Obsah

I. Nevlastné integrály

1. Definície a základné vlastnosti nevlastných integrálov

Definícia 1.1. *Nech funkcia f je definovaná na intervale $< a, \infty)$ a je riemannovsky integrovateľná na ľubovoľnom uzavretom intervale $< a, \eta > \subset < a, \infty)$.*

Ak existuje vlastná limita funkcie

$$F(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$$

pre $\eta \to \infty$, nazýva sa nevlastným Riemannovým integrálom funkcie f na intervale $< a, \infty)$ a označuje sa $\int_a^\infty f(x)dx$. Teda

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{\eta \to \infty} \int_a^\eta f(x)dx = \lim_{\eta \to \infty} F(\eta).$$

a hovoríme, že f je integrovateľná na $< a, \infty)$.

Poznámka 1.1. Symbol $\int_a^\infty f(x)dx$ tiež nazývame nevlastným integrálom a hovoríme, že nevlastný integrál konverguje, ak uvedená limita je vlastná a diverguje v opačnom prípade.

Príklad 1.1. Zistite, pre aké hodnoty parametru α konverguje nevlastný integrál

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \ (a > 0, \ \alpha > 0). \tag{1}$$

Pretože $\displaystyle\int_a^\eta \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_a^\eta & \text{pre } \alpha \neq 1 \\ \ln x|_a^\eta & \text{pre } \alpha = 1, \end{cases}$ limita $\displaystyle\lim_{\eta \to \infty} \int_a^\eta \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$ existuje a je vlastná len pre $\alpha > 1$.

Teda $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$, ak $\alpha > 1$ a pre $\alpha \leq 1$ integrál (1) diverguje.

Poznámka 1.2. Ak na vyjadrenie limity funkcie $F(\eta)$ z definície 1.1. použijeme "jazyk postupnosti", môžeme nevlastný integrál na neohraničenom intervale chápať ako súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x)dx$, kde postupnosť $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ je taká, že pre každé n $\eta_n > a$, $\eta_0 = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \infty$.

Tvrdenie 1.1. *Pre konvergenciu nevlastného integrálu $\int_a^{\infty} f(x)dx$ je nutné a stačí, aby pre ľubovoľnú postupnosť $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel väčších ako a s vlastnosťou $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = +\infty$ rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x)dx \ (\eta_0 = a)$$

konvergoval.

Táto vlastnosť nám poskytuje možnosť využiť pri zisťovaní konvergencie alebo divergencie nevlastných integrálov mnohé kritéria konvergencie alebo divergencie radov.

Definícia 1.2. *Nech funkcia f je definovaná na intervale $< a, b)$ a je riemannovsky integrovateľná na ľubovoľnom uzavretom intervale $< a, \eta > \subset < a, b)$.*

Ak existuje vlastná limita funkcie $F(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)dx$ pre $x \to b^-$, nazýva sa nevlastným integrálom funkcie f na intervale $< a, b)$. Teda

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\eta\to b^-}\int_a^{\eta} f(x).$$

a hovoríme, že f je integrovateľná na $< a, \infty)$.

Poznámka 1.3. Podstata tejto definície spočíva v tom, že v ľubovoľnom okolí bodu b funkcia f môže byť neohraničená. Bod b budeme nazývať <u>singulárnym</u> alebo <u>kritickým bodom</u> funkcie f, ak je funkcia neohraničená na intervale $< a, b)$, ale je ohraničená na každom uzavretom podintervale $< a, \eta >$ intervalu $< a, b)$.

Definícia 1.3. *Ak funkcia f je definovaná na intervale $(a, b >$ a integrovateľná na ľubovoľnom uzavretom intervale $< \eta, b > \subset (a, b >$, tak definujeme*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\eta\to a^+}\int_{\eta}^{b} f(x)dx.$$

Podobne definujeme

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{\eta\to -\infty}\int_{\eta}^{b} f(x)dx.$$

Definícia 1.4. *Nech funkcia f je definovaná na $(-\infty, \infty)$ a integrovateľná na každom uzavretom intervale $< \eta', \eta'' >$. Potom integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ definujeme ako*

$$\lim_{\substack{\eta'\to-\infty\\ \eta''\to+\infty}}\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx \quad \text{pre} \quad \eta' \to -\infty \quad \text{a} \quad \eta'' \to +\infty$$

nezávisle na sebe, ak táto limita je vlastná.

Príklad 1.2. Zistite, pre aké hodnoty parametra α konverguje integrál

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \ (\alpha > 0). \tag{2}$$

Pretože pre $\eta \in < a, b)$ $\displaystyle\int_a^\eta \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b-x)^{1-\alpha}\Big|_a^\eta, & \text{ak } \alpha \neq 1 \\ \ln(b-x)|_a^\eta, & \text{ak } \alpha = 1, \end{cases}$

$\displaystyle\lim_{\eta \to b^-} \int_a^\eta \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ existuje pre $\alpha < 1$. Teda integrál (2) je konvergentný, ak $\alpha < 1$ a je divergentný, ak $\alpha \geq 1$.

Poznámka 1.4. Podobne, ako v príklade 1.2. sa zistí, že integrál $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ konverguje pre $\alpha < 1$ a diverguje pre $\alpha \geq 1$.

Poznámka 1.5. Pretože otázka konvergencie nevlastného integrálu je rovnaká tak pre nevlastný integrál na neohraničenom intervale, ako aj pre nevlatný integrál neohraničenej funkcie v okolí jedného z koncových bodov intervalu integrovania, v ďalšom budeme uvažovať tieto prípady spolu v zmysle nasledujúcej definície.

Definícia 1.5. *Nech $< a, B)$ je ohraničený alebo neohraničený interval a funkcia f je definovaná na ňom. Nech f je integrovateľná na každom uzavretom intervale*
$< a, \eta > \subset < a, B)$. Potom definujeme

$$\int_a^B f(x)dx := \lim_{\eta \to B} \int_a^\eta f(x)dx, \tag{3}$$

ak táto limita je vlastná.

Ďalej, keď nebude vopred povedané, budeme uvažovať nevlastný integrál (3), ktorý súvisí len s hornou hranicou. Nevlastný integrál súvisiaci s dolnou hranicou sa definuje podobne.

Veta 1.1. *Nech funkcie f a g sú definované na intervale $< a, B)$ a integrovateľné na ľubovoľnom uzavretom intervale $< a, \eta > \subset < a, B)$. Nech pre ne sú definované nevlastné integrály*

$$\int_a^B f(x)dx, \tag{4}$$

$$\int_a^B g(x)dx. \tag{5}$$

Potom

a) *Ak* $B \in R$ *a* $f \in \Re < a, B >$, *tak sa hodnoty integrálu* (4), *chápaného tak v nevlastnom zmysle na* $< a, B)$, *ako aj vo vlastnom zmysle, zhodujú.*

b) *Pre ľubovoľné* $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ *funkcia* $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ *je integrovateľná na* $< a, B)$ a platí rovnosť

$$\int_a^B (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\, dx = \lambda_1 \int_a^B f(x)dx + \lambda_2 \int_a^B g(x)dx.$$

c) *Ak* $c \in < a, B)$, *tak*

$$\int_a^B f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^B f(x)dx.$$

d) *Ak* $\varphi :< \alpha, \beta) \to < a, B)$ *je spojite diferencovateľná rýdzomonotónna funkcia, pričom* $\varphi(\alpha) = a$ *a* $\varphi(\beta) \to B$ *pre* $t \to \beta, t \in < \alpha, \beta)$, *tak nevlastný integrál funkcie* $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ *existuje na* $< \alpha, \beta)$ *a platí rovnosť*

$$\int_a^B f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

Veta 1.2. *(Integrovanie per partes.) Nech funkcie* f, g *sú spojite diferencovateľné na* $< a, B)$ *a existuje* $\lim\limits_{x \to B} f(x)g(x) = L < \infty$. *Za týchto podmienok z konvergencie jedného z integrálov* $\int_a^B f(x)g'(x)$ *a* $\int_a^B g(x)f'(x)dx$ *vyplýva konvergencia druhého a platí*

$$\int_a^B f(x)g'(x)dx = L - f(a)g(a) - \int_a^B g(x)f'(x)dx.$$

Poznámka 1.6. Z tvrdenia c) vety 1.1. vyplýva, že nevlastné integrály

$$\int_a^B f(x)dx, \int_c^B f(x)dx$$

konvergujú alebo divergujú súčastne. Teda konvergencia nevlastného integrálu nezávisí od voľby začiatočného bodu $c \in < a, B)$ (podobne, ako konvergencia radu sa nezmení vynechaním konečného počtu členov radu).

Nevlastné integrály s konečným počtom singulárnych bodov

Definícia 1.6. *Bod* x_0 *nazývame singulárnym (kritickým) bodom funkcie* $f(x)$, *ak*

a) *alebo je funkcia* f *definovaná v intervale* $(x_0 - \delta, x_0)$ *a je v ňom neohraničená pre každé dostatočne malé číslo* $\delta > 0$;

b) *alebo funkcia* f *je definovaná a neohraničená v intervale* $(x_0, x_0 + \delta)$, *kde* $\delta > 0$ *je ľubovoľné dostatočne malé číslo.*

Ak je funkcia f definovaná v intervale $(a, +\infty)$, tak $+\infty$ budeme pokladať za singulárny (kritický) bod a podobne $-\infty$ bude singulárnym bodom funkcia f, ak je f definovaná v intervale $(-\infty, b)$.

Definícia 1.7. *Nech funkcia f je definovaná v intervale (a, b) a má tam konečný počet kritických bodov $c_1, c_2, \ldots, c_k$ a $(a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b)$, pričom a, b tiež môžu byť kritickými bodmi funkcie f. Nech v každom uzavretom podintervale intervalu (a, b), ktorý neobsahuje ani jeden z kritických bodov, je riemannovsky integrovateľná. Hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje (existuje) práve vtedy, keď pre každú postupnosť bodov $d_0, d_1, \ldots, d_k$ takú, že $a < d_0 < c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \ldots < d_{k-1} < c_k < d_k < b$ existujú integrály*

$$\int_a^{d_0} f(x)dx, \int_{d_0}^{c_1} f(x)dx, \int_{c_1}^{d_1} f(x)dx, \ldots, \int_{c_k}^{d_k} f(x)dx, \int_{d_k}^{b} f(x)dx.$$

Súčet týchto integrálov budeme nazývať nevlastným integrálom $\int_a^b f(x)dx$.

Týmto spôsobom môžeme rozdeliť interval (a, b) na konečný počet podintervalov, v každom z ktorých funkcia f má len jeden kritický bod.

Vypočítajte nevlastné integrály:

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}.$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}.$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}.$

4. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx \ (a > 0).$

5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)}.$

6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)^2}.$

8. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}.$

9. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}.$

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

12. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bxdx \ (a > 0).$

13. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin bxdx \ (a > 0).$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

16. $\displaystyle\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$

18. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

19. $\displaystyle\int_0^1 x\ln xdx.$

20. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$

21. $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx.$

22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

23. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

24. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$

25. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$

26. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}.$

27. $\int_0^1 (\ln x)^p\, dx$ (p je prirodzené číslo).

28. a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$; b) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx$.

29. Nech $\varphi(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0, \varphi'(x) \leq 0, \varphi'(x)$ je spojitá funkcia na $< a, +\infty)$. Dokážte, že $\int_0^\infty \varphi'(x)dx$ konverguje absolútne, t.j. že konverguje integrál $\int_0^\infty |\varphi'(x)|dx$.

30. Nájdite $\displaystyle\int_E \frac{e^{-\frac{x}{2}}|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$, kde E je množina tých hodnôt x z intervalu $(0,+\infty)$, pre ktoré integrand má zmysel.

Použitím rekurentných vzorcov vypočítajte integrály:

31. $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$

32. $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$

33. <u>Strednou hodnotou funkcie</u> $f(x)$ na intervale $(0,+\infty)$ sa nazýva číslo

$$M[f] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Nájdite stredné hodnoty nasledujúcich funkcií:

a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2\left(x\sqrt{2}\right)$;

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

c) $f(x) = \sqrt{x}\sin x$.

34. Dokážte, že

a) ak $\int_0^\infty x\varphi(x^2)dx$ konverguje, tak $\int_{-\infty}^\infty x\varphi(x^2)dx = 0$;

b) ak konverguje $\int_0^\infty \varphi(x^2)dx$, tak $\int_{-\infty}^\infty \varphi(x^2)dx = 2\int_0^\infty \varphi(x^2)dx$.

2. Podmienky konvergencie nevlastného integrálu. Absolútna a neabsolútna konvergencia nevlastného integrálu

Podľa definície 1.3 konvergencia nevlastného integrálu (3) je ekvivalentná s existenciou vlastnej limity funkcie

$$F(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx \tag{6}$$

pre $\eta \to B,\ \eta \in < a, B)$.

Preto platí

Veta 2.1. *(Cauchyova - Bolzanova podmienka.) Nech funkcia f je definovaná na intervale $< a, B)$ a integrovateľná na ľubovoľnom uzavretom intervale $< a, \eta > \subset < a, B)$. Potom integrál $\int_a^B f(x)dx$ konverguje práve vtedy, keď pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje $\eta_0 \in < a, B)$ tak, že pre každé $\eta_1, \eta_2 \in < a, B)$ také, že $\eta_1 > \eta_0,\ \eta_2 > \eta_0$, platí vzťah*

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Definícia 2.1. *Hovoríme, že $\int_a^B f(x)dx$ konverguje absolútne, ak konverguje integrál $\int_a^B |f(x)|dx$.*

Definícia 2.2. *Nevlastný integrál $\int_a^B f(x)dx$ konverguje neabsolútne, ak konverguje, ale $\int_a^B |f(x)|dx$ diverguje.*

Poznámka 2.1. Z absolútnej konvergencie vyplýva konvergencia v obyčajnom zmysle.

Skúmanie absolútnej konvergencie nevlastného integrálu sa redukuje na skúmanie konvergencie integrálu nezápornej funkcie.

Veta 2.2. *Ak funkcia f spĺňa podmienky definície 1.3* a *$f(x) \geq 0$ na $< a, B)$, tak nevlastný integrál (3) existuje práve vtedy, keď funkcia (6) je ohraničená na $< a, B)$.*

Dôsledok 2.1. *Nech funkcia f je nezáporná, nerastúca na intervale $< 1, +\infty)$ a nech je integrovateľná na každom uzavretom intervale $< 1, \eta > \subset < 1, +\infty)$. Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots$$

a integrál $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *konvergujú alebo divergujú súčasne.*

Veta 2.3. *(Porovnávacie kritérium.) Nech funkcie f a g sú definované na intervale $< a, B)$ a sú integrovateľné na ľubovoľnom uzavretom intervale $< a, \eta > \subset < a, B)$. Ak na intervale $< a, B)$ platí*

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

tak z konvergencie integrálu (5) vyplýva konvergencia integrálu (4) a platí nerovnosť

$$\int_a^B f(x)dx \leq \int_a^B g(x)dx$$

a z divergencie integrálu (4) vyplýva divergencia integrálu (5).

Z poznámky 2.1, vety 2.3 a príkladu 1.1 vyplýva

Veta 2.4. *(Špeciálne porovnávacie kritérium pre nevlastný integrál na neohraničenom intervale.) Nech na intervale $< a, +\infty)$ funkcia f spĺňa vzťah $|f(x)| \leq \dfrac{c}{x^\alpha}$, kde c a α sú konštanty, $\alpha > 1$. Potom $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguje. Ak existuje taká konštanta $c > 0$, že na intervale $< a, +\infty)$ platí vzťah $f(x) \geq \dfrac{c}{x^\alpha}$, v ktorom $\alpha \leq 1$, tak $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverguje.*

Dôsledok 2.2. *(Špeciálne porovnávacie kritérium v limitnom tvare). Ak pre $\alpha > 1$ existuje vlastná limita $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)|x^\alpha = c \geq 0$, tak integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguje. Ak pre $\alpha \leq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)x^\alpha = c$, kde $0 < c \leq +\infty$, tak integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverguje.*

Poznámka 2.2. Špeciálne porovnávacie kritérium pre nevlastný integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ možno zapísať pomocou $\mathcal{O}$ - symboliky.

Nech $f(x) = \mathcal{O}^\star\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ pre $x \to +\infty$. Potom integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguje, ak $\alpha > 1$, a diverguje, ak $\alpha \leq 1$.

Zápis $f(x) = \mathcal{O}^\star\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ pre $x \to +\infty$ je ekvivalentný s tým, že existuje vlastná $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)x^\alpha = c \neq 0$.

Podobne môžeme sformulovať porovnávacie kritérium konvergencie nevlastného integrálu z definície 1.2. S využitím poznámky 2.1, vety 2.3 a príkladu 1.2 uvedieme pre tento prípad len špeciálne porovnávacie kritérium v limitnom tvare a jeho zápis pomocou $\mathcal{O}$ - symboliky.

Veta 2.5. *Nech pre $\alpha < 1$ existuje vlastná limita $\lim\limits_{x \to b^-} |f(x)|(b-x)^\alpha = c \geq 0$, tak $\int_a^b f(x)dx$ konverguje. Ak pre $\alpha \geq 1$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)(b-x)^\alpha = c$, kde $0 < c \leq +\infty$, tak $\int_a^b f(x)dx$ diverguje.*

Poznámka 2.3. Nech $f(x) = \mathcal{O}^\star\left(\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}\right)$ pre $x \to b^-$. Potom integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje, ak $\alpha < 1$, a diverguje, ak $\alpha \geq 1$.

Aj tu zápis $f(x) = \mathcal{O}^\star\left(\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}\right)$ pre $x \to b^-$ znamená, že existuje vlastná limita $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)(b-x)^\alpha = c \neq 0$.

Poznámka 2.4. Uvedieme špeciálne porovnávacie kritérium konvergencie nevlastného lintegrálu z definície 1.3, zapísanom pomocou $\mathcal{O}$ - symboliky. Nech $f(x) = \mathcal{O}^\star\left(\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}\right)$ pre $x \to a^+$. Potom integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje, ak $\alpha < 1$, a diverguje, ak $\alpha \geq 1$.

Veta 2.6. *Ak konverguje integrál $\int_a^B |f(x)|dx$ a funkcia $g(x)$ je ohraničená na $< a, B)$, tak ich súčin $f(x)g(x)$ je tiež absolútne integrovateľná funkcia na $< a, B)$.*

Uvedieme ešte niektoré ďalšie (jemnejšie) kritéria konvergencie nevlastného integrálu použiteľné aj v prípade neabsolútnej konvergencie integrálu (v zmysle definície 1.5).

Veta 2.7. *(Dirichletovo kritérium.) Nech funkcie f a g sú definované na intervale $< a, B)$ a sú integrovateľné na ľubovoľnom uzavretom intervale $< a, \eta >\subset< a, B)$. Ak platí:*

1. *funkcia $F(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$ je ohraničená na $< a, B)$,*
2. *funkcia $g(x)$ je monotónna a $\lim\limits_{x\to B} g(x) = 0$, tak $\int_a^B f(x)g(x)dx$ konverguje.*

Veta 2.8. *(Abelovo kritérium.) Nech funkcia f a g sú definované na intervale $< a, B)$ a sú integrovateľné na každom uzavretom intervale $< a, \eta >\subset< a, B)$. Ak platí:*

1. *integrál $\int_a^B f(x)dx$ konverguje,*
2. *funkcia $g(x)$ je monotónna a ohraničená na $< a, B)$, tak $\int_a^B f(x)g(x)dx$ konverguje.*

Zistite konvergenciu integrálov:

35. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

36. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$.

37. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+c^2}dx$.

38. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3+x+1}$.

39. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{2x^4-x^3+2x-1}$.

40. $\displaystyle\int_a^\infty \cos x\,dx$.

41. $\displaystyle\int_0^\infty x\cos x\,dx$.

42. $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$.

43. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

44. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+2}dx$.

45. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

46. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

47. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)\sqrt[3]{x-a}}$.

48. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

49. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2-a^2}$.

50. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

51. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

52. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$.

53. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$.

54. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$.

55. Dokážte, že integrál $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{(sinx)^s}$ konverguje, ak $s<1$ a diverguje, ak $s \geq 1$.

56. Dokážte, že integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx$ konverguje, ak $p<2$.

57. Dokážte, že, ak integrál $\int_a^x \varphi(t)dt$ je ohraničená funkcia pre $x \to \infty$, tak $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}dx$ konverguje pre $\alpha > 0$.

58. Nech $\varphi(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, $\varphi'(x) \leq 0$, $\varphi'(x)$ je spojitá funkcia pre $a \leq x < \infty$. Dokážte, že integrály $\int_0^\infty \varphi(x)\cos tx dx$ a $\int_a^\infty \varphi(x)\sin tx dx$, kde $t>0$, konvergujú.

Pre aké hodnoty parametra α konvergujú nasledujúce integrály:

59. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{x^2+1}$.

60. $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha . \frac{x+\sin x}{x-\sin x}dx$.

61. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$.

62. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^\alpha}dx$.

63. $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$.

64. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\, ax}{x^\alpha}dx$ $(a \neq 0)$.

65. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$.

66. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^\alpha}dx$ $(\alpha \geq 0)$.

67. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Nájdite hodnoty parametrov m a n (resp. p a q), pre ktoré nasledujúce integrály konvergujú:

68. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}dx$.

69. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m}{1+x^n}dx$ $(n \geq 0)$.

70. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m \operatorname{arctg}\, x}{2+x^n}dx$ $(n \geq 0)$.

71. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

72. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}$.

73. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.

74. $\displaystyle\int_0^\infty x^m|x-1|^n dx.$ **75.** $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$

76. Pre aké hodnoty parametrov p, q a r konverguje integrál

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}?$$

77. Určte hodnoty parametrov $p_1, p_2, \ldots, p_n$, pre ktoré konverguje integrál:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\ldots|x-a_n|^{p_n}}.$$

78. Dokážte, že integrál $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x^s}dx$ konverguje, ak $0 < s < 2$, a absolútne konverguje, ak $1 < s < 2$.

79. Dokážte, že integrál $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos tx}{x^s}dx$ konverguje absolútne, ak $1 < s < 3$.

80. Dokážte, že integrál $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^s}dx$ konverguje, ak $0 < s < 4$ a absolútne konverguje, ak $1 < s < 4$.

81. Dokážte, že nasledujúce integrály konvergujú neabsolútne:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$; b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$; c) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx.$

Zistite absolútnu a neabsolútnu konvergenciu nasledujúcich integrálov:

82. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx.$ **83.** $\displaystyle\int_0^\infty x^p\sin(x^q)dx \ (q \neq 0).$

84. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x)\,dx.$ **85.** $\displaystyle\int_0^\infty x^2\cos(e^x)dx.$

86. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx \ (q \geq 0).$

87. Nech P a Q sú dva polynómy a polynóm Q nemá reálne korene v intervale $< a, \infty)$. Dokážte, že, ak st $P \leq$ st $Q - 2$, integrály

$$\int_a^\infty \frac{P(t)}{Q(t)}\sin t dt, \int_a^\infty \frac{P(t)}{Q(t)}\cos t dt$$

konvergujú absolútne.

88. Nech na uzavretom intervale $< a, b >$ pre každé $b > a$ je funkcia $f(x) > 0$ a funkcia $\varphi(x)$ je rastúca, pričom $\varphi(x) \geq x$, $\varphi'(x)$ a $f(x)$ sú integrovateľné funkcie. Ak za týchto podmienok pre dostatočne veľké x

$$\frac{f[\varphi(x)].\varphi'(x)}{f(x)} \leq q < 1,$$

tak integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje, ak pre dostatočne veľké x

$$\frac{f\left[\varphi(x)\right].\varphi'(x)}{f(x)} \geq 1,\ \varphi(x) \not\equiv x,$$

tak integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ diverguje.

Sformulujte uvedené kritérium konvergencie resp. divergencie integrálu $\int_a^\infty f(x)dx$ v prípadoch: $\varphi(x) = x+1$; $\varphi(x) = 2x$; $\varphi(x) = x^2$; $\varphi(x) = e^x$.

89. Použitím tvrdenia úlohy 88 pre prípad $\varphi(x) = x+1$ ukážte, že

a) integrály $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{2^x}dx$ a $\displaystyle\int_1^\infty x^5 \sin\frac{1}{2^x}dx$ konvergujú;

b) integrály $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2^x}{x^4}dx$ a $\displaystyle\int_1^\infty 2^x \sin\frac{1}{x^5}dx$ divergujú.

90. Na základe tvrdenia úlohy 88 pre prípad $\varphi(x) = 2x$ ukážte, že

a) integrál $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}dx$ konverguje;

b) integrál $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(\ln x)^2}$ diverguje.

91. Použitím tvrdenia úlohy 88 pre prípad $\varphi(x) = e^x$ ukážte, že integrál

$$\int_{10}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}\ln x(\ln\ln x)^\alpha},\ \text{kde } \alpha > 1,$$

konverguje a integrál

$$\int_{10}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}\ln x.\ln\ln x}$$

diverguje.

92. Ak $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje, musí $f(x) \to 0$ pre $x \to \infty$?

Uvažujte príklady: a) $\int_a^\infty \sin x^2 dx$; b) $\int_a^\infty (-1)^{[x^2]}dx$.

93. Nech $f(x) \in C^{(1)} < x_0, \infty)$ t.j. funkcia f a jej derivácia sú spojité v $< x_0, \infty)$, $|f'(x)| < C$ pre $x_0 < x < \infty$ a $\int_{x_0}^\infty |f(x)|dx$ konverguje. Dokážte, že $f(x) \to 0$ pre $x \to \infty$.

94. Môžeme konvergentný nevlastný integrál

$$\int_a^b f(x)dx$$

neohraničenej funkcie $f(x)$, definovanej na $< a, b >$, definovať ako limitu zodpovedajúceho integrálneho súčtu

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\tau_i) \triangle x_i,$$

kde $x_i \leq \tau_i \leq x_{i+1}$ a $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i$?

95. Nech
$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{1}$$
konverguje a funkcia $\varphi(x)$ je ohraničená. Musí potom konvergovať aj integrál
$$\int_a^\infty f(x)\varphi(x)dx? \tag{2}$$
Ak nie, uveďte zodpovedajúci príklad. Čo môžete povedať o konvergencii integrálu (2), ak integrál (1) konverguje absolútne?

96. Nech funkcia $f(x)$ je monotónna v intervale $0 < x \leq 1$ a je neohraničená v okolí bodu $x = 0$. Dokážte, že ak existuje
$$\int_0^1 f(x)dx,$$
tak
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

3. Hlavná hodnota nevlastného integrálu

Definícia 3.1. *Nech funkcia f je definovaná na celej množine reálnych čísel $(-\infty, \infty)$ a nech je integrovateľná na každom uzavretom intervale. Budeme hovoriť, že funkcia f je integrovateľná v zmysle Cauchyho, ak existuje limita*

$$\lim_{\eta \to \infty} \int_{-\eta}^{\eta} f(x)dx.$$

Túto limitu budeme nazývať hlavnou hodnotou nevlastného integrálu funkcie f v zmysle Cauchyho a označovať symbolom

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\eta \to \infty} \int_{-\eta}^{\eta} f(x)dx$$

(v.p. sú začiatočné písmená francúzskych slov valuer principal - hlavná hodnota.)

Veta 3.1. *Ak je funkcia f nepárna a integrovateľná na každom uzavretom intervale, tak je integrovateľná v zmysle Cauchyho a hlavná hodnota jej integrálu sa rovná 0.*

Ak je funkcia f párna, tak je integrovateľná v zmysle Cauchyho na intervale $(-\infty, \infty)$ práve vtedy, keď konverguje nevlastný integrál

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

Definícia 3.2. *Nech funkcia f je definovaná v uzavretom intervale $< a, b >$ s výnimkou jediného bodu c, $a < c < b$ a nech je integrovateľná v každom uzavretom podintervale intervalov $< a, c), (c, b >$. Budeme hovoriť, že funkcia f je integrovateľná podľa Cauchyho, ak existuje limita*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right) = \text{v.p.} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

ktorá sa nazýva hlavnou hodnotou integrálu v zmysle Cauchyho.

97. Ukážte, že

a) v.p. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$; b) v.p. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0$; c) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = 0$.

98. Nájdite:

a) v.p. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$; b) v.p. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$;

c) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$; d) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \text{arctg } x dx$.

Výsledky, návody a poznámky

1 $\frac{1}{2}$.

2 $\frac{\pi}{4}$.

3 $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

4 $\frac{1}{2a}$.

5 $1 - \ln 2$.

6 $\frac{\pi}{2}$.

7 $\frac{1}{2}$.

8 $\frac{1}{4}(\pi + 2)$. Návod: urobiť substitúciu $\sqrt{x} = t$ a použiť vetu 1.2.

9 $\frac{2}{3}\ln 2$.

10 $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Návod: vezmite do úvahy, že $\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}$ $(x \neq 0)$ a urobte substitúciu $x - \frac{1}{x} = t$; dostanete $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+2}$, na výpočet ktorého použite definíciu 1.4 alebo definíciu 1.7.

11 $\frac{\pi}{2} - 1$. Návod: urobte substitúciu $\operatorname{arctg} x = t$.

12 $\frac{a}{a^2+b^2}$.

13 $\frac{b}{a^2+b^2}$.

14 π.

15 2.

16 $2\frac{2}{3}$.

17 $5\frac{1}{4}$. Návod: urobte substitúciu $\sqrt[3]{x-1} = t$.

18 $\frac{\pi}{2}$.

19 $-\frac{1}{4}$.

20 Diverguje.

21 -1.

22 $\frac{\pi}{2}$.

23 π.

24 0.

25 $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Návod: vezmite do úvahy, že $\frac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \frac{\frac{1}{x^6}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^5}\right)^2+\frac{1}{x^5}+1}}$ a urobte substitúciu $\frac{1}{x^5}=t$.

26 $\frac{1}{2}$. Návod: urobte substitúciu najprv $x^2=t$ a potom v získanom integráli položte $t=\cos\varphi$; na výpočet použite definíciu 1.3.

27 $(-1)^p\,p!$. Návod: urobte substitúciu $\ln x = t$.

28 $I_1 = I_2 = -\frac{\pi}{2}\ln 2$. Návod: substitúciou $\frac{\pi}{2}-x=t$ sa integrál I_2 redukuje na integrál I_1; potom $2I_1 = I_1+I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin t)\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin t)\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2+I_1$ (to sa dostane pomocou substitúcie $\pi - t = z$ v integráli $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin t)\,dt$).

29 Návod: použite definíciu 1.1 a skutočnosť, že ak $\varphi'(x)\in\Re< a,\eta>$, $\eta\geq a$, tak aj $|\varphi'(x)|\in\Re<a,\eta>$.

30 $\dfrac{2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}}{1-e^{-\pi}}$. Návod: Pretože $\sin x>0$ pre $2k\pi<x<\pi+2k\pi$, $k=0,1,2,\ldots$ $\int_E \frac{e^{-\frac{x}{2}}|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{\pi+2k\pi}\frac{e^{-\frac{x}{2}}|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{\frac{t}{2}}|\sin t-\cos t|}{\sqrt{\sin t}}dt$ (po substitúcii $x-2k\pi=t$). Integrál $\int_0^{\pi}\frac{e^{\frac{t}{2}}|\sin t-\cos t|}{\sqrt{sint}}dt$ je konvergentný, čo sa dokáže na základe definície 1.2 resp. definície 1.3, ak vezmeme do úvahy, že $\sin t-\cos t\leq 0$ pre $0\leq t\leq\frac{\pi}{4}$ a $\sin t-\cos t\geq 0$ pre $\frac{\pi}{4}\leq t\leq\pi$ a zapíšeme ho ako súčet dvoch integrálov.

31 $n!$

32 $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$, ak n je párne; $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$, ak n je nepárne. Návod: urobte substitúciu $x=\sin t$.

33 a) 1; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0.

34 Návod: použite definíciu 1.7, v ktorej položte $d_0{=}0$ a zohĺadnite skutočnosť, že v a) je funkcia za znakom integrálu nepárna a v b) je párna.

35 Diverguje.

36 Konverguje.

37 Diverguje.

38 Diverguje.

39 Konverguje.

40 Diverguje. Návod: dokážte na základe definície 1.1.

41 Diverguje. Návod: pre dôkaz použite definíciu 1.2 a poznámku 1.1.

42 Konverguje (pozri úlohu 31).

43 Konverguje.

$\boxed{44}$ Konverguje. Návod: použite vetu 2.7.

$\boxed{45}$ Konverguje.

$\boxed{46}$ Konverguje. Návod: použite definíciu 1.7 a potom definíciu 1.2 resp. 1.3.

$\boxed{47}$ Diverguje. (Pozri návod k úlohe 46).

$\boxed{48}$ Konverguje.

$\boxed{49}$ Diverguje.

$\boxed{50}$ Diverguje. Návod: Napíšte daný integrál ako súčet dvoch integrálov $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} + \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$, pričom v druhom integráli funkcia $\frac{1}{\ln x} = \mathcal{O}^*\left(\frac{1}{x-1}\right)$ pre $x \to 1^+$; ďalej využite poznámku 2.4 a definíciu 1.7.

$\boxed{51}$ Konverguje. Návod: Na základe definície 1.7 zapíšte integrál ako súčet dvoch integrálov a na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý dôsledok 2.2 (alebo poznámku 2.2).

$\boxed{52}$ Konverguje. Návod: Daný integrál má singulárny bod $x = 0$, t.j. integrál je typu integrála z definície 1.3. Využitím poznámky 1.4 sformulujte špeciálne porovnávacie kritérium v limitnom tvare pre uvedený typ nevlastného integrálu, podobne ako je toto kritérium sformulované vo vete 2.5 pre integrál z definície 1.2. Na základe toho hľadajte $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^p|\ln \sin x|}{\sqrt{x}}$ $\left(\dfrac{1}{2} < p < 1\right)$, kde $x^p = (x-0)^p$.

$\boxed{53}$ Diverguje. Návod: Integrál zapíšte v tvare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_0^a \frac{\sin^2 x}{x}dx + \int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx \ (a > 0).$$

Prvý integrál existuje, druhý integál na pravej strane rovnosti použitím vzorca $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ napíšte ako rozdiel dvoch integrálov použite na jeden z nich definíciu 1.1 a na druhý vetu 2.7.

$\boxed{54}$ Konverguje. Poznámka: bod $x = 1$ nie je singulárnym bodom funkcie $\frac{\ln x}{1-x^2}$, lebo existuje $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln x}{1-x^2}$, o čom sa presvedčte sami.

$\boxed{55}$ Návod: Uvažujte dva prípady: a) $s \le 0$; b) $s > 0$.

a) Ak $s \le 0$, integrál existuje ako vlastný (prečo?).

b) Ak $s > 0$, funkcia $\frac{1}{(\sin x)^s}$ má singulárne body $x = 0$ a $x = \pi$. Podľa definície 1.7 zapíšte integrál vo tvare $\int_0^\pi \frac{dx}{(\sin x)^s} = \int_0^c \frac{dx}{(\sin x)^s} + \int_c^\pi \frac{dx}{(\sin x)^s}$ $(0 < c < \pi)$. Na dôkaz konvergencie 1. integrálu použite poznámku 2.4 (tu $a = 0$); 2. integrál substitúciou $\pi - x = t$ prevediete na integrál so singulárnym bodom $x = 0$. Z a), b) dostanete dôkaz tvrdenia úlohy.

$\boxed{56}$ Návod: Uvažujte dva prípady: a) $p \le 0$, b) $p > 0$. Prípad a) pozrite v návode k úlohe 55. V prípade b) funkcia $\frac{\sin x}{x^p}$ má singulárny bod $x = 0$. Na dôkaz konvergencie integrálu $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx$ použite poznámku 2.4, pritom vezmite do úvahy, že $\frac{\sin x}{x^p} = \frac{\sin x}{x}.\frac{1}{x^{p-1}}$.

57 Návod: Použite vetu 2.7.

58 Pozrite návod k úlohe 57.

59 Konverguje, ak $|\alpha| < 1$ a diverguje, ak $|\alpha| \geq 1$. Návod: Zapíšte daný integrál v tvare $\int_0^c \frac{dx}{x^{-\alpha}(x^2+1)} + \int_c^\infty \frac{dx}{x^{-\alpha}(x^2+1)}$ $(c > 0)$. Použitím poznámky 2.4 na 1. integrál dostanete množinu A_1 hodnôt parametra α, pre ktoré konverguje tento integrál, a množinu A_1' hodnôt parametra α, pre ktoré integrál diverguje. Podobne použitím poznámky 2.2 dostanete množiny A_2 a A_2' pre 2. integrál. Potom je množina $A = A_1 \cap A_2$ hodnôt parametra α, pre ktoré daný integrál konverguje, a množina $A' = A_1' \cup A_2'$ je množinou hodnôt parametra α, pre ktoré daný integrál diverguje.

60 Konverguje, ak $\alpha < -1$ a diverguje, ak $\alpha \geq -1$. Návod: Zapíšte funkciu, ktorú integrujete vo tvare $\dfrac{1}{x^{-\alpha}} . \dfrac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}}$ a použite poznámku 2.2.

