lokálny extrém. Avšak $\dot{\gamma}(0) = v \in T_p(H_c(f))$, z čoho $\operatorname{grad} g(p) \in [T_p(H_c(f))]^\perp$. Keďže $\operatorname{grad} f(p)$ generuje jednorozmerný podpriestor $[\operatorname{grad} f(p)]^\perp$, tak $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \operatorname{grad} g(p) = \lambda \operatorname{grad} f(p)$.[26] $\square$

Poznámka 19.

$F_\lambda(x) = g(x) - \lambda f(x)$,
$\operatorname{grad} F_\lambda(p) = \operatorname{grad} g(p) - \lambda \operatorname{grad} f(p) = 0$,
$c = 0, f(x) = 0$.

[26] Musí byť λ nenulová?

3. Teória diferenciálnych rovníc

3.1. Cauchyho začiatočná úloha

Definícia 52. Majme nasledovný systém rovníc:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{46}$$

kde $f_i : D \to \mathbb{R}$ a $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je *oblasť*, t.j. otvorená súvislá množina.
Riešením systému (46) je n-tica funkcí $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, definovaná na intervale $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, funkcie $x_i(t)$ sú spojite diferencovateľné na I pre všetky $i \in \{1, \ldots, n\}$ a pre všetky $t \in I$ platí:

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a $f = (f_1, \ldots, f_n)$.
Vzťah (46) možno teraz prepísať do tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x), \quad \text{kde } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\right) \tag{47}$$

Pod *Cauchyho začiatočnou úlohou* budeme chápať nasledujúcu dvojicu rovností:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \longleftarrow \text{ začiatočná podmienka v } t = t_0, \\ & \qquad\quad\; x_0 \text{ je daný vektor} \end{aligned} \tag{48}$$

Veta 66. (Veta o existencii a jednom riešení). Nech $f : D \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie a spĺňa tzv. *Lipschitzovu podmienku* vzhľadom na premennú x, t.j.

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \tag{49}$$

pre všetky $(t, x_1), (t, x_2) \in D$, kde $L > 0$ je konštanta. Potom pre všetky $(t_0, x_0) \in D$ existuje interval $I_h = \langle t_0 - h, t_0 + h\rangle$, $h > 0$, na ktorom je definované práve jedno riešenie začiatočnej úlohy (48).

Poznámka 20. Pre existenciu riešenia začiatočnej úlohy (48) stačí aj spojitosť zobrazenia f, avšak potom nie je zaručená jeho jednoznačnosť.

Dôkaz:[27] Nech $C_h = C(I_h, \mathbb{R}^n)$ je metrický priestor spojitých zobrazení z I_h do $\mathbb{R}^n$ s metrikou $\varrho(g_1, g_2) = \max_{x \in I_h} \|g_1(x) - g_2(x)\|$. Potom C_h je úplny metrický priestor.[28]
Definujme teraz zobrazenie $F : C_h \to C_h$ nasledovným spôsobom:

$$F(u)t = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,\mathrm{d}s,$$

[27] Kompletný dôkaz možno nájsť v Greguš, Šeda, Švec: Obyčajné diferenciálne rovnice.
[28] Dokážte! Návod: Po zložkách funkcií, s využitím faktu, že $\mathbb{R}$ je úplny s metrikou $|\cdot|$.

kde $u \in C_h$, $\int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,\mathrm{d}s = \left(\int_{t_0}^{t} f_1(s,u(s))\,\mathrm{d}s, \dots, \int_{t_0}^{t} f_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\right)$.
Ak $h > 0$ je dostatočne malé, potom zobrazenie F je kontraktívne. Z vety o pevnom bode vyplýva existencia jediného $x \in C_h$ takého, že $F(x) = x$.

$$\forall t \in I_h \ : \ \underbrace{x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,x(s))\,\mathrm{d}s}_{F(x)(t)} = x(t).$$

Z uvedeného vyplýva, že x je spojite diferencovateľné a $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = F(t,x(t))$ pre všetky $t \in I_h$, pričom $x(t_0) = x_0$. $\square$

3.2. Metóda separácie premenných

Metódou separácie premenných možno riešiť diferenciálne rovnice typu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= f_1(t) f_2(x) \\ f(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{50}$$

kde $x \in \mathbb{R}$, f_1, f_2 sú spojité funkcie.