61 Konverguje pre $\alpha > 1$ a diverguje pre $\alpha \leq 1$. Návod: Urobte substitúciu $\ln x = t$ a na získaný integrál použite dôsledok 2.2.

62 Pre $\alpha < 1$ konverguje, pre $\alpha \geq 1$ diverguje. Návod: Zapíšte integrál v tvare: $\int_0^\pi \frac{1}{x^\alpha} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$; prvé dva integrály majú singulárny bod $x = 0$, použite na nich poznámku 2.4.

63 Konverguje pre $\alpha > 0$. Návod: Integrál zapíšte vo tvare súčtu dvoch integrálov: $\int_0^c \frac{e^{-x}}{x^{1-\alpha}} dx + \int_c^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x} dx$ $(c > 0)$; na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý dôsledok 2.2.

64 Konverguje pre $1 < \alpha < 2$. Návod: Zapíšte daný integrál vo tvare súčtu dvoch integrálov: $\int_0^c \frac{\operatorname{arctg}\, ax}{x^\alpha} dx + \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\, ax}{x^\alpha} dx$ $(c > 0)$; na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý poznámku 2.2.

65 Konverguje pre $1 < \alpha < 2$. Návod: Urobte substitúciu $\ln(1 + x) = t$ a ďalej postupujte podľa návodu k úlohe 63.

66 Konverguje pre $\alpha > 0$ $(a \neq 0)$. Návod: Použite vetu 2.7.

67 Konverguje pre $\alpha > -1$. Návod: Podľa definície 1.7 zapíšte daný integrál ako súčet dvoch integrálov na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý poznámku 2.3.

68 Konverguje, ak $p > -1$ a $q > -1$. Návod: Po substitúcii $\ln \frac{1}{x} = u$ v danom integráli dostaneme integrál $\int_0^\infty \frac{u^a}{e^{(1+p)u}} du$. Ďalej postupujete podľa návodu k úlohe 63.

69 Konverguje, ak $m > -1$, $n - m > 1$. Návod: Podľa definície 1.7 zapíšte daný integrál ako súčet dvoch integrálov na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý poznámku 2.2.

70 Konverguje, ak $m > -2$, $n - m > 1$. Poznámka: Pri hľadaní hodnôt parametrov m a n, pre ktoré daný integrál konverguje, postupujte podľa návodu k úlohe 69.

71 Konverguje, ak $p < 1, q < 1$. Návod: Podľa definície 1.7 zapíšte daný integrál v tvare súčtu dvoch integrálov: $\int_0^c \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int_c^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ $\left(0 < c < \frac{\pi}{2}\right)$; funkciu

$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x}$ v 1. integráli rozšírte x^p a použite poznámku 2.4; v 2. integráli túto funkciu rozšírte výrazom $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^q$ a použite poznámku 2.3.

72 Konverguje, ak $\min\{p, q\} < 1$, $\max\{p, q\} > 1$. Návod: Na základe definície 1.7 zapíšte daný integrál v tvare súčtu dvoch integrálov: $\int_0^c \frac{dx}{x^p+x^q} + \int_c^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}$; na zistenie konvergencie prvého z nich použite poznámku 2.4 v dvoch prípadoch a) $p > q$, b) $p < q$; na zistenie konvergencie druhého použite poznámku 2.2 tiež v uvedených dvoch prípadoch.

73 Konverguje, ak $p > 1, q < 1$. Návod: Použitím substitúcie $\ln x = t$ v danom integráli dostanete integrál $\int_0^\infty \frac{dt}{e^{(p-1)t}t^q}$. Ďalej postupujte podľa návodu k úlohe 63.

74 Konverguje pre $m > -1, n > -1, m + n < -1$. Návod: Singulárne body funkcie, ktorú integrujeme na intervale $(0, \infty)$ sú $0, 1, +\infty$. Podľa definície 1.7 zapíšte daný integrál vo tvare súčtu štyroch integrálov:
$\int_0^{d_0} f(x)dx + \int_{d_0}^1 f(x)dx + \int_1^{d_1} f(x)dx + \int_{d_1}^\infty f(x)dx$ $(0 < d_0 < 1 < d_1 < \infty$, $f(x) = x^\alpha|x-1|^\beta)$, z ktorých každý obsahuje len jeden singulárny bod. Na vyšetrenie konvergencie 1. a 3. integrálu použite poznámku 2.4, konvergencie 2. integrálu poznámku 2.3 a konvergenciu 4. integrálu poznámku 2.2.

75 Konverguje, ak $p > 0$ a $q > 0$. Návod: Podľa definície 1.7 daný integrál zapíšte v tvare: $\int_0^c \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}dx + \int_c^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}$ $(0 < c < 1)$; na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý použite poznámku 2.3.

76 Konverguje pre $p > 1$, ľubovoľné $q, r < 1$ a pre $p = 1$, $q > 1$, $r < 1$. Návod: Substitúciou $\ln\ln x = u$ v danom integráli dostanete integrál

$$\int_0^\infty \frac{du}{e^{(p-1)e^u}e^{(q-1)u}u^r}.$$

Ďalej postupujte podľa návodu k úlohe 63, pričom pri vyšetrení konvergencie 2. integrálu (ktorý má singulárny bod ∞) rozlíšte dva prípady: a) $p - 1 > 0$, b) $p - 1 = 0$.

77 Konverguje, ak $p_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^n p_i > 1$. Návod: Funkcia, ktorú integrujeme na intervale $(-\infty, \infty)$ má tieto singulárne body: $-\infty, a_1, \ldots, a_n, \infty$. Ďalej postupujeme podobne ako v návode k úlohe 74.

78 Návod: Podľa definície 1.7 zapíšte daný integrál ako súčet dvoch integrálov $\int_0^c \frac{\sin tx}{x^s}dx + \int_c^\infty \frac{\sin tx}{x^s}dx$ $(c > 0, t \neq 0)$.
Poznámka 1.: Pre $t = 0$ dostanete nulovú funkciu, ktorej integrál absolútne konverguje na $(0, \infty)$.

Pri vyšetrovaní konvergencie daného integrálu postupujeme takto:
1. Použitím poznámky 2.4 dostanete $\frac{|\sin tx|}{x^s} = \left|\frac{\sin tx}{tx}t\right| . \frac{1}{x^{s-1}} = \mathcal{O}^*\left(\frac{1}{x^{s-1}}\right)$ pre $x \to 0^+$, z čoho vyplýva, že $\int_0^c \frac{|\sin tx|}{x^s}dx$ konverguje, ak $s - 1 < 1$, t.j. $s < 2$; použite poznámku 2.1.
2. Na získanie konvergencie 2. integrálu použite vetu 2.7.

Z 1. a 2. dostanete množinu hodnôt parametra s, pre ktoré daný integrál konverguje.

Poznámka 2.: Z 1. vyplýva, že 1. integrál absolútne konverguje pre $s < 2$.

Absolútnu konvergenciu 2. integrálu zistíte na základe prvej časti vety 2.4.

Z poznámky 2. a absolútnej konvergencie 2. integrálu dostanete množinu hodnôt parametra s, pre ktoré daný integrál konverguje absolútne.

79 Návod: Použitím vzorca $1-\cos tx = 2\sin^2 \frac{tx}{2}$ v danom integráli dostanete integrál $2\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{tx}{2}}{x^s} dx$. Funkcia $\frac{\sin^2 \frac{tx}{2}}{x^s}$ je na $(0,\infty)$ nezáporná, preto konvergencia tohoto integrálu je súčasne aj absolútnou konvergenciou. Pri skúmaní konvergencie integrálu postupujete podľa návodu k úlohe 78., pričom v prvom z integrálov, ktoré dostanete po vyjadrení uvedeného integrálu ako súčtu dvoch integrálov, vezmite do úvahy, že

$$\frac{\sin^2 \frac{tx}{2}}{x^s} = \frac{t^2}{4}\left(\frac{\sin \frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2 . \frac{1}{x^{s-2}},\ t \neq 0.$$

80 Návod: Po použití vzorcov pre goniometrické funkcie polovičného argumenta v danom integráli dostanete $2\int_0^\infty \frac{\sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{x^s} dx$. Dôkaz tvrdenia úlohy preveďte podľa návodu k úlohe 78.

81 Návod: a) Na zistenie konvergencie integrálu použite vetu 2.7. Pri dôkaze divergencie integrálu $\int_0^\infty \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx$ využite nerovnosť $|\cos x| \geq \cos^2 x$.

b) Dôkaz robte podľa návodu v a), pritom využite nerovnosť $|\sin x| \geq \sin^2 x$.

c) Substitúciou $x^2 = t$ v danom integráli dostanete integrál typu, ktorý sa uvažuje v úlohe b).

82 Postup riešenia úlohy je ten istý, ako úlohy 81. a).

83 Konverguje absolútne, ak $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$; konverguje neabsolútne, ak $0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$. Návod: A. Po použití substitúcie $x^q = t$ v danom integráli dostanete integrál $\frac{1}{|q|}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt$, ktorý na základe difinície 1.7 zapíšte ako súčet dvoch integrálov

$$\frac{1}{|q|}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt + \frac{1}{|q|}\int_\pi^\infty \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt.$$

Použitím poznámky 2.4 na 1. integrál a vety 2.7 na 2. integrál dostanete podmienku pre parametre p a q takú, aby daný integrál konvergoval.

B. 1. Pri skúmaní absolútnej konvergencie daného integrálu vezmite do úvahy, že 1. integrál konverguje aj absolútne pre tie isté hodnoty parametrov p a q, pre ktoré konverguje v obyčajnom zmysle.

2. Na zístenie absolútnej konvergencie 2. integrálu použite 1. časť vety 2.4. Z 1. a 2. dostanete podmienku pre p a q, aby daný integrál absolútne konvergoval.

Porovnaním výsledkov v A a B dostanete podmienku, za ktorej daný integrál konverguje neabsolútne.

84 Konverguje absolútne. Návod: Použitím substitúcie $\sec x = \frac{1}{\cos x} = t$ v danom integráli dostanete $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}} dt$. Postup riešenia tejto úlohy je podobný postupu riešenia úlohy 83., len tu je o to ľahšie, že nemáme nijaké parametre.

$\boxed{\mathbf{85}}$ Konverguje neabsolútne. Návod: Urobte substitúciu $e^x = t$ a na získaný integrál použite vetu 2.7. Pri skúmaní divergencie tohto integrálu využite nerovnosť $|\cos t| \geq \cos^2 t$.

$\boxed{\mathbf{86}}$ Konverguje absolútne, ak $p > -2,\ q > p+1$; konverguje neabsolútne, ak $p > -2,\ p < q \leq p+1$. Poznámka: Pri riešení úlohy postupujte podĺa návodu k úlohe 83.

$\boxed{\mathbf{87}}$ Návod: Ukážte, že $\int_0^\infty \frac{P(t)}{Q(t)} dt$ konverguje absolútne a potom použite vetu 2.6.

$\boxed{\mathbf{88}}$ Riešenie: Bez ujmy na všeobecnosti môžeme považovať, že nerovnosť $f[\varphi(x)]\,\varphi'(x) \leq q f(x)$ $(q < 1)$ je splnená pre všetky $x \in< a, \infty)$. Nech $b > c,\ x = \varphi(t)$, $c = \varphi(a),\ b = \varphi(\beta)$, potom

$$\int_c^b f(x)dx = \int_a^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt \leq q\int_a^\beta f(t)dt = q\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx\right),$$

$$\text{odkiaĺ vyplýva, že } \int_c^b f(x)dx - q\int_c^\beta f(x)dx \leq q\int_a^c f(x)dx$$

$$\text{alebo } \int_c^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx - q\int_c^\beta f(x)dx \leq q\int_a^c f(x)dx.$$

Pretože $\beta \leq b,\ f(x) > 0$, integrál $\int_\beta^b f(x)dx \geq 0$ a teda, $(1-q)\int_c^\beta f(x)dx \leq q\int_a^c f(x)dx$ alebo $\int_c^\beta f(x)dx \leq \frac{q}{1-q}\int_a^c f(x)dx$.

Ak $b \to \infty$, tak aj $\beta \to \infty$ a $\int_c^\infty f(x)dx = \lim\limits_{\beta\to\infty}\displaystyle\int_c^\beta f(x)dx \leq \frac{q}{1-1}\int_a^c f(x)dx$. Pretože integrály $\int_a^\infty f(x)dx$ a $\int_c^\infty f(x)dx$ konvergujú alebo divergujú súčasne (pozri poznámku 1.6), prvá časť tvrdenia je dokázaná.

Nech teraz $f[\varphi(x)]\,\varphi'(x) \geq f(x)$. Pre zavedené označenia máme:

$$\begin{aligned}\int_c^b f(x)dx = \int_a^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt &= \int_a^c f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt + \int_c^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt \\ &\geq \int_a^c f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt + \int_c^\beta f(t)dt.\end{aligned}$$

Ak $b \to \infty$, tak aj $\beta \to \infty$, a $\int_c^\infty f(x)dx \geq \int_a^c f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt + \int_c^\infty f(t)dt$, čo je možné len vtedy, keď $\int_c^\infty f(x)dx = \infty$.

$\boxed{\mathbf{92}}$ Nemusí. Návod: a) Z týmto integrálom ste sa stretli už v úlohe 81., kde sa zistilo na základe vety 2.7, že konverguje. Avšak $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x^2$ neexistuje. (Prečo?)

b) Konvergenciu daného integrálu zistite na základe tvrdenia z odseku 1. Podĺa neho a po použití substitúcie $x^2 = t$ dostanete, že

$$\int_0^\infty (-1)^{[x^2]}\,dx = \sum_{k=0}^\infty \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^{[x^2]}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \frac{(-1)^{[t]}}{\sqrt{t}}dt.$$

Keď vypočítate integrál za znakom sumácie, dostanete číselný rad, ktorého konvergenciu zistíte pomocou Leibnizovho kritéria. Potom ukážte, že tento výsledok nezávisí od voľby postupnosti $\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty} < (0,\infty)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k = \infty$ (pozri [3]).

Záverom dostanete, že $\lim\limits_{x\to\infty} (-1)^{[x^2]}$ neexistuje.

$\boxed{\textbf{93}}$ Návod: Uvažujte integrál $\int_{x_0}^{\infty} f(x)f'(x)dx$, ktorý konverguje na základe predpokladov z tejto úlohy. Využite túto skutočnosť, definíciu 1.1 a dôkaz tvrdenia urobte sporom.

$\boxed{\textbf{94}}$ Nie. (Odôvodnite to.)

$\boxed{\textbf{95}}$ Ak integrál $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konverguje neabsolútne a funkcia $\varphi(x)$ je ohraničená, tak $\int_a^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ môže divergovať (pozri úlohu 53., v ktorej za $f(x)$ vezmite funkciu $\frac{\sin x}{x}$ a $\varphi(x) = \sin x$). Na druhú otázku dáva odpoveď veta 2.6.

$\boxed{\textbf{96}}$ Návod: Podľa predpokladu existuje vlastná limita $\lim\limits_{\eta\to 0^+} \displaystyle\int_{\eta}^{1} f(x)dx$ (pozri definíciu 1.3). Položte $\eta = \frac{1}{n}$, $n \in N$ a predpokladajte, že $f(x)$ je monotónne klesajúca na $< \frac{1}{n}, 1 >$ (podobné úvahy potom môžete previesť pre monotónne rastúce funkcie). Urobte delenie intervalu na n rovnakých častí a napíšte horný $\overline{S}$ a dolný $\underline{S}$ integrálny súčet funkcie $f(x)$ zodpovedajúce danému deleniu takto:

$$\overline{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(1)}{n};$$
$$\underline{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(\frac{1}{n})}{n}.$$

Ďalej využite z teórie určitého integrálu známu nerovnosť

$$\underline{S} \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \leq \overline{S}$$

a to, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(\frac{1}{n})}{n} = 0$ (odôvodnite to!) a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(1)}{n} = 0$. Limitným prechodom v tejto nerovnosti dostanete platnosť tvrdenia.

$\boxed{\textbf{98}}$ a) $\ln \frac{1}{2}$. Poznámka: Vezmite do úvahy, že integrál má singulárne body $1, 2, \infty$; b) 0; c) π; d) 0.

II. Metrický priestor

1. Definícia a základné vlastnosti metrických priestorov

Medzi najzákladnejšie pojmy v matematickej analýze patria pojmy metriky a metrického priestoru.

Definícia 1.1. *Nech $X \neq \emptyset$ je množina, d je reálna funkcia definovaná na karteziánskom súčine $X \times X$ nasledujúcimi vlastnosťami:*

1. *Pre všetky $x, y \in X$ je $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0$ práve vtedy, keď $x = y$.*
2. *Pre všetky $x, y \in X$ je $d(x, y) = d(y, x)$.*
3. *Pre všetky $x, y, z \in X$ je $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

Funkciu d nazývame metrika na množine X a dvojicu (X, d) nazývame metrickým priestorom.

V ďalšom texte obyčajne namiesto (X, d) je metrický priestor (ak je jasné o akú metriku ide), budeme krátko písať X je metrický priestor.

Poznámka 1.1. Vlastnosť 2. funkcie d sa nazýva symetričnosť a vlastnosť 3. trojuholníková nerovnosť.

Poznámka 1.2. Nech (X, d) je metrický priestor a $\emptyset \neq Y; Y \subset X$. Na $Y \times Y$ definujeme funkciu d' nasledovne:

Pre každú dvojicu $(x, y) \in Y \times Y$ platí $d'(x, y) = d(x, y)$. Potom d' je metrika na množine Y a dvojicu (Y, d') nazývame metrickým podpriestorom priestoru (X, d).

Definícia 1.2.

1. *Nech (X, d) je metrický priestor. Nech $A \subset X$. Potom číslo (môže byť aj $+\infty$)*

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y);\ x, y \in A\}$$

   nazývame priemerom (diametrom) množiny A. Množina A sa nazýva ohraničená (neohraničená), ak $\operatorname{diam} < +\infty$ ($\operatorname{diam} = +\infty$).

2. *Pre ľubovoľný bod $p \in X$ a $\varepsilon > 0$ označíme:*

$$O(p, \varepsilon) = \{x \in X; d(p, x) < \varepsilon\}.$$

Túto množinu budeme nazývať ε - ovým okolím bodu p (vzhľadom na metriku d).

Definícia 1.3. *Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov metrického priestoru (X, d). Hovoríme, že táto postupnosť konverguje k bodu $x \in X$, ak postupnosť $\{d(x_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule. Postupnosť, ktorá nekonverguje k žiadnemu bodu priestoru (X, d), nazývame divergentnou. Ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x \in X$ hovoríme tiež, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Veta 1.1. *Každá postupnosť bodov metrického priestoru má najviac jednu limitu.*

Veta 1.2. *Ak postupnosť bodov metrického priestoru $(X, d)\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x \in X$, tak každá z nej vybraná postupnosť konverguje ku tomu istému bodu $x \in X$.*

Poznámka 1.3. Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme ohraničenou, ak množina jej členov je ohraničená.

Veta 1.3. *Každá konvergentná postupnosť bodov metrického priestoru je ohraničená.*

Poznámka 1.4. Na každej množine možno definovať viacero metrík.

Nech d, d' sú dve metriky na množine X. Budeme hovoriť, že metriky d a d' sú ekvivalentné ak platí: Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k x v priestore (X, d) práve vtedy, keď konverguje ku x v priestore (X, d').

Na karteziánskom súčine metrických priestorov obvykle definujeme metriku nasledovne:

Definícia 1.4. *Nech $(X_1, d_1), (X_2, d_2), ..., (X_m, d_m)$ sú metrické priestory. Označíme $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$. Ak $x, y \in X, x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), y = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$. Položme:*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} d_i^2(\alpha_i, \beta_i)}.$$

Doporučujeme čitateľovi overiť si, že funkcia d je metrikou na priestore X. (Vlastnosti 1. a 2. sú zrejmé. Trojuholníkovu vlastnosť možno overiť pomocou nasledujúcej lemy.)

Lema 1.1. *Nech $a_i, b_i (i = 1, , 2, ..., m)$ sú reálne čísla. Potom platí:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i . b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} . \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}.$$

Veta 1.4. *Nech $(X_1, d_1), (X_2, d_2), ..., (X_m, d_m)$ sú metrické priestory. Postupnosť $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$, t.j.*

$$X^n = (\alpha_1^n, \alpha_2^n, ..., \alpha_m^n) \in X$$

konverguje k prvku $X = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \in X$, *v zmysle metriky zavedenej v definícii 1.4, vtedy a len vtedy, keď pre každé* $i; 1 \leq i \leq m$ *platí:* $\lim_{n\to\infty} \alpha_i^n = \alpha_i$, *t.j. postupnosť* $\{\alpha_i^n\}_{n=1}^{\infty}$, *konverguje v priestore* (X_i, d_i) *ku bodu* $\alpha_i \in X_i$.

Poznámka 1.5. Konvergencia spomínaná vo vete 1.4 sa nazýva konvergenciou po súradniciach.

1. Nech $< a, b >\subset R$. Označíme $M(a, b)$ množinu všetkých reálnych funkcií definovaných a ohraničených na intervale $< a, b >$. Nech $f, g \in M(a, b)$. Dokážte, že funkcia

$$d(f, g) = \sup_{x\in<a,b>} \mid f(x) - g(x) \mid,$$

je metrika na priestore $M(a, b)$.

2. Označme $M-$ množinu všetkých ohraničených reálnych postupností. Nech $x, y \in M; x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Dokážte, že funkcia

$$d(x, y) = \sup_{i=1,2,...} \mid x_i - y_i \mid,$$

je metrika na priestore M.

3. Označme znakom $l^{(2)}$ množinu všetkých tých reálnych čísel, pre ktoré platí:
Ak $x \in l^{(2)}, x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, tak $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ konverguje. Nech $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sú dva body z $l^{(2)}$. Dokážte, že funkcia

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$$

je metrikou na $l^{(2)}$.

4. Nech $X = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\}$. Položme $d(x, x) = 0$, pre každé $x \in X$. Ďalej

$$d(1, \frac{1}{2}) = d(\frac{1}{2}, 1) = 1; d(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = d(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}; d(1, \frac{1}{3}) = d(\frac{1}{3}, 1) = \frac{1}{3}.$$

Je funkcia d metrikou na X?

5. Dokážte, že vlastnosti 1.,2.,3. metriky, z definície 1.1 sú nezávislé. (Nezávislosť vlastností chápeme v tom zmysle, že žiadna z nich nevyplýva z ostatných vlastností. Pozri návod.)

6. Nech $X \neq \emptyset$ a $d : X \times X \to R$ má nasledujúce vlastnosti:
a) $d(x, x) = 0$ pre všetky $x \in X$ a $d(x, y,) \neq \emptyset$ pre každé dva rôzne prvky z X.
b) Pre každé tri prvky $x, y, z \in X$ platí:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Dokážte, že d je metrika!

7. Nech d_1, d_2 sú dve metriky na X. Sú funkcie $d_1+d_2, \max\{d_1, d_2\}, \min\{d_1, d_2\}$ metrikami na X?

8. Označme $E_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n); a_i \in R, i = 1, 2, ..., n\}$. Ak $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sú dva body z E_n, tak kladieme

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

a) Ukážte, že funkcia d je metrikou na priestore E_n. (Funkcia d sa nazýva euklidovská metrika na E_n.)
b) Ak

$$\begin{aligned} A_1 &=(a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1) \\ A_2 &=(a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2) \\ &\vdots \\ A_k &=(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k) \\ &\vdots \end{aligned}$$

je postupnosť bodov priestoru (E_n, d), potom táto postupnosť $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje v priestore (E_n, d) k bodu $A_0 = (a_1^0, a_2^0, ..., a_n^0)$ vtedy a len vtedy, ak $\{a_k^i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje ku $a_k^0,\ k = 1, 2, ..., n$. Dokážte. V zmysle poznámky 1.5 možno posledné tvrdenie preformulovať: V euklidovských priestoroch postupnosť bodov konverguje práve vtedy, keď konverguje po súradniciach.

9. Označme znakom l množinu všetkých takých postupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, pre ktoré rad $\sum_{i=1}^{\infty} \mid x_i \mid$ konverguje. Ak $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sú dva body z l, položme

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mid x_i - y_i \mid.$$

a) Dokážte, že d_1 je metrika na priestore l.
b) Dokážte, že $l \subset l^{(2)}$ (pozri príklad 3.)
c) Takto na priestore l máme definované dve rôzne metriky d_1 a metriku d z príkladu 3. Je na mieste otázka, koľko metrík možno definovať na danej množine?

10. Označme $C(a, b)$ množinu všetkých spojitých funkcií, definovaných na intervale $< a, b >$. Presvedčte sa, že ak $f, g \in C$, tak funkcia

$$d(f, g) = \int_a^b \mid f(x) - g(x) \mid dx$$

je metrika na $C(a, b)$.

11. Nech S označuje množinu všetkých postupností reálnych čísel. Pre $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ položme:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{| x_i - y_i |}{1 + | x_i - y_i |}.$$

Dokážte, že d je metrika na S.

12. Nech $R = (-\infty, +\infty)$. Pre každú dvojicu $x, y \in R$ definujeme

$$d(x, y) = \sin^2 (x - y).$$

Je d metrika na R ?

13. Pre každé $x, y \in R$ definujeme

$$d(x, y) = \operatorname{arctg} | x - y |.$$

a) Ukážte, že d je metrika na R.
b) Ukážte, že táto metrika je ekvivalentná euklidovskej metrike na priamke.

14. Pre každé $x, y \in R$ definujeme:

$$d(x, y) = \sqrt{| x - y |}.$$

Je funkcia d metrika na R ?

15. $X = \{(a, b); a, b \in R\}$. Pre každé dva body $x = (a_1, b_1), y = (a_2, b_2)$ z priestoru X definujeme:

$$d_1(x, y) = \max \{| a_1 - a_2 |; | b_1 - b_2 |\}$$
$$d_2(x, y) = | a_1 - a_2 | + | b_1 - b_2 |$$
$$d_3(x, y) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \quad \text{(euklidovská metrika)}$$

Ukážte:

a) Funkcie d_1 a d_2 sú tiež metriky.
b) Metriky d_1, d_2 a d_3 sú ekvivalentné.

16. Nech X je množina bodov kružnice k. Pre každú dvojicu $x, y \in X$ definujeme:
$d(x, y) =$ dĺžka kratšieho oblúka kružnice k, spájajúceho body x a y. Je d metrika na X ?

17. Nech (X, d) je metrický priestor. Pre každé $A, B \subset X, A, B \neq \emptyset$ položme:

$$d_1(A, B) = \inf \{d(a, b), a \in A, b \in B\}.$$

Je d_1 metrika na systéme všetkých podmnožín priestoru X ?

18. Označujeme $C(a,b)$ množinu všetkých spojitých funkcií, definovaných na $< a, b >$. Ak $f, g \in C(a,b)$, položme

$$d(f,g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

Je d metrika na $C(a,b)$?

19. Ukážte, že k ekvivatentnosti metrík d_1 a d_2, definovaných na priestore X stačí, aby existovali kladné konštanty a, b tak, že pre všetky $x, y \in X$ platí:

$$a.d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b.d_1(x,y).$$

Ukážte, že táto podmienka nie je nutná k ekvivalentnosti metrík d_1 a d_2 !

20. Pseudometrikou nazveme takú funkciu $\overline{d}$, ktorá sa od metriky líši iba v tom, že $\bar{d}(x,y)$ sa môže rovnať nule aj pre $x \neq y$.

Nech $(X, \overline{d})$ je pseudometrický priestor.

Označme Y nasledujúci rozklad priestoru X:

Do jednej a tej istej triedy $A \in Y, A \subset X$ patria tie a len tie body x, y, pre ktoré $\overline{d}(x,y) = 0$. Pre $A, B \in Y$ definujeme:

$$d(A,B) = \bar{d}(a,b); a \in A, b \in B.$$

Dokážte, že d je metrika na priestore Y.

21. Nech (X,d) je metrický priestor. $\emptyset \neq A_1 \subset A_2$. Potom diam $A_1 \leq$ diam A_2. Dokážte!

22. Nech (X,d) je metrický priestor. Nech $A \subset X$. Označme

$$D(A) = \{d(x,y); x, y \in A\}.$$

Existuje taká trojprvková množina $A \subset E_2$, aby $D(A) = \{0,1\}$? Platí niečo podobné v $E_1 = R$?

23. Označme Q - množinu všetkých racionálnych čísel z intervalu $< 0, 1 >$ a I - množinu všetkých iracionálnych čísel z intervalu $< 0, 1 >$. Vypočítajte diam Q a diam I.

24. Nech $j_1 < j_2 < ...; k_1 < k_2 < ...$ sú dve rastúce postupnosti prirodzených čísel. Nech $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov metrického priestoru (X,d) taká, že $\{x_{j_i}\}_{i=1}^{\infty}$ ak $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ konvergujú k tomu istému bodu x_0. Nech zjednotenie množín $\{j_1, j_2, ...\}$ a $\{k_1, k_2, ...\}$ je množina všetkých prirodzených čísel. Potom aj postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje k bodu x_0. Dokážte!

25. Dokážte, že postupnosť $\{1 - \frac{1}{i}, \frac{2i}{3i+4}\}_{i=1}^{\infty}$ bodov euklidovského priestoru (E_2, d) konverguje k bodu $(1, \frac{2}{3}) \in E_2$!

26. Veta 1.4 nám hovorí, že napr. v euklidovských priestoroch (E_n, d) je konvergencia bodov ekvivalentná tzv. konvergencia po súradniciach. Majú podobnú vlastnosť i konvergencia v priestoroch $M, l^{(2)}, l$ z príkladov 2.,3. a 9.?

27. Na priestore E_n všetkých usporiadaných n-tíc zaveďme okrem euklidovskej metriky d_0 inú funkciu h:

Ak $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sú dva body z E_n, tak $h(x, y) = \frac{1}{s}$, kde s je prvá súradnica, v ktorej sa body x a y líšia. Dokážte, že h je metrika na E_n!

28. Nech N je množina všetkých prirodzených čísel. Pre každé celé číslo $a \geq 0$ definujeme na $N \times N$ nasledujúce funkcie:

$$d_a(n, n) = 0, \text{ pre každé } n \in N,$$

$$d_a(m, n) = a + \frac{1}{m+n}, \text{ ak } m, n \in N, \ m \neq n.$$

Ukážte:

a) d_0 nie je metrikou na N.
b) d_a, pre $a \geq 1$ je metrikou na N.
c) Pre všetky $a, b \geq 1$ sú d_a, d_b ekvivalentné metriky.

29. V súvislosti s vetou 1.2 dokážte: Ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ metrického priestoru (X, d) nekonverguje k prvku $x \in X$, tak existuje taká čiastočná postupnosť $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, že žiadna jej čiastočná postupnosť nekonverguje k bodu x.

2. Podmnožiny a body metrického priestoru

Definícia 2.1. *Nech (X,d) je metrický priestor. $A \subset X$. Bod $x \in X$ nazveme bodom uzáveru množiny A, ak existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A, n = 1, 2, ...$, ktorá konverguje k bodu x. Množinu všetkých bodov uzáveru množiny A nazývame uzáverom množiny A a označujeme $\overline{A}$.*

Definícia 2.2. *Množina $A, A \subset X$ sa nazýva uzavretá, ak $A = \overline{A}$. Množina $A, A \subset X$ nazveme otvorenou, ak $X \setminus A$ je uzavretá.*

K problematike uzavretých a otvorených množín sa môžeme dostať aj cez otvorené množiny.

Definícia 2.3. *Nech (X,d) je metrický priestor. $A \subset X$. Bod $p \in A$ nazveme vnútorným bodom množiny A, ak existuje také $\delta > 0$, že $O(p,\delta) \subset A$. Množinu všetkých vnútorných bodov nazývame vnútrom množiny A a označujeme $intA$.*

Veta 2.1. *Množina $A, A \subset X$ sa nazýva otvorená, ak $A = intA$. Množina $A, A \subset X$ sa nazýva uzavretá, ak $X \setminus A$ je otvorená.*

Veta 2.2. *Nech $R = (-\infty, +\infty)$ s obvyklou metrikou. Potom $G \subset R$ je otvorená práve vtedy, ak sa dá vyjadriť ako zjednotenie disjunktného spočitateľného systému otvorených intervalov.*

Vlastnosti otvorených množín, spomínané v príklade 33. tejto kapitoly inšpirovali k zavedeniu pojmu topologického priestoru.

Definícia 2.4. *Nech X je množina a $\mathcal{T}$ je systém jej podmnožín s týmito vlastnosťami:*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{T}$.*
2. *Zjednotenie ľubovoľného systému množín z $\mathcal{T}$ patrí do $\mathcal{T}$ a prienik konečného počtu množín z $\mathcal{T}$ patrí do $\mathcal{T}$.*

Systém $\mathcal{T}$, spĺňajúci podmienky 1. a 2. sa nazýva topológiou na X a množinu X nazývame topologickým priestorom s topológiou $\mathcal{T}$ a zapisujeme v tvare $(X, \mathcal{T})$.

Poznámka 2.1. Prvky systému $\mathcal{T}$ nazývame otvorenými množinami, ak $p \in X$, potom okolím bodu p v topologickom priestore $(X, \mathcal{T})$ nazveme každú množinu $G \in \mathcal{T}$, ktorá obsahuje bod p.

Definícia 2.5. *Nech X je metrický priestor. $A \subset X$. Bod $p \in X$ sa nazýva hromadným (kondenzačným) bodom množiny A, ak pre každé $\varepsilon > 0$ je $A \cap O(p,\varepsilon)$ nekonečná (nespočitateľná). Bod $p \in A$ sa nazýva izolovaným, ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $A \cap O(p,\varepsilon) = \{p\}$.*

Označme v poradí znakmi A^d, A^c, A^o množinu všetkých hromadných, kondenzačných, izolovaných bodov množiny A.

Veta 2.3. *X - metrický priestor. $A \subset X, p \in X, p \in A^d$ vtedy a len vtedy, ak existuje postupnosť $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}, p_n \in A, n = 1, 2, ...,$ ktorá konverguje k bodu p.*

Veta 2.4.

a) *$\overline{A} = A \cup A^d$.*

b) *$A^d = \overline{A^d}$.*

c) *$(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.*

d) *Ak označíme $A^{dd} = (A^d)^d$, tak $A^{dd} \subset A^d$.*

(Čitateĺ si ĺahko na príklade ukáže, že vo všeobecnosti nemusí v bode d) platiť rovnosť.)

Definícia 2.6.

a) *Množina $A \subset X$ sa nazýva hustá v X, ak $\overline{A} = X$.*

b) *Množina $A \subset X$ sa nazýva brehová (riedka) v X, ak množina $X - A$ $(X - \overline{A})$ je hustá v X.*

c) *Množina $A \subset X$ nazývame množinou prvej (Baireovej) kategórie v X, ak $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n, n = 1, 2, ...$ sú riedke v X. Množina $A \subset X$ sa nazýva množinou druhej (Baireovej) kategórie, ak nie je množinou prvej kategórie.*

d) *Množina $A \subset X$ sa nazýva husto rozložená, ak $A \subset A^d$ (teda ak každý jej bod je hromadným bodom). Množina sa nazýva perfektná (dokonalá), ak je uzavretá a husto rozložená. Množina $A \subset X$ sa nazýva rozprášená, ak neobsahuje žiadnu neprázdnu husto rozloženú podmnožinu.*

Veta 2.5.

a) *Množina $A \subset X$ je hustá v X vtedy a len vtedy, ak pre každé okolie $O(p, \delta), p \in X$, $\delta > 0$ platí $A \cap O(p, \delta) \neq \emptyset$.*

b) *Množina $A \subset X$ je riedka v X vtedy a len vtedy, ak ku každému okoliu $O(p, \delta) \subset X$ existuje také okolie $O(p', \delta') \subset O(p, \delta)$, že $A \cap O(p', \delta') = \emptyset$.*

c) *Množina A je husto rozložená práve vtedy, ak $\overline{A}$ je husto rozložená.*

d) *Zjednotenie ĺubovoĺného systému husto rozložených množín je husto rozložená množina.*

Veta 2.6. *(Cantorova - Bendixonova). Každý metrický priestor je zjednotením dvoch disjunktných množín, z ktorých jedna je perfektná a druhá rozprášená.*

Na záver tejto kapitoly jeden zaujímavý príklad.

Príklad 2.1. Označme $C_0 =< 0, 1 >, C_1 =< 0, \frac{1}{3} > \cup < \frac{2}{3}, 1 >$, t.j. z pôvodného intervalu $< 0, 1 >$ vynecháme vnútornú tretinu (otvorený interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$).$C_2 =< 0, \frac{1}{9} > \cup < \frac{2}{9}, \frac{3}{(} > \cup < \frac{6}{9}, \frac{7}{9} > \cup < \frac{8}{9}, 1 >$, t.j. z oboch pôvodných intervalov vynecháme vnútorné tretiny, teda z intervalu $< 0, \frac{1}{3} >$ vynecháme otvorený interval $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ a z intervalu $< \frac{2}{3}, 1 >$ otvorený interval $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Takto postupujúc možno po n - tom kroku označiť množinu:

$$C_n =< 0, \frac{1}{3^n} > \cup < \frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n} > \cup ... \cup < \frac{3^n - 1}{3^n}, 1 > .$$

Ihneď vidno, že každá z množín $C_i, i = 1, 2, ...$ je uzavretá. Uvažujme množinu

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i.$$

Množina C je zrejme uzavretá a nazývame ju *Cantorovou* množinou. Je to známy a dôležitý príklad uzavretej, riedkej, nespočítateľnej a perfektnej množiny na reálnej priamke.