V triviálnom prípade, ak $f_2(x_0) = 0$, potom riešením tohto systému je $x(t) \equiv x_0$. Ak ale $f_2(x_0) \neq 0$, potom $f_2(x) \neq 0$ pre všetky $x \in \mathcal{V}(x_0)$, kde $\mathcal{V}(x_0)$ je nejaké okolie bodu x_0. Na okolí $\mathcal{V}$ potom platí:

$$\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{f_2(x)} = f_1(t)$$

Ak $\varphi(t)$ je riešením potom:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\frac{\mathrm{d}\varphi(\tau)}{\mathrm{d}t}}{f_2(\varphi(\tau))}\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} f_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Nech najskôr je $f_1(t_0) \neq 0$. Potom existuje $h > 0$ také, že $\forall t \in I_h \ : \ f_1(t) \neq 0$, kde $I_h = \langle t_0 - h, t_0 + h \rangle$. Teda $\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = f_1(t) f_2(\varphi(t)) \neq 0$, ak $h > 0$ je dostatočne malé. Preto môžeme zaviesť substitúciu $\sigma = \varphi(s)$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\frac{\mathrm{d}\varphi(s)}{\mathrm{d}t}}{f_2(\varphi(s))}\,\mathrm{d}s = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{\mathrm{d}\sigma}{f_2(\sigma)} = \int_{t_0}^{t} f_1(s)\,\mathrm{d}s. \tag{51}$$

Označme

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\sigma}{f_2(\sigma)}, \qquad (\varphi(t_0) = x_0) \\ G(t) &= \int_{t_0}^{t} f_1(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Vzťah (51) je ekvivalentný s $F(\varphi(t)) = G(t)$. Pretože $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f_2(x)} \neq 0$ pre všetky $x \in V$, F má inverzné zobrazenie a $\varphi(t) = F^{-1}(G(t))$. Ak naviac $f_1(t_0) = 0$, tak formula platí rovná (50).

Formálne možno obvyklý priebeh výpočtu zapísať takto: Majme rovnicu $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_1(t) f_2(x)$. Jej vynásobením $\frac{\mathrm{d}t}{f_2(x)}$ dostávame rovnosť $\frac{\mathrm{d}x}{f_2(x)} = f_1(t)\,\mathrm{d}t$. Následnou integráciou máme $\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{f_2(x)} = \int_{t_0}^{t} f_1(t)\,\mathrm{d}t$. Definujme teraz funkcie $F(x)$ a $G(t)$ takto: $F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{f_2(x)}$, $G(t) = \int_{t_0}^{t} f_1(t)\,\mathrm{d}t$. Riešením diferenciálnej rovnice je funkcia $x = x(t) = F^{-1}(G(t))$.

3.3. Lineárne homogénne diferenciálne rovnice

Pod *lineárnymi homogénnymi diferenciálnymi rovnicami* chápeme rovnice typu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)\,x, \tag{52}$$

kde $a(t)$ je spojitá funkcia. Ľahko možno vidieť, že ich možno riešiť metódou separácie premenných. Ak položíme $f_1(t) = a(t)$ a $f_2(x) = x$, vzťah (52) prejde do tvaru vzťahu . Vynásobením rovnosti (52) výrazom $\frac{\mathrm{d}t}{x}$ dostávame $\frac{\mathrm{d}x}{x} = a(t)\,\mathrm{d}t$. Integráciou podľa t máme: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int a(t)\,\mathrm{d}t$. Teda:

$$\ln|x| = \int a(t)\,\mathrm{d}t + \ln C, \quad C > 0 \text{ je konštanta.}$$

resp.

$$|x| = C.e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}$$

Nech $x = x(t)$ je riešením rovnice. Potom $|x(t)| = C.e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}$.
Z vety o jednoznačnosti vyplýva, že buď $x(t) > 0$ pre všetky t alebo $x(t) < 0$ pre všetky t. Teda

$$x(t) = e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t} K, \qquad K = \pm C$$

je všeobecné riešenie.
Ak $x(t_0) = x_0$, potom $x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} x_0$ a $x(t_0) = x_0$.

Veta 67. Riešenie začiatočnej úlohy $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)\,x$, $x(t_0) = x_0$ má tvar $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s}$.