Poznámka 2.2.

Množinu $A = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde $F_n,\ n = 1, 2, ...$ sú uzavreté, nazývame množinou typu F_σ.
Množinu $B = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde $G_n,\ n = 1, 2, ...$ sú otvorené, nazývame množinou typu G_δ.

30. Nech (X, d) - metrický priestor. Ukážte, že pre každú množinu $A, A \subset X$ platí, $A \subset \overline{A}$.

31. $A, B \subset X$. Potom platí:
a) Ak $A \subset B$, tak $\overline{A} \subset \overline{B}$.
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
c) Ak $A_i \subset X, i = 1, 2, ...$ tak $\overline{\cup_{i=1}^{\infty} A_i} \supset \cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.
d) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
e) Bod $p \in X$ patrí do $\overline{A}$ vtedy a len vtedy, ak pre každé $\varepsilon > 0$ je $A \cap O(p, \varepsilon) \neq \emptyset$.

32. Dokážte vetu 2.1.

33. Ukážte, že v každom metrickom priestore platí:
a) Zjednotenie (prienik) ľubovoľného systému otvorených (uzavretých) množín je otvorená (uzavretá) množina.
b) Zjednotenie (prienik) konečného počtu uzavretých (otvorených) množín je uzavretá (otvorená) množina.
c) Nájdite nasledujúce príklady (napr. na priamke):
Aby zjednotenie nekonečného systému uzavretých množín nebola uzavretá množina.
Aby prienik nekonečného systému otvorených množín nebola otvorená množina.

34. Ukážte, že v každom metrickom prestore (X, d) sú množiny $\emptyset, X$ obojaké, t.j. súčasne otvorené aj uzavreté.

35. Dokážte, že v každom metrickom priestore (X, d) platí: Ak $p \in X, \delta > 0, q \in O(p, \delta)$, tak existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $O(q, \delta_1) \supset O(p, \delta)$.

36. Nech d označuje triviálnu metriku na priestore X. ($d(x, x) = 0$ pre každé $x \in X$ a $d(x, y) = 1$ pre každé $x, y \in X, x \neq y$.) Ukážte, že každá množina $A \subset X$ je obojaká v (X, d).

37. Dokážte, že množina Q (Q') všetkých racionálnych (iracionálnych) čísel nie je ani uzavretá ani otvorená v R.

38. Nech $A \subset E_n, A = \{x = (x_1, ..., x_n); \mid x_i \mid \leq 1; i = 1, 2, ..., n\}$. Dokážte, že A je uzavretá v (E_n, d_0).

39. Nech d a d' sú dve ekvivalentné metriky na priestore X. Dokážte, že $A \subset X$ je otvorená (resp. uzavretá) v priestore (X, d) práve vtedy, keď je otvorená (resp. uzavretá) v priestore (X, d').

40. Nech M označuje množinu všetkých ohraničených postupností reálnych čísel (pozri príklad 2.). Nech $A \subset M : A = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in M; \mid x_i \mid \leq 1, i = 1, 2, ...\}$. Dokážte, že A je uzavretá v M!

41. Ak (X, d) je metrický priestor, $A \subset X$, potom diam $A =$ diam $\overline{A}$. Dokážte!

42. Nech (X, d) je metrický priestor a $p \in X$. Potom $\{p\}$ je uzavretá a tým $X - \{p\}$ je otvorená. Dokážte!

43. Nech (X, d) je metrický priestor a $A \subset X$. Potom množina A je uzavretá (otvorená) v (X, d) práve vtedy, keď množina $X \setminus A$ je otvorená (uzavretá) v (X, d). Dokážte!

44. Nech (X, d) je metrický priestor, postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosťou jeho bodov. Bod $x \in X$ nazveme hromadnou hodnotou postupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečne veľa $n \in N$ takých, že $d(x_n, x) < \varepsilon$. Označme $L(x_1, x_2, ...)$ množinu všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.
a) Dokážte, že pre každú postupnosť je $L(x_1, x_2, ...)$ uzavretá v X.
b) Zostrojte taký priestor (X, d) a postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ v ňom, aby $L(x_1, x_2, ...) = \emptyset$.

45. Nech (X, d) je metrický priestor, $A \subset X$. Potom množinu $H(A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$ nazývame hranicou množiny A. Dokážte, že:
a) Hranica ľubovoľnej množiny je uzavretá množina.
b) Bod $p \in X$ patrí do $H(A)$ práve vtedy, keď pre každé $\delta > 0$ platí: aj $A \cap O(p, \delta) \neq \emptyset$, aj $(X - A) \cap O(p, \delta) \neq \emptyset$.
c) Množina A je obojaká práve vtedy, keď $H(A) = \emptyset$.

46. V príklade 17. bol zavedený pojem vzdialenosti dvoch množín metrického priestoru (X, d), t.j. ak $A, B \subset X$: dist $(A, B) = d_1(A, B) = \inf\{d(a, b), a \in A, b \in B\}$.
a) Ak $p \in X, B \subset X$, tak dist $(\{p\}, B) = 0$ práve vtedy, keď $p \in \bar{B}$. Dokážte!
b) Zostrojte napr. v (E_2, d_0) také disjunktné uzavreté množiny A, B, aby dist $(A, B) = 0$.

47. Nech (X, d) je metrický priestor $p \in X, 0 < \delta_1 < \delta_2$. Dokážte, že $\overline{O(p, \delta_1)} \subset O(p, \delta_2)$.

48. Nech Q (Q') označuje množinu všetkých racionálnych (iracionálnych) čísel. Potom $intQ = intQ' = \emptyset, \overline{Q} = \overline{Q'} = R, H(Q) = H(Q') = R$. Dokážte!

49.
a) Ak (X, d) je metrický priestor, $A \subset X$, potom vždy $intA \cap H(A) = \emptyset$. Dokážte!
b) Ak (X, d) je triviálny metrický priestor, $A \subset X$, tak $intA = A, H(A) = \emptyset, \overline{A} = A$. Dokážte!

50. Nech (X, d) je metrický priestor. Dokážte, že pre každú množinu $A \subset X$ platí: $H(A) = H(X - A)$.

51. Dokážte, že v priestore (R, d_0) neexistujú okrem $\emptyset$ a R žiadne iné obojaké množiny.

52. Nech $X = \{a, b, c\}$. Zvoľme $S = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. Je S topológiou na X?

53. Nech X je nekonečná množina. Označme S systém podmnožín A priestoru X, kde A je buď prázdna, alebo $X - A$ je konečná.
a) Ukážte, že S je topológiou na X.
b) Dokážte, že neexistuje taká metrika d na X, aby systém otvorených množín v metrickom priestore (X, d) splýval s topológiou S.

54. Dokážte, že každý bod podmnožiny A metrického priestoru (X, d) je buď izolovaným alebo hromadným bodom množiny A (t.j. platí $A = A^0 \cup (A \cap A^d)$.

55. Zostrojte takú množinu $A \subset E$, aby všetky body množiny A boli izolované, ale aby $A^d \neq \emptyset$.

56. Označme C - množinu všetkých celých čísel, Q - množinu všetkých racionálnych čísel. Potom $C^0 = C$, ale $Q^0 = \emptyset$. Dokážte! (A^0 značí množinu izolovaných bodov.)

57. Riedka podmnožina metrického priestoru je brehová. Obrátené tvrdenie nemusí platiť. Dokážte!

58. Každá riedka množina je množina prvej kategórie. Obrátené tvrdenie nemusí platiť. Dokážte!

59.
a) Dokážte, že podmnožina A triviálneho metrického priestoru X je hustá v X práve vtedy, keď $A = X$.
b) Dokážte, že množina $Q \times Q$ je hustá v E^2.
c) Dokážte, že množina všetkých ohraničených postupností racionálnych čísel je hustá v M (pozri príklad 2.).
d) Dokážte, že množina všetkých konvergentných postupností reálnych čísel je uzavretá a riedka v M.

60. Nech A je uzavretá alebo otvorená podmnožina metrického priestoru X. Dokážte, že potom $H(A)$ je riedka v X.

61. Dokážte, že množina A je perfektná vtedy a len vtedy, ak $A = A^d$.

62. Dokážte, že množina A je brehová (riedka) práve vtedy, keď $int A = \emptyset$ ($int \overline{A} = \emptyset$).

63. Nech $f(x)$ je spojitá reálna funkcia. Dokážte, že množina $E_a = \{x \in R; f(x) \geq a\}$ je uzavretá v R.

64. Nech $a, b \in R, a < b$ sú dané. Označme E množinu všetkých spojitých funkcií, definovaných na $< 0, 1 >$, pre ktoré platí: $a < f(x) < b$, v každom bode $x \in < 0, 1 >$. Dokážte, že množina E je otvorená v priestore $C(0, 1)$ (pozri príklad 10.). A množina $F = \{f(x) \in C(O, 1); a \leq f(x) \leq b; x \in < 0, 1 >\}$ je uzavretá v $C(0, 1)$.

65. Nech $g \in C(0, 1)$. Dokážte, že množina všetkých tých funkcií z $C(0, 1)$, pre ktoré $f(x) > g(x)$, (pre každé $x \in < 0, 1 >$) je otvorená v $C(0, 1)$. A množina všetkých tých $f(x) \in C(0, 1), f(x) \geq g(x)$ (pre $x \in < 0, 1 >$) je uzavretá v $C(0, 1)$.

66. Nech (X, d_1) a (Y, d_2) sú metrické priestory. Nech $A_1 \subset A \subset X, A_1$ hustá v A. Potom $f(A_1)$ je hustá v $f(A)$. Dokážte!

67. Dokážte, že v každom metrickom priestore (X, d) platí

$$X - intE = \overline{X - E}; X - \overline{E} = int(X - E),$$

pre každú množinu $E \subset X$.

68. Dokážte: Ak (X, d) je metrický priestor, $A, B \subset X$, tak $int(A \cap B) = intA \cap intB$. Pre nekonečný počet činiteľov však platí: $\cap_{t \in T} intA_t \supset int(\cap_{t \in T} A_t), T$ - nekonečná. Dokážte!

69. Ak (X, d) je metrický priestor, $A, B \subset X$. Zistite, či platí analogická rovnosť: $int(A \cup B) = intA \cup intB$?

70. Množinu všetkých hromadných bodov množiny A, (označujeme A^d a nazývame deriváciou množiny A). Nájdite množinu $A \subset X$ tak, aby $A^d \neq \emptyset$, ale $(A^d)^d = \emptyset$.

71. V euklidovskej rovine E^2 udajte nasledujúce príklady:
a) $A \subset E^2, H(A) = \emptyset$ (pozri príklad 45.).
b) $A \subset E^2, H(A) \neq \emptyset$ a $A \cap H(A) = \emptyset$.
c) $A \subset E^2, A$ - nekonečná, $A = H(A)$.

72.
a) Dokážte: $H(A \cup B) \subset H(A) \cup H(B)$.
b) Pre nekonečne veľa množín analógia neplatí!

73. Uvažujeme v rovine E^2 systém sústredných uzavretých kruhov o polomeroch $r_1 < r_2 < ... < r_n < ....$ Je zjednotenie týchto kruhov uzavretá množina?

74. Dokážte ekvivalentnosť nasledujúcich definícií:
a) Množina $A \subset X$ je uzavretá v X, ak $\overline{A} \subset A$.
b) Množina $A \subset X$ je uzavretá v X, ak $A^d \subset A$.
c) Množina $A \subset X$ je uzavretá v X, ak $H(A) \subset A$.

75. Dokážate, že uzáver množiny A sa rovná prieniku všetkých uzavretých množín, obsahujúcich množinu A.

76. Dokážte, že $intA$ sa rovná zjednoteniu všetkých otvorených podmnožín, obsiahnutých v A.

77. Platí nasledujúce tvrdenie: Ak A je uzavretá, tak $A = \overline{intA}$? Resp. platí namiesto rovnosti aspoň niektorá inklúzia?

78. Dokážte, že každá množina A, ktorá obsahuje len izolované body, je typu F_σ.

79. Nech (X, d) je metrický priestor, $A \subset X, p \in X$. Overte platnosť nasledujúcich tvrdení:
a) dist $(p, A) =$ dist $(p, \overline{A})$
b) dist $(p, A) =$ dist $(p, intA)$.

80. Nech F_1 a F_2 sú dve disjunktné uzavreté podmnožiny metrického priestoru (X, d). Ukážte, že existujú otvorené množiny G_1 a $G_2, G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

81. Dokážte:
a) Komplement množiny F_σ (G_δ) je množina typu G_δ (F_σ).
b) Každá uzavretá množina je typu G_δ a každá otvorená množina je typu F_σ.

82. Dokážte, že:
a) Množina Q všetkých racionálnych čísel na priamke je množinou typu F_σ, ale nie typu G_δ.
b) Množina I všetkých iracionálnych čísel na priamke je množinou typu G_δ, ale nie typu F_σ.

3. Priestory so spočítateľnou bázou, separabilné priestory. Úplné metrické priestory

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém množín $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ nazývame bázou topologického priestoru $(X, \mathcal{T})$, ak každá neprázdna množina z topológie $\mathcal{T}$ sa dá vyjadriť ako zjednotenie množín z $\mathcal{T}_0$.

Definícia 3.1. *Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva priestor so spočitateľnou bázou, ak existuje spočitateľná báza topológie $\mathcal{T}$.*

Poznámka 3.1. Množinu M nazveme spočítateľnou, ak je konečná, alebo je ekvivalentná s množinou N všetkých prirodzených čísel, (t.j. ak existuje prosté zobrazenie množiny M na množinu N).

Definícia 3.2. *Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva separabilný, ak existuje spočítateľná množina $M \subset X$, ktorá je hustá v X.*

Veta 3.1. *Ak $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor so spočitateľnou bázou, tak $(X, \mathcal{T})$ je separabilný.*

Poznámka 3.2. Poslednú vetu nemožno vo všeobecnosti obrátiť.

Veta 3.2. *Nech (X, d) je metrický priestor. Označme $\mathcal{T}_d$ systém všetkých otvorených množín v priestore (X, d). ($\mathcal{T}_d$ sa nazýva topológia, odvodená od metriky d.) Potom priestor $(X, \mathcal{T}_d)$ má spočítateľnú bázu vtedy a len vtedy, keď (X, d) je separabilný.*

Definícia 3.3. *Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru (X, d) sa nazýva fundamentálna, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak,že pre každé $m, n > n_0$ je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Veta 3.3. *Každá konvergentná postupnosť bodov metrického priestoru je fundamentálna.*

Obrátené tvrdenie však nemusí platiť. Ak platí, tak:

Definícia 3.4. *Metrický priestor (X, d) budeme nazývať úplný,ak každá fundamentálna postupnosť prvkov tohoto priestoru konverguje v X.*

Veta 3.4. *(Cantorova). Nech (X, d) je úplný metrický priestor, nech $F_n \neq 0, n = 1, 2, ...$ sú uzavreté množiny v X. Nech $F_1 \supset F_2 \supset ... \supset F_n \supset F_{n+1} \supset ...$ a diam $F_n \to 0$, pre $n \to \infty$. Potom $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq 0$.*

Veta 3.5. *(Baireova). Nech X je neprázdny úplný metrický priestor s metrikou d. Potom X je množina druhej kategórie v (X, d).*

Veta 3.6. *Metrický priestor (R, d_0) - reálna priamka s obvyklou metrikou - je úplný priestor.*

83. Ukážate, že vo vete 3.4 je $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednobodová nožina. Možno predpokladať diam $F_n \to 0$ vynechať?

84. Na reálnej priamke R uvažujeme metriku d:

$$d(x, y) = \text{arctg } \mid x - y \mid \text{ (porovnaj príklad 13.).}$$

Je (R, d) úplný priestor ?

85. Pre $m = 1, 2, ...$ označme $E_m = \{(a_1, a_2, ..., a_,), a_i$ - reálne$\}$. Nech d_0 označuje euklidovskú metriku na priestore E_m. Ukážte, že $(E_m, d_0), m \geq 2$ je úplný priestor. (Porovnaj príklad 8.)

86. Ukážte úplnosť priestorov $(X, d_1), (X, d_2)$ a (X, d_3) z príkladu 15.

87. Nech d_1 a d_2 sú ekvivalentné metriky na priestore X. Plynie z úplnosti priestoru (X, d_1) úplnosť priestoru (X, d_2)?

88. Nech (X, d) je ĺubovoĺný metrický priestor. Dokážte, že systém všetkých sfér $O(p, \delta), p \in X, \delta > 0, \delta \in Q, Q$ - racionálne čísla je báza topológie $\mathcal{T}_d$ priestoru $(X, \mathcal{T}_d)$, indukovaného metrickým prierstorom (X, d).

89. Dokážte, že metrické priestory $l^{(2)}, l$ a s (pozri príklady 3.,9. a 11.) sú separabilné metrické priestory.

90. Nech $(X_1, d_1), (X_2, d_2), ..., (X_n, d_n)$ sú metrické priestory. Dokážte, že ak priestory $X_1, X_2, ..., X_n$ sú separabilné, tak aj metrický priestor $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ (pozri definíciu 1.4) je separabilný. Platí aj obrátené tvrdenie?

91. Nech (X, d) je separabilný metrický priestor a nech $F \subset X$ je uzavretá množina v X. Zostrojte takú postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ prvkov priestoru X, aby platilo $L(x_1, x_2, ...) = F$. (Pozri príklad 44.)

92. Dokážte, že priestor M všetkých reálnych ohraničených postupností (pozri príklad 2) nie je separabilný, ale jeho podpriestor C všetkých konvergentných postupností je separabilný.

93. Nech $C(0, +\infty)$ označuje množinu všetkých spojitých ohraničených funkcií, definovaných na intervale $< 0, +\infty)$. Položme pre

$$f, g \in C(0, +\infty) : d(f, g) = \sup_{x \in <0, +\infty)} \mid f(x) - g(x) \mid \in C(0, +\infty).$$

a) Overte, že d je metrika na $C(0, +\infty)$ (porovnaj príklad 1).
b) Dokážte, že priestor $(C(0, +\infty), d)$ nie je separabilný.

94. Uvažujme priestor $C(a, b)$ všetkých spojitých funkcií definovaných na intervale $< a, b >$ (a teda i ohraničených) s obvyklou suprémovou metrikou. Dokážte, že $C(a, b)$ je separabilný metrický priestor. (Porovnaj s príkladom 93.)

95. Priestor $C(a,b)$ možno vybaviť aj inou metrikou:
ak $f,g \in C(a,b)$, položme

$$\varrho(f,g) = \int_a^b \mid f(x) - g(x) \mid dx.$$

(Porovnaj s príkladom 10.) $(C(a,b),\varrho)$ je metrický priestor. Dokážte, že $(C(a,b),\varrho)$ je separabilný.

96. Nech (X,d) je metrický priestor, $0 \neq M \subset X$, nech $\varepsilon > 0$, Hovoríme, že množina M je ε - sieťou priestoru X, ak pre každé $x \in X$ platí dist $(x,M) < \varepsilon$.
a) Dokážte, že množina M je ε - sieťou priestoru X vtedy a len vtedy, ak $X \subset \cup_{p\in M} O(p,\varepsilon)$.
b) Metrický priestor X je separabilný vtedy a len vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje taká spočitateľná množina M, ktorá je ε - sieťou. (Pozri ešte raz príklad 92 a 93.)

97. Metrický priestor (X,d) je separabilný vtedy a len vtedy, keď každý systém otvorených po dvoch disjunktných množín je spočitateľný. Dokážte!

98.
a) Dokážte, že podpriestor separabilného metrického priestoru je separabilný metrický priestor.
b) Na príklade ukážte, že pre topologické priestory už nemusí platiť analógia,t.j. podpriestor separabilného topologického priestoru nemusí byť separabilný topologický priestorom.

99. Ukážte, že topologický priestor $(R,\mathcal{T})$, spomínaný v návode 98. b), hoci je separabilný, nemá spočitateľnú bázu.

100. Je podpriestor úplného metrického priestoru úplný?

101. Nech (X,ϱ) je úplný metrický priestor, nech $Y \subset X, Y$ - uzavretá. Potom aj (Y,ϱ) je úplný metrický priestor. Platí aj obrátené tvrdenie?

102. Dokážte úplnosť nasledujúcich priestorov: $M(a,b)$ (príklad 1.), M (príklad 2.), l (príklad 9.), $l^{(2)}$ (príklad 3.) a S (príklad 11.).

103. Dokážte, že metrický priestor $C(a,b)$ z príkladu 10. (s integrálnou metrikou) nie je úplný.

104. Nech (X,d) je úplný metrický priestor, nech $x_0 \in X$. Je priestor $(X - \{x_0\}, d)$ úplný?

105. Je triviálny metrický priestor úplný? (Pozri príklad 9.).

106. Ako vieme, vo všeobecnosti z fundamentálnosti postupnosti ešte nevyplýva jej konvergencia. Čo treba ešte dodať? Platí: Ak $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je fundamentálna postupnosť prvkov metrického pristoru (X,d) a existuje taká vybraná postupnosť $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k bodu $x \in X$, tak aj pôvodná postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje ku x. Dokážte to!

107. Sú priestory $(Q,d_0),(Q',d_o)$ úplné? (Q - racionálne, Q' - iracionálne čísla, d_0 - euklidovská metrika.)

108. Nech Z označuje množinu všetkých komplexných čísel. Zvoľme $d(z,z') = |z - z'|$, pre $z, z' \in Z$. Dokážte, že (Z, d) je úplný metrický priestor.

109. Každá konvergentná postupnosť bodov metrického priestoru je ohraničená. Platí analógia i pre fundamentálne postupnosti?

110. Nech A a B sú úplné podpriestory metrického priestoru (X, d).
a) Dokážte, že $A \cup B$ i $A \cap B$ sú úplné podpriestory priestoru X.
b) Ukážte na príklade, že $A - B$ už nemusí byť úplný podpriestor.

111. Nech (X, d_X) a (Y, d_Y) sú úplné priestory. Dokážte, že priestor $X \times Y$, opatrený nasledujúcimi metrikami, je úplný:
a) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2}$,
b) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$.
V prípade a) porovnaj s euklidovským priestorom (E_2, d_0) - príklad 85.).

112. Dokážte, že prienik spočitateľného systému otvorených množín hustých v úplnom metrickom priestore X je množina hustá v X.

113. Ukážte na príklade, že tvrdenie príkladu 112. nemusí platiť, ak priestor X nie je úplný.

114. Nech $\mathcal{M}$ označuje spočitateľný systém množín typu G_δ, pričom každá z množín systému $\mathcal{M}$ je hustá v úplnom priestore X. Potom prienik množín systému $\mathcal{M}$ je množina typu G_δ a hustá v X. (Porovnaj s príkladom 112.)

115. Ukážte, že úplný metrický priestor X nemožno vyjadriť ako spočítateľné zjednotenie riedkych množín (t.j., že úplný metrický priestor je množina druhej kategórie - Baireova veta).

116. Nájdite príklad neúplného metrického priestoru, ktorý je prvej kategórie.

117. Uvažujeme Cantorovu množinu C z príkladu 30. textu. Je to uzavretá podmnožina reálnej priamky - teda úplný podpriestor. Ale C je prvej kategórie v R. Nie je to v spore s príkladom 115.?

118. Nech $E \subset R, E$ je spočítateľná a hustá v R. Potom množina E nie je typu G_δ. Dokážte!

4. Kompaktné priestory

Definícia 4.1. *Nech (X, d) je metrický priestor. Množina $A \subset X$ sa nazýva kompaktná, ak z každej postupnosti bodov množiny A možno vybrať čiastočnú postupnosť, ktorá konverguje v množine A (t.j. konverguje a jej limita patrí do A). Budeme hovoriť, že metrický priestor (X, d) je kompaktný, ak množina X je kompaktná.*

Uveďme aj topologickú variantu predchádzajúcej definície:

Veta 4.1. *Množina $A \subset X$ sa nazýva kompaktná, ak z každého pokrytia tejto množiny otvorenými množinami možno vybrať konečné podpokrytie.*

Veta 4.2.
a) *Každý kompaktný metrický priestor je separabilný a úplný.*
b) *Každá kompaktná podmnožina metrického priestoru je uzavretá.*
c) *Každá uzavretá podmnožina kompaktnej množiny je kompaktná množina.*

Definícia 4.2. *Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva súvislý, ak sa množina X nedá rozložiť na dve neprázdné otvorené disjunktné podmnožiny.*

Veta 4.3. *Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ nie je súvislý vtedy a len vtedy, keď v ňom existuje neprázdna obojaká (súčasne otvorená aj uzavretá) množina, rôzna od X.*

Veta 4.4. *Podmnožina reálnej priamky s obvyklou topológiou, obsahujúca aspoň dva rôzne body, je súvislá práve vtedy, keď je intervalom.*

119. Ak (X, d) je kompaktný metrický priestor, tak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε - sieť priestoru X. (Pozri príklad 96.) Platí i obrátené tvrdenie?

120. Dokážte vetu 4.2.

121. Každá kompaktná množina je ohraničená, t.j. ak $A \subset X$, A - kompakt, tak diam $A < +\infty$. Dokážte!

122. Predchádzajúce príklady 120. a 121. nám hovoria, že každá kompaktná množina je uzavretá a ohraničená. Na vhodných príkladoch ukážte, že existujú uzavreté a ohraničené množiny, ktoré nie sú kompaktné!

123. Dokážte, že v každom euklidovskom priestore $(E_n, d_0), n = 1, 2, ...$ je množina $A \subset E_n$ kompaktná vtedy a len vtedy, keď A je uzavretá a ohraničená.

124. Dokážte, že množina A je kompaktná práve vtedy, ak každá jej nekonečná podmnožina má hromadný bod, patriaci do A.

125. Dokážte, že každý euklidovský priestor E_n je separabilný a úplný (pozri príklad 85.), ale nie je kompaktný! Porovnajte s vetou 4.2 a).

126. Nech $X_1, X_2, ..., X_m$ sú kompaktné metrické priestory. Je i priestor $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$ kompaktný?

127. Nech $A_1, A_2, ..., A_m$ sú kompaktné podmnožiny metrického priestoru X.
a) Dokážte, že $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ je kompakt v X.
b) Možno toto tvrdenie rozšíriť na nekonečne veľa množín?

128. Nech (X, d) je kompaktný metrický priestor a nech $F_k, k = 1, 2, ...$ sú neprázdne uzavreté podmnožiny X. Nech $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_k \supset \ldots$. Potom $\cap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$. (Cantorova veta. Porovnaj s vetou 3.4.)

129. Vo vete 3.4 bol $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednobodová množina (pozri príklad 83.). Ukážte, že za predpokladov príkladu 128. môže byť $\cap_{k=1}^{\infty} F_k$ viac ako jednobodová množina.

130. Dokážte, že metrický priestor (X, d) je kompaktný vtedy a len vtedy, ak každé spočitateľné otvorené pokrytie priestoru X obsahuje konečné podpokrytie tohoto priestoru. (Porovnajte definíciu 4.1 a vetu 4.1.)

131. Nech (X, d) je metrický priestor. Ukážte, že metrická i topologická charakterizácia kompaktnej množiny sú ekvivalentné! (Pozri definíciu 4.1 a vetu 4.1.)

132. Nech (X, d) je úplný metrický priestor. Potom $A \subset X$ je kompaktná vtedy a len vtedy, ak A je uzavretá a pre každé $\varepsilon > 0$ obsahuje konečnú ε - sieť. (Pozri príklad 119.)

133. Dokážte, že topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ je súvislý vtedy a len vtedy, keď ku každým dvom bodom $x, y \in X$ existuje taká súvislá množina $G \subset X$, že $x, y \in G$.

134.
a) Zostrojte metrický priestor, ktorý:
1. je úplný, ale nie je súvislý;
2. je súvislý, ale nie je úplný;
3. je kompaktný, ale nie je súvislý;
4. je súvislý, ale nie je kompaktný.
b) Zostrojte topologický priestor, ktorý:
5. je separabilný, ale nie je súvislý
6. je súvislý, ale nie je separabilný.

135. Nech E je súvislá množina, obsahujúca aspoň dva rôzne body. Dokážte, že E neobsahuje izolované body.

136. Dokážte, že priestor X je nesúvislý vtedy a len vtedy, ak existujú také neprázdne podmnožiny $A, B \subset X$, že platí: $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \neq \emptyset$.

137. Dokážte, že priestor X je nesúvislý vtedy a len vtedy, ak existujú neprázdne podmnožiny $A, B \subset X, A \cap B = \emptyset$, pričom obe sú uzavreté, alebo obe otvorené.

138.
a) Nech E je nesúvislá uzavretá množina. Potom možno rozložiť množinu E na : $E = A \cup B; A, B$ - uzavreté, $A, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$.
b) Ak E je nesúvislá otvorená množina. Potom existuje rozklad množiny E: $E = A \cup B; A, B$ - otvorené, $A, B \neq \emptyset A \cap B = \emptyset$.

139. Nech E, F - uzavreté množiny. Dokážte, že ak $E \cup F$ aj $E \cap F$ sú súvislé množiny, potom aj E a F sú súvislé.

140. Na príklade ukážte, že ak by v predchádzajúcom príklade aspoň jedna z množín A, B nebola uzavretá, potom tvrdenie nemusí platiť.

141. Dokážte:
a) Ak $A \subset X, A$ - súvislá, potom aj $\overline{A}$ je súvislá.
b) Obrátené tvrdenie nemusí platiť.

142. Nech A je súvislá. Potom každá množina $M : A \subset M \subset \overline{A}$ je tiež súvislá. Dokážte!

143. Nech $A \subset X$ a pre každé dva body $x, y \in A$ existuje súvislá množina $Q, Q \subset A$, $x, y \in Q$, potom A je súvislá v X. Dokážte!

144. Dokážte, že množina všetkých tých bodov euklidovskej roviny E_2, ktorých obe súradnice sú iracionálne, je nesúvislá!

145. Nech A označuje uzavretý kruh v rovine E_2. Dokážte, že A je súvislá množina!

146. Nech E_1 a E_2 sú súvislé množiny, $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, potom $E_1 \cup E_2$ je tiež súvislá množina. Dokážte!

147. Nech $E_1 \subset E_2 \subset ...$ je rastúca postupnosť súvislých množín. Potom $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ je súvislá. Dokážte!

148. Nech $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť súvislých množín. Nech pre každé $i = 1, 2, ...$ platí $E_i \cap E_{i+1} \neq \emptyset$. Potom aj množina $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ je súvislá. Dokážte!

149. Nech $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť neprázdnych súvislých množín a taká, že pre každé $i = 1, 2, ...$ je $E_i \cup E_{i+1}$ súvislá množina. Potom aj $\cup_{i=1}^{\infty} E_i$ je súvislá. Dokážte!

150. Dokážte, že množina všetkých tých bodov roviny E_2, ktorých aspoň jedna súradnica je racionálna, je súvislá.

151. Dokážte, že $E \subset R$ (reálna priamka) je súvislá vtedy a len vtedy, ak E je interval.

152. Nech (X, d) je súvislý metrický priestor. Potom X obsahuje len dve obojaké množiny a to $\emptyset$ a X. Dokážte!

153. Nech X a Y sú metrické priestory. V zmysle definície 1.4 uvažujeme metrický priestor $X \times Y$. Nech $E \subset X, F \subset Y, E, F$ neprázdne. Dokážte, že $E \times F$ je súvislá v $X \times Y$ vtedy a len vtedy, ak E a F sú súvislé v príslušných priestoroch X a Y.

154. Nech $A_t, t \in T$ je systém súvislých množín s neprázdnym prienikom. Potom množina $E = \cup_{t \in T} A_t$ je súvislá. Dokážte!

155. Neprázdnu podmnožinu A množiny E nazývame komponentou množiny E ak: A je súvislá a každá súvislá množina B, pre ktorú platí $A \subset B \subset E$ je už totožná s A.

Dokážte, že ku každému bodu $x \in E$ existuje práve jedna komponenta množiny E, obsahujúca bod x.

156. Nech $F \subset E, F \neq 0$ a F - súvislá. Dokážte, že existuje práve jedna komponenta množiny E, obsahujúca množinu F.

157. Dokážte, že každá komponenta uzavretej množiny je uzavretá množina.

158. Dokážte, že každú neprázdnu množinu E možno jednoznačne rozložiť na jej komponenty.

5. Zobrazenia metrických (topologických) priestorov

Predpokladáme, že pojem zobrazenia je čitateľovi známy. Nech $f : X \to Y$ a $A \subset X$, tak množinu $\{f(x); x \in A\} \subset Y$ nazývame obrazom množiny A pri zobrazení f a označujeme $f(A)$. Podobne, ak $B \subset Y$, tak množinu $\{x; f(x) \in B\} \subset X$ nazývame vzorom množiny B pri zobrazení f a označujeme $F^{-1}(B)$. Dôležitým pojmom matematickej analýzy je pojem spojitého zobrazenia.

Definícia 5.1. *Nech $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{V})$ sú dva topologické priestory. Nech $f : X \to Y$. Hovoríme, že zobrazenie f je spojité, ak pre každú množinu $V \in \mathcal{V}$ je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Nech $(X, d), (Y, d')$ sú metrické priestory. Potom $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie, ak vzor každej množiny, otvorenej v priestore (Y, d'), je množina otvorená v priestore (X, d).*

Niekedy je vhodné použiť "postupnostnú" charakterizáciu spojitosti:

Veta 5.1. *Nech $(X, d), (Y, d')$ sú metrické priestory. Funkcia $f : X \to Y$ je spojitá v bode $x_0 \in X$ vtedy a len vtedy, ak pre každú postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ prvkov priestoru X, konvergujúcu k x_0, príslušná postupnosť $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje k $f(x_0)$.*

Poznámka 5.1. Pripomíname, že funkcia je spojitá na množine, ak je spojitá v každom bode tejto množiny.

Definícia 5.2. *Nech X, Y sú topologické (metrické) priestory. Potom $f : X \to Y$ budeme nazývať homeomorfným zobrazením (krátko homeomorfizmom), ak f je spojité a prosté zobrazenie a k nemu inverzné zobrazenie f^{-1} je tiež spojité.*

Definícia 5.3. *Nech $(X, d), (Y, d')$ sú metrické priestory. Nech $f : X \to Y$. Zobrazenie f nazveme izometrickým, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in X$ platí: $d(x_1, x_2) = d'(f(x_1), f(x_2))$.*

Definícia 5.4. *Zobrazenie f metrického priestoru (X, d) do metrického priestoru (Y, d') sa nazýva rovnomerne spojité, ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé dva body $x_1, x_2 \in X$, pre ktoré $d(x_1, x_2) < \delta$ platí $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.*

Význam a dôležitosť spojitých zobrazení vidno i na nasledujúcich tvrdeniach:

Veta 5.2.

a) *Spojitý obraz separabilného (metrického) priestoru je separabilný (metrický) priestor.*
b) *Spojitý obraz kompaktného (metrického) priestoru je kompaktný priestor.*
c) *Spojitý obraz súvislého (topologického, metrického) priestoru je súvislý priestor.*

Veta 5.3. *Nech (X, d) je kompaktný metrický priestor a f je spojitá reálna funkcia, definovaná na X. Potom f je ohraničená na X a dosahuje na X svoje infimum a supremum (t.j. má na X maximum a minimum).*

Veta 5.4. *Nech (X, d) je kompaktný metrický priestor a (Y, d') je metrický priestor. Potom každá spojitá funkcia $f : X \to Y$ je rovnomerne spojitá na X.*

Definícia 5.5. *Nech (X, d) je metrický priestor. Zobrazenie $f : X \to X$ nazývame kontraktívnym zobrazením, ak existuje také číslo $\alpha : 0 \leq \alpha < 1$, že pre každé dva body $x, x' \in X$ platí*

$$d(f(x), f(x')) \leq \alpha.d(x, x').$$

Veta 5.5. *(Banachova veta.) Nech $\emptyset \neq X$ je úplný metrický priestor a nech $f : X \to X$ je kontraktívne zobrazenie. Potom existuje práve jeden bod $x_0 \in X$ taký, že $f(x_0) = x_0$.*

Poznámka 5.2.

a) Bod x_0, pre ktorý platí $f(x_0) = x_0$ nazývame pevným bodom kontraktívneho zobrazenia f v úplnom metrickom priestore (X, d).

b) Všimnime si, že každé kontraktívne zobrazenie je rovnomerne spojité.

Definícia 5.6. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, (Y, d') je metrický priestor. Nech $f : X \to Y$ a $x \in X$. Definujeme*

$$\omega_f(x) = \inf_{O(x)} \text{diam f(O(x))}.$$

Funkciu $\omega_f(x)$ nazývame osciláciou funkcie f v bode x. (Infimum vpravo berieme cez všetky okolia $O(x)$ bodu x v priestore X.)

Definícia 5.7. *Hovoríme, že funkcia $f : R \to R$ má Darbouxovu vlastnosť ak pre ľubovoľné $a, b \in R$ a ľubovoľné $x \in R$ také, že $f(a) < x < f(b)$, existuje $c : a < c < b$ tak, že $f(c) = x$. Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na intervale $< a, b >$. Konečný počet bodov $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ nazveme delením intervalu $< a, b >$. Označme $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i) - f(x_{i-1} \mid$.*

Definícia 5.8. *Označme*

$$\bigvee_a^b f = \sup \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid,$$

kde supremum vpravo berieme cez všetky možné delenia intervalu $< a, b >$. "Číslo" $\bigvee_a^b f$ nazývame variáciou funkcie f na intervale $< a, b >$.

Ak $\bigvee_a^b f$ je konečné číslo, hovoríme, že funkcia f má ohraničenú variáciu na intervale $< a, b >$.

Ak $\bigvee_a^b f = +\infty$, hovoríme, že funkcia f má neohraničenú variáciu na intervale $< a, b >$.

Veta 5.6.

a) *Každú funkciu s ohraničenou variáciou možno vyjadriť v tvare rozdielu dvoch rastúcich funkcií.*

b) Každú spojitú funkciu s ohraničenou variáciou možno vyjadriť v tvare rozdielu dvoch spojitých rastúcich funkcií.

159. Nech $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{V})$ sú dva topologické priestory. Nech $f : X \to Y, x_0 \in X$. Funkcia f je spojitá v bode x_0 vtedy a len vtedy, ak ku každej množine $B \in \mathcal{V}$, $f(x_0) \in B$ existuje taká množina $A \in \mathcal{T}$, $x_0 \in A$, že $f(A) \subset B$. Dokážte!

160. Nech $f : X \to Y$. Potom f je spojitá v každom izolovanom bode svojho definičného oboru. Dokážte!

161. Ukážte, že ak f je spojité a prosté zobrazenie priestoru X na priestor Y, tak f^{-1} (inverzné zobrazenie) nemusí byť spojité.

162. Nech f je izometrické zobrazenie metrického priestoru (X, d) na metrický priestor (Y, d'). Potom f je homeomorfné zobrazenie. Dokážte!

163. Každé izometrické zobrazenie je rovnomerne spojité. Obrátene však nemusí platiť. Dokážte!

164. Dokážte, že zobrazenie f topologického priestoru $(X, \mathcal{T})$ do topologického priestoru $(Y, \mathcal{V})$ je spojité na X práve vtedy, ak vzor $f^{-1}(F)$ ľubovoľnej uzavretej množiny $F \subset Y$ je uzavretá množina v X.

165. Nech $A(B)$ je ľubovoľná podmnožina definičného oboru (oboru hodnôt) funkcie f. Overte platnosť nasledujúcich rovností:
a) $f^{-1}(f(A)) = A$.
b) $f(f^{-1}(B)) = B$.

166. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $f, g : X \to R = (-\infty, +\infty)$. Ak f, g sú spojité v bode $x_0 \in X$, tak aj súčet $(f + g)$, súčin $(f.g)$, násobok $(\alpha.f)(\alpha \in R)$ a absolutná hodnota $|\, f \,|$ sú spojitými funkciami v bode x_0. Dokážte! Ako je to s podielom $\frac{f}{g}$?

167. Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva diskrétny, ak každý jeho bod je izolovaný (teda $\mathcal{T} = 2^X$). Dokážte: Topologický priestor je diskrétny vtedy a len vtedy, keď každá reálna funkcia $f : X \to R$ je spojitá na X.

168. Ak f, g sú rovnomerne spojité reálne funkcie, definované na priestore X a $\alpha, \beta \in R$, potom aj $\alpha.f + \beta.g$ je rovnomerne spojitá funkcia. Dokážte! Platí podobné tvrdenie aj o súčine $f.g$?

169. Nech X, Y sú metrické priestory, $f : X \to Y$. Nech $x_0 \in X^d$ (hromadný bod množiny X). Dokážte, že funkcia f je spojitá v x_0 práve vtedy, keď $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Čo vieme povedať o spojitosti funkcie f v bode x_0, keby x_0 bol izolovaným bodom priestoru X?

170. Nech f je spojitá reálna funkcia, definovaná na (topologickom, metrickom) priestore X. Dokážte, že pre každé $a, b \in R$ platí:
a) Každá z množín $\{x \in X; f(x) \leq a\}, \{x \in X; f(x) \geq a\}, \{x \in X; a \leq f(x) \leq b\}$ je uzavretá v X.
b) Každá z množín $\{x \in X; F(x) < a\}, \{x \in X; f(x) > a\}, \{x \in X; a < f(x) < b\}$ je otvorená v X.

171. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, (Y, d') je metrický priestor. Potom funkcia $f : X \to Y$ je spojitá v bode $x \in X$ vtedy a len vtedy, ak $\omega_f(x) = 0$. Dokážte!

172. Nech funkcia f je definovaná na priestore X. Označíme: $C_f = \{x \in X; f$ - spojitá v $x\}$ a $D_f = \{x \in X; f$ - nespojitá v $x\}$. Ukážte, že pre každú funkciu f platí:
a) D_f je množina typu F_σ.
b) C_f je množina typu G_σ.

173. Dokážte, že funkcia definovaná na celej reálnej priamke nemôže mať za body spojitosti spočitateľnú hustú podmnožinu $E \subset R$ a body nespojitosti $D_f = R \setminus E$.

174. Zostrojte nasledujúce funkcie definované na R:
a) $F(x)$ -ktorá je spojitá v bodoch $x = \pm 1$ a všade inde nespojitá.
b) $f(x)$: spojitá pre $x = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ a všade inde nespojitá.

175. Určte body spojitosti, resp. nespojitosti, nasledujúcej funkcie definovanej na $< 0, 1 >$:

$f(x) = 0$ v bodoch Cantorovej množiny (pozri príklad 30. z textu).

$f(x) = 1$ v stredoch styčných intervalov (ktoré vynechávame pri konštrukcii Cantorovej množiny) a všade inde lineárna.

176. Zostrojte funkciu definovanú na intervale $< 0, 1 >$, ktorá je spojitá v každom iracionálnom bode tohoto intervalu a nespojitá v každom racionálnom bode. (Doporučujeme si uvedomiť, že taká funkcia, ktorá by mala vymenené body spojitosti a nespojitosti, neexistuje. Pozri príklad 173.)

177. Na príkladoch ukážte, že spojitý obraz:
a) uzavretej množiny nemusí byť uzavretá množina,
b) otvorenej množiny nemusí byť otvorená množina.

178. Ak f - spojitá, tak vzor otvorenej množiny je otvorená (definícia 5.1) a vzor uzavretej množiny je uzavretá (príklad 164.). Platí: Ak f je spojitá funkcia, $f : X \to Y$ a $M \subset Y, M$ - kompaktná, tak $f^{-1}(M)$ je kompaktná podmnožina X?

179. Nech $f : R \to R$, potom f je spojitá práve vtedy, ak:
a) $f^{-1}((a, b))$ je otvorená v R, pre každé $a, b \in R$.
alebo
b) $f^{-1}((-\infty, a >)$ a tiež $f^{-1}(< a, +\infty))$ sú uzavreté pre každé $a \in R$.

180. Nech (X, d) je metrický priestor. Dokážte, že funkciu $f(x) = d(x, y_0)$, (y_0 - ľubovoľný pevný bod z X) je rovnomerne spojitá a teda i spojitá na X.

181. Nech $f : R \to R$, f - je spojitá. Potom f má Darbouxovu vlastnosť.

182. Je vždy funkcia, ktorá má Darbouxovu vlastnosť spojitá?

183. Nech $f : X \to Y$, f - spojitá. Nech $E \subset X$, E - hustá v X. Potom $f(E)$ je hustá v $f(x)$. Dokážte!

184. Nech $f : X \to Y$. Dokážte, že k spojitosti funkcie f stačí, aby vzory všetkých otvorených sfér priestoru Y boli otvorené množiny v priestore X. (Porovnaj s definíciou 5.1, resp. príkladom 159.)

185. Na príklade ukážte, že v podmienke kontraktívnosti (definícia 5.5) nemožno pripustiť $\alpha = 1$, totiž pre takéto zobrazenie by už nasledujúca veta 5.5 nemusela platiť!

186. Nech f je zobrazenie neprázdneho úplného metrického priestoru X do X. Označíme: $f \circ f = f^2, f^2 \circ f = f^3, \dots$ atď. Nech pre nejaké prirodzené číslo k je zobrazenie $f^k : X \to X$ kontraktívne. Potom zobrazenie f má jediný pevný bod. Dokážte!

187. Význam predošlého cvičenia, okrem iného, spočíva v tom, že od f sme nežiadali spojitosť. Majme napr. $f :< 0, 2 >\to R$ nasledovne: $f(x) = 0$, pre $x \in< 0, 1 >$ a $f(x) = 1$, pre $x \in (0, 2 >$. Čitateľ ľahko nahliadne, že f nie je na $< 0, 2 >$ spojité, no má jediný pevný bod. Dokážte!

188. Nech funkcia $f(x)$ má na intervale $< a, b >$ variáciu rovnú A. Akú variáciu na $< a, b >$ má funkcia $(k.f(x) + m)$?

189. Vypočítajte variáciu funkcie $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1 \\ 10, & x = 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ na intervale $< 0, 2 >$.

190. Nech funkcia $f(x)$ má v každom bode intervalu $< a, b >$ deriváciu, ktorá je ohraničená na $< a, b >$. Potom funkcia $f(x)$ je funkciou s ohraničenou variáciou na intervale $< a, b >$. Dokážte!

191. Z matematickej analýzy je známa skutočnosť, že rovnomerne konvergentný funkcionálny rad zachováva spojitosť, deriváciu a integrál. Preto je na mieste otázka:

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je rovnomerne konvergentný funkcionálny rad spojitých funkcií s ohraničenou variáciou. Je i súčet tohoto radu funkcia s ohraničenou variáciou?

192. Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú funkcie s ohraničenou variáciou na $< a, b >$. Dokážte, že ich súčet a súčin sú funkcie s ohraničenou variáciou na $< a, b >$ a naviac $\bigvee_a^b (f + g) \leq \bigvee_a^b + \bigvee_a^b$; $\bigvee_a^b f.g \leq \sup_{x \in <a,b>} |f(x)| . \bigvee_a^b g(x) + \sup_{x \in <a,b>} |g(x)| . \bigvee_a^b f(x)$.

193. Nech $f(x)$ je definovaná na $< a, b >$ a $a < c < b$. Potom $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b b$.

194. Nech $f(x)$ má ohraničenú variáciu na intervale $< a, b >$. Potom aj funkcia $| f(x) |$ má ohraničenú variáciu na $< a, b >$. Dokážte! Platí i obrátené tvrdenie?

Výsledky, návody a poznámky

$\boxed{3}$ Najskôr overíme korektnosť, t.j. že pre všetky $x, y \in l^2$ je $d(x, y)$ reálne číslo. (Použite lemu 1.1).

$\boxed{4}$ Nie. Nie je splnená trojuholníkova nerovnosť.

$\boxed{5}$ Zvoľte si množinu X a funkciu $d : X \times X \to R^+$ tak, aby d mala niektoré dve vlastnosti metriky a nemala tretiu. (Napr. funkcia d v príklade 4. má vlastnosti 1. a 2. ale nemá 3.)

$\boxed{6}$ Nezápornosť a symetričnosť funkcie d získame vhodnou špeciálnou voľbou trojice bodov x, y, z.

$\boxed{7}$ Áno, áno, nie.

$\boxed{9}$ c) Ak má množina X aspoň dva rôzne prvky, tak možno na X definovať nekonečne veľa metrík. Napr. tzv. triviálnych t.j. $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ \alpha > 0, & \alpha \text{ - reálne; keď } x \neq y. \end{cases}$

$\boxed{11}$ Využite: Ak $0 \leq a < b$, tak $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$.

$\boxed{12}$ Nie.

$\boxed{13}$ a) K dôkazu trojuholníkovej nerovnosti si všimnite, že $\operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arctg}\beta \geq \operatorname{arctg}(\alpha+\beta)$, resp. že pre funkciu $f(\alpha) = \operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arctg}\beta - \operatorname{arctg}(\alpha+\beta)$ platí: $f(0) = 0$ a pre $\alpha > 0$ je $f(\alpha) > 0$. b) Naša metrika d je ekvivalentná euklidovskej metrike na priamke, lebo $\operatorname{arctg} \mid x_n - x_0 \mid \to 0$ práve vtedy, keď $\mid x_n - x_0 \mid \to 0$.

$\boxed{14}$ Áno.

$\boxed{15}$ b) Všimnite si, že pre každé reálne čísla a_1, a_2, b_1, b_2 platí: $\mid a_1 - a_2 \mid + \mid b_1 - b_2 \mid \leq 2.\max\{\mid a_1 - a_2 \mid ; \mid b_1 - b_2 \mid\} \leq 2.\sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2} \leq 2.(\mid a_1 - a_2 \mid + \mid b_1 - b_2 \mid)$. Odkiaľ už plynie ekvivalentnosť daných metrík.

$\boxed{16}$ Áno.

$\boxed{17}$ Nie.

$\boxed{18}$ Áno. K dôkazu trojuholníkovej nerovnosti použite tzv. Cauchy - Bunjakovského nerovnosť: $\int_a^b f(x).g(x)dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx . \int_a^b g^2(x)dx}$.

$\boxed{19}$ Prvá časť zrejmá. K druhej časti: Ak by tá podmienka bola nutná, tak by z úplnosti jedného metrického priestoru vyplývala úplnosť metrického priestoru s ekvivalentnou metrikou. Ale to nie je pravda - pozri príklad 87. a definíciu 3.4.

$\boxed{22}$ V E^2 áno, ale v E^1 nie.

$\boxed{23}$ V oboch prípadoch 1.

25 Stačí použiť vetu 1.4.

26 M - z konvergencie bodov plynie konvergencia po súradniciach, ale obrátene nemusí. l, l^2 - ako v prípade priestoru M.

27 Nie sú ekvivalentné.

29 Existuje také $\varepsilon > 0$, že pre nekonečne veľa $n : d(x_n, x) \leq \varepsilon$.

35 Stačí voliť $\delta_1 < \delta - d(p, q)$.

36 Stačí nájsť postupnosť racionálnych (iracionálnych) čísel, ktorá konverguje k iracionálnemu (racionálnemu) číslu. A tiež, že v každom okolí každého reálneho čísla je nekonečne veľa racionálnych aj iracionálnych čísel.

38 Požiť vetu 1.4, resp. príklad 8.

40 Pozri príklad 2. a 26.

43 Stačí vyjsť z definície 2.2 a vety 2.1.

44 b) Napr. triviálny metrický priestor. (Triviálna metrika: $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$.)

46 Napr.: $A = \{(x, 0); x \in R\}$ a $B = \{(x, \frac{1}{x}); x > 0\}$.

47 Ak $x_0 \in \overline{O(p, \delta_1)}$, tak existuje $\{x_i\}_{n=1}^{\infty} \in O(p, \delta_1)$ konvergujúca k bodu x_0. Vhodne použijúc trojuholníkovú nerovnosť ukázať, že $d(p, x_0) < \delta_2$.

52 Nie.

55 Napr. $A = \{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$.

57 Ak $(X - \overline{A})$ je hustá v X, tak tým skôr je hustá $(X - A)$. Stačí zobrať množinu Q v R.

58 Stačí uvažovať množinu Q v R.

60 Použiť vetu 2.5 b).

61 Pozri vetu 2.4.

62 Stačí uvážiť definíciu 2.6 a vetu 2.5.

68 Prvá časť zrejmá. K dôkazu druhej stačí napr. $A_i = (-\frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i})$.

69 Nie! Vždy je však $intA \cup intB \subset int(A \cup B)$. Neplatí rovnosť, volíme napr. $A =< 0, 1 >, B =< 1, 2 >$.

70 Napr. $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$.

71 a) $\emptyset$, celá rovina; b) Ľubovoľná neprázdna otvorená množina, rôzna od celej roviny - napr. vnútro jednotkového kruhu; c) Napr. body ľubovoľnej priamky ($x = 0$).

72 a) $H(A \cup B) \subset (\overline{A} \cup \overline{B}) - (intA \cup intB) \subset (\overline{A} - intA) \cup (\overline{B} - intB) = H(A) \cup H(B)$. b) Stačí napr. uvažovať nasledujúce množiny: $A_n =< \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} >$.

$\boxed{\textbf{73}}$ Ak $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$, tak áno (zjednotením je E^2). Ak $\lim_{n\to\infty} r_n = a$, tak nie (zjednotením je otvorený kruh o polomere a).

$\boxed{\textbf{74}}$ Ukážeme, že b) $\iff$ a) $\iff$ c). Keďže $A^d \subset \overline{A}$ a $H(A) \subset \overline{A}$, tak a) $\Rightarrow$ b) a a) $\Rightarrow$ c). Na druhej strane, pretože $\overline{A} \subset A \cup A^d$, z b) $\Rightarrow$ a) a rovnosť: $\overline{A} = intA \cup H(A)$ a tiež $intA \cup A$ dáva: c) $\Rightarrow$ a).

$\boxed{\textbf{75}}$ Podľa príkladu 33. je tento prienik uzavretá množina. Na druhej strane, ak $A \subset F, F$ - uzavretá, tak $\overline{A} \subset \overline{F} = F$, teda $\overline{A}$ je najmenšia uzavretá množina, obsahujúca množinu A.

$\boxed{\textbf{77}}$ Rovnosť nemusí platiť. Stačí zobrať napr. na priamke jednobodovú množinu. Ale vždy platí $\overline{intA} \subset A$. (Samozrejme iba pre A - uzavreté!)

$\boxed{\textbf{78}}$ Pre takúto množinu A platí: $A \cap A^d = \emptyset$. Ak $A^d = \emptyset$, tak A je uzavretá, teda F_σ. Ak $A^d \neq \emptyset$, tak opíšeme okolo každého bodu množiny A^d okolie o polomere $\frac{1}{n}$ a zjednotenie všetkých týchto okolí (pre prevné n) označme O_n. Položme $B_n = A - O_n$. B_n je uzavretá (obsahuje len izolované body) a $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = A$, z čoho plynie, že A je typu F_σ.

$\boxed{\textbf{79}}$ a) Platí; b) Neplatí.

$\boxed{\textbf{80}}$ Stačí si uvedomiť, že pre takéto F_1 a F_2 platí dist $(F_1, F_2) = \inf\{d(x,y), x \in F_1, y \in F_2\} > 0$. A teraz vhodne "obaliť " tieto uzavreté množiny otvorenými.

$\boxed{\textbf{81}}$ a) Zrejmé; b) Nech napr. F je uzavretá. Pre každé n prirodzené definujeme $G_n = \cup_{x\in F} O(x, \frac{1}{n})$. Zrejme pre každé n je $F \subset G_n$, teda $F \subset \cap_{n=1}^{\infty} G_n$. Na druhej strane, ak bod $p \in \cap_{n=1}^{\infty} G_n$, tak pre každé n nájdeme bod $x_n \in F$ taký, že $d(x_n, p) < \frac{1}{n}$, teda p je bod uzáveru množiny (uzavretej) F, čo implikuje $p \in F$. Dôkaz pre otvorenú množinu je analogický, alebo priamo plynie z časti a) tohoto príkladu.

$\boxed{\textbf{82}}$ a) Množina Q je spočitateľná, teda ju možno napísať ako spočitateľné zjednotenie jednobodových - uzavretých - množín. Na druhej strane, keby Q bola G_δ (Q všade hustá v R), bola by všade hustá G_δ množina aj množina $Q_1 = \{x + \sqrt{2}; x \in Q\}$. Ale na základe platnosti vety: Prienik G_δ a hustých množín v úplnom metrickom priestore je zase G_δ, hustá množina.(Pozri príklad 114.) by bola aj $Q \cap Q_1$ množina G_δ a všade hustá v R. Ale $Q \cap Q_1 = \emptyset$. b) Pozri príklad 81.

$\boxed{\textbf{83}}$ Keby $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ obsahoval dva rôzne body $x \neq y$, potom $d(x,y) = \alpha > 0$ a pre dostatočne veľké n je diam $F_n < \alpha$, teda množina F_n (a všetky ďalšie) nemôže obsahovať oba body x, y. Predpoklad: diam $F_n \to 0$ nemožno vynechať. Položme na reálnej priamke $F_n =< n, +\infty)$.

$\boxed{\textbf{84}}$ Áno. Ak $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je fundamentálna postupnosť (vzhľadom na metriku d), tak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ nájdeme $\delta > 0$ tak, aby $\mid x \mid < \delta \Rightarrow$ tg $\mid x \mid < \varepsilon$. K tomuto $\delta > 0$ existuje n_0 tak, že $m, n > n_0 \Rightarrow$ arctg $\mid x_n - x_m \mid < \delta$. (Plynie z fundamentálnosti.) Odtiaľ a z predchádzajúceho: tg [arctg $\mid x_n - x_m \mid] = \mid x_n - x_m \mid < \varepsilon$, pre $\forall m, n > n_0$. Z posledného máme, že $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je fundamentálna i v euklidovskej metrike, teda konverguje k bodu x_0. Ale naša metrika d a euklidovská metrika sú ekvivalentné. (Porovnaj príklad 13.)

$\boxed{\mathbf{85}}$ Využite úplnosť priestoru (E_1, d_0) - veta 3.6.

$\boxed{\mathbf{86}}$ Využite úplnosť priestoru (E_2, d_3) - čo je euklidovský priestor a systém nerovností v návode k príkladu 15.

$\boxed{\mathbf{87}}$ Nie. Napr.: Položme $X = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).d_1(x,y) =\mid x - y \mid, d_2(x,y) =\mid \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \mid$. Metriky d_1, d_2 sú ekvivalentné, pričom (X, d_1) je úplný, ale (X, d_2) nie je.

$\boxed{\mathbf{88}}$ Stačí pozrieť definíciu bázy.

$\boxed{\mathbf{89}}$ Všimnite si podpriestory všetkých takých postupností racionálnych čísel, ktorých všetky členy od istého indexu sa rovnajú nule.

$\boxed{\mathbf{90}}$ Súčinový priestor je separabilný vtedy a len vtedy, keď sú jednotlivé zložky separabilné priestory.

$\boxed{\mathbf{91}}$ Ak $F = \emptyset$ - pozri príklad 44. b). Ak $F = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ - konečná, stačí položiť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_1, ..., a_m, a_1, ..., a_m, ...\}$. Ak F - nekonečná, tak existuje $E \subset F, E$ - spočitateľná a $\overline{E} = F$. Teraz možno písať $E = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Stačí ukázať, že postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, a_1, ...\}$ vyhovuje našim požiadavkám.

$\boxed{\mathbf{92}}$ K dôkazu prvej časti si stačí všimnúť množiny M' všetkých postupností núl a jedničiek. $M' \subset M, M'$ je nespočitateľná a pre každé $x, y \in M', x \neq y'$ je $d(x,y) \geq 1$. K druhej časti stačí brať také postupnosti racionálnych čísel, ktoré od istého indexu obsahujú samé nuly.

$\boxed{\mathbf{93}}$ b) Stačí uvažovať nasledujúci systém funkcií: Ku každej postupnosti núl a jedničiek t.j. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť, kde $\forall n$ je buď $y_n = 0$, alebo $y_n = 1$, definujme funkciu f nasledovne: $f(n) = y_n; n = 0, 1, 2, ...$ a f je všade inde lineárna. (Pozri predchádzajúci príklad).

$\boxed{\mathbf{94}}$ Použite Weierstrassovu vetu: Ku každej funkcii $f \in C(a,b)$ a ku každému $\varepsilon > 0$ existuje taký polynóm P, že pre každé $x \in < a, b >$ je $\mid f(x) - P(x) \mid < \varepsilon$.

$\boxed{\mathbf{95}}$ Možno použiť návod k príkladu 94.

$\boxed{\mathbf{96}}$ b) Ak je X separabilný, tak za M stačí brať spočitateľnú hustú podmnožinu. Obrátene: Pre každé $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$ existuje M_n, ktorá je ε_n - sieťou. Potom $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$ bude spočitateľná hustá.

$\boxed{\mathbf{97}}$ Ak (X, d) je separabilný - tvrdenie zrejmé. Obrátene. Ak (X, d) nie je separabilný, tak existuje $\varepsilon_0 > 0$ také, pre ktoré neexistuje spočitateľná ε_0 - sieť. Na základe tohoto možno zostrojiť nespočitateľnú množinu otvorených po dvoch disjunktných množín.

$\boxed{\mathbf{98}}$ a) Ak (X, d) je separabilný metrický priestor, tak z neho odvodený topologický priestor má spočitateľnú bázu (veta 3.2), každý jeho podpriestor má tiež spočitateľnú bázu a teda (podľa vety 3.1) je separabilný. b) Reálnu priamku R opatrime nasledujúcou topológiou $\mathcal{T}$: Označme znakom B systém množín tvaru: $\{x\} \cup (Q \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)); x \in R, \varepsilon > 0, Q$ racionálne čísla. Potom topológiu $\mathcal{T}$ budú tvoriť všetky možné zjednotenia množín z B. Overte, že je to topológia a $(R, \mathcal{T})$ je separabilný. Ale podpriestor všetkých iracionálnych čísel Q', ktorého topológia $\mathcal{T}'$ pozostáva zo všetkých množín tvaru $A \cap Q'$, kde $A \in \mathcal{T}$, nie je separabilný.(Každé iracionálne číslo, ako jednobodová množina, je otvorená.)

99 Keby topologický priestor $(R, \mathcal{T})$ z návodu 98. mal spočitateľnú bázu, musel by aj jeho podpriestor $(Q', \mathcal{T}')$ mať spočitateľnú bázu.

100 Nemusí byť. Položme $X =< 0,1 >, X' = (0,1 >, d_0$ - euklidovská metrika. Postupnosť $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je fundamentálna, ale v priestore (X', d_0) nekonverguje.

101 Platí aj obrátené tvrdenie.

102 Napr. pre M: Ak $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}, X^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, ..., \alpha_K^{(n)}, ...)$ je fundamentálna, tak zo supremovej metriky plynie, že každé z číselných postupností $\{\alpha_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}; k = 1, 2, ...$ je tiež fundamentálna v R, teda konvergentná (t.j. konverguje po súradniciach), $\{\alpha_k^{(n)}\} \xrightarrow{n \to \infty} \alpha_k$. Ešte overte, že teraz $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, konverguje ku bodu $X = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$.

104 Ak x_0 je izolovaný bod - tak áno. V opačnom prípade nie.

105 Áno.

106 Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 také, že pre každé $n, m > n_0$ je $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. A tiež existuje také p, že pre každé $i > p$ je $d(x_{K_i}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. (Možno vybrať $i > n_0$.) Teraz $d(x_n, x) < d(x_n, x_i) + d(x_i, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

107 Nie.

108 Porovnaj s dvojrozmerným euklidovským priestorom (E_2, d_0). Pozri príklad 85.

109 Áno, každá fundamentálna je tiež ohraničená. Lebo ak $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je fundamentálna, tak k $\varepsilon = 1$ existuje $p \in N$ také, že pre všetky $n \geq p : d(x_n, x_p) < 1$, t.j. $x_n \in O(x_p, 1)$.

110 Úplnosť $A \cup B$ je zrejmá. Ak $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je fundamentálna postupnosť z $A \cup B$, tak aspoň v jednom podpriestore (napr. A) leží nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, t.j. celá vybraná postupnosť $\{x_{K_i}\}_{i=1}^{\infty}$, ktorá je tiež fundamentálna, teda konvergentná. A potom (porzi príklad 106.) i pôvodná postupnosť konverguje.b) Napr. $A =< -5, 5 >$ $, B =< -1, 1 >$.

111 Ak je $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ fundamentálna v $X \times Y$, tak zo vzťahu a) resp. b) ihneď plynie, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú fundamentálne v príslušných úplných priestoroch X alebo Y. Teda ak $\{x_n\} \xrightarrow{X} x_0, \{y_n\} \xrightarrow{Y} y_0$ tak $\{(x_n, y_b)\} \xrightarrow{X \times Y} (x_0, y_0)$.

112 Nech $G_1, G_2, ..., G_n, ...$ je postupnosť otvorených hustých množín v X. Nech S_0 je ľubovoľná guľa v priestore X. Ukážme, že $S_0 \cap G$, kde $G = \cup_{i=1}^{\infty} G_i$ je neprázdna, t.j. G - hustá. Keďže G_1 je otvorená, hustá, existuje okolie S_1 také, že $\overline{S_1} \subset S_0 \cap G_1$, pričom S_1 voľme tak, aby diam $S_1 < 1$. Pretože aj G_2 je otvorená a hustá, možno nájsť guľu S_2 takú, aby $\overline{S_2} \subset S_1 \cap G_2$, pričom diam $S_2 < \frac{1}{2}$. Ďalej nájdeme guľu S_3 tak, aby $\overline{S_3} \subset S_2 \cap G_3$,diam $S_3 < \frac{1}{3}$, atď. Máme postupnosť sfér S_n takých, že pre všetky n platí: $S_n \subset S_0, \overline{S_{n+1}} \subset S_n$ a diam $S_n < \frac{1}{n}$. Podľa vety 3.4, resp. príkladu 83. existuje bod $p \in S_n; n = 1, 2, ...$ a teda aj $p \in S_0$. Ale z konštrukcie sfér S_n vyplýva, že $p \in G_n$ pre všetky n. Záver: $p \in S_0 \cap G$.

$\boxed{113}$ Nech (R, d_0) je priamka s obvyklou euklidovskou metrikou. $Q = \{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ je množina všetkých racionálnych čísel ľubovoľne usporiadaných do postupnosti. Vieme, že (Q, d_0) nie je úplný priestor (pozri príklad 107.). Množiny $F_n = \{r_1, ..., r_n\}; n = 1, 2, ...$ sú uzavreté v (Q, d_0), teda $G_n = Q - F_n$ sú otvorené a husté v Q. Ale $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

$\boxed{114}$ Nech $B_1, B_2, ...B_n, ...$ sú (prvky) množiny systému $\mathcal{M}$, t.j. každé B_i je G_δ, hustá množina v X. Teda $B_i = \cap_{n=1}^{\infty} G_{i_n}, G_{i_n}$ - otvorené a tiež husté v X. Môžme písať: $\bigcap\limits_{B_i \in \mathcal{M}} B_i = \bigcap\limits_{i,n} G_{i_n}$ a na základe príkladu 112. je tento prienik hustá množina v X a zrejme typu G_δ. Doporučujeme čitateľovi v súvislosti s týmto príkladom porozmýšľať nad analógiou príkladu 113.

$\boxed{115}$ Nech $X = \cup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i$ - riedke v X. Označme $O(x_1, \varepsilon_1)$ sféru, disjunktnú s E_1. Zostrojme $O(x_2, \varepsilon_2)$ nasledovne: $O(x_2, \varepsilon_2) \cap E_2 = \emptyset, \overline{O(x_2, \varepsilon_2)} \subset O(x_1, \varepsilon_1)$ a $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$. Podobne $O(x_3, \varepsilon_3) \subset \overline{O(x_3, \varepsilon_3)} \subset O(x_2, \varepsilon_2), O(x_3, \varepsilon_3) \cap E_3 = \emptyset$ a $\varepsilon_3 < \frac{1}{3}$, atď. Podľa konštrukcie je $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ fundamentálna, teda konverguje k bodu $x_0 \in X$. Ale pretože $x_0 \in \overline{O(x_i, \varepsilon_i)}; i = 1, 2, ..., x_0 \notin E_i; i = 1, 2, ...$ a tým $x_0 \notin \cup_{i=1}^{\infty} E_i = X$. Spor.

$\boxed{116}$ Napr. (Q, d_0).

$\boxed{117}$ Nie je.

$\boxed{118}$ Označme $E = \{a_1, a_2, ...\}$. Nech by E bola typu G_δ. Vyberme $a > 0$ také, aby sa nerovnala žiadnemu z rozdielov $\mid a_i - a_j \mid$, pre $i, j = 1, 2, ...$ Označme $E_1 = E + a = \{a_i + a; i = 1, 2, ...\}$. Teraz E_1 je tiež spočitateľná, hustá, G_δ podmnožina R. Na základe príkladu 114. je aj $E \cap E_1$ - spočitateľná, hustá, G_δ v R. Ale $E \cap E_1 = \emptyset$.

$\boxed{119}$ Nech pre nejaké $\varepsilon_0 > 0$ neexistuje konečná ε_0 - sieť. Vezmime ľubovoľné $x_1 \in X$. K nemu existuje $x_2 \in X$ také, že $d(c_1, x_2) \geq \varepsilon_0$(ak by totiž také x_2 neexistovalo, bola by množina $\{x_1\}$ ε_0 - sieťou). Podobne možno nájsť bod $X_3 \in X$ taký, že $d(x_j, x_3) \geq \varepsilon_0; j = 1, 2$. (Lebo v opačnom prípade by zase množina $\{x_1, x_2\}$ bola ε_0 - sieťou.) Takto zostrojíme postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ takú, že pre všetky $m \neq n$ je $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$. A z tejto postupnosti nemožno vybrať fundamentálnu, teda ani konvergentnú čiastočnú postupnosť. Obrátene neplatí: Napr. $X = (0, 1)$ s obvyklou metrikou.

$\boxed{120}$ a) Porovnaj s príkladom 96. b) Priamo z definície 4.1 a jednoznačnosti limity. c) Stačí si uvedomiť definíciu uzavretej a kompaktnej množiny.

$\boxed{121}$ Keď A je kompakt, podľa príkladu 119. pre $\varepsilon = 1$ existuje konečná jednotková sieť $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$. Označme $d = \max\limits_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,m}} \{d(p_i, p_j)\}$. Teraz pre ľubovoľné $x, y \in A$ existuje $r, s \leq m$ tak, že $d(x, p_r) < 1, d(y, p_s) < 1$. Počítajme: $d(x, y) \leq d(c, p_r) + d(p_r, p_s) + d(p_s, y) < 1 + d + 1 = d + 2$. Teda diam $A \leq d + 2$.

$\boxed{122}$ Uvažujeme priestor l^2 z príkladu 3. a jeho podmnožinu $A \subset l^2$, $A = \left\{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq 1\right\}$. Overte, že A je uzavretá a ohraničená, ale nie je kompaktom. Z postupnosti bodov tejto množiny: $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}, X^n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ (na n - tom mieste je jednotka, ostatné súradnice sú nulové) nemožno vybrať konvergentnú.

Iný príklad: Uvažujme priestor $M(0,1)$ z príkladu 1. so supremovou metrikou. Označme $A = \{f_1, f_2, ...\} \subset M(0,1)$, kde $f_k(x)$ definujeme: $f_k(0) = 0; f_k(x) = 0$, pre $\frac{1}{k} \leq x \leq 1$; $f_k(\frac{1}{2k}) = 1$ a $f_k(x)$ je lineárna na každom z intervalov $< 0, \frac{1}{2k} >, < \frac{1}{2k}, \frac{1}{k} >$ (nakreslite). Množina A je uzavretá a ohraničená (overte to), ale nie je kompaktná, lebo už z množiny A nemožno vybrať fundamentálnu a teda ani konvergentnú podpostupnosť.

123 Nutnosť vyjadrujú príklady 120. a 121. Postačujúcosť: Pretože A je ohraničená, existuje n - rozmerný interval $I =< a_1, b_1 > \times < a_2, b_2 > \times ... \times < a_n, b_n >$ tak, že $A \subset I$. Uvažujeme ľubovoľnú postupnosť $\{x^i\}_{i=1}^{\infty}$ bodov množiny A, t.j. $x^i = (x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i) \in A$. Potom pre postupnosti prvých súradníc $\{x_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ platí: $a_1 \leq x_1^i \leq b_1; i = 1, 2, ...$ Podobne pre druhé súradnice: $a_2 \leq x_2^i \leq b_2; i = 1, 2, ...$ a konečne pre n - té súradnice: $a_n \leq x_n^i \leq b_n; i = 1, 2, ...$ Je známe, že z každej ohraničenej postupnosti reálnych čísel možno vybrať konvergentnú. Teda z postupnosti $\{x_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ prvých súradníc vyberme $\{x_i^{k_i}\}_{i=1}^{\infty} \to x_1^0$. Z postupnosti $\{x_2^{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ zase vyberme konvergentnú k číslu x_2^0 $(a_2 \leq x_2^0 \leq b_2)$ atď. až pre n - té súradnice, t.j. opakujúc tento výber n - krát, dostaneme rastúcu postupnosť $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ prirodzených čísel takú, že: $\{x_1^{s_i}\}_{i=1}^{\infty} \to x_1^0, \{x_2^{s_i}\}_{i=1}^{\infty} \to x_2^0, ..., \{x_n^{s_i}\}_{i=1}^{\infty} \to x_n^0$. Čo je ekvivalentné s tým (pozri príklad 8.), že postupnosť $\{x^{s_i}\}_{i=1}^{\infty}$ bodov množiny A konverguje k bodu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in A$, lebo A je uzavretá.