3.4. Lineárne nehomogénne diferenciálne rovnice

Pod *lineárnymi nehomogénnymi diferenciálnymi rovnicami* chápeme rovnice typu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)\,x + f(t),$$

kde a, f sú spojité funkcie.
Hľadáme riešenie v tvare $\psi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} K(t)$ pričom K je diferencovateľná funkcia.
$\dot\psi = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$, $\dot\psi = a(t) e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} K(t) + e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \dot K(t) = a(t)\psi + f(t)$.
$\Longrightarrow \dot K(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} f(t)$
$K(t) = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} f(s)\,\mathrm{d}s + K_0$, kde K_0 je konštanta.
$\psi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s}. \left[K_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} f(s)\,\mathrm{d}s\right] = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} f(s)\,\mathrm{d}s$.

Veta 68. Riešenie začiatočnej úlohy $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)\,x + f(t)$, $x(t_0) = x_0$ má tvar $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} f(s)\,\mathrm{d}s$.

3.5. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc

Poznámka 21. Systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{aligned} \tag{53}$$

spĺňa predpoklady vety 66.
Ak položíme

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

potom systém (53) je ekvivalentný s rovnicou

$$\dot{x} = A(t)\,x. \tag{54}$$

Veta 69. Množina riešení rovnice (53) je n-rozmerný vektorový priestor nad poľom reálnych čísel.

Dôkaz: Nech M je množina riešení rovnice (53), $\varphi_1, \varphi_2 \in M$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$. Počítajme teraz, čomu sa rovná $\dot{\varphi}$:
$\dot{\varphi} = \lambda_1\dot{\varphi}_1 + \lambda_2\dot{\varphi}_2 = \lambda_1 A(t)\varphi_1 + \lambda_2 A(t)\varphi_2 = A(t)\cdot(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = A(t)\varphi$. Teda φ je riešením, a preto M je vektorový priestor.
Dokážeme teraz, že $\dim M = n$. Nech $l_1, \ldots, l_n$ je báza jednotkových vektorov v $\mathbb{R}^n$ a nech φ_i je riešenie rovnice spĺňajúce začiatočnú podmienku $\varphi_i(0) = l_i$. Dokážeme, že $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sú lineárne nezávislé. Nech $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ a $\forall t\ :\ c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) = 0$. Potom $c_1\varphi_1(0) + \cdots + c_n\varphi_n(0) = 0$. Keďže ale $\varphi_i(0) = l_i$ pre všetky $i \in \{1, \ldots, n\}$, musí jednoznačne platiť $(c_1, \ldots, c_n) = (0, \ldots, 0)$.
Nech teraz $\psi(t)$ je ľubovoľné riešenie, $\psi(0) = x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 l_1 + \cdots + x_n l_n$. Keďže $\varphi = x_1\varphi_1 + \cdots + x_n\varphi_n$ je riešenie a $\varphi(0) = x_1 l_1 + \cdots + x_n l_n = x$, potom $\psi(0) = \varphi(0)$ a z vety o jednoznačnosti vyplýva, že $\psi(t) = \varphi(t)$ pre všetky t, z čoho ďalej $\psi(t) = x_1\varphi_1(t) + \cdots + x_n\varphi_n(t)$, a preto $\dim M = n$. $\square$

Definícia 53. Nech $\varphi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{21}, \dots, \varphi_{n1})^T, \dots, \varphi_n = (\varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \dots, \varphi_{nn})^T$ je fundamentálny systém riešení, t.j. báza riešení $\dot{x} = A(t)x$. Definujme maticu

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)] = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Lema 6. Fundamentálna matica $\Phi(t)$ je tzv. maticové riešenie diferenciálnej rovnice

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = A(t)\, X, \tag{55}$$

t.j.

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\varphi_1(t)}{\mathrm{d}t}, \dots, \frac{\mathrm{d}\varphi_n(t)}{\mathrm{d}t}\right] = A(t)\, varPhi(t),$$

resp.

$$\begin{pmatrix} \dot\varphi_{11}(t) & \dots & \dot\varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot\varphi_{n1}(t) & \dots & \dot\varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} = A(t) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Dôkaz: $\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = [\dot\varphi_1(t), \dots, \dot\varphi_n(t)] = [A(t)\varphi_1(t), \dots, A(t)\varphi_n(t)] = A(t)\,[\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] = A(t)\,\Phi(t)$. □

Veta 70. Začiatočná úloha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{56}$$

má riešenie tvaru $x(t) = \Phi(t).\Phi^{-1}(t_0)x_0$.