126 Áno. Pozri definíciu 1.4 a vetu 1.4. Konvergencia v priestore X je ekvivalentná posúradnicovej konvergencii.

127 a) Stačí si uvedomiť, že ak vezmeme ľubovoľnú postupnosť bodov zo zjednotenia $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$, tak aspoň v jednej z tých množín je nekonečne veľa členov tejto postupnosti. b) Nie! Voľme napr. $A_1 = \{1\}, A_2 = \{\frac{1}{2}\}, ..., A_n = \{\frac{1}{n}\}, ...$.

128 Pre každé $k = 1, 2, ...$ vyberme $x_k \in F_k$. Z monotónnosti postupnosti $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa ukáže, že $x \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$.

129 Nech $X =< 0, 2 >$ s euklidovskou metrikou d_0. Položme $F_k =< 0, 1 + \frac{1}{k} >; k = 1, 2, ...$. Potom $\cap_{k=1}^{\infty} F_k =< 0, 1 >$.

130 Ak (X, d) nie je kompakt, tak existuje postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, ktorá nemá čiastočnú konvergentnú postupnosť. Možno predpokladať, že postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je prostá. Potom množina $K = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ je uzavretá v X a teda $X - K$ je otvorená v X. Pretože $x_K; K = 1, 2, ...$ nie je hromadný bod množiny K, existuje také $\delta_K > 0$, že $K \cap O(x_K, \delta_K) = \{x_K\}$. Potom spočítateľný systém množín $\{X - K, O(x_1, \delta_1), O(x_2, \delta_2), \ldots, O(x_K, \delta_K), \ldots\}$ je otvoreným pokrytím priestoru X, z ktorého nemožno vybrať konečné podpokrytie.

131 Topologická $\Rightarrow$ metrickú: Nech $A \subset X, A$ vyhovuje vete 4.1. Nech $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov množiny A, z ktorej nemožno vybrať konvergentnú podpostupnosť. Teda každý bod $a \in A$ má okolie $O(a, \delta)$, obsahujúce len konečne veľa členov postupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Tieto okolia typu $O(a, \delta)$ tvoria otvorené podpokrytie množiny A. Teda z neho možno vybrať konečné podpokrytie, t.j. $A \subset O(a_1, \delta_1) \cup O(a_2, \delta_2) \cup ... \cup O(a_n, \delta_n)$. Ale to je spor, lebo zjednotenie vpravo obsahuje len konečne veľa členov postupnosti $\{x_i\}$. Obrátene: metrická $\Rightarrow$ topologickú: Sporom: Nech A je kompaktná v zmysle definície 4.1 ale existujú také otvorené množiny $\{G_\alpha\}$, ktoré pokrývajú množinu A, ale z nich nemožno vybrať konečné podpokrytie. Pre $n = 1, 2, ...$ položme $\varepsilon = \frac{1}{n}$ a keďže A je kompakt, tak pre každé ε_n existuje konečná ε_n - sieť v A (pozri príklad 119.). Teda pre $\varepsilon = 1$ existuje konečná ε_1 sieť v A. Okolo každého bodu tejto siete opíšme ε_1 - okolie. Uzávery týchto okolí majú s množinou A neprázdny prienik, ktorý je kompaktnou podmnožinou množiny A (overte prečo). Teda množinu A možno písať ako zjednotenie konečného počtu kompaktov $F_1, ..., F_n$, ktorých priemery neprevýšia $2.\varepsilon_1$. Keďže celú množinu A nebolo možné pokryť konečným podsystémom systému $\{G_\alpha\}$, tak aspoň jeden z kompaktov $F_1, \ldots, F_n$ má túto vlastnosť. Označme ho A_1. Pre $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ urobíme podobnú úvahu, ale pre kompakt A_1. Tak dostaneme kompakt $A_2 \subset A_1 \subset A$, ktorý nemožno pokryť žiadnym konečným podsystémom systému $\{G_\alpha\}$. Indukciou možno takto zostrojiť postupnosť kompaktných množín $A \supset A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$, pre ktoré diam $A_n \to 0$. Teda ich prienik (pozri príklad 83.) je jednobodová množina $\{a_0\}$. Pretože $a_0 \in A$, existuje otvorená množina $G_{\alpha_0} \in \{G_\alpha\}$ tak, že $a_0 \in G_{\alpha_0}$. Z otvorenosti G_{α_0} plynie, že existuje $\delta > 0 : O(a_0, \delta) \subset G_{\alpha_0}$. A zrejme pre dostatočne veľké n_0 je $2\varepsilon_{n_0} < \delta$. Z posledného ale plynie, že pre všetky $n \geq n_0$ je $A_{n_0} \subset G_{n_0}$, čo je v spore s výberom množín $A_i; i = 1, 2, ...$

132 V ľubovoľnom metrickom priestore je kompaktná množina uzavretá (veta 4.2) a obsahuje konečnú ε - sieť (príklad 119.). Teraz obrátene: nech (X, d) je úplný, A je uzavretá a pre kaťdé $\varepsilon > 0$ obsahuje konečnú ε - sieť. Ukážeme, že A je kompakt. Nech $\{X_i\}$ je ľubovoľná postupnosť bodov množiny A. Pre $\varepsilon_1 = 1$ existuje konečná ε_1 - sieť. Okolo každého bodu tejto siete zostrojme guľu o polomere 1. Aspoň v jednej z týchto gúľ - označme ju G_1 - je nekonečne veľa členov postupnosti $\{X_i\}$. Jeden z nich vyberme a označme x_{n_1}. Podobne pre $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ tiež existuje konečná ε_2 - sieť. Okolo jej bodov vytvorme gule o polomere $\frac{1}{2}$. Aspoň v jednej z nich - označme ju G_2 - existuje nekonečne veľa tých bodov postupnosti $\{x_i\}$, ktoré patria aj do G_1. Vyberme z nich jeden - x_{n_2} - tak, aby $n_2 > n_1$. Teda obecne pre $\varepsilon_i = \frac{1}{i}$ existuje konečná ε_i - sieť, okolo jej bodov zostrojíme gule o polomere dĺžky $\frac{1}{i}$. Aspoň v jednej z týchto gúľ - označme G_i - existuje nekončne veľa členov postupnosti $\{x_i\}$, ktoré zároveň patria do gule G_{i-1}. Vyberme jeden z nich - x_{n_i} - tak, aby $n_i > n_{i-1}$. Takto postupujúc zostrojíme postupnosť $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ vybranú z postupnosti $\{X_i\}$. A táto vybraná postupnosť je zrejme fundamentálna (X je úplný) a tým i konvergentná.

133 Ak $(x, \mathcal{T})$ je súvislý, tak stačí za G voliť celý priestor X. Ak X nie je súvislý, existujú dve napr. otvorené a navzájom disjunktné podmnožiny A, B. Teraz stačí vybrať $x \in A, y \in B$.

134 Snáď len prípad 6. Nech X je množina, ktorej mohutnosť je väčšia, ako mohutnosť kontinua. Definujme topológiu $\mathcal{T} \subset 2^X$ nasledovne: Do $\mathcal{T}$ patrí $\emptyset$ a každá taká množina $A \subset X$, pre ktorú je $X - A$ spočitateľná. (overte, že $\mathcal{T}$ je topológia.)

135 Ak by $x_0 \in E$ bol izolovaný bod množiny E, tak množiny $\{x_0\}$ a $E - \{x_0\}$ by boli dve neprázdne otvorené disjunktné podmnožiny množiny E.

136 Rovnosť $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$ je ekvivalentná vzťahom: $\overline{A} \cap B = \emptyset$ a $A \cap \overline{B} = \emptyset$ čo je ekvivalentné s tvrdením, že množina B (A) neobsahuje žiadny hromadný bod množiny A (B).

$\boxed{\mathbf{137}}$ Ak A, B - uzavreté, tak $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap B) = \emptyset$ a stačí použiť predchádzajúci príklad. Ak A, B - otvorené, tak každý bod množiny B je vnútorný, teda $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Podobne $A \cup \overline{B} = \emptyset$.

$\boxed{\mathbf{138}}$ a) Kedže E je nesúvislá, existuje také $A, B \subset E$, že $E = A \cup B$, kde A, B sú oddelené, t.j. $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$. Pretože E je uzavretá, je $\overline{A} \subset E$ a tiež $\overline{A} \subset E - B = A$, z čoho už plynie, že A je uzavretá. Podobne pre množinu B. b) Zase možno písať: $E = A \cup B, A, B$ - oddelené. Nech $a \in A$ (E je otvorená), teda existuje $O(a, \varepsilon) \subset E$. Ale a nie je hromadný bod množiny B (lebo $(A \cap \overline{B}) = \emptyset$), teda existuje $O(a, \delta) \subset O(x_0, \varepsilon), O(a, \delta) \cap B = \emptyset$. Posledné možno prepísať: $O(a, \delta) \subset E - B = A$, čo dokazuje, že a je vnútorný bod množiny A. Podobne pre B.

$\boxed{\mathbf{139}}$ Nepriamo. Nech napr. E nie je súvislá množina. Potom možno písať $E = A \cup B$, kde A, B sú neprázdne, disjunktné uzavreté množiny. Potom aspoň jedna z množín $A \cap F$ alebo $B \cap F$ je prázdna. (V opačnom prípade by sme mohli písať $E \cap F = (A \cap F) \cup (B \cap F)$, čo by znamenalo, že $E \cap F$ je nesúvislá.) Nech napr. $A \cap F = \emptyset$. Potom $E \cup F = (A \cup B) \cup F = A \cup (B \cup F)$, pričom A i $(B \cup F)$ sú uzavreté, neprázdne a disjunktné. A to je v spore so súvislosťou množiny $E \cup F$.

$\boxed{\mathbf{140}}$ Napr. na reálnej priamke položme: $E =< 0, 1 > \cup < 2, 3 >; F =< 0, 2)$.

$\boxed{\mathbf{141}}$ a) Nech A - súvislá a $\overline{A}$ - nesúvislá. Potom $\overline{A} = E \cup F$, kde E, F sú neprázdne disjunktné uzavreté množiny (pozri 138 a)). Potom $A \cap E$ a $A \cap F$ sú neprázdne. (Ak by totiž napr. $A \cap E = \emptyset$, tak $A \subset F \subset \overline{A}$, pričom F je uzavretá množina a rôzna od $\overline{A}$. Čo nie je možné. (Pozri príklad 75.) Teda množiny $A \cap E$ i $A \cap F$ sú neprázdne oddelené podmnožiny množiny A, čo je v spore so súvislosťou množiny A. b) Stačí napr. za A zobrať všetky racionálne čísla reálnej priamky R. A - je nesúvislá, ale $\overline{A} = R$ je súvislá.

$\boxed{\mathbf{142}}$ Možno postupovať podobne nepriamo ako v predchádzajúcom príklade. Alebo si stačí uvedomiť, že množina M je uzáverom množiny A v priestore M a použiť predchádzajúce tvrdenie príkladu 141.

$\boxed{\mathbf{143}}$ Ak by A bola nesúvislá, možno písať: $A = E \cup F$, kde E, F sú oddelené. Vyberme teraz $x \in E, y \in F$. Podľa predpokladu existuje súvislá množina Q obsahujúca body x a y. Potom ale $Q \cap E$ a $Q \cap F$ sú oddelené podmnožiny (overte!) množiny Q, čo je v spore s výberom tejto množiny.

$\boxed{\mathbf{144}}$ Nech A je naša množina. Označme $E \subset A, E$ - sú body s kladnými (iracionálnymi) súradnicami, $F \subset A, F$ - body so zápornými súradnicami. Zrejme $A = E \cup F$ a E, F sú oddelené.

$\boxed{\mathbf{145}}$ Stačí si uvedomiť, že spojnica dvoch bodov (úsečka obsahujúca aj tieto koncové body) je súvislá množina. A teraz použiť tvrdenie príkladu 143.

$\boxed{\mathbf{146}}$ Označme $E = E_1 \cup E_2$ a predpokladajme nepriamo, že E nie je súvislá. Potom $E = A \cup B$, kde A, B - oddelené množiny. Aspoň jedna z množín E_1, E_2 má neprázdny prienik aj s množinou A aj s B. (Ak by totiž napr. $E_2 \cap A = \emptyset$, potom $E_2 \subset B$ a $E_1 \supset A$. Teraz $E_1 \cap B \supset E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ a tiež $E_1 \cap A \neq \emptyset$). Nech teda napr. $E_1 \cap A \neq \emptyset$ aj $E_1 \cap B \neq \emptyset$. Potom $E_1 = (E_1 \cap A) \cup (E_1 \cap B)$, z čoho plynie nesúvislosť množiny E_1, čo je spor.

147 Nech $x, y \in E$. Potom $x \in E_{n_1}$ a $y \in E_{n_2}$. Označme $n = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $x, y \in E_n$. Ale E_n je súvislá. Teda (pozri príklad 143.) aj E je súvislá.

148 Indukciou (a použitím príkladu 146.) možno nahliadnuť, že pre každé n prirodzené je množina $F_n = \cup_{i=1}^{n} E_i$ súvislá. Takto sme vytvorili rastúcu postupnosť $\{F_n\}$ súvislých množín a podľa predchádzajúceho príkladu je $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ súvislá. Ale množina $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$.

149 Pre $i = 1, 2, ...$ označme $H_i = E_i \cup E_{i+1}$. H_i je zrejme súvislá. Počítajme $H_i \cap H_{i+1} = (E_i \cup E_{i+1}) \cap (E_{i+1} \cup E_{i+2}) \supset E_{i+1} \neq \emptyset$. Ďalej stačí použiť predchádzajúci príklad.

150 Každé dva body takejto množiny možno spojiť lomenou čiarou, pozostávajúcou najviac s troch na seba naväzujúcicjh úsečiek rovnobežných so súradnicovými osami. Ale takáto lomená čiara (pozri príklad 146.) je súvislá množina a teda podľa príkladu 143. je naša množina súvislá.

151 Nech E je súvislá podmnožina R a $x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2$. Keby existoval bod $c \in R$ taký, že $x_1 < c < x_2$, ale $c \notin E$, označme $A = (-\infty, c) \cap E$ a $B = (c, +\infty) \cap E$. Zrejme $E = A \cup B$ a A, B sú oddelené, tak E by nebola súvislá. Teda s každými dvoma bodmi $x_1, x_2 \in E$, množina E obsahuje celý interval $< x_1, x_2 >$. A to je možné iba vtedy, ak sama množina E je intervalom (akýmkoľvek, prípadne aj nekonečným). Obrátene, ak E je akýkoľvek interval, je zrejme E súvislá.

152 Nech existuje množina $A \subset X, A \neq \emptyset, A \neq X, A$ obojaká. Potom aj $(X - A)$ je neprázdna obojaká množina. Čo by znamenalo (pozri príklad 137.), že X je nesúvislý.

153 Nech $E \times F$ - súvislá a nech napr. množina E je nesúvislá. Potom $E = A \cup B, A, B$ - oddelené. A tým aj $A \times F$ a $B \times F$ sú oddelené (overte to!). Ale $E \times F = A \times F \cup B \times F$, čo je v spore so súvislosťou množiny $E \times F$. Obrátene: Nech E a F sú súvislé v X a Y. Vyberme dva ľubovoľné body $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F$. Všimnime si množiny $\{x\} \times F$ a $E \times \{y\}$. Prienik týchto množín je bod (x_1, y_2) a tieto množiny $\{x_1\} \times F$ a $E \times \{y_2\}$ sú súvislé (plynie zo súvislosti množín E a F). Teda zjednotenie $\{x_1\} \times F \cup E \times \{y_2\}$ je súvislá (pozri príklad 146.), ale toto zjednotenie obsahuje oba body $(x_1, y_2), (x_2, y_2)$. Teda v zmysle príkladu 143. je $E \times F$ súvislá.

154 Podľa príkladu 143. stačí ukázať, že každé dva body $x, y \in E$ možno "zabaliť" do súvislej množiny ležiacej v E. Teda ak $x, y \in E$, tak existujú množiny $A(x)$ a $A(y)$ zo systému $A_t, t \in T$ tak, že $x \in A(x), y \in A(y)$. Ale $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$, preto podľa príkladu 146. je i $A(x) \cup A(y)$ súvislá a to je naša hľadaná súvislá nadmnožina bodov x, y. Poznámka: Z prevedeného dôkazu vidieť, že tvrdenie nášho príkladu zostane v platnosti, ak budeme žiadať iba toľko, aby každé dve množiny systému A_t mali neprázdny prienik.

155 Touto komponentou je zjednotenie všetkých súvislých podmnožín množiny E obsahujúcich bod x. Podľa predchádzajúceho príkladu je to súvislá množina. Jednoznačnosť je zrejmá.

156 Možno použiť myšlienku z predchádzajúceho príkladu.

157 Nech E je uzavretá a A je jej komponenta. Potom zrejme $A \subset \overline{A} \subset E$. Z príkladu 141. plynie, že i $\overline{A}$ je súvislá. A vzhľadom na definíciu komponenty: $A = \overline{A}$.

$\boxed{158}$ Stačí použiť príklad 155.

$\boxed{160}$ Stačí si všimnúť vety 5.1.

$\boxed{161}$ Položme napr. $X = \{1, 2, 3, ...\}, Y$ je množina všetkých racionálnych čísel. Na oboch priestoroch uvažujme euklidovskú metriku. X aj Y sú spočitateľné množiny, teda existuje prosté zobrazenie $f : X \to Y$. f je spojité, lebo definičný obor pozostáva len z izolovaných bodov. Ale f^{-1} nie je spojité v žiadnom bode.

$\boxed{162}$ Z definície izometrického zobrazenia ihneď plynie, že f je prosté. Ešte spojitosť f: Nech $x_0 \in X, \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \to x_0$, t.j. $d(x_i, x_0) \to 0$. Ale pre každé $i = 1, 2, ...$ je $d(x_i, x_0) = d'(f(x_i), f(x_0))$, teda aj $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty} \to f(x_0)$. (Pozri vetu 5.1.) Spojitosť funkcie f_{-1} analogicky.

$\boxed{163}$ Izometrické zobrazenie je rovnomerne spojité - zrejmé. Neplatí obrátene: Voľme napr. $f :< 0, 1 >\to< 0, 1 >$ definovanú predpisom: $f(x) = x^2$.

$\boxed{164}$ Stačí vyjsť priamo z definície 5.1.

$\boxed{165}$ a) Neplatí. Napr. položme $A =< 0, 2 >, f(x) = x^2$. Vždy platí: $A \subset f^{-1}(f(A))$. b) Vždy platí.

$\boxed{166}$ Stačí napr. použiť vetu 5.1 a príklad 159. Podiel bude tiež spojitý, ale iba v tých bodoch, kde $g(x) \neq 0$.

$\boxed{167}$ Ak X je diskrétny - zrejmé. Ak X nie je diskrétny, tak existuje $p \in X$ taký, že každé jeho okolie $O(p, \delta)$ obsahuje nejaký bod z X rôzny od p. Definujme teraz $f : f(p) = 1$ a $f(x) = 0$, pre $x \neq p$. Ukážte, že f nie je spojitá.

$\boxed{168}$ Prvú časť možno ukázať priamo z definície 5.4. Odpoveď na otázku je negatívna. Stačí brať napr. $X =< 0, +\infty)$ s euklidovskou metrikou $f(x) = g(x) = x$.

$\boxed{169}$ Stačí si uvedomiť definície limity a spojitosti. Doporučujeme čitateľovi odpovedať si na otázku, prečo definujeme limitu funkcie len v hromadnom bode definičného oboru? O spojitosti funkcie v izolovanom bode hovorí príklad 160.

$\boxed{170}$ Hociktoré z tvrdení a), resp. b) možno ukázať priamo z definície uzavretej, resp. otvorenej množiny a spojitosti funkcie f. Zvyšné tvrdenia možno ukázať cez komplementy množín.

$\boxed{171}$ Ak f je spojitá v bode x, tak z definície spojitosti v bode plynie, že k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také okolie $O(x)$ bodu x, ktorého diameter je menší ako ε. Teda $\omega_f(x) \leq \varepsilon$. Ale ε - bolo ľubovoľné. Obrátene, ak $\omega_f(x) = 0 = \inf_{O(x)} \operatorname{diam} f(O(x))$, tak prakticky spätným postupom ako vyššie ukážeme, že f je spojitá.

$\boxed{172}$ a) Uvedomme si, že na základe predchádzajúceho príkladu možno písať $D_f = \cup_{K=1}^{\infty}\{x \in X; \omega_f(x) \geq \frac{1}{K}\}$. Ak množiny, vystupujúce v zjednotení na pravej strane uvedenej rovnosti, sú podľa príkladu 170. uzavreté. b) Stačí si uvedomiť, že $C_f = X \setminus D_f$ a tú skutočnosť, že komplement množiny typu F_σ je množina typu G_δ.

$\boxed{173}$ Podľa predchádzajúceho príkladu body spojitosti ľubovoľnej funkcie tvoria množinu typu G_δ. Ale naša množina E (pozri príklad 118.) nemôže byť typu G_δ.

$\boxed{174}$ a) Napr.: $f(x) = (x^2 - 1).d(x)$; kde $d(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racionálne číslo} \\ 0, & x \text{ iracionálne číslo} \end{cases}$ ($d(x)$ je tzv. Dirichletova funkcia.) b) Napr.: $f(x) = d(x).\sin \pi x$.

$\boxed{175}$ Uvedená funkcia je nespojitá v každom bode Cantorovej množiny a spojitá mimo nej.

$\boxed{176}$ Takáto je napr. tzv. Riemannova funkcia, definovaná:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}; & \text{ak } x = \frac{p}{q}; p, q \text{ - nesúdeliteľné} \\ 0; & \text{ak } x \text{ je iracionálne} \\ 1; & \text{pre } x = 0. \end{cases}$$

$\boxed{177}$ a) $f(x) = e^x$ - je všade spojitá, ale $f((-\infty, 0>) = (0, 1>$. b) $f(x) = \sin x$ - je všade spojitá, ale $f((0, 2\pi)) =< -1, 1 >$.

$\boxed{178}$ Neplatí! Napr. $f(x) = c$, potom $f^{-1}(\{c\}) = X$. Alebo $f(x) = \sin x$. Teraz $f^{-1}(< -1, 1 >) = R$.

$\boxed{179}$ Ak f je spojitá, že platí aj a) aj b) - plynie z definície 5.1 a príkladu 164. Obrátene, t.j. že každá z podmienok a) i b) stačí k spojitosti f: Podmienka a): Nech $x_0 \in R$ ľubovoľný. Označme $y_o = f(x_0)$. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ je $f^{-1}((y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon))$ otvorená v R a obsahujúca bod x_0 i s nejakým svojím δ - okolím, a teda $f((x_0 - \delta, x_0 +, \delta)) \subset (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, čo je vlastne spojitosť funkcie f. Podmienka b): Možno napr. použiť predchádzajúci výsledok: Nech (a, b) je ľubovoľný otvorený interval. Možno ho vyjadriť ako doplnok uzavretej množiny $(-\infty, a > \cup < b, +\infty)$, ktorej vzor - podľa b) - je uzavretá množina, teda vzor $f^{-1}((a, b))$ je otvorená.

$\boxed{180}$ Pre každé $x', x'' \in X$ platí: $d(x', y_0) - d(x'', y_0) \leq d(x', x'')$ a tiež $d(x'', y_0) - d(x', y_0) \leq d(x', x'')$, odkiaľ plynie: $\mid d(x', y_0) - d(x'', y_0) \mid \leq d(x', x'')$, čo dokazuje rovnomernú spojitosť funkcie $f(x) = d(x, y_0)$.

$\boxed{181}$ Stačí si uvedomiť, že spojitý obraz intervalu je interval (v prípade konštantnej funkcie bod) pozri vetu 5.2 c).

$\boxed{182}$ Nemusí byť spojitá. Napr. $f(x) = \sin \frac{1}{x}; x \neq 0, f(0) = 0$ má na $< -1, 1 >$ Darbouxovu vlastnosť, ale v bode $x = 0$ nie je spojitá.

$\boxed{183}$ Poznámka: Veta 5.2 nám udáva niektoré vlastnosti, ktoré sa spojitým zobrazením prenášajú. Tento príklad nám poukazuje na ďalšiu takúto vlastnosť - zachovávanie hustoty množiny. Nech $y \in f(X)$, t.j. $y = f(x), x \in X$. Ale E je hustá v X, teda existuje $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \to x, x_i \in E$, pre $i = 1, 2, \ldots$. Ale f je spojitá, z čoho plynie: $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty} \to f(x) = y$ a $f(x_i) \in f(E)$.

$\boxed{184}$ Ukážeme, že f je spojitá v každom bode $x_0 \in X$. Uvažujeme ľubovoľné okolie $O(f(x_0), \varepsilon)$ bodu $f(x_0)$. Vzor tohoto okolia, t.j. $f^{-1}(O(f(x_0), \varepsilon))$ je otvorená množina v X a obsahuje bod x_0. Teda existuje také okolie $(O(x_0, \delta) \subset f^{-1}(O(f(x_0), \varepsilon))$ a tak $F(O(x_0, \delta)) \subset O(f(x_0), \varepsilon))$, čo dokazuje spojitosť funkcie f v bode x_0.

$\boxed{185}$ Definujme $f : R \to R; f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Potom pre každé dva body x, x' platí: $\mid f(x) - f(x') \mid = \mid (x - x') - (\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x') \mid$. Podľa (Lagrangeovej) vety o strednej hodnote možno písať: $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x' = (x - x').\frac{1}{1+t^2}; t$ leží medzi bodmi x, x'. Po dosadení do predchádzajúcej rovnosti dostávame $| f(x)-f(x') |=| x-x' | .\frac{t^2}{1+t^2} <| x-x' |$ pre $x \neq x'$. A pre x, x' dosť veľké je i t dosť veľké, lebo t leží medzi x, x'. Inými slovami neexistuje $\alpha < 1$ také, aby $| f(x) - f(x') |< \alpha. | x - x' |$. Teda $f(x)$ nie je kontraktívne zobrazenie v zmysle definície 5.5. A skutočne veta 5.5 neplatí, lebo $f(x)$ má nekonečne veľa bodov, v ktorých $f(x) = x$. (Stačí, aby arctg $x = \frac{\pi}{2}$.)

186 Podľa vety 5.5 existuje jediný pevný bod x_0 zobrazenie f^k. Čiže $x_0 = f^k(x_0)$. Potom: $f(x_0) = f\left(f^k(x_0)\right) = f^{k+1}(x_0) = f^k\left(f(x_0)\right)$. Teda aj $f(x_0)$ je pevný bod zobrazenia f^k. Teraz si všimnime: Ak x_1 je pevný bod zobrazenia f, tak $x_1 = f(x_1)$, $f(x_1) = f\left(f(x_1)\right) = f^2(x_1)$... atď., teda x_1 je pevný bod zobrazenia f^k, ale toto má iba jediný pevný bod.

187 Stačí si uvedomiť, že už $f \circ f = f^2$ sa identicky rovná nule, teda je kontraktívne.

188 $\bigvee_a^b (k.f(x) + m) =| k | .A$.

189 $\bigvee_0^2 f(x) = 23$.

190 Nech $| f'(x) |\leq A$ pre všetky $x \in< a.b >$. Nech $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ je ľubovoľné delenie intervalu $< a, b >$. Podľa Lagrangeovej vety možno pre všetky $i = 1, 2, ..., n$ písať: $| f(x_i) - f(x_{i-1}) |= f'(\alpha_i).(x_i - x_{i-1}) \leq A.(x_i - x_{i-1})$, kde $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Teda $\sum_{i=1}^n | f(x_i) - f(x_{i-1}) |\leq \sum_{i=1}^n A. | x_i - x_{i-1} |= A. \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = A.(b - a)$.

191 Vo všeobecnosti nie. Napr.:

Položme: $f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} \sin k\pi(x(k+1) - 1), & \text{pre } x \in< \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} > \\ 0, & \text{pre } x \text{ mimo tohoto intervalu} \end{cases}$.

Potom $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ je rovnomerne konvergentný funkcionálny rad na intervale $< 0, 1 >$ (overte to!), každá z funkcii $f_k(x)$ má na $< 0, 1 >$ ohraničenú variáciu a predsa súčet tohoto radu je funkcia s neohraničenou variáciou na intervale $< 0, 1 >$. (Čitateľ si túto skutočnosť načrtnutím situácie ľahko overí.)

192 Nech $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ je ľubovoľné delenie intervalu $< a, b >$. Počítajme: $\sum_{i=1}^n | (f(x_i) + g(x_i)) - (f(x_{i-1}) + g(x_{i-1}) |= \sum_{i=1}^n | (f(x_i) - f(x_{i-1})) + (g(x_i) - g(x_{i-1})) |\leq \sum_{i=1}^n | f(x_i) - f(x_{i-1} | + \sum_{i=1}^n | g(x_i) - g(x_{i-1}) |\leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g$. Pre súčin: $\sum_{i=1}^n | f(x_i).g(x_i) - f(x_{i-1}).g(x_{i-1}) |= \sum_{i=1}^n | f(x_i).(g(x_i) - g(x_{i-1})) + (f(x_i) - f(x_{i-1})).g(x_{i-1}) |\leq \sum_{i=1}^n | f(x_i) | . | g(x_i) - g(x_{i-1}) | + \sum_{i=1}^n | f(x_i) - f(x_{i-1}) | . | g(x_{i-1}) |\leq \sup_{x\in<a,b>} | f(x) | . \bigvee_a^b g + \sup_{x\in<a,b>} | g(x) | . \bigvee_a^b f$.

193 Uvažujme ľubovoľné delenie intervalu $< a, b >$ také, aby bod c patril medzi deliace body, t.j. $a = x_0 < x_1 < ... < x_r = c = x_r < x_{r+1} < ... < x_n = b$. Počítajme: $\sum_{i=1}^r | f(x_i) - f(x_{i-1}) | + \sum_{i=r+1}^n | f(x_i) - f(x_{i-1}) |= \sum_{i=1}^n | f(x_i) - f(x_{i-1}) |\leq \bigvee_a^b f$. "Supremujúc" túto nerovnicu dostaneme: $\bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f \leq \bigvee_a^b f$. Ešte opačnú nerovnosť. Nech $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ je ľubovoľné delenie intervalu $< a, b >$. Bod $c \in (a, b)$ patrí do niektorého čiastkového intervalu, nech napr. $c \in< x_{s-1}, x_s >$. Potom: $\sum_{i=1}^n | f(x_i) - f(x_{i-1}) |\leq \left(\sum_{i=1}^{s-1} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | + | f(c) - f(x_{s-1}) |\right) + \left(| f(x_s) - f(c) | + \sum_{i=s+1}^n | f(x_i) - f(x_{i-1} |\right) \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$. A opäť »supremujúc" túto nerovnosť cez všetky delenia intervalu $< a, b >$ dostaneme $\bigvee_a^b f \leq \bigvee_a^c + \bigvee_c^b f$.

$\boxed{\mathbf{194}}$ Že z ohraničenosti variácie funkcie $f(x)$ plynie ohraničenosť variácie funkcie $\mid f(x) \mid$ ihneď plynie zo vzťahu $\mid\mid a \mid - \mid b \mid\mid \leq \mid a - b \mid$. Odtiaĺ naviac plynie, že $\bigvee_a^b \mid f \mid \leq \bigvee_a^b f$. Na dôkaz toho, že obrátené tvrdenie nemusí platiť, stačí zobrať Dirichletovu funkciu.

III. Diferenciálny počet funkcii viacerých premenných

1. Limita a spojitosť

1.1. Definícia reálnej funkcie

Definícia 1.1.1. *Nech $M \subset R^n, M = \emptyset$. Reálnu funkciu definovanú na množine M nazývame reálnou funkciou n premenných. Budeme ju označovať $f : M \to R^1$, alebo $f(x)$, alebo $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Množinu M budeme nazývať definičným oborom funkcie f. Pod symbolom $f(x)$ budeme tiež rozumieť hodnotu funkcie f v bode x. Ak funkcia je určená vzorcom a nie je udaný jej obor definície, rozumieme jej oborom definície množinu všetkých tých bodov x, pre ktoré je hodnota $f(x)$ reálne číslo.

Poznámka 1.1.1. Pojmy ako sú ohraničenosť funkcie, maximum, minimum, supremum, infimum funkcii, parciálna funkcia, sú tie isté ako v prípade funkcie jednej premennej. Tak isto i operácie s funkciami viac premenných sa definujú tak, ako to bolo v prípade funkcií jednej premennej.

Poznámka 1.1.2. Funkciu dvoch premenných budeme často označovať $z = f(x, y)$ a funkciu troch premenných budeme označovať $u = f(x, y, z)$.

1.2. Graf reálnej funkcie n premenných

Definícia 1.2.1. *Grafom funkcie $f(x)$, definovanej na množine $M \subset R^n, M \neq \emptyset$, rozumieme množinu G všetkých takých bodov $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1}$, pre ktoré platí: $(x_1, x_2, ..., x_n) \in M, x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Pri zostrojovaní grafu funkcie dvoch premenných je výhodné zostrojiť priesečnice grafu funkcie rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami, alebo rovinami prechádzajúcimi niektorou zo súradnicových osí. Nazývame ich rezmi. Rezy rovnobežné s rovinou R_{xy} nazývame vrstevnicami.*

1.3. Definícia vektorovej funkcie n premenných

Definícia 1.3.1. *Nech $M \subset R^n, M \neq \emptyset$. Vektorovou funkciou n premenných budeme rozumieť takú funkciu, ktorá každému bodu $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in M$ priradí nejaký vektor $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in R^m$. Vektorovú funkciu n premenných budeme označovať $f : M \to R^m$, alebo $y = f(x)$, alebo*

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

1. Daná je funkcia $z = f(x, y)$. Vypočítajte $f(1, \frac{1}{2}), f(-1, 2)$, ak:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2y + y + 1}$

b) $f(x, y) = \arcsin(x + y)$.

2. Nájdite definičné obory daných funkcií $z = f(x, y)$ resp. $u = f(x, y, z)$ a znázornite ich v R^2 resp. R^3, ak:

a) $f(x, y) = \frac{1}{r^2 - x^2 - y^2},\ r > 0$

b) $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},\ a > b > 0$

c) $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$

d) $f(x, y) = \sqrt{x.\sin y}$

e) $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$

f) $f(x, y) = \ln x - \ln \sin y$

g) $f(x, y) = \arcsin \frac{y-1}{x}$

h) $f(x, y) = \ln xy + \pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$

i) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2) + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \arcsin \frac{y}{x}$

j) $f(x, y, z) = \frac{x}{|y|+|z|}$

k) $f(x, y, z) = \ln xyz$

l) $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$.

3. Aké druhy kriviek sú rezy grafov daných funkcií $z = f(x, y)$ rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami R_{xz}, R_{yz}?

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = xy^2$.

4. Nájdite vrstevnice na grafoch funkcií $z = f(x, y)$:

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

b) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$

c) $f(x, y) = xy$.

5. Načrtnite grafy funkcií:

a) $z = x - y$

b) $z = -x - y + 1$

c) $z = 4x^2 + 9y^2$

d) $z = x^2 - y^2$

e) $z = 4 - x^2 - y^2$

f) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

g) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

h) $z = 1 - y^2$.

1.4. Limita funkcie n premenných

Definícia 1.4.1. *Funkcia f má v hromadnom bode a svojho definičného oboru M limitu číslo b, ak $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tak, že $\forall x \in M$, pre ktoré $0 < \varrho(x, a) < \delta$ je $\mid f(x) - b \mid < \varepsilon$. Limitu funkcii f v bode a budeme označovať takto:*

$$\lim_{x \to a} f(x), \text{ alebo } \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

kde $a_1, a_2, ..., a_n$ sú súradnice bodu a.

Definícia limity vektorovej funkcie f v bode a

Definícia 1.4.2. *Funkcia f má v hromadnom bode a svojho definičného oboru M limitu $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$, ak $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in M$, pre ktoré $0 < \varrho(x, a) < \delta$ je $f(x) \in O_\varepsilon(B)$.*

Limitu vektorovej funkcie f v bode a budeme označovať takto:

$$\lim_{x \to a} f(x), \qquad \text{alebo} \qquad \begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f_m(x_1, x_2, ..., x_n). \end{array}$$

Veta 1.4.1. *Nech a je hromadný bod oboru definície M funkcie f. Funkcia f má v bode a limitu číslo b práve vtedy, ak pre každú postupnosť bodov $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ z množiny M $x^{(k)} \neq a, k = 1, 2, ...,$ ktorá konverguje k bodu a je $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = b$.*

Poznámka 1.4.1. *Pre funkciu n premenných platia analogické vety ako pre limitu funkcie jednej premennej.*

Definícia 1.4.3. *Funkcia f sa nazýva nekonečne malá v bode a, ak $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.*

Definícia 1.4.4. *Ak f a g sú funkcie nekonečne malé v bode a a $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, potom hovoríme, že f je v bode a nekonečne malá vyššieho rádu ako g a píšeme $f = o(g)$ pre $x \to a$.*

Poznámka 1.4.2. Pod symbolom $x \to \infty$, kde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ budeme rozumieť $x_i \to \infty, i = 1, 2, ..., n$.

Definícia 1.4.5. *Nech funkcia f je definovaná na množine M, ktorá obsahuje body ľubovoľne vzdialené od bodu $0 = (0, 0, ..., 0)$. Číslo b sa nazýva limitou funkcie f pre $x \to \infty$ práve vtedy, ak $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; K > 0$ tak, že $\forall x \in M$, pre ktoré $\varrho(x, 0) > K$ platí $| f(x) - b | < \varepsilon$.*

Dvojnásobné limity funkcie dvoch premenných

Definícia 1.4.6. *Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná na množine $M \subset R^2$ a nech $[x_0, y_0]$ je hromadným bodom množiny M. Nech pre každé $x \neq x_0$ také, že $[x, y] \in M$ existuje $\lim_{y \to y_0} f(x, y) = g(x)$ a nech táto funkcia má v bode x_0 limitu, potom $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right]$ sa nazýva dvojnásobná limita funkcie f v bode $[x_0, y_0]$ podľa y a x. Analogicky sa definuje dvojnásobná limita funkcie $f(x, y)$ v bode $[x_0, y_0]$ podľa x a y.*

Označme: $l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y), l_{12} = \lim\limits_{x \to x_0} \left[\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) \right], l_{21} = \lim\limits_{y \to y_0} \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) \right]$.

Veta 1.4.2. *Nech existuje limita funkcie $f(x, y)$ v bode $[x_0, y_0]$ a nech existuje ľubovoľná z dvojnásobných limít, potom sa tieto limity rovnajú.*

Dôsledok 1.4.1. *Ak existuje l, l_{12}, l_{21}, potom $l = l_{12} = l_{21}$.*

Dôsledok 1.4.2. *Ak $l_{12} \neq l_{21}$, potom limita funkcie $f(x, y)$ v danom bode $[x_0, y_0]$ neexistuje.*

Poznámka 1.4.3. Pojem dvojnásobnej limity možno definovať aj v prípade, že x_0 alebo y_0, alebo x_0 i y_0 sú rovné ∞ alebo $-\infty$.

Poznámka 1.4.4. Z existencie dvojnásobných limít funkcie f v danom bode a z ich rovnosti nevyplýva existencia limity v tomto bode. Pozri príklady 21. a), 23. b).

Poznámka 1.4.5. Z existencie limity funkcie f v danom bode nevyplýva existencia dvojnásobných limít funkcie f v tomto bode. Pozri príklady 22.,26.

6. Definujte limitu funkcie $f : M \subset R^n \to R^m$ pomocou normy v R^n resp. R^m.

7. Definujte nevlastnú limitu funkcie $f : M \subset R^n \to R^m$.

V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity:

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2+y+2)$.

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$.

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{y}$.

14. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

15. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

16. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$.

18. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

19. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$.   b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$.

20. Zistite, či existuje:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.   b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

21. Dokážte, že nasledujúce limity neexistujú:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.   b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin \mid x-y \mid}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+y)}{y}$.   d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

22. Dokážte, že funkcia $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ je nekonečne malá v bode $(0,0)$.

23. Vypočítajte dvojnásobné limity ($\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ a $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$):

a) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ v $x_0=0, y_0=0$.   b) $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ v $x_0=0, y_0=0$.

c) $f(x,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$ v $x_0=0, y_0=0$.   d) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$ v $x_0=\infty, y_0=\infty$.

24. Ukážte, že pre funkciu $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ platí:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0,$$

ale $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ neexistuje.

25. Ukážte, že $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4} = \lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$, ale $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$ neexistuje.

26. Zistite, či existujú dvojnásobné limity funkcii $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bode $(0,0)$.

1.5. Spojitosť funkcie n premenných

Definícia 1.5.1. *Nech $f : M \to R^1, M \subset R^n$. Hovoríme, že funkcie f je spojitá v bode $a \in M$, ak pre ĺubovoĺné okolie $O(f(a))$ bodu $f(a)$ existuje také okolie $O(a)$ bodu a, že $f[O(a) \cap M] \subset O(f(a))$.*

Poznámka 1.5.1. Ak v definícii 1.5.1. budeme predpokladať, že a je hromadným bodom množiny M, tak dostaneme nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.5.1. *Nech $f : M \to R^1, M \subset R^n$, nech a je hromadným bodom množiny M, $a \in M$ potom f je spojitá funkcia v bode a vtedy a len vtedy, ak $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje a platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Definícia 1.5.2. *Body, v ktorých nie je funkcia f spojitá sa nazývajú body nespojitosti tejto funkcie.*

Definícia 1.5.3. *Prírastkom funkcie f v bode a nazývame funkciu $\triangle f = f(x) - f(a)$, $x \in M$. Nech $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ a $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ak označíme $\triangle x_i = x_i - a_i$, $i = 1, 2, ..., n$, tak $\triangle f$ môžeme napísať v tvare*

$$\triangle f = f(a_1 + \triangle x_1, a_2 + \triangle x_2, ..., a_n + \triangle x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Veta 1.5.2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \triangle f = 0.$

Spojitosť funkcie vzhĺadom na jednotlivé premenné

Nech všetky premenné funkcie $f(x_1, x_2, ..., x_3)$ okrem jednej sú pevné, napr. $x_i = a_i, i = \{1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n\}$ a x_k je premenná. Premennej x_k prislúcha prírastok $\triangle x_k$. Prírastok funkcie f v bode a prislúchajúci prírastku $\triangle x_k$ označíme takto:

$$\triangle_{x_k} f = f(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k + \triangle x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Definícia 1.5.4. *Funkcia $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sa nazýva spojitá v hromadnom bode $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ svojho definičného oboru f vzhĺadom k premennej x_k, ak $\lim\limits_{\triangle x_k \to 0} \triangle_{x_k} f = 0$.*

Veta 1.5.3. *Ak je funkcia $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ definovaná v nejakom okolí bodu*

$a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ a je spojitá v bode a, potom je spojitá vzhľadom ku každej premennej zvlášť.

Poznámka 1.5.2. Vety o spojitosti súčtu, rozdielu, súčinu a podielu dvoch funkcii platia analogicky ako pre funkciu jednej premennej.

Definícia 1.5.5. *Nech funkcia $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ je definovaná na množine $M \subset R^n$. Nech $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k), i = 1, 2, ..., n$ je n funkcií k premenných, ktoré sú definované na množine $M_t \subset R^k$. Nech pre tieto funkcie platí, že pre bod $[\varphi_1(T), \varphi_2(T), ..., \varphi_n(T)] \in M$, ak $T = [t_1, t_2, ..., t_k] \in M_t$. Potom môžeme na množine M definovať funkciu F k premenných tak, že pre každý bod $T = [t_1, t_2, ..., t_k] \in M_t$ je*

$F(T) = f(\varphi_1(T), \varphi_2(T), ..., \varphi_n(T))$. Táto funkcia sa nazýva zložená funkcia.

Veta 1.5.4. *Nech funkcie $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ pre $i = 1, 2, ..., n$ sú spojité v bode*

$a = (a_1, a_2, ..., a_k)$ a funkcia $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ je spojitá v bode $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, kde

$b_i = \varphi_i(a_1, a_2, ..., a_k), i = 1, 2, ..., n$. Potom zložená funkcia

$f[\varphi_1(t_1, t_2, ..., t_k), ..., \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_k)]$ je spojitá v bode a.

Definícia 1.5.6. *Funkcia $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sa nazýva spojitá na množine M, ak je spojitá v každom bode množiny M.*

Definícia 1.5.7. *Funkcia $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sa nazýva rovnomerne spojitá na množine M práve vtedy, ak $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in M$, ktoré vyhovujú nerovnosti $\varrho(x^{(1)}, x^{(2)}) < \delta$ platí $\mid f(x^{(1)}) - f(x^{(2)}) \mid < \varepsilon$.*

Veta 1.5.5. *Funkcia spojitá na uzavretej ohraničenej množine $M \subset R^n$ má tieto vlastnosti:*

1. *f je ohraničená na množine M.*
2. *f má na množine M maximum a minimum.*
3. *f je na množine M rovnomerne spojitá.*

Nájdite body nespojitosti funkcií:

27. $f(x, y) = \frac{x-y}{x^3-y^3}$.

28. $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

29. $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

30. $f(x, y) = \sin \frac{x}{y}$.

31. $f(x, y) = \frac{\sin x \,.\, \sin y}{xy}$.

32. $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

33. $f(x, y, z) = \frac{2y}{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$.

34. Dokážte, že funkcia $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ je spojitá v bode $(0, 0)$ vzhľadom na každú premennú zvlášť, ale nie je spojitá vzhľadom k obidvom premenným.

35. Zistite, či je funkcia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$ v bode $(0,0)$ a v bode $(1,0)$ spojitá vzhľadom na každú premennú zvlášť a spojitá v týchto bodoch vzhľadom k obidvom premenným.

36. Pre akú hodnotu c je funkcia

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 3x+4y-2z+5, & x \neq 0, y \neq 1, z \neq 2 \\ c, & x = 0, y = 1, z = 2 \end{cases}$$

v bode $(0,1,2)$ spojitá ?

37. Dokážte, že ak je na množine M funkcia $f(x,y)$ spojitá vzhľadom na každú premennú zvlášť a monotónna vzhľadom na jednu z premenných, potom je funkcia $f(x,y)$ spojitá na množine M.

38. Dokážte, že ak na množine M je funkcia $f(x,y)$ spojitá vzhľadom na premennú x a spĺňa Lipschitzovu podmienku vzhľadom na y t.j. $\mid f(x,y_1) - f(x,y_2) \mid \leq L. \mid y_1 - y_2 \mid$, pričom $(x,y_1),(x,y_2) \in M$ a L je konštanta, potom je funkcia $f(x,y)$ spojitá na množine M.

Dokážte, že nasledujúce funkcie sú ohraničené na daných množinách a nájdite ich maximum a minimum, ak existujú:

39. $f(x,y) = \frac{x^6+y^6}{x^2+y^2}, M = \{(x,y) \in R^2 :) < x^2+y^2 \leq 9\}$.

40. $f(x,y) = xye^{-xy}, M = \{(x,y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq)\}$.

41. Dokážte, že funkcia $f(x,y) = x+2y+3$ je rovnomerne spojitá v celej rovine R^2.

42. Ako treba zmeniť definíciu funkcie $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, aby bola rovnomerne spojitá na množine $M = \{(x,y) \in R^2 : 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$?

43. Zistite, či funkcia $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y}$ je rovnomerne spojitá na svojom obore definície.

Zistite, či nasledujúce funkcie sú rovnomerne spojité na uvedených množinách:

44. $f(x,y) = \sin \frac{\pi}{1-x^2-y^2}, M = \{(x,y) \in R^2, x^2+y^2 < 1\}$.

45. $f(x,y) = x^2+y^2, M = \{(x,y) \in R^2, x^2+y^2 \leq 1\}$.

46. $f(x,y) = x^3-y^3, M = \{(x,y) \in R^2, 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

47. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, M = R^2$.

2. Parciálne derivácie. Diferenciál funkcie

2.1. Parciálne derivácie

Definícia 2.1.1. *Nech reálna funkcia $f : G \to R$ je definovaná na množine $G \subset R^n$ a $a = (a_1, ..., a_n)$ je vnútorným bod tejto množiny. Ak existuje*

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{x_k - a_k}$$

hovoríme, že funkcia f má v bode a parciálnu deriváciu podľa premennej x_k a označujeme ju jedným zo symbolov $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $f'_{x_k}(a)$, $f_{x_k}(a)$, $f_k(a)$.

Ak označíme $\triangle x_k = x_k - a_k$, potom

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{\triangle x_k \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{k-1}, a_k + \triangle x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{\triangle x_k}, \ k = 1, 2, ..., n.$$

Parciálnou deriváciou funkcie $f(x)$ podľa premennej x_k rozumieme takú funkciu $F(x)$, ktorej definičným oborom bude množina všetkých bodov, v ktorých má funkcia $f(x)$ parciálnu deriváciu podľa x_k a ktorej hodnota sa v každom bode jej definičného oboru rovná parciálnej derivácii funkcie $f(x)$ podľa x_k v tomto bode. Pre parciálnu deriváciu funkcie $f(x)$ podľa premennej x_k nepoužívame $F(x)$, ale zaužívané je označovať ju symbolom $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, alebo $f'_{x_k}(x)$, alebo len $f_{x_k}(x)$.

Geometrický význam parciálnych derivácií funkcie dvoch premenných. Nech je daná funkcia $z = f(x, y), (x, y) \in G \subset R^2$. Jej grafom je plocha v R^3. Uvažujme bod $(x_0, y_0, z_0), z_0 = f(x_0, y_0)$, na tejto ploche. Podľa definície $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, ak táto existuje. Grafom funkcie $g(x) = f(x, y_0)$ je krivka, ktorá prechádza bodom (x_0, y_0, z_0) a je rezom plochy $z = f(x, y)$ rovinou $y = y_0$. Potom $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ je smernica dotyčnice ku krivke $g(x) = f(x, y_0)$ v bode (x_0, y_0, z_0). Podobne $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ je smernica dotyčnice ku krivke $h(x) = f(x_0, y)$, ktorá je rezom danej plochy rovinou $x = x_0$ v bode (x_0, y_0, z_0).

Pri počítaní parciálnych derivácií danej funkcie $f(x)$ n premenných postupujeme tak ako v prípade funkcie jednej premennej. Totiž pri počítaní parciálnej derivácie funkcie $f(x_1, \ldots, x_n)$ podľa premennej napr. x_k považujeme túto funkciu len za funkciu x_k. Ostatné premenné považujeme za konštanty.

48. Nájdite parciálne derivácie podľa x a y:

a) $z = e^x \cos(xy)$ b) $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2 + 1}$

c) $z = \ln \sqrt{2x^2 + y^2}$

d) $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

e) $z = e^{(x+y)^2}$

f) $z = \sin(x + y)\cos(x - y)$

g) $z = \left(x^2 y + y\right)^4$

h) $z = y\mathrm{tg}\,(xy)$

i) $z = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$

j) $z = \ln \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

h) $z = xye^{xy}$

l) $z = \dfrac{x + y}{x - y}$

m) $z = \ln(x^2 + y^2)$

n) $z = \ln \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{y}$

o) $z = x^y$

p) $z = \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}$.

49. Nájdite parciálne derivácie podľa x, y a z:

a) $u = x^3 y z^2$

b) $u = \left(ax^2 + by^2 + cz^2\right)^n$

c) $u = \arcsin \dfrac{xy}{z}$

d) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$

e) $u = \cos(xy).\mathrm{arctg}\,(xz)$

f) $u = z \ln \dfrac{y}{x}$

g) $u = e^{xyz} \sin x \cos y$

h) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$

i) $u = x^{y/z}$.

50. Napíšte rovnicu dotyčnice ku krivke, ktorá je rezom eliptického paraboloidu $z = x^2 + 2y^2$:

a) rovinou $y = 2$ v bode $A = (3, 2, 17)$

b) rovinou $x = 3$ v bode $A = (3, 2, 17)$.

51. Napíšte rovnicu dotyčnice ku krivke, ktorá je rezom plochy $z = \left(x^2 - 3y^2\right)^2$:

a) rovinou $x = 2$ v bode $A = (2, 1, 1)$

b) rovinou $y = 1$ v bode $A = (2, 1, 1)$.

2.2. A. Diferencovateľnosť funkcie n premenných

Definícia 2.2.1. *Funkcia $f : G \to R$ definovaná na množine $G \subset R^n$ sa nazýva diferencovateľná v bode $a = (a_1, ..., a_2) \in G$, ktorý je hromadným bodom množiny G, ak existujú také čísla $A_1, ..., A_n$ a funkcia $\omega(x)$, $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ tak, že pre každý bod $x =$*

$(x_1, ..., x_n)$ z istého okolia bodu a platí

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i) + \omega(x)\varrho(x,a), \tag{1}$$

kde $\varrho(x,a) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2\right)^{1/2}$.

Podmienku diferencovateľnosti (1) v bode a možno ešte zapísať v nasledujúcich tvaroch:

$$\text{a) } f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i) + o(\varrho), \tag{1'}$$

kde $o(\varrho)$ je taká funkcia, že $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{o(\varrho)}{\varrho(x,a)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i)}{\varrho(x,a)} = 0.$

$$\text{b) } f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)(x_i - a_i), \tag{1''}$$

kde funkcie $\omega_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ sú také, že $\lim\limits_{x\to a} \omega_i(x) = \omega_i(a) = 0$.

Ak vektor $\vec{h} = (h_1, ..., h_2)$ má zložky $h_i = x_i - a_i$, $i = 1, 2, ..., n$, tak podmienku diferencovateľnosti (1′) možno zapísať v tvare

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + o(h), \text{pričom}$$

$$\lim_{\|h\|_{R^n}\to 0} \frac{\mid o(h) \mid}{\|h_{R^n}\|} = 0, \text{ kde } \|h\|_{R^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}.$$

Definícia 2.2.2. *Lineárna funkcia, ktorá vektoru $\vec{h} = (h_1, ..., h_n)$ priradí hodnotu $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i h_i$ sa nazýva totálny diferenciál funkcie f v bode a. Označujeme ho $df(a)$ alebo $df(a,x)$.*

Poznámka 2.2.1. Často sa tiež vraciame k pôvodným premenným, teda miesto h_i píšeme $x_i - a_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Veta 2.2.1. *(Nutné podmienky diferencovateľnosti.) Ak je funkcia $f(x)$ diferencovateľná v bode a, potom*

1. *je funkcia $f(x)$ spojitá v bode a;*

2. *funkcia $f(x)$ má parciálne derivácie $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ a platí $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),\ i = 1, 2, ..., n.$*

Veta 2.2.2. *(Postačujúca podmienka diferencovateľnosti.) Ak má funkcia $f(x)$ n premenných v nejakom okolí bodu a parciálne derivácie podľa všetkých premenných, ktoré sú spojité v bode a, potom je funkcia $f(x)$ diferencovateľná v bode a.*

Poznámka 2.2.2. Ak funkcia $f(x)$ je diferencovateľná v bode a, potom jej totálny diferenciál v bode a

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i, \tag{2}$$

kde dx_i je diferenciál funkcie $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ v bode a. Výrazy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ sa nazývajú parciálne diferenciály.

Poznámka 2.2.3. Zápis $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx_i$ je tiež bežný na označenie diferenciálu v ľubovoľnom bode x.

B. Diferencovateľnosť vektorovej funkcie n premenných

Nech funkcia $f: G \to R^m$ je definovaná v oblasti $G \subset R^n$. Ak si zvolíme bázy v R^n a R^m, tak vektorovú funkciu $y = f(x)$ môžeme vyjadriť pomocou m skalárnych funkcií n premenných:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ y_m &= f_m(x) = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Definícia 2.2.3. *Funkcia $f: G \to R^m$ definovaná v oblasti $G \subset R^n$, sa nazýva diferencovateľná v bode $a \in G$, ak*

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + o(h),$$

kde $f'(a): R^n \to R^m$ je lineárne zobrazenie a

$$\lim_{\|h\|_{R^n} \to 0} \frac{\|o(h)\|_{R^m}}{\|h\|_{R^n}} = 0,$$

pričom $\|o(h)\|_{R^m} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} (o_i(h))^2},\ \|h\|_{R^n} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i^2}.$

Výraz $f'(a)h$ sa nazýva diferenciál vektorovej funkcie f v bode a a označujeme ho $df(a)$; $f'(a)$ sa nazýva derivácia funkcie f v bode a.

Lineárne zobrazenie $f'(a)$ v kanonickej báze má maticu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix},$$

ktorá sa nazýva Jacobiho matica.

Ak $n = m$, determinant tejto matice sa nazýva jakobián zobrazenia $f : R^m \to R^m$ a označujeme ho symbolom $D_f(x_1, \dots, x_m)$ alebo $\frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(x_1,\dots,x_m)}$.

2.3. Parciálne derivácie vyšších rádov. Diferenciály vyšších rádov

Definícia 2.3.1. *Ak parciálna derivácia* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *funkcie* $f(x)$ n *premenných je definovaná v okolí bodu* $a = (a_1, \dots, a_n)$ *a má parciálnu deriváciu podľa premennej* x_j *v bode* a, *hovoríme, že funkcia* $f(x)$ *má 2. parciálnu deriváciu podľa premenných* x_i *a* x_j *v bode* a. *Označujeme ju jedným zo symbolov* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), f''_{x_i x_j}(a), f_{x_i x_j}(a)$. *Teda*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right]_a = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Pritom, ak $i \neq j$, *táto parciálna derivácia sa nazýva zmiešaná. V prípade, že* $i = j$, *2. parciálnu deriváciu označujeme jedným zo symbolov* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$, $f''_{x_i^2}(a)$, $f_{x_i^2}(a)$.

<u>Všeobecne</u>: parciálne derivácie parciálnych derivácií rádu $k-1$ nazývame deriváciami k - teho rádu. Označujeme ich $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$, $i_k = 1, 2, \dots, n$.

Definícia 2.3.2. *Hovoríme, že funkcia* $f(x)$ *je* k*-krát diferencovateľná v bode* a, *ak v bode* a *sú diferencovateľné všetky parciálne derivácie funkcie* $f(x)$ *rádu* $(k-1)$*-ého a ak všetky parciálne derivácie tejto funkcie, ktoré sú rádu nižšieho ako* $k-1$, *sú diferencovateľné v istom okolí bodu* a.

Ak funkcia $f(x)$ je k-krát diferencovateľná v bode a, potom výraz

$$d^k(a,x) = \left[dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k f(a) \tag{3}$$

nazývame <u>k-tym diferenciálom</u> alebo <u>diferenciálom rádu k</u> funkcie $f(x)$ v bode a.

Pritom tento symbolický vzorec rozumieme tak, že použijeme vzorec pre k -tu mocninu výrazu v zátvorke a potom namiesto mocnín znakov $\frac{\partial}{\partial x_i}$ berieme parciálne derivácie funkcie $f(x)$ v bode a takého rádu, aká je mocnina, a mocniny dx_i zostávajú mocninami.

Nech $G \subset R^n$ je oblasť. Budeme hovoriť, že funkcia f patrí do triedy $C^{(k)}(G;R)$, alebo $C^{(k)}(G)$, ak sú všetky jej parciálne derivácie až do rádu k včítane definované a spojité v oblasti G.

Veta 2.3.1. *Ak* $f \in C^{(k)}(G;R)$, *potom parciálna derivácia* $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x)$ *rádu* k *v bode* $x \in G$ *nezávisí od poradia* $i_1, \dots, i_k$ *derivovania, t.j. zostáva tá istá pre ľubovoľnú permutáciu indexov* $i_1, \dots, i_k$ $(i_k = 1, \dots, n)$.

2.4. Parciálne derivácie zložených funkcií

Veta 2.4.1. *Nech funkcie* $t_i = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$ *sú diferencovateľné v bode* $a = (a_1, \dots, a_n)$. *Nech* $\varphi_i(a) = b_i$, $i = 1, \dots, m$. *Nech funkcia* $f(t_1, \dots, t_m)$ *je diferencovateľná* *v bode $b = (b_1, \dots, b_m)$. Potom je v bode a deferencovateľná aj funkcia $u(x_1, \dots, x_m) = f(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n))$ a pre jej diferenciál a derivácie v bode a platí:*

$$du(a,x) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial t_i}(b)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(a),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial t_i}(b)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(a),\ k = 1, \dots, n.$$

Z posledného vzorca za predpokladu diferencovateľnosti funkcie $f(t),\ t = (t_1, \dots, t_m)$ a funkcií $\varphi_i(x),\ i = 1, \dots, m,\ x = (x_1, \dots, x_n)$, dostaneme vzorec pre parciálne derivácie zloženej funkcie $u(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_m)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x),\ k = 1, \dots, n,$$

kam treba do derivácií $\frac{\partial f}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_m),\ i = 1, \dots, m$, dosadiť $\varphi_i(x)$ za t_i.

Definícia 2.4.1. *Funkcia $f(x)$ definovaná v oblasti $G \subset R^n$ sa nazýva homogénna funkcia stupňa p v oblasti G, ak pre každý bod $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ a pre každé číslo t, pre ktoré bod $(tx_1, \dots, tx_n) \in G$, platí rovnosť $f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n)$.*

Eulerova veta. *Ak je $f(x)$ v nejakej oblasti $G \subset R^n$ diferencovateľná a homogénna funkcia stupňa p, potom v každom bode $x \in G$ platí*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)x_i = pf(x).$$

Poznámka 2.4.1. Výhoda zápisu totálneho diferenciálu vo tvare (2) spočíva v tom, že vzhľadom na vetu 2.4.1. o derivovaní zloženej funkcie sa tento tvar zachováva aj vtedy, keď $x_1, \dots, x_n$ sú funkcie iných nezávislých premenných $y_1, \dots, y_m$. V tomto prípade symbol dx_i už neznamená prírastok $\triangle x_i = x_i - a_i$, ale diferenciál funkcie x_i. Túto vlastnosť 1. diferenciálu obyčajne nazývajú vlastnosťou invariantnosti jeho tvaru.

Veta 2.4.2. *Nech u a v sú diferencovateľné funkcie viacerých premenných. Potom platí*

$$d(cu) = cdu,\ c = \textit{konštanta}$$
$$d(u \pm v) = du \pm dv$$
$$d(u.v) = udv + vdu$$
$$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0,$$

pričom tieto vzorce platia aj v prípade, keď u a v sú diferencovateľné funkcie nejakých premenných.

2.5. Derivácia v smere. Gradient funkcie

Nech $G \subset R^3$ je oblasť a $f : G \to R$. Nech $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ a nech $\vec{l}$ je jednotkový vektor so začiatkom v bode M_0. Súradnice vektora $\vec{l}$ sú $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ ($\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sú uhly, ktoré zviera vektor $\vec{l}$ so súradnicovými osami). Nech $t > 0$ je skalár a $t\vec{l} \in G$. Prírastok funkcie f v bode M_0 v smere vektora $\vec{l}$ je $(M_0 + t\vec{l}) - f(M_0)$.

Definícia 2.5.1. *Ak existuje* $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(M_0+t\vec{l}) - f(M_0)}{t}$, *hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode M_0 v smere $\vec{l}$ a označujeme ju $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ (alebo $D_{\vec{l}}f(M_0)$).*

Veta 2.5.1. *Ak je funkcia $f(x,y,z)$ diferencovateľná v bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, potom*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma.$$

Definícia 2.5.2. *Vektor* $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0}$ *sa nazýva gradient funkcie f v bode M_0. Označujeme ho* grad $f(M_0)$ *(alebo $\nabla f(M_0)$).*

Zo vzťahu uvedenom vo vete 2.5.1. vyplýva, že

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = (\mathrm{grad}\ f(M_0), \vec{l}). \tag{4}$$

Gradient funkcie f v bode M_0 charakterizuje smer a veľkosť maximálneho rastu tejto funkcie v bode M_0. Teda:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)\right]_{\max} = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]^2}.$$

Poznámka 2.5.1. Vektor grad $f(M_0)$ je ortogonálny na vrstevnicu grafu funkcie $f(x,y,z)$, ktorá prechádza bodom M_0.

Poznámka 2.5.2. Ak funkcia $f(x), x = (x_1, \ldots, x_n), n$ premenných je diferencovateľná v bode $M_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ a jednotkový vektor $\vec{l} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, potom

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)\cos\alpha_i.$$

52. Predpokladajúc, že x, y sú v absolútnej hodnote malé, odvoďte približné vzorce pre výrazy:

a) $(1+x)^m(1+y)^m$;

b) $\operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1+xy}$.

53. Nájdite hodnoty 1. diferenciálu funkcie u v bode M_0 v danom vektore $\vec{h}$, ak

a) $u = \arcsin xy,\ M_0 = (\frac{1}{2}, 1),\ \vec{h} = (0,5; 0,1)$;

b) $u = x^3y - xy^2,\ M_0 = (1,2),\ \vec{h} = (-0,5; 0,8)$;

c) $u = x^{2y},\ M_0 = (4,1),\ \vec{h} = (0,1; 0,2)$;

d) $u = \sqrt[3]{4x^2+y^2},\ M_0 = (1,2),\ \vec{h} = (-0,2; 0,3)$;

e) $u = x\sqrt{1+y^3},\ M_0 = (2,2),\ \vec{h} = (0,1; 0)$.

54. Zameňte prírastok funkcie jej diferenciálom a približne vypočítajte:

a) $1,002.2,003^3.3,004^3$

b) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$

c) $\sin 29° \mathrm{tg}\ 46°$

d) $0,97^{1,05}$.

55. Nájdite $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$, ak $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Je táto funkcia diferencovateľná v bode $(0,0)$?

56. Zistite, či je diferencovateľná v bode $(0,0)$ funkcia $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

57. Ukážte, že funkcia

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},\ \text{ak } x^2+y^2 \neq 0 \text{ a } f(0,0) = 0,$$

má v okolí bodu $(0,0)$ parciálne derivácie $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$, ktoré nie sú spojité v bode $(0,0)$ a sú neohraničené v ľubovoľnom okolí tohto bodu; avšak táto funkcia je diferencovateľná v bode $(0,0)$.

58. Dokážte, že funkcia $f(x,y)$, ktorá má ohraničené parciálne derivácie $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$ na nejakej konvexnej oblasti E, je rovnomerne spojitá.

59. Dokážte, že ak funkcia $f(x,y)$ definovaná na oblasti $G \subset R^2$ je spojitá vzhľadom na premennú x pre každú hotnotu y a má ohraničenú deriváciu $f'_y(x,y)$, potom táto funkcia je spojitá vzhľadom na obidve premenné v oblasti G.

60. Určte deriváciu zobrazenia φ (t.j. Jacobiho maticu), ak

a) $\varphi : (u,v) \to (x,y,z);\ x = uv,\ y = u^2+v^2,\ z = u^2-v^2$;

b) $\varphi : (u,v) \to (x,y);\ x = u\cos v,\ y = u\sin v$;

c) $\varphi : (u,v) \to x;\ x = \dfrac{u}{v}$;

d) $\varphi : u \to (x,y);\ x = u \mathrm{tg}\ u,\ y = u\sin u$;

f) $\varphi : (u, v, w) \to (x, y);\ x = u^2 + v^2 + w^2,\ y = u + v + w.$

61. Nájdite jakobián zobrazenia $f : R^n \to R^n$:

a) $f : x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;\ f : (r, \varphi) \to (x, y);$

b) $f : u = \dfrac{z}{x^2 + y^2},\ v = xy,\ w = \dfrac{y}{x};\ f : (x, y, z) \to (u, v, w);$

c) $f : x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi;\ f : (r, \varphi, \psi) \to (x, y, z);$

d) $f : u = xy,\ v = \dfrac{y}{x};\ f : (x, y) \to (u, v);$

e) $f : x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = u^2;\ f : (r, \varphi, u) \to (x, y, z).$

62. Nájdite parciálne derivácie 1. a 2. rádu nasledujúcich funkcií:

a) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$

b) $u = \dfrac{\cos x^2}{y};$

c) $u = \dfrac{\operatorname{tg} x^2}{y};$

d) $u = x^y;$

e) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy};$

f) $u = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$

g) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$

h) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z;$

i) $u = x^{y/z}.$

63. Overte rovnosť

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

ak

a) $u = x^2 - xy - 3y^2;$

b) $u = x^{y^2};$

c) $u = \arccos \sqrt{\dfrac{x}{y}}.$

Nájdite parciálne derivácie uvedeného rádu:

64. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, ak $u = x\ln(xy)$.

65. $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, ak $u = \dfrac{x + y}{x - y}$.

66. $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, ak $u = (x - x_0)^p (y - y_0)^q$.

67. $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, ak $u = xyze^{x+y+z}$.

68. $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)$, ak $f(x,y) = e^x \sin y$.

69. Nech $Au = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Nájdite Au a $A^2u = A(Au)$, ak

a) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; b) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

70. Nech

$$\triangle_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$\triangle_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Nájdite $\triangle_1 u$ a $\triangle_2 u$, ak:

a) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; b) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

71. Nech $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, ak $x^2+y^2 \neq 0$ a $f(0,0) = 0$. Ukážte, že funkcia $f(x,y)$ je spojitá v bode $(0,0)$ a $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

72. Nájdite diferenciály 1. a 2. rádu funkcií:

a) $u = x^m y^n$; b) $u = \sqrt{x^2+y^2}$;

c) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; d) $u = xy + yz + zx$;

e) $u = \dfrac{z}{x^2+y^2}$.

73. Nájdite $df(1,1,1)$ a $d^2f(1,1,1)$, ak $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/z}$.

74. Ukážte, že pre funkciu $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ platí: $d^2u \geq 0$.

75. Ukážte, že funkcia $u = \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ (a, b sú konštanty) vyhovuje Laplaceovej rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

76. Nech $u = f(r)$ je dvakrát diferencovateľná funkcia a $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Nájdite funkciu $F(r)$, pre ktorú platí:

$$\triangle u = F(r),$$

kde $\triangle u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ je Laplaceov operátor.

77. Zjednodušte výraz

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y},$$

ak $z = \sin y + f(\sin x - \sin y)$, kde f je diferencovateľná funkcia $\left(\sec u = \dfrac{1}{\cos u}\right)$.

78. Ukážte, že funkcia

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right),$$

kde f je diferencovateľná funkcia, spĺňa rovnicu

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

79. Ukážte, že funkcia

$$z = yf(x^2 - y^2),$$

kde f je ľubovoľná diferencovateľná funkcia, spĺňa rovnicu

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

80. Predpokladajúc, že funkcie φ, ψ atď. sú diferencovateľné toľkokrát, koľko potrebujeme, overte nasledujúce rovnosti:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ak $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$;

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, ak $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$;

c) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$, ak $u = x^n\varphi\left(\dfrac{y}{z}\right) + x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

d) $\dfrac{\partial u}{\partial x}.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ak $u = \varphi[x + \psi(y)]$.

81. Nájdite diferenciály 1. a 2. rádu nasledujúcich zložených funkcií u, ak f je dvakrát diferencovateľná funkcia:

a) $u = f(\xi, \eta)$, kde $\xi = xy,\ \eta = \dfrac{x}{y}$;

b) $u = f(x, y, z)$, kde $x = t, y = t^2, z = t^3$;

c) $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, kde $\xi = x^2 + y^2,\ \eta = x^2 - y^2,\ \zeta = 2xy$;

d) $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$;

e) $u = f(2x, 3y, 4z)$;

f) $u = f(xy, x - y, x + y)$.

82. Nájdite $d^n u$, ak f je n - krát diferencovateľná:

a) $u = f(ax + by + cz)$; b) $u = f(ax, by, cz)$;

c) $u = f(t, v, w)$, kde $\xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z$, $\eta = a_2 x + b_2 y + c_2 z$, $\zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z$.

83. Nech $u = f(x, y, z)$ je homogénna funkcia stupňa n. Overte Eulerovu vetu pre tieto homogénne funkcie:

a) $u = (x - 2y + 3z)^2$; b) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; c) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{y/z}$.

84. Dokážte, že ak diferencovateľná funkcia $u = f(x, y, z)$ spĺňa rovnicu

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

potom u je homogénna funkcia stupňa n.

85. Dokážte, že ak $f(x, y, z)$ je diferencovateľná homogénna funkcia stupňa n, tak jej derivácie $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$ a $f'_z(x, y, z)$ sú homogénne funkcie stupňa $n - 1$.

86. Nájdite deriváciu funkcie

$$z = x^2 - y^2$$

v bode $M = (1, 1)$ v smere $\vec{l}$, ktorý zviera uhol $\alpha = 60^\circ$ s kladným smerom osi x - ovej.

87. Nájdite deriváciu funkcie

$$z = x^2 - xy + y^2$$

v bode $M = (1, 1)$ v smere $\vec{l}$, ktorý zviera uhol α s kladným smerom osi x - ovej. V akom smere má táto derivácia: a) najväčšiu hodnotu; b) najmenšiu hodnotu; c) rovnú 0.

88. Nájdite deriváciu funkcie

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

v bode $M = (x_0, y_0)$ v smere kolmom na vrstevnicu prechádzajúcu týmto bodom.

89. Nájdite deriváciu funkcie

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

v bode $M = \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ v smere vnútornej normály v tomto bode ku krivke

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

90. Nájdite deriváciu funkcie

$$u = xyz$$

v bode $M = (1, 1, 1)$ v smere $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Čomu sa rovná veľkosť gradienta funkcie v danom bode?

91. Vypočítajte veľkosť a smer gradienta funkcie

$$u = \frac{1}{r},$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, v bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

92. Určte uhol medzi gradientami funkcie

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

v bodoch $A = (\varepsilon, 0, 0)$ a $B = (0, \varepsilon, 0)$.

93. O koľko sa líši v bode $M = (1, 2, 2)$ veľkosť gradienta funkcie

$$u = x + y + z$$

od veľkosti gradienta funkcie

$$v = x + y + z + 0{,}001 \sin\left(10^6 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)?$$

94. Ukážte, že v bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ uhol medzi gradientami funkcií

$$\begin{aligned} u &= ax^2 + by^2 + cz^2, \\ v &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz \end{aligned}$$

(a, b, c, m, n, p sú konštanty a $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) konverguje k 0, ak bod M_0 sa vzdiaľuje do nekonečna.