Dôkaz: $\dot{x}(t) = \dot\Phi(t).\Phi(t_0)x_0 = A(t)\underbrace{\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0}_{x(t)} = A(t)x(t)$. □

3.6. Lineárne nehomogénne diferenciálne rovnice (systémy)

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \qquad A, f \text{ spojité na } \mathbb{R} \tag{57}$$

Veta 71. Ak $\Phi(t)$ je fundamentálna matica diferenciálnej rovnice $\dot{x} = A(t).x$, potom riešenie $y(t)$ začiatočnej úlohy

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(t).y \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{58}$$

má tvar

$$y(t) = \underbrace{\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y_0}_{\substack{y_h(T) \text{ – riešenie} \\ \text{homogénnej za-} \\ \text{čiatočnej úlohy}}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(T)\Phi^{-1}(s)f(s)\,\mathrm{d}s}_{\text{partikulárne riešenie}} \tag{59}$$

Dôkaz:
Hľadajme riešenie $y(t)$ v tvare $y(t) = \Phi(t).c(t)$, kde $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je triedy C^1.
$\dot{y}(t) = \dot\Phi(t)c(t) + \Phi(t)\dot{c}(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + \Phi(t)\dot{c}(t) = A(t)y(t) + f(t)$.
$\Phi(t)\dot{c}(t) = f(t)$, $\exists \Phi^{-1}(t) \implies \dot{c}(t) = \Phi^{-1}(t)f(t) \implies c(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)\,\mathrm{d}s + K$
$y(t) = \Phi(t)c(t) = \Phi(t)\left[\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)\,\mathrm{d}s + K\right]$

$y(t_0) = y_0 \implies y_0 = \Phi(t_0)K \implies K = \Phi^{-1}(t_0)y_0$
$y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\Phi(t)\Phi^{-1}(s)}_{R(t,s) \text{ - rezolventa}} f(s)\,\mathrm{d}s \quad \square$

3.7. Lineárne diferenciálne rovnice n-tého rádu

Pod lineárnymi homogénnymi diferenciálnymi rovnicami n-tého rádu rozumieme

$$L_n x = a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0, \tag{60}$$

kde $x^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^i x}{\mathrm{d}x^i}$, $a_0, \dots, a_n$ sú spojité na $\mathbb{R}$, naviac môžeme predpokladať, že $a_0 \equiv \underline{1}$.
Pod lineárnymi nehomogénnymi diferenciálnymi rovnicami n-tého rádu rozumieme

$$L_n y = a_0(t)y^{(n)} + \cdots + a_n(t)y = f(t), \quad \text{nehom.} \tag{61}$$

<u>Riešenie homog:</u>

$$\begin{aligned} x_1 &= x & \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= \dot{x} & \dot{x}_2 &= x_3 \\ x_3 &= x^{(2)} & &\vdots \\ &\vdots & \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ x_n &= x^{(n-1)} & \dot{x}_n &= -a_1(t)x_n - \cdots - a_n x_1 \end{aligned}$$

$$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

<u>Riešenie nehomog:</u>

$$u = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad y = y_1, \dot{y} = y_2, \dots$$

$$\dot{u} = A(t)u + \widehat{f}(t), \qquad \widehat{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \Big\} n-1 \tag{62}$$

<u>Veta 72.</u> Nech $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je fundamentálny systém riešení nehomogénnej diferenciálnej rovnice (62). Potom riešenie Cauchyho začiatočnej úlohy

$$L_n y = f(t),\ y(t_0) = y_0,\ \dot{y}(t_0) = y_1,\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \tag{63}$$

má tvar

$$y(t) = \psi_h(t) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_h(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W_k(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(s)}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(s)} f(s)\,\mathrm{d}s, \tag{64}$$

kde $\psi_h^{(k)}$ je riešenie homogénnej úlohy

$$L_n\psi = 0$$
$$\psi(t_0) = y_0,\ \dot\psi(t_0) = y_1, \dots$$

$W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t) = \det\Phi(t)$, kde $\Phi(t)$ je fundamentálna matica systému $\dot y = A(t)y$.
$W_k(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t)$ je determinant matice, ktorá vznikne z matice $\Phi(t)$ zámenou k-teho stĺpca za vektor $(0,\dots,1)^T$.