95. Nech funkcia $u = f(x, y, z)$ je dvakrát diferencovateľná. Nájdite $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \vec{l}^2} = \dfrac{\partial}{\partial \vec{l}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right)$, ak $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ sú smerové kosínusy smeru $\vec{l}$ derivovania.

96. Nech funkcia $u = u(x, y)$ spĺňa rovnicu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ a okrem toho, nasledujúce podmienky: $u(x, 2x) = x$, $u'_x(x, 2x) = x^2$. Nájdite $u''_{xx}(x, 2x)$, $u''_{xy}(x, 2x)$, $u''_{yy}(x, 2x)$.

97. Riešte rovnicu: $\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0$ s neznámou funkciou $z = z(x, y)$.

Poznámka. Pod riešením danej rovnice budeme rozumieť funkciu $z(x, y)$ z triedy

$C^{(n)}(G;R)$ (t.j. $z(x,y)$ je spojitá spolu so svojimi parciálnymi deriváciami až do rádu n včítane v oblasti $G \subset R^2$), ktorá vyhovuje danej rovnici (a prípadne aj daným podmienkam).

98. Nájdite riešenie $z = z(x,y)$ rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, ktoré spĺňa podmienku $z(x, x^2) = 1$.

99. Nájdite riešenie $z = z(x,y)$ rovnice $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, ktoré vyhovuje podmienkam:
$z(x,0) = 1,\ z'_y(x,0) = x$.

100. Nájdite riešenie $z = z(x,y)$ rovnice $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, vyhovujúce podmienkam:
$z(x,0) = x,\ z(0,y) = y^2$.

3. Funkcie určené implicitne

Veta 3.1. *Ak je funkcia $F : U \to R$ definovaná v okolí U bodu $(x_0, y_0) \in R^2$ a je taká, že*

1. $F \in C^{(k)}(U; R)$, *kde* $k \geq 1$,
2. $F(x_0, y_0) = 0$,
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

potom existuje dvojrozmerný interval $I = I_x \times I_y$, (kde $I_x = \{x \in R :| x - x_0 |< \delta\}$, $I_y = \{y \in R : | y - y_0 |< \eta\}$), ktorý patrí do okolia U bodu x_0, y_0, a jediná funkcia $f \in C^{(k)}(I_x; I_y)$ taká, že pre každý bod $(x, y) \in I$

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = f(x)$$

a pre deriváciu $f'(x)$ funkcie $f(x)$ platí:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\Bigg]_{y=f(x)}.$$

V tomto prípade hovoríme, že funkcia $f(x)$ je implicitne určená rovnicou $F(x, y) = 0$ a podmienkou $y = f(x_0)$.

Poznámka 3.1. Ak $\{(x, y) \in R^2 : F(x, y) = 0\}$ je grafom funkcie $f(x)$, potom hovoríme, že $f(x)$ je určená implicitne rovnicou $F(x, y) = 0$.

Veta 3.2. *Ak je funkcia $F : U \to R$ definovaná v okolí U bodu $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) \in R^{n+1}$ a je taká, že*

1. $F \in C^{(k)}(U; R)$, $k \geq 1$,
2. $F(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) = 0$,
3. $F'_y(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0) \neq 0$,

potom existuje $(n+1)$ - rozmerný interval $I = I_{x_1} \times \ldots \times I_{x_n} \times I_y$, (kde $I_{x_i} = \{x_i \in R : |x_i - x_i^0| < \delta_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $I_y = \{y \in R : |y - y^0| < \eta\}$), ktorý patrí do okolia U bodu $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$ a jediná funkcia $f \in C^{(k)}(I_{x_1} \times \ldots \times I_{x_n}; I_y)$ taká, že pre každý bod $(x_1, \ldots, x_n, y)$ z intervalu I

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \Longleftrightarrow y = f(x_1, \ldots, x_n),$$

pričom parciálne derivácie funkcie $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ v bodoch x n - rozmerného intervalu $I_{x_1} \times \ldots \times I_{x_n}$ možno vypočítať podľa vzorca

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, y)}{F'_y(x_1, \ldots, x_n, y)}\Bigg]_{y=f(x_1,\ldots,x_n)}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ak pre funkciu $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ platia podmienky vety 3.2., potom hovoríme, že funkcia $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ je určená implicitne rovnicou $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ a podmienkou $y^0 = f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ alebo bodom $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$.

Funkcie určené imlicitne systémom rovníc

Veta 3.3. *Nech funkcie* $F_i : U \to R,\ i = 1, \ldots, m$ *sú definované v okolí* U *bodu* $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0) \in R^{n+m}$ *a také, že*

1. $F_i \in C^{(k)}(U; R),\ k \geq 1,\ i = 1, \ldots, m,$
2. $F_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0) = 0,\ i = 1, \ldots, m,$
3. *funkcionálny determinant, tzv. jakobián*

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

v bode $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$.

Potom existuje $(n+m)$ *- rozmerný interval* $I = I_{x_1} \times \ldots \times I_{x_n} \times I_{y_1} \times \ldots \times I_{y_m}$, *(kde* $I_{x_k} = \{x_k \in R :\mid x_k - x_k^0 \mid < \delta_k\},\ k = 1, 2, \ldots, n,\ I_{y_i} = \{y_i \in R :\mid y_i - y_i^0 \mid < \eta_i\},$ $i = 1, 2, \ldots, m)$ *a jediný systém funkcií* $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, 2, \ldots, m$ *taký, že pre každý bod* $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in I$

$$F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \Longleftrightarrow y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n),\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

pričom parciálne derivácie funkcií $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, 2, \ldots, m,$ *podĺa premennej* $x_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$ *v bodoch* n *- rozmerného intervalu* $I_{x_1} \times \ldots \times I_{x_n}$ *možno nájsť zo systému lineárnych algebraických rovníc*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} . \frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

kde $F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),\ i = 1, 2, \ldots, m$ *a* $y_j = f_j(x_1, \ldots, x_n),\ j = 1, 2, \ldots, m.$

101. Ukážte, že dané rovnice určujú jedinú funkciu $y(x)$ v okolí bodu (x_0, y_0):

a) $x^2 + yx + y^2 = 3,\ x_0 = y_0 = 1;$ b) $xy + \ln(xy) = 1,\ x_0 = 2,\ y_0 = \frac{1}{2};$

c) $e^{x+y} + y - x = 0,\ x_0 = \frac{1}{2},\ y_0 = -\frac{1}{2}.$

102. Ukážte, že dané rovnice určujú jedinú funkciu $z(x, y)$ v okolí bodu (x_0, y_0, z_0):

a) $x + y + z = \sin xyz,\ x_0 = y_0 = z_0 = 0;$

b) $x^2y^3 + y^3z^2 + z^2x^3 = 8,\ x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ z_0 = 2;$

c) $x^y + x^z + z^x = 3,\ x_0 = y_0 = z_0 = 1.$

103. Ukážte, že v bode $(1, 1, 1, 1, 1)$ vzťahy

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 5 = 0 \\ x_1 - x_2 + y_1^3 - y_2^3 + y_3^3 - 1 = 0 \\ x_1^3 + 2x_2^3 + y_2 y_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

nevyhovujú predpokladom vety o existencii zobrazenia $\varphi : (y_3, y_2) \to (x_1, x_2, y_1)$, avšak vyhovujú predpokladom existencie zobrazenia φ: $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2, y_3)$.

104. Ukážte, že dané vzťahy určujú jediné zobrazenie $\varphi : X \to Y$ v okolí bodu M_0, ak

a) $\begin{cases} x_1 y_1 + x_2 y_2 - y_3 y_2 - 1 = 0 \\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - y_1 y_2 y_3 - 1 = 0 \\ (x_1^2 + x_2^2)(y_3^2 - y_1^2) + y_1 y_2 = 0, \end{cases}$

$X = \{(x_1, x_2)\},\ Y = \{(y_1, y_2, y_3)\},\ M_0 \equiv (1, 2, 1, 0, 1)$

b) $\begin{cases} \sin(\pi x_1 y_1) + \sin(\pi x_2 y_2) + \sin(\pi x_3 y_3) = 1 \\ \cos \frac{\pi}{2}(x_1 - y_2) + \cos \frac{\pi}{2}(x_2 - y_1) + \cos \frac{\pi}{2}(x_3 - y_1) - 2 = 0, \end{cases}$

$X = \{(x_1, x_2, x_3)\},\ Y = \{(y_1, y_2)\},\ M_0 \equiv (0, 1, 0, 1, 0)$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\ \dfrac{x_1 y_1}{x_2 y_2} - x_1 x_2 y_1 y_2 = 0 \\ x_2^2 y_2^2 - x_1^2 y_1^2 + \dfrac{1}{x_1 y_1} - \dfrac{1}{x_2 y_2} = 0, \end{cases}$

$X = \{(x_1, x_2)\},\ Y = \{(y_1 y_2)\},\ M_0 \equiv (1, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$.

105. Nech je daná rovnica

$$x^2 = y^2 \tag{1}$$

a

$$y = y(x) \ -\infty < x < +\infty \tag{2}$$

je funkcia, spĺňajúca rovnicu (1).

1. Koľko funkcií (2) spĺňa rovnicu (1)?
2. Koľko spojitých funkcií (2) spĺňa rovnicu (1)?
3. Koľko diferencovateľných funkcií (2) spĺňa rovnicu (1)?
4. Koľko spojitých funkcií (2) spĺňa rovnicu (1), ak: a) $y(1) = 1$; b) $y(0) = 0$?
5. Koľko spojitých funkcií $y = y(x)$ $(1 - \delta < x < 1 + \delta)$ spĺňa rovnicu (1), ak $y(1) = 1$ a δ je dostatočne malé?

106. Predpokladajúc, že v nejakom jeho okolí bodu $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ je jednoznačne implicitne určená spojitá dvakrát diferencovateľná funkcia $z(x, y)$, nájdite hodnoty uvedených derivácií v tomto bode:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, ak $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

b) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ak $\operatorname{arctg} \frac{z}{x} = z + x + y$;

c) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, ak $x + ty + z = \ln xyz,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$;

d) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, ak $x + y + z = \cos(xyz)$.

107. Dokážte, že pre funkciu $y = f(x)$ určenú implicitne rovnicou

$$1 + xy = k(x - y),$$

kde k je konštanta, platí rovnosť

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{1 + y^2}.$$

108. Dokážte, že pre funkciu $y = f(x)$ určenú implicitne rovnicou

$$x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

pre $xy > 0$ platí rovnosť

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} = 0.$$

109. Nech

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \tag{1}$$

a

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3.$$

Nájdite:

a) $f'_x(1, 1, 1)$, ak $z = z(x, y)$ je funkcia určená implicitne rovnicou (1);

b) $f'_x(1, 1, 1)$, ak $y = y(x, z)$ je funkcia určená implicitne rovnicou (1).

Vysvetlite, prečo sú tieto derivácie rôzne.

110. Nech $z = z(x, y)$ je tá diferencovateľná funkcia, určená rovnicou $z^3 - xz + y = 0$, ktorá pre $x = 3, y = -2$ nadobúda hodnotu $z = 2$. Nájdite $dz(3, -2)$ a $d^2 z(3, -2)$.

111. Nájdite $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, ak $xu - yv = 0,\ yu + xv = 1$.

112. V akej oblasti roviny O_{xy} systém rovníc

$$x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3,$$

kde parametre u a v nadobúdajú všetky možné reálne hodnoty, je určená funkcia $z(x, y)$? Nájdite derivácie $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

113. Nájdite $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ak funkcia $z = z(x, y)$ je určená systémom rovníc:

$$x = \cos\varphi\cos\psi, y = \cos\varphi\sin\psi, z = \sin\varphi.$$

114. Nájdite $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ak funkcia $z = z(x, y)$ je určená systémom rovníc:

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = v.$$

115. Nájdite $\dfrac{dz}{dx}$ a $\dfrac{d^2 z}{dx^2}$, ak

$$z = x^2 + y^2,$$

kde $y = y(x)$ je funkcia určená implicitne rovnicou

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

116. Nech $u = f(z)$, kde z je implicitne určená funkcia premenných x a y rovnicou

$$z = x + x\varphi(z).$$

Dokážte Lagrangeov vzorec. $\dfrac{\partial^n u}{\partial y^n} = \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ \varphi(z)]^n \dfrac{\partial u}{\partial x} \right\}$, predpokladajúc, že všetky uvažované funkcie sú diferencovateľné toľkokrát, koľkokrát potrebujeme.

117. Ukážte, že funkcia $z = z(x, y)$, určená rovnicou

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0, \tag{1}$$

kde $\Phi(u, v)$ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia premenných u a v (a, b sú konštanty), vyhovuje rovnici

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

118. Ukážte, že funkcia $z = z(x, y)$, určená systémom rovníc

$$\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z &= f(\alpha), \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha &= f'(\alpha), \end{aligned}$$

kde $\alpha = \alpha(x, y)$ je premenný parameter a $f(\alpha)$ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia, spĺňa rovnicu

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

119. Ukážte, že funkcia $z = z(x, y)$, určená systémom rovníc

$$[z - f(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2)$$
$$[z - f(\alpha)]\, f'(\alpha) = \alpha x^2,$$

kde $\alpha = \alpha(x, y)$ je premenný parameter a $f(\alpha)$ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia, vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

120. Ukážte, že funkcia $z = z(x, y)$, určená systémom rovníc

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha).$$
$$0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha),$$

kde $\alpha = \alpha(x, y)$ je premenný parameter a $\varphi(\alpha), \psi(\alpha)$ sú ľubovoľné dvakrát diferencovateľné funkcie, vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

4. Pravidlo reťazenia.

Často sa stretávame so skupinami premenných, ktoré zložitým spôsobom závisia od iných skupín premenných. Pravidlo reťazenia pre funkcie viacerých premenných je univerzálna metóda, ktorá nám umožňuje prechádzať od jednej skupiny premenných k druhej. Základom tejto metódy je derivovanie zložených a implicitne daných funkcií. Pritom predpokladáme, že funkcie, ktoré vyjadrujú vzťahy medzi dvomi skupinami premenných, vyhovujú podmienkam dostatočnej hladkosti (t.j. majú spojité parciálne resp. obyčajné derivácie všetkých potrebných rádov) a všetky transformácie sa robia v takých oblastiach zmeny týchto premenných, že existujú inverzné funkcie k daným.

4.1. Transformácia výrazov, ktoré obsahujú obyčajné derivácie

V diferenciálnom výraze

$$A = \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right)$$

treba prejsť k novým premenným $t, u(t)$, (kde t je nezávislá premenná a u je funkcia t), pričom

$$x = f(t, u), y = g(t, u). \tag{1}$$

Derivovaním rovníc (1) podľa t, berúc do úvahy, že y je funkcia x a x je funkcia t, dostaneme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial u}.\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{du}{dt}}.$$

Analogicky postupne sa vyjadrujú derivácie vyšších rádov $\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dots$. Výsledok je

$$A = \Phi\left(t, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \dots\right).$$

4.2. Transformácie výrazov, ktoré obsahujú parciálne derivácie

Ak v diferenciálnom výraze

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots\right)$$

položíme

$$x = f(u,v),\ y = g(u,v), \tag{2}$$

kde u a v sú nové nezáviské premenné, potom postupne parciálne derivácie $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dots$ hľadáme z nasledujúcich rovníc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial g}{\partial u},\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial g}{\partial v},
\end{aligned}$$

ktoré dostaneme derivovaním funkcie $z = z(x,y) = z\left(f(u,v), g(u,v)\right)$ ako zloženej funkcie nových premenných u a v atď.

4.3. Transformácia nezáviských premenných a funkcie vo výraze, ktorý obsahuje parciálne derivácie

V obecnejšom prípade, ak sú dané rovnice

$$x = f(u,v,w),\ y = g(u,v,w),\ z = h(u,v,w), \tag{3}$$

kde u, v sú nové nezáviské premenné a $w = w(u,v)$ je nová funkcia, pre parciálne derivácie $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dots$ dostaneme nasledujúce rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial u}\right) &= \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial u},\\
\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial v}\right) &= \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial v}
\end{aligned}$$

atď.

Tieto rovnice získame derivovaním tretej rovnice v (3) podľa u (resp. podľa v), pričom berieme do úvahy, že funkcia $z(x,y)$ je zložená funkcia nových premenných u a v, t.j. jedna jej vnútorná zložka je $x = f(u,v,w)$, druhá je $y = g(u,v,w)$, a že funkcie f, g a h sú tiež zložené funkcie u a v, lebo w je funkcia premenných u a v.

V niektorých prípadoch je užitočné používať totálny diferenciál.

Pomocou zavedenia nových premenných transformujte nasledujúce obyčajné diferenciálne rovnice:

121. $x^2y'' + xy' + y = 0$, ak $x = e^t$.

122. $y''' = \frac{6y}{x^3}$, ak $t = \ln \mid x \mid$.

123. $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$, ak $x = \cos t$.

124. $y'' + y'\operatorname{tgh} x + \dfrac{m^2}{\cosh^2 x} y = 0$, ak $x = \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}$.

Poznámka. Tu $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ je hyperbolický kosínus a $\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ je hyperbolický tangens.

125. $y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$, ak $y = ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\tau)\,d\tau}$.

126. $x^4 y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, ak $x = e^t$ a $y = ue^{2t}$, kde $u = u(t)$.

127. $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0$, ak $x = u + t, y = u - t$, kde $u = u(t)$.

128. Transformujte Stokesovu rovnicu $y'' = \dfrac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$, kladúc $u = \dfrac{y}{x-b}$, $t = \ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|$.

129. Dokážte, že Schwartzova derivácia $S[x(t)] = \dfrac{x'''(t)}{x'(t)} - \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$ nemení svoju hodnotu pri lineárnej lomenej transformácií $y = \dfrac{ax(t)+b}{cx(t)+d}$, $(ad - bc \neq 0)$.

Transformujte pomocou polárnych súradníc r a φ, pričom $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, nasledujúce rovnice (uvažujte, že r je funkcia φ):

130. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

131. $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$.

132. $(x^2 + y^2)^2 y'' = (x + yy')^3$.

133. Výraz $\dfrac{x + yy'}{xy' - y}$ vyjadrite v polárnych súradniciach.

Zavedením nových nezávislých premenných ξ a η rozriešte nasledujúce rovnice:

134. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, ak $\xi = x + y,\ \eta = x - y$.

135. $y\dfrac{\partial z}{\partial y} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, ak $\xi = x$ a $\eta = x^2 + y^2$.

136. $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ $(a \neq 0)$, ak $\xi = x$ a $\eta = y - bz$.

137. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, ak $\xi = x$ a $\eta = \dfrac{y}{x}$.

138. Transformujte výraz $w = x\dfrac{d^2 y}{dt^2} - y\dfrac{d^2 x}{dt^2}$ zavedením nových funkcii $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Berúc u a v za nové nezávislé premenné, transformujte nasledujúce rovnice:

139. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$, ak $u = \ln x,\ v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

140. $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, ak $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ a $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

141. $x\dfrac{\partial z}{\partial xl} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{2}$, ak $u = 2x - z^2,\ v = \dfrac{y}{z}$.

142. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, ak $u = x + 2y + 2,\ v = x - y - 1$.

143. $ax^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (a, b, c sú konštanty), ak $u = \ln x,\ v = \ln y$.

144. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, ak $u = \dfrac{x}{x^2+y^2},\ v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

145. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a^2 z = 0$, ak $x = e^u \cos v,\ y = e^u \sin v$.

146. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, ak $u = x + y,\ v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

147. $xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, ak $u = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ a $v = xy$.

148. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x\sin y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2 y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, ak $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{2}$ a $v = x$.

149. Transformujte rovnice:

a) $\triangle u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

b) $\triangle(\triangle u) = 0$, kladúc $u = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

150. V rovnici $z\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ zaveďte novú funkciu w, kladúc $w = z^2$.

151. Transformujte výraz $w = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, kladúc $x = uv,\ y = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$.

152. Transformujte rovnicu $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, kladúc x za funkciu a $u = y - z$, $v = y + z$.

153. Transformujte výraz $A = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, považujúc x za funkciu a $u = xz,\ v = yz$ za nezáviské premenné.

154. V rovnici $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$ položte $\xi=x,\ \eta=y-x,\ \zeta=z-x$.

Prejdite k novým premenným u,v,w, kde $w=w(u,v)$, v nasledujúcich rovniciach:

155. $u\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-z)z$, ak $u=x^2+y^2,\ v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\ w=\ln z-(x+y)$.

156. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$, ak $u=x,\ v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x},\ w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$.

157. $\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}.\dfrac{\partial z}{\partial y}$, ak $x=ue^w,\ y=ve^w,\ z=we^w$.

158. V rovnici $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=u+\dfrac{xy}{z}$ položte $\xi=\dfrac{x}{z},\ \eta=\dfrac{y}{z},\ \zeta=z,\ w=\dfrac{u}{z}$, kde $w=w(\xi,\eta,\zeta)$.

159. $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$, ak $u=\dfrac{x}{y},\ v=x,\ w=xz-y$.

160. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, ak $u=x+y,\ v=x-y,\ w=xy-z$.

161. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$, ak $u=\dfrac{x+y}{2},\ v=\dfrac{x-y}{2},\ w=ze^y$.

162. $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, ak $x=\sin u,\ y=\sin v,\ z=e^w$.

163. V rovnici $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ položte $x=e^\xi,\ y=e^\eta,\ z=e^\zeta,\ u=e^w$, kde $w=w(\xi,\eta,\zeta)$.

Transformujte do polárnych súradníc r a φ, kde $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, nasledujúce výrazy:

164. $w=x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

165. $w=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

166. $w=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

167. $w=x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

168. $w=y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$.

169. Vo výraze $I=\dfrac{\partial u}{\partial x}.\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}.\dfrac{\partial v}{\partial x}$ položte $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$.

170. Transformujte výrazy:

$$\triangle_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \quad \text{a} \quad \triangle_2\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

pomocou sférických súradníc, pokladajúc $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$.

171. Riešte rovnicu $\dfrac{\partial^2 u}{dt^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ zavedením nových nezávislých premenných $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

5. Taylorov vzorec. Niektoré geometrické aplikácie diferenciálneho počtu

5.1. Taylorov vzorec

Veta 5.1.1. *Nech je funkcia f definovaná v okolí U bodu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in R^n$ a patrí do triedy $C^{(k)}(U; R)$. Potom pre každý bod $x = (x_1, \ldots, x_n)$ platí Taylorov vzorec:*

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} \left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^i f(x^0) + R_k(x), \qquad (1)$$

kde zvyškový člen $R_k(x)$ Taylorovho vzorca v Lagrangeovom tvare je

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k .$$
$$.f\left(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), x_n + \theta(x_n - x_n^0)\right),$$

$0 < \theta < 1.$

5.2. Taylorov rad

Ak je funkcia $f(x)$ nekonečne diferencovateľná v bode $x^0 \in R^n$, tak mocninný rad

$$f(x^0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k f(x^0)$$

sa nazýva Taylorov rad funkcie $f(x)$ v bode x^0.

Veta 5.2.1. *Nech funkcia $f(x)$ je definovaná v oblasti $G \subset R^n$ a nech je nekonečne diferencovateľná v bode $x^0 \in G$. Potom v nejakom okolí bodu $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ funkciu f možno rozvinúť do Taylorovho radu*

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k f(x^0) \qquad (2)$$

práve vtedy, keď zvyšok $R_k(x)$ v Taylorovom vzorci (1) konverguje k 0 pre $k \to \infty$.

Špeciálne prípady vzorcov (1), (2) pre $x_1^0 = 0, \ \ldots, \ x_n^0 = 0$ majú názov Maclaurinov vzorec a Maclaurinov rad.

5.3. Klasifikácia singulárnych bodov rovinných kriviek

Singulárne body (x, y) krivky $F(x, y) = 0$ sú tie, v ktorých platí

$$F(x,y) = 0,\ F'_x(x,y) = 0,\ F'_y(x,y) = 0. \tag{3}$$

Nech bod (x_0, y_0) vyhovuje podmienkam (3) a nech funkcia $F(x, y)$ je dvakrát diferencovateľná. Zavedieme označenie: $A = F''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = F''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = F''_{yy}(x_0, y_0)$. Pre klasifikáciu singulárnych bodov uvažujeme rovnicu

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}f'(x_0) + F''_{yy}{f'}^2(x_0) = 0, \tag{4}$$

ktorú dostaneme dvojnásobným derivovaním rovnice $F(x, f(x)) = 0$ a využitím (3), kde $f(x)$ je spojitá funkcia.

1. Ak $AC - B^2 > 0$, bod (x_0, y_0) je izolovaný singulárny bod. V tomto prípade má rovnica (4) komplexné korene.
2. Ak $AC - B^2 < 0$, existujú dve krivky, ktoré sa pretínajú v bode (x_0, y_0). Je to uzlový singulárny bod.
3. Ak $AC - B^2 = 0$, obidve krivky majú v bode (x_0, y_0) spoločnú dotyčnicu. Môžu nastať tieto prípady:

a) bod vratu 1. druhu, keď obidve vetvy krivky sa nachádzajú na tej istej strane spoločnej normály a na rôznych stranách spoločnej dotyčnice;
b) bod vratu 2. druhu, keď obidve vetvy krivky sa nachádzajú na tej istej strane spoločnej normály a na tej istej strane spoločnej dotyčnice;
c) bod samodotyku, keď obidve vetvy krivky sa nachádzajú na rôznych stranách spoločnej dotyčnice a na rôznych stranách spoločnej normály;
d) izolovaný singulárny bod.

V prípade $A = B = C = 0$ môžu byť singulárne body zložitejšieho typu.

5.4. Dotyková rovina a normála

Nech je plocha určená rovnicou $F(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in D \subset R^3$, kde F je spojitá funkcia spolu so svojimi parciálnymi deriváciami F'_x, F'_y, F'_z v bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, pričom

$$[F'_x(x_0,y_0,z_0)]^2 + \left[F'_y(x_0,y_0,z_0)\right]^2 + [F'_z(x_0,y_0,z_0)]^2 > 0.$$

Potom v bode (x_0, y_0, z_0) rovnica dotykovej roviny je

$$(x - x_0)F'_x(M_0) + (y - y_0)F'_y(M_0) + (z - z_0)F'_z(M_0) = 0$$

a $x = x_0 + F'_x(M_0)t$, $y = y_0 + F'_y(M_0)t$, $z = z_0 + F'_z(M_0)t$, $t \in R$ sú parametrické rovnice normály v bode M_0 alebo

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

je jej rovnica v kanonickom tvare.

Špeciálne, ak plocha je grafom funkcie $z = f(x, y)$, kde f je diferencovateľná funkcia v bode (x_0, y_0) a $z_0 = f(x_0, y_0)$, tak

$$(x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) = z - z_0$$

je rovnica dotykovej roviny k tejto ploche v bode (x_0, y_0, z_0) a $x = x_0 + f'_x(x_0, y_0)t$, $y = y_0 + f'_y(x_0, y_0)t$, $z = z_0 - t$, $t \in R$, je rovnica normály daná v parametrickom tvare alebo

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

je jej rovnica v kanonickom tvare.

Ak plocha je daná rovnicami $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, kde funkcie x, y, z sú spojité diferencovateľné v niektorej oblasti $D \subset R^2$, v bode $(u_0, v_0) \in D$ funkcie x, y, z nadobúdajú zodpovedajúce hodnoty x_0, y_0, z_0, potom

$$(x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0$$

je rovnica dotykovej roviny a $x = x_0 + At$, $y = y_0 + Bt$, $z = z_0 + Ct$, $t \in R$, je rovnica normály daná v parametrickom tvare alebo

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

je jej rovnica v kanonickom tvare, kde

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

pričom sa parciálne derivácie počítajú v bode dotyku.

172. Napíšte Taylorov vzorec pre funkciu $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ v okolí bodu $M = (1, -2)$.

173. Napíšte Taylorov vzorec pre funkciu $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ v okolí bodu $M = (1, 1, 1)$.

174. Nájdite prírastok funkcie $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$ v bode $(x_1, y_1) = (1, -1)$ vzhľadom na bod $(x_2, y_2) = (1 + h, -1 + k)$.

175. Vypíšte členy až do 2. rádu včítane v Taylorovom vzorci pre funkciu $f(x, y) = x^y$ v okolí bodu $M(1, 1)$.

176. Napíšte Maclaurinov vzorec až do členov 4. rádu včítane pre funkciu $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

177. Odvoďte približné vzorce pre výrazy: a) $\dfrac{\cos x}{\cos y}$; b) $\operatorname{arctg} \dfrac{1+x+y}{1-x+y}$ použitím prvých dvoch členov Maclaurinovho vzorca.

Rozviňte do Maclaurinovho radu nasledujúce funkcie:

178. $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$.

179. $f(x,y)=\ln(1+x+y)$.

180. $f(x,y)=e^x\sin y$.

181. $f(x,y)=e^x\cos y$.

182. $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$.

183. Funkciu e^{x+y} rozviňte do mocninového radu, ktorého členy sú kladné celé mocniny binómov $x-1$ a $y-1$.

Preštudujte typy singulárnych bodov nasledujúcich kriviek:

184. $y^2=ax^2-x^3$.

185. a) $x^3+y^3-3xy=0$; b) $x^2+y^2=x^4+y^4$; c) $(x^2+y^2)^2=a^3(x^2-y^2),\ a\neq 0$.

186. Vyšetrite singulárne body kriviek: a) $y^2-1+e^{-x^2}=0$; b) $(y-x^3)^2-x^5=0$.

Napíšte rovnice dotykových rovín a normál k nasledujúcim plochám v danom bode $M_0=(x_0,y_0,z_0)$:

187. $z=xy,\ M_0=(5,1,5)$.

188. $x^2y^3-xy^3=z+\frac{3}{8},\ M_0=(2,\frac{1}{2},-\frac{3}{8})$.

189. $xy+xz+yz=x^3+y^3+z^3,\ M_0=(1,1,1)$.

190. $x^3+y^3+z^3=-xyz,\ M_0=(1,-1,-1)$.

191. $x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3,\ M_0=(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))$, $u_0=1,\ v_0=2$.

192. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v,\ M_0=(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))$, $u_0=1,\ v_0=\frac{\pi}{4}$.

193. $x=e^u+u\sin v,\ y=e^u-u\cos v,\ z=uv,\ M_0=(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))$, $u_0=1,\ v_0=\pi$.

194. K ploche $x^2+y^2+2z^2=1$ nájdite dotykovú rovinu, ktorá je rovnobežná s rovinou $x-y+2z=0$.

195. Nájdite geometrické miesto bodov na valci $(x+z)^2+(y-z)^2=18$, v ktorých je normála rovnobežná so súradnicovou rovinou xOy.

6. Extrémy funkcie n premenných

6.1. Lokálne extrémy

Definícia 6.1.1. *Nech funkcia* $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *je definovaná v nejakom okolí bodu* $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_n^{(0)})$. *Budeme hovoriť, že funkcia* f *má v bode* $a^{(0)}$ *lokálne maximum (minimum), ak existuje také okolie* $O(a^{(0)})$ *bodu* $a^{(0)}$, *v ktorom pre každé* x *platí* $f(x) \leq f(a^{(0)})$ $(f(x) \geq f(a^{(0)}))$. *Ak funkcia* f *má v bode* $a^{(0)}$ *lokálne maximum, alebo lokálne minimum, hovoríme, že má v bode* $a^{(0)}$ *lokálny extrém. Ak v definícii 6.1.1. platia ostré nerovnosti t.j. pre každé* $x \neq a^{(0)}$ *je* $f(x) < f(a^{(0)})$ *resp.* $f(x) > f(a^{(0)})$, *hovoríme o ostrých lokálnych extrémoch.*

Veta 6.1.1. *(Nutná podmienka existencie lokálneho extrému). Ak funkcia* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *má v bode* $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_n^{(0)})$ *lokálny extrém a je v tomto bode diferencovateľná, potom* $df(a^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a^{(0)})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a^{(0)})dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a^{(0)})dx_n = 0.$

Definícia 6.1.2. *Body, v ktorých sa prvý diferenciál rovná nule nazývame stacionárnymi bodmi tejto funkcie.*

Poznámka 6.1.1. Stacionárne body funkcie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nájdeme tak, že riešime systém rovníc s n neznámymi $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Poznámky o kvadratických formách

Funkcia tvaru $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, kde a_{ij} sú čísla, pričom $a_{ij} = a_{ji}$ sa nazýva kvadratická forma premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$. Čísla a_{ij} sú koeficienty kvadratickej formy.

Symetrická matica zostavená z týchto koeficientov

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sa nazýva matica kvadratickej formy.

$$\text{Determinanty } \delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ i = 1, 1, \dots, n$$

sú hlavné minory matice A.

Kvadratická forma $Q(x)$ sa nazýva kladne definitná (záporne definitná), ak pre ľubovoľné $x \neq 0$ je $Q(x) > 0$ ($Q(x) < 0$). Je zrejmé, že $Q(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Kvadratická forma $Q(x)$ sa nazýva semidefinitná, ak $Q(x) \geq 0$ ($Q(x) \leq 0$).

Kvadratická forma je indefinitná, ak existujú $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ také, že $Q(x^{(1)}) > 0, Q(x^{(2)}) < 0$.

Sylvestrova veta.

1. *Kvadratická forma $Q(x)$ je kladne definitná práve vtedy, ak $\delta_i > 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.*
2. *Kvadratická forma $Q(x)$ je záporne definitná práve vtedy, ak $\delta_1 < 0,\ \delta_2 > 0$, $\delta_3 < 0,\ \ldots,\ (-1)^n \delta_n > 0$.*

Druhý diferenciál funkcie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v bode $a^{(0)}$ možno zapísať v tvare

$$d^2 f(a^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a^{(0)}) dx_i dx_j.$$

Tento výraz je kvadratická forma premenných $dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n$ a parciálne derivácie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a^{(0)})$ sú koeficienty tejto kvadratickej formy.

Veta 6.1.2. *(Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému.) Nech bod $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) \in M$ je stacionárny bod funkcie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a funkcie f je v bode $a^{(0)}$ dvakrát diferencovateľná. Potom platí:*

Ak $d^2 f(x, a^{(0)})$ je kladne definitná (záporne definitná) kvadratická forma pre každé $x \in M$, potom má funkcia f v bode $a^{(0)}$ ostré lokálne minimum (ostré lokálne maximum).

Ak $d^2 f(x, a^{(0)})$ je indefinitná kvadratická forma, potom funkcia f nemá v bode $a^{(0)}$ extrém.

Nech bod (x_0, y_0) je stacionárny bod funkcie $z = f(x, y)$ nech f je diferencovateľná v nejakom okolí bodu (x_0, y_0) a dvakrát diferencovateľná v bode (x_0, y_0). Označme $a_{11} = \frac{\partial^2 f}{l\partial x^2}(x_0, y_0),\ a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),\ a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.

Z vety 6.1.2. a zo Sylvestrovej vety pre kvadratické formy vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Veta 6.1.3.

1. *Ak $D = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$, potom v bode (x_0, y_0) má funkcia $z = f(x, y)$ lokálny extrém a to: a) lokálne minimum, ak $a_{11} > 0$; b) lokálne maximum, ak $a_{11} < 0$.*
2. *Ak $D < 0$, potom v bode (x_0, y_0) nemá funkcia $z = f(x, y)$ lokálny extrém.*

196. Napíšte maticu kvadratickej formy

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1 x_2 + 6x_1 x_3 - x_2^2 - 2x_1 x_3 + 3x_2^2$$

a vypočítajte jej hlavné minory.

197. Zistite, či kvadratická forma

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_x^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2$$

je kladne definitná, alebo záporne definitná.

V nasledujúcich príkladoch nájdite lokálne extrémy daných funkcií:

198. $z = x^2 - 2xy + 4y^3$.

199. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

200. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

201. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

202. $z = x^2y^3(6 - x - y)$.

203. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y},\ x > 0,\ y > 0$.

204. $z = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}},\ a > 0,\ b > 0$.

205. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

206. $z = x + y + 4\sin x \sin y$.

207. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

208. $z = xy\ln(x^2 + y^2)$.

209. $x^2y + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1$.

210. $z = xy^2(4 - x - y)$.

211. $u = 6x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 2yz + 2xz + 2x - 2y + 4z + 4$.

212. $u = x^2 + y^2 + z^3 + xy - x + y - 3z + 4$.

213. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

214. $u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$.

215. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

216. $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.

217. $u = (x + y + 2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

218. $u = 2\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$.

219. $u = xyz(1 - x - y - z)$.

Nájdite lokálne extrémy funkcie $y = f(x)$ danej implicitne:

220. $y^2 - ay - \sin x = 0,\ 0 \le x \le 2\pi$.

221. $x^2 + xy + y^2 = 27$.

222.$(y - x)^3 + x + 6 = 0$.

Nájdite lokálne extrémy funkcie $z = f(x, y)$ danej implicitne:

223. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0$.