Dôkaz: $\dot u = A(t)u + \widehat{f}(t)$.

$$u(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\Phi^{-1}(s) = \frac{1}{W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(s)}\begin{pmatrix}\Phi_{11}(s) & \dots & \Phi_{n1}(s)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi_{1n}(s) & \dots & \Phi_{nn}(s)\end{pmatrix}$$

$\Phi_{ij}(s)$ je algebraický doplnok ku prvku matice $\Phi(s)$

Riešenie úlohy

$$u(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t)\cdot\frac{1}{W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(s)}\begin{pmatrix}\Phi_{11}(s) & \dots & \Phi_{n1}(s)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi_{1n}(s) & \dots & \Phi_{nn}(s)\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f(s)\end{pmatrix}}_{\widehat{f}(s)}\mathrm{d}s =$$
$$= \varphi_h(t) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t)\frac{1}{W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}\begin{pmatrix}\Phi_{n1}(s)f(s)\\ \vdots\\ \Phi_{nn}(s)f(s)\end{pmatrix}\mathrm{d}s$$

Ak $u(t) = [\psi(t),\dots,\psi^{(n-1)}(t)]^T$, $\varphi_h(t) = [\psi_h(t),\dots,\psi_h^{(n-1)}(t)]^T$,
$\psi(t) = \psi_h(t) + \int_{t_0}^{t}[\varphi_1(t)\Phi_{n1}(s)f(s) + \varphi_2(t)\Phi_{n2}(s)f(s) + \dots + \varphi_n(t)\Phi_{nn}(s)f(s)]\frac{1}{W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}\,\mathrm{d}s$

3.8. Lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami

$$L_n\,x = x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_nx = 0 \tag{65}$$

Leibnitzova formula:

$$(uv)^{(n)} = u^nv + \binom{n}{1}u^{(n-1)}\dot v + \dots + \binom{n}{n}uv^{(n)}$$

Lema 7. $L_n\left(e^{\lambda t}v(t)\right) = e^{\lambda t}\left[P(\lambda)v(t) + \frac{P'(\lambda)}{1!}v^{(1)}(t) + \dots + \frac{P^{[n]}(\lambda)}{n!}v^{(n)}(t)\right]$, kde $P^{[i]}(\lambda) = \frac{\mathrm{d}^iP(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^i}$.
$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ je charakteristický polynóm diferenciálnej rovnice.

Veta 73. Ak $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ sú rôzne korene charakteristického polynómu $P(\lambda)$ diferenciálnej rovnice $L_n\,x = 0$ a násobnosť λ_i je m_i, potom fundamentálny systém riešení $L_n\,x = 0$ je:

$$\begin{gathered}e^{\lambda_1t}, te^{\lambda_1t},\dots,t^{m_1-1}e^{\lambda_1t},\\ e^{\lambda_2t}, te^{\lambda_2t},\dots,t^{m_2-1}e^{\lambda_2t},\\ \vdots\\ e^{\lambda_st}, te^{\lambda_st},\dots,t^{m_s-1}e^{\lambda_st}\end{gathered}$$

Poznámka 22. λ_i môžu byť aj komplexné.

Veta 74. Nech sú splnené predpoklady vety 73, pričom $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ sú reálne a $\lambda_{k+1} = \omega_{k+1} + i\delta_{k+1},\dots,$ $\lambda_s = \omega_s + i\delta_s$ $(\delta_{k+1}\neq 0,\dots,\delta_s\neq 0)$. Potom fundamentálny systém reálnych riešení je

$$e^{\lambda_it},\ te^{\lambda_it},\dots,\ t^{m_i-1}e^{\lambda_it}\quad i\in\{1,\dots,k\}$$
$$\left.\begin{matrix}e^{\omega_jt}\cos\delta_jt,\ te^{\omega_jt}\cos\delta_jt,\dots,\ t^{m_j-1}e^{\omega_jt}\cos\delta_jt\\ e^{\omega_jt}\sin\delta_jt,\ te^{\omega_jt}\sin\delta_jt,\dots,\ t^{m_j-1}e^{\omega_jt}\sin\delta_jt\end{matrix}\right\}j\in\{k+1,\dots,s\}.$$