224. $x^4 + y^4 + z^4 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$.

225. $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$.

6.2. Viazané lokálne extrémy

Nech f je funkcia definovaná na množine M rovnicou

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{1}$$

Označme N množinu všetkých bodov $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ktorých súradnice spĺňajú rovnice

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,\ i = 1, 2, \dots, m, \tag{2}$$

kde $g_1, g_2, \dots, g_m$ sú funkcie n premenných.

Definícia 6.2.1. *Lokálne extrémy funkcie f na množine N sa nazývajú viazané lokálne extrémy funkcie f. Rovnice (2), ktoré určujú množinu N nazývame väzbami.*

Predpokladajme, že funkcia f a funkcie $g_1, g_2, \dots, g_m$ majú spojité parciálne derivácie druhého rádu v uvažovaných bodoch. Môže sa stať, že z rovníc (2), ktoré určujú množinu N sa dajú niektoré premenné vyjadriť v závislosti od ostatných. Nech napríklad k premenných (nezáleží na poradí) sa dá vyjadriť z rovníc (2) pomocou ostatných

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \\ x_2 &= \varphi_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k &= \varphi_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{3}$$

Ak do vzťahu (1) dosadíme za $x_1, x_2, \dots, x_k$ vzťahy (3) dostaneme rovnicu

$$\begin{aligned} z = f\big[&\varphi_1\left(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\right), \varphi_2\left(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\right), \dots \\ &\dots, \varphi_k\left(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\right), x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\big] \\ = F&\left(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\right), \end{aligned}$$

ktorá je vyjadrením parciálnej funkcie z funkcie f na množinu N. Táto funkcia F je funkcia $n-k$ premenných. Jej lokálne extrémy sú zároveň viazané lokálne extrémy funkcie f pri väzbách (2). Lokálne extrémy nájdeme metódou uvedenou v odseku 6.1.

Ak z rovníc (2) sa nedajú jednoznačne vyjadriť niektoré premenné pomocou ostatných, použijeme Lagrangeovu metódu na hĺadanie viazaných lokálnych extrémov funkcie (1) pri väzbách (2). Lagrangeova metóda spočíva v tom, že nájdeme lokálne extrémy funkcie

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = &f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ &\lambda_2 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sú čísla určené tak, aby riešením systému rovníc

$$\begin{array}{l} \Phi'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \Phi'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array} \tag{4}$$

bola taká n - tica čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktorá je aj riešením systému (2). Bod $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})$ je potom stacionárnym bodom funkcie Φ (pri vhodných číslach λ_i). Na určenie čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ a súradníc $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stacionárneho bodu máme teda systém $n + m$ rovníc, ktorý sa skladá z rovníc systému (4) a systému (2).

Veta 6.2.1. *Ak Lagrangeova funkcia Φ má lokálny extrém (maximum, minimum) v bode $a^{(0)}$ a $a^{(0)} \in N$, potom funkcia f má v $a^{(0)}$ viazaný lokálny extrém (maximum,minimum) pri väzbách (2).*

Nájdite viazané lokálne extrémy funkcií:

226. $z(x, y) = x^2 + y^2, \ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1.$

227. $z(x, y) = x + y, \ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}.$

228. $z(x, y) = xy, \ x^2 + y^2 = 1.$

229. $z(x, y) = x + y, \ \mathrm{tg}\ x - 3\mathrm{tg}\ y = 0, \ |x| < \dfrac{\pi}{2}, \ |y| < \dfrac{\pi}{2}.$

230. $u(x, y, z) = x - 2y + z, \ x^2 + y^2 - z^2 = 1.$

231. $u(x, y, z) = x^3 + y^2 - z^3 + 5, \ x + y - z = 0.$

232. $u(x, y, z) = x - 2y + 2z, \ x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

233. $u(x, y, z) = xy^2z^3, \ x + 2y + 3z = 6, \ (x > 0, \ y > 0, \ z > 0).$

234. $u(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}, \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ (a > b > c > 0).$

235. $u(x, y, z) = xyz, \ x^2 + y^2 + z^2 = 3.$

236. $u(x, y, z) = x + y + z^2, \ z - x = 1, \ y - xz = 1.$

237. $u(x, y, z) = xyz, \ x + y + z = 5, \ xy + yz + zx = 8.$

238. Ako treba zvoliť polomer podstavy r a výšku h kruhového valca, ktorého objem je $V = 54\pi$, aby mal najmenší povrch?

239. Nájdite rozmery pravouhlého rovnobežnostena najväčšieho objemu, ktorý je vpísaný do elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

240. Nájdite najmenšiu vzdialenosť bodu (x_0, y_0, z_0) od roviny $\tau : ax + by + cz + d = 0$.

241. Nájdite extrém kvadratickej formy $u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ (kde $a_{ij} = a_{ji}$ sú reálne čísla) pri väzbe $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

242. Dokážte nerovnosť:

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n, \text{ ak } n \geq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

243. Nájdite viazané extrémy funkcie $z = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$, ak rovnica väzby je $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n.a,\ a > 0,\ m > 1$.

244. Dokážte Hölderovu nerovnosť

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q \right)^{1/q},\ a_i \geq 0,\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

6.3. Globálne extrémy

Z vlastnosti spojitej funkcie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na uzavretej ohraničenej oblasti $M \subset R^n$ vyplýva, že funkcia má maximum a minimum na tejto oblasti. Pri hľadaní extrémov funkcie f na tejto oblasti postupujeme takto:

1. nájdeme lokálne extrémy funkcie f vo vnútri oblasti M
2. nájdeme viazané lokálne extrémy na hranici oblasti M
3. najväčšia hodnota extrémov vypočítaných v bodoch 1. a 2. je maximum f na M, najmenšia hodnota extrémov vypočítaných v bodoch 1. a 2. je minimum f na M.

Extrémy funkcie na uzavretej ohraničenej oblasti nazývame globálne (absolútne) extrémy funkcie f na oblasti M.

Nájdite globálne extrémy funkcii na uzavretej ohraničenej oblasti M:

245. $z(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y,\ M = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$.

246. $z(x, y) = x^2 + 2y^2 + 4xy - 6x - 1,\ M = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq -x + 3\}$.

247. $z(x, y) = x^2 - xy + y^2,\ M = \{(x, y) \in R^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

248. $z(x, y) = x^2 - y^2,\ M = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

249. $z(x, y) = e^{-x^2 - y^2}(3x^2 + 2y^2),\ M = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

250. $z(x, y) = \frac{xy}{2} - \frac{x^2 y}{6} - \frac{xy^2}{8},\ M = \{(x, y) \in R^2 : \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

251. $u(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,\ M = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$.

252. $u(x, y, z) = x + y + z,\ M = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

253. $u(x, y, z) = xy + yz + zx,\ M\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$.

Výsledky, návody a poznámky

1 a) $\sqrt{2}, \sqrt{5}$; b) Nie je definovaná, $\frac{\pi}{2}$.

2 a) $M = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \neq r^2\}$;
b) $M = \{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$;
c) $M = \{(x,y) \in R^2 : y^2 > 4x - 8\}$;
d) $M = \{(x,y) \in R^2 : (x \geq 0 \wedge 2k\pi \leq y \leq (2k+1)\pi,\ k \in Z) \vee (x \leq 0 \wedge (2k+1)\pi \leq y \leq (2k+2)\pi,\ k \in Z)\}$;
e) $M = \{(x,y) \in R^2 : (\mid x \mid \leq 1 \wedge \mid y \mid \leq 1) \vee (\mid x \mid \geq 1 \wedge \mid y \mid \geq 1)\}$;
f) $M = \{(x,y) \in R^2 : x > 0 \wedge 2k\pi \leq y \leq (2k+1)\pi,\ k \in Z\}$;
g) $M = \{(x,y) \in R^2 : (x > 0 \wedge 1 - x \leq y \leq 1 + x) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge y \geq z)\}$;
h) $M = \{(x,y) \in R^2 : (x > 0 \wedge y > 0 \wedge y \leq x) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge y \geq x)\}$;
i) $M = \{(x,y) \in R^2 : (1 < x^2 + y^2 < 9) \wedge [(x > 0 \wedge -x \leq y \leq x) \vee (x < 0 \wedge x \leq y \leq -x)]\}$;
j) $M = \{(x,y,z) \in R^3 : \mid y \mid + \mid z \mid \neq 0\}$;
k) $M = \{(x,y,z) \in R^3 : (x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0)\}$;
l) $M = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

3 a) Paraboly o rovniciach $y = k,\ z = x^2 - k^2$; $x = k,\ z = k^2 - y^2$, kde $k \in R$.
b) Paraboly $x = k,\ z = k.y^2$; priamky $y = k,\ z = k.x$, kde $k \in R$.

4 a) Pre $0 \leq k < 1$ je vrstevnicou kružnica o rovnici $x^2 + y^2 = 1 - k^2,\ z = k$; pre $k = 1$ je vrstevnicou bod $[0,0,1]$; pre $k > 1$ graf funkcie a rovina $z = k$ nemajú spoločné body.
b) Pre $k > 0$ je vrstevnica elipsa o rovnici $3x^2 + 2y^2 = k,\ z = k$; pre $k = 0$ je vrstevnicou bod $[0,0,0]$; pre $k < 0$ graf funkcie a rovina $z = k$ nemajú spoločné body
c) Pre $k \neq 0$ je vstevnicou hyperbola o rovnici $xy = k,\ z = k$; pre $k = 0$ je vrstevnicou os x a os y.

5 a)Rovina, b) rovina, c) eliptický paraboloid, d) hyperbolický paraboloid, e) rotačný paraboloid, f) časť gulovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$, g) časť kuželovej plochy $z = x^2 + y^2,\ z \geq 0$, h) parabolická valcová plocha.

6 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in M : 0 < \|\ x - a\ \|_{R^n} < \delta,\ \|\ f(x) - b\ \|_{R^m} < \varepsilon$.

7 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Longleftrightarrow \forall K > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{O}_\delta(a) \cap M,\ x \neq a : \|f(x)\|_{R^m} > K$.

8 5.

9 $\frac{1}{4}$.

10 2.

11 a.

$\boxed{\mathbf{12}}$ ∞, použite vzorec $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\sin n}{n} = 1$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ 4.

$\boxed{\mathbf{14}}$ 0, najprv urobte odhad uvedenej funkcie zhora i zdola pomocou vhodných funkcií, ktorých limity viete vypočítať ($0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y},\ \forall (x,y) \ne (0,0)$).

$\boxed{\mathbf{15}}$ 0, urobte odhad $0 < (x^2+y^2)e^{-(x+y)} < \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}$ pre $x > 0,\ y > 0$.

$\boxed{\mathbf{16}}$ 0, urobte odhad $0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le (\frac{1}{2})^{x^2}$.

$\boxed{\mathbf{17}}$ 1, $x^2y^2 \le \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2,\ 1 \ge \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} \ge \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}$ pre $0 < x^2+y^2 \le 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2} = \lim\limits_{t\to 0+} t^{t^2} = 1$, kde $t = x^2+y^2$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ 0, najprv upravte funkciu takto: $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = x\left(1 - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) + y\left(1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$ a potom použite vetu o limite súčinu dvoch funkcií, z ktorých jedna konverguje k nule a druhá funkcia je ohraničená.

$\boxed{\mathbf{19}}$ a) e^2, upravte funkciu na tvar $\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2y}{x+y}}$ a položte $t = xy,\ t \to 0$ pre $x \to 0,\ y \to 2$. b) 0, využite nerovnosť $x^4 + y^4 \ge \frac{(x^2+y^2)^2}{2}$ a položte $t = x^2+y^2$.

$\boxed{\mathbf{20}}$ a) Neexistuje, využite vetu 1.4.1. a zvoľte postupnosť $\{(x, l.x_k)\}_{k=1}^{\infty}$, kde $x_k \to 0,\ x_k \ne 0,\ l \in R$.
b) 0, využite nerovnosť $|\sin xy| \le |xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

$\boxed{\mathbf{22}}$ Použite definíciu 1.4.1. a položte $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, potom urobte odhad funkcie $|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}|$ zhora, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ak $x : \varrho(x,0) < \sqrt{x^2+y^2}$, tak $|x| < \delta,\ |y| < \delta$ a $|f(x,y) - 0| = |(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}| \le |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon$.

$\boxed{\mathbf{23}}$ a) $1, -1$. b) $1, 1$. c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. d) $0, 1$.

$\boxed{\mathbf{24}}$ Zvoľte si dve postupnosti $\{(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})\}_{k=1}^{\infty}$ a využite vetu 1.4.1.

$\boxed{\mathbf{25}}$ Obidve dvojnásobné limity sa rovnajú 0, k dôkazu toho, že limita neexistuje využite vetu 1.4.1. a zvoľte postupnosť $\{(x_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty},\ x_k \to \infty$.

$\boxed{\mathbf{26}}$ Neexistujú, upravte funkciu na tvar $f(x,y) = x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ a uvážte existenciu limity obidvoch sčítancov pri pevnom $y \ne 0,\ y \ne \frac{1}{k\pi},\ k \in Z$ a $x \to 0$. Analogicky uvažujte existenciu limity obidvoch sčítancov pre $y \to 0$ pri pevnom $x \ne 0,\ x \ne \frac{1}{k\pi},\ k \in Z$.

$\boxed{\mathbf{27}}$ $\{(x,y) \in R^2 : y = x\}$.

$\boxed{\mathbf{28}}$ $(0,0)$.

$\boxed{\mathbf{29}}$ $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \ge 4\}$.

$\boxed{\mathbf{30}}$ $\{(x,y) \in R^2 : y = 0\}$.

31 $\{(x,y) \in R^2 : xy = 0\}$.

32 $\{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

33 $(1, 2, -1)$.

34 Uvažujte prírastok funkcie v bode $(0,0)$ prislúchajúci prírastku $\triangle x$ premennej x, t.j. $\triangle_x f = f(\triangle x, 0) - f(0,0) = 0$, $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle_x f = 0$, t.j. $f(x,y)$ je spojitá v bode $(0,0)$ vzhľadom k premennej x. Analogicky možno dokázať spojitosť $f(x,y)$ v bode $(0,0)$ vzhľadom k obidvom premenným (pozri výsledok príkladu 20. a)).

35 Funkciu upravte takto:
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} . \frac{\sin y}{y}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$, pretože $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 1 = f(0,0)$ je f spojitá v bode $(0,0)$ a spojitá podľa jednotlivých premenných zvlášť. Uvažujte funkciu $f(x,0)$. Podľa definície $f(x,0) = 1$ pre všetky x. Táto funkcia je spojitá v bode $x = 1$ a $f(x,y)$ je spojitá v bode $(1,0)$ vzhľadom na premennú x. Uvažujte ďalej funkciu $f(1,y)$. Pretože $\lim\limits_{y \to 0} \neq f(1,0)$, tak $f(1,y)$ nie je spojitá v bode $y = 0$. Funkcia $f(x,y)$ nie je spojitá v bode $(1,0)$ vzhľadom na premennú y. Funkcia $f(x,y)$ nie je spojitá v $(1,0)$.

36 $f(x,y,z) = \begin{cases} 3x + 4y - 2z + 5, & x \neq 0,\ y \neq 1,\ z \neq 2 \\ 5, & x = 0,\ y = 1,\ z = 2 \end{cases}$.

37 Uvažujte ľubovoľný bod (x_0, y_0), pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ zvolíte $\delta_1 > 0$ tak, aby pre $\mid y - y_0 \mid \leq \delta_1$ platilo $\mid f(x_0, y_0) - f(x_0, y) \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. Zo spojitosti funkcie $f(x,y)$ vzhľadom k x vyplýva, že dá sa zvoliť $\delta_2 > 0$ tak, aby pre $\mid x - x_0 \mid \leq \delta_2$ platilo $\mid f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_o \pm \delta_1) \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. Predpokladajte, že $f(x,y)$ monotónne rastie vzhľadom k y. Potom pre $\mid x - x_0 \mid \leq \delta_2$, $\mid y - y_0 \mid \leq \delta_1$ dostanete $f(x, y_0 - \delta_1) \leq f(x,y) \leq f(x, y_0 + \delta_1)$, pričom $\mid f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0) \mid \leq \mid f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0 \pm \delta_1) \mid + \mid f(x_0, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0) \mid < \varepsilon$, odkiaľ dostanete, že $\mid f(x,y) - f(x_0, y_0) \mid < \varepsilon$, teda $f(x,y)$ je spojitá v bode (x_0, y_0).

38 Upravte $\mid f(x,y) - f(x_0, y_0) \mid$ takto:
$\mid f(x,y) - f(x_0, y_0) \mid \leq \mid f(x_0, y) - f(x, y_0) \mid + \mid f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \mid$. Využite Lipschitzovu podmienku vzhľadom na y pre funkciu f a spojitosť $f(x,y)$ vzhľadom na x (t.j. $f(x, y_0)$ je spojitá v bode x_0).

39 $\sup\limits_M f = \max\limits_M f = 81$, napríklad v bode $(0,3)$; $\inf\limits_M f = 0$, $\min\limits_M f$ neexistuje.

40 $\sup\limits_M f = \max\limits_M f = \dfrac{1}{e}$, napríklad v bode $(1,1)$; $\inf\limits_M f = \min\limits_M f = 0$, napríklad v bode $(0,0)$.

41 Využite definíciu rovnomernej spojitosti funkcie a pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ zvoľte $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

42 Funkcia $f(x,y)$ je spojitá na množine M, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0$, položte $f(0,0) = 0$, potom $f(x,y)$ bude rovnomerne spojitá na $\overline{M}$.

$\boxed{\mathbf{43}}$ Funkcia $f(x,y)$ nie je rovnomerne spojitá na svojom obore definície t.j. na $M = \{(x,y) \in R^2 : \mid x \mid \leq \mid y \mid, \ y \neq 0\}$. Zvoľte dve postupnosti bodov $\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} = \{(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} = \{(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})\}_{k=1}^{\infty}$ a zistite, že $\varrho(a^{(k)}, b^{(k)}) = \frac{2}{k} \to 0$ pre $k \to \infty$ a $\mid f(a^{(k)}) - f(b^{(k)}) \mid = \pi$.

$\boxed{\mathbf{44}}$ Funkcia $f(x,y)$ nie je rovnomerne spojitá na M; uvažujte dve postupnosti bodov:

$$\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2k}} \cos\alpha, \sqrt{1 - \frac{1}{2k}} \sin\alpha \right) \right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$\{b^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \left(\sqrt{1 - \frac{2}{1+4k}} \cos\alpha, \sqrt{1 - \frac{2}{1+4k}} \sin\alpha \right) \right\}_{k=1}^{\infty}, \ 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$$

ktoré patria do oboru definície funkcie $f(x,y)$. Zistite, že $\varrho(a^{(k)}, b^{(k)}) \to 0$ pre $k \to \infty$ a $\mid f(a^{(k)}) - f(b^{(k)}) \mid = 1$ pre všetky k.

$\boxed{\mathbf{45}}$ Funkcia $f(x,y)$ je rovnomerne spojitá na M.

$\boxed{\mathbf{46}}$ Funkcia $f(x,y)$ je rovnomerne spojitá na M.

$\boxed{\mathbf{47}}$ Funkcia $f(x,y)$ je rovnomerne spojitá na M. Upravte rozdiel $\mid f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2) \mid$ takto:

$$\mid \sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2} \mid = \frac{\mid (x_1-x_2)(x_1+x_2) + (y_1-y_2)(y_1+y_2) \mid}{\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$$\leq \mid x_1 - x_2 \mid \frac{\mid x_1 \mid + \mid x_2 \mid}{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}} + \mid y_1 - y_2 \mid \frac{\mid y_1 \mid + \mid y_2 \mid}{\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_2^2}} = \mid x_1 - x_2 \mid + \mid y_1 - y_2 \mid$$

a zvoľte $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

$\boxed{\mathbf{48}}$

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \left[\cos(xy) - y\sin(xy)\right]$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -xe^x \sin(xy)$;

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2-2xy-x^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2-2xy-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$; c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{2x^2+y^2}$;

d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; e) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x+y)e^{(x+y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x+y)e^{(x+y)^2}$;

f) $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos 2y$; g) $\frac{\partial z}{x} = 8xy^4(x^2+1)^3$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3(x^2+1)^4$;

h) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{\cos^2(xy)}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}(xy) + \frac{xy}{\cos^2(xy)}$; i) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$;

j) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{y(x^2+y^2)}$; k) $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}(1+xy)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}(1+xy)$;

l) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2y}{(x-y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^2}$; m) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x2+y2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$;

n) $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{y}\frac{1}{\sin\frac{x}{y}}.\frac{1}{\cos\frac{x}{y}} = \frac{1}{y}\operatorname{cosec}\frac{x}{y}.\sec\frac{x}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\sec\frac{x}{y}\operatorname{cosec}\frac{x}{y}$;

o) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$;

p) $\frac{\partial z}{\partial x} = \left[2x\ln\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{x(y^2-x^2)}{x^2+y^2}\right]\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{y(x^2+y^2)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

49 a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2yz^2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^3z^2$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^3yz^2$;
b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2anx\left(ax^2+by^2+xz^2\right)^{n-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2bny\left(ax^2+by^2+cz^2\right)^{n-1}$;
$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xnz\left(ax^2+by^2+cz^2\right)^{n-1}$;
c) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|z|y}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{|z|x}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{|z|\sqrt{z^2-x^2y^2}}$;
d) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$;
e) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z\cos xy}{1+x^2z^2} - y\sin(xy)\mathrm{arctg}\,(xz)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin(xy)\mathrm{arctg}\,(xz)$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x\cos(xy)}{1+x^2z^2}$;
f) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z}{x}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \ln\frac{y}{x}$;
g) $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz}\cos y(yz\sin x+\cos x)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{xyz}\sin x(xz\cos y-\sin y)$; $\frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz}\sin x\cos y$;
h) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}$;
i) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{xz}x^{y/z}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y/z}\frac{\ln x}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}x^{y/z}\ln x$.

50 a) $z = 6x-1$; b) $z = 8y+1$.

51 a) $z = 13-12y$; b) $z = 8x-15$.

52 Návod: Vypočítajte diferenciál funkcií v bode $O = (0,0)$.
a) $1+mx+ny$; b) $x+y$.

53 a) $\frac{2}{\sqrt{3}}.0,55$; b) $-7,8$; c) $0,8(1+2\ln 4)$; d) $-\frac{1}{30}$; e) 2; f) $-\frac{\sqrt{2}}{20}$.

54 a) $108,972$; b) $2,95$; c) $0,502$; d) $0,97$.

55 Nie je. Návod: 1. Zistite, či sú splnené nutné podmienky diferencovateľnosti funkcie v bode $(0,0)$ (veta 2.2.1.); 2. ak áno, potom využite podmienku diferencovateľnosti (1), z ktorej nájdete funkciu $\omega(x,y)$; 3. zistite, či funkcia $\omega(x,y)$ vyhovuje podmienkam definície 2.2.1. Derivácie $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ počítajte podľa definície 2.1.1.

56 Nie je.

57 Návod: a) overiť platnosť nutných podmienok diferencovateľnosti (veta 2.2.1.); b) pri dôkaze nespojitosti $f'_x.f'_y$ stačí ukázať na základe Heineho definície limity, že f'_x, f'_y nemajú limitu v bode $(0,0)$; c) neohraničenosť f'_x, f'_y v okolí bodu $(0,0)$ možno ukázať tak, že ak si zvolíme postupnosť $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset R^2$, ktorá konverguje k $(0,0)$ príslušné postupnosti $\{f'_x(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{f'_y(x_n,y_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ majú nevlastnú limitu; d) pre dôkaz diferencovateľnosti funkcie v $(0,0)$ stačí využiť podmienku (1).

58 Návod: Nech (x_1,y_1), (x_2,y_2) sú ľubovoľné body z E. Uvažujte pomocnú funkciu $\varphi(t) = f\left(x_2+t(x_1-x_2), y_2+t(y_1-y_2)\right)$ na intervale $<0,1>$. pretože E je konvexná oblasť, bod $\left(x_2+t(x_1-x_2), y_2+t(y_1-y_2)\right), t \in <0,1>$, patrí do E. Podľa Lagrangeovej vety a ohraničenosti derivácií f'_x, f'_y odhadnite $|\ \varphi(1)-\varphi(0)\ |=|\ f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\ |$ a použite definíciu spojitosti funkcie f v oblasti E.

59 Návod: Nech $(x_0,y_0) \in G$ je ľubovoľný bod. K dôkazu spojitosti funkcie f v bode (x_0,y_0) vzhľadom na obidve premenné využite definíciu spojitosti, pričom v nerovnosti

$$|\ f(x,y)-f(x_0,y_0)\ | \le |\ f(x,y)-f(x,y_0)\ | + |\ f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\ |$$

pre prvý sčítanec použite Lagrangeovu vetu. Potom zohľadnite tieto skutočnosti: a) existuje číslo $M > 0$ také, že $|\ f'_y(x,y)\ | \leq M$ pre všetky $(x,y) \in G$; b) spojitosť funkcie f podľa premennej x pre $y = y_0$, čo znamená, že ak $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ je nejaké ľubovoľné číslo, tak k nemu existuje $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, y_0)$ také, že

$$|\ f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\ | < \frac{\varepsilon}{2}, \text{keď } \ |\ x - x_0\ | < \delta_1.$$

60 a) $\begin{pmatrix} v & u \\ 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$; c) $\left(\frac{1}{v}, -\frac{u}{v^2}\right)$; d) $\begin{pmatrix} \operatorname{tg} u + \frac{u}{\cos^2 u} \\ \sin u + u\cos u \end{pmatrix}$;
e) $\begin{pmatrix} \ln\frac{v}{w} & \frac{u}{v} & -\frac{u}{w} \\ -\frac{v}{u} & \ln\frac{w}{u} & \frac{v}{w} \\ \frac{w}{u} & -\frac{w}{v} & \ln\frac{u}{v} \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2u & 2v & 2w \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

61 a) r; b) $\frac{2y}{x(x^2+y^2)}$; c) $r^2\cos\psi$; d) $\frac{2y}{x}$; e) $2ur$.

62 a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$;
b) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x\sin x^2}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{2x\sin x^2}{y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2\cos x^2}{y^3}$;
c) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y} - \frac{4x^2}{y^3}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}\sec^3\frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$; $(\sec\frac{x^2}{y} = \frac{1}{\cos\frac{x^2}{y}})$;
d) $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y\ln x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y\ln^2 x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = x^{y-1}(1 + y\ln x)$; $x > 0$;
e) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$;
f) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x\operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$; $y \neq 0$;
g) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$;
h) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z(1+z\ln\frac{x}{y})$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = -\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z(1 + z\ln\frac{x}{y})$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y}$; $\frac{x}{y} > 0$;
i) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yu}{xz}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = u\frac{\ln x}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yu}{z^2}\ln x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y(y-z)u}{x^2z^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u\ln^2 x}{z^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu\ln x}{z^4}(2z + y\ln x)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{(z+y\ln x)u}{xz^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = -\frac{yu(z+y\ln x)}{xz^3}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = -\frac{u\ln x(z+y\ln x)}{z^3}$; $xz \neq 0$.

64 0.

65 $\frac{(-1)^m 2(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$.

$\boxed{\mathbf{66}}$ $p!q!$.

$\boxed{\mathbf{67}}$ $(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$.

$\boxed{\mathbf{68}}$ $\sin\frac{n\pi}{2}$.

$\boxed{\mathbf{69}}$ a) $Au=-u,\ A^2u=u$; b) $Au=1,\ A^2u=0$.

$\boxed{\mathbf{70}}$ a) $\triangle_1 u=\frac{1}{r^4}$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \triangle_2 u=0$
b) $\triangle_1 u=9\left[(x^2-yz)^2+(y^2-xz)^2+(z^2-xy)^2\right],\ \triangle_2 u=6(x+y+z)$.

$\boxed{\mathbf{71}}$ Návod: Pri dôkaze spojitosti využijeme definíciu spojitosti funkcie f v bode $(0,0)$; parciálne derivácie $f'_x(0,0),\ f'_y(0,0),\ f''_{xy}(0,0),\ f''_{yx}(0,0)$ vypočítajte podľa definície.

$\boxed{\mathbf{72}}$ Návod: Použite vzorec (3) pre $k=2,\ n=2$ (resp. $n=3$) a potom vezmite do úvahy poznámku 2.2.3. pre prípad deferenciálu k - tého rádu.
a) $du=mx^{m-1}y^n dx+nx^m y^{n-1}dy,\ d^2u=m(m-1)x^{m-2}y^n(dx)^2+2mnx^{m-1}y^{n-1}dxdy+n(n-1)x^m y^{n-2}(dy)^2=x^{m-2}y^{n-2}\left(m(m-1)y^2(dx)^2+2mnxydxdy+n(n-1)x^2(dy)^2\right)$;

b) $du=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ d^2u=\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$;

c) $du=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$,
$d^2u=\frac{(y^2-x^2)\left[(dx)^2+(dy)^2\right]-4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}$;

d) $du=(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz, d^2u=2dxdy+2dxdz+2dydz$;

e) $du=\frac{-2xzdx-2yzdy+(x^2+y^2)dz}{(x^2+y^2)^2}$,
$d^2u=\frac{2z\left[(3x^2-y^2)(dx)^2+8xydxdy+(3y^2-x^2)(dy)^2\right]}{(x^2+y^2)^3}-\frac{4(x^2+y^2)(xdx+ydy)dz}{(x^2+y^2)^3}$.

$\boxed{\mathbf{73}}$ $df(1,1,1)=(x-1)-(y-1)=dx-dy$,
$d^2f(1,1,1)=2\left[(y-1)+(z-1)\right]\left[-(x-1)+(y-1)\right]=2(dy+dz)(dy-dx)$.

$\boxed{\mathbf{76}}$ $F(r)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$. Návod: Z vety o derivovaní zloženej funkcie je napr. $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$. Podobne nájdite výrazy pre parciálne derivácie zloženej funkcie podľa ostatných premenných.

$\boxed{\mathbf{80}}$ Návod: Z vety 2.4.1. o derivácii zloženej funkcie máme: $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial x}+\psi'(w)\frac{\partial w}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial t}+\psi'(w)\frac{\partial w}{\partial t}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\varphi'(v)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\psi''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\psi'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varphi''(v)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\varphi'(v)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\psi''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+\psi'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, kde v,w sú vnútorné zložky zložených funkcií, napr. v úlohe a) je $v=x-at,\ w=x+at$.

$\boxed{\mathbf{81}}$ Návod: Podľa poznámky 2.4.1. a vety 2.4.2. v prípade c) máme:
$du=\frac{\partial f}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial f}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial f}{\partial\zeta}d\zeta$, kde $d\xi,\ d\eta,\ d\zeta$ sú totálne diferenciály funkcii ξ,η,ζ dvoch premenných x,y; $d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial f}{\partial l\eta}d\eta+\frac{\partial f}{\partial\zeta}d\zeta\right)=d\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)d\xi+\frac{\partial f}{\partial\xi}d^2\xi+d\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)d\eta+\frac{\partial f}{\partial\eta}d^2\eta+d\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}\right)d\zeta+\frac{\partial f}{\partial\zeta}d^2\zeta$, pričom diferenciály $d\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\right),\ d\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right),\ d\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}\right)$ funkcií $\frac{\partial f}{\partial\xi},\ \frac{\partial f}{\partial\eta},\ \frac{\partial f}{\partial\zeta}$ počítame podľa uvedeného vzorca pre du a $d^2\xi,\ d^2\eta,\ d^2\zeta$ počítame podľa vzorca (3), v ktorom $x_1=x,\ x_2=y$.

a) $du = f'_\xi(ydx + xdy) + f'_\eta \frac{ydx-xdy}{y^2}$,
$d^2u = f''_{\xi^2}(ydx + xdy)^2 + 2f''_{\xi\eta}\frac{y^2(dx)^2-x^2(dy)^2}{y^2} + f''_{\eta^2}\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4} + 2f'_\xi dxdy - 2f'_\eta \frac{(ydx-xdy)dy}{y^3}$;
b) $du = (f'_x + 2tf'_y + 3t^2 f'_z)dt$,
$d^2u = \left(f''_{x^2} + 4tf''_{xy} + 4t^2 f''_{y^2} + 6t^2 f''_{xz} + 12t^3 f''_{yz} + 9t^4 f''_{z^2} + 2f'_y + 6tf'_z\right)(dt)^2$;
c) $du = 2f'_\xi(xdx + ydy) + 2f'_\eta(xdx - ydy) + 2f'_\zeta(ydx + xdy)$,
$d^2u = 4f''_\xi(xdx+ydy)^2 + 4f''_{\eta^2}(xdx-ydy)^2 + 4f''_{\zeta^2}(ydx+xdy)^2 + 8f''_{\xi\eta}\left(x^2(dx)^2 - y^2(dy)^2\right) + 8f''_{\xi\zeta}(xdx+ydy)(ydx+xdy) + 8f''_{\eta\zeta}(xdx-ydy)(ydx+xdy) + 2f'_\xi\left((dx)^2 + (dy)^2\right) + 2f'_\eta\left((dx)^2 - (dy)^2\right) + 4f'_\zeta dxdy$;
d) $du = f'_1(dx + dy + dz) + 2f'_2(xdx + ydy + zdz)$,
$d^2u = f''_{11}(dx+dy+dz)^2 + 4f''_{12}(dx+dy+dz)(xdx+ydy+zdz) + 4f''_{22}(xdx+ydy+zdz)^2 + 2f'_2\left((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right)$. Tu 1 a 2 znamená zodpovedajúce 1. a 2. zložka zloženej funkcie.
e) $du = 2f'_1 dx + 3f'_2 dy + 4f'_3 dz$,
$d^2u = 4f''_{11}(dx)^2 + 9f''_{22}(dy)^2 + 16f''_{33}(dz)^2 + 12f''_{12}dxdy + 16f''_{13}dxdy + 24f''_{23}dydz$;
f) $du = (f'_1 y + f'_2 + f'_3)\,dx + (f'_1 x - f'_2 + f'_3)\,dy$,
$d^2u = \left(f''_{11}y^2 + 2f''_{12}y + 2f''_{13}y + f''_{22} + 2f''_{23} + f''_{33}\right)(dx)^2 + \left(f''_{11}xy - f''_{12}y + f''_{13}y + f''_{12}x + f''_{13}x - f''_{22} + f'_1 + f''_{33}\right)dxdy + \left(f''_{11}x^2 + 2f''_{13}x - 2f''_{12}x + f''_{22} - 2f''_{23} + f''_{33}\right)(dy)^2$.

82 Návod: Ak postupujete podĺa návodu k úlohe 81 a vezmete do úvahy, že $d^2\xi = 0,\ d^2\eta = 0,\ d^2\zeta = 0$ pre lineárne funkcie ξ, η, ζ, dostanete $d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta}d\zeta\right)^2 f$. Metódou matemetickej indukcie sa ĺahko presvedčíte o tom, že

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta}d\zeta\right)^n f,$$

t.j. že tvar diferenciálu ĺubovolného rádu sa zachováva pri zámene argumentov lineárnymi funkciami.
a) $d^n u = f^{(n)}(ax + by + cz)(adx + bdy + cdz)^n$
b) $d^n u = \left(adx\frac{\partial}{\partial\xi} + bdy\frac{\partial}{\partial\eta} + cdz\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\eta,\zeta)$, kde $\xi = ax, \eta = by, \zeta = cz$
c) $d^n u = \left[dx\left(a_1\frac{\partial}{\partial\xi} + a_2\frac{\partial}{\partial\eta} + a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) + dy\left(b_1\frac{\partial}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial}{\partial\eta} + b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) + \right.$
$\left. + dz\left(c_1\frac{\partial}{\partial\xi} + c_2\frac{\partial}{\partial\eta} + c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^n f(\xi,\eta,\zeta)$.

84 Návod: Uvažujte pomocnú funkciu $F(t) = \frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}$, kde (x_0, y_0, z_0) je ĺubovolný bod z definičného oboru funkcie f. Ukážte, že pri splnení podmienky úlohy je $F'(t) = 0$, z čoho vyplýva $F(t) = \text{konšt.} = C$. Konštantu C vypočítate, ak položíte $t = 1$. Ak dosadíte túto hodnotu C namiesto $F(t)$ do uvažovanej rovnosti, po vynásobení t^n dostanete to, čo bolo treba dokázať.

86 $1 - \sqrt{3}$.

87 Návod: Vyjdite zo vzťahu $-\mid \text{grad}\, z(M) \mid \leq \frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(M) \leq \mid \text{grad}\, z(M) \mid$, ktorý je dôsledkom vzorca (4) a vlastnosti gradienta funkcie z v bode M.

$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(1,1) = \cos\alpha + \sin\alpha$; a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; b) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; c) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ a $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

88 Návod: Využite poznámku 2.4.1. $\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.

89 $\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

90 $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(1,1,1) = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, $|\,\mathrm{grad}\; u\,| = \sqrt{3}$.

91 $|\,\mathrm{grad}\; u\,| = \frac{1}{r_0^2}$, $\cos\alpha = -\frac{x_0}{r_0}$, $\cos\beta = -\frac{y_0}{r-0}$, $\cos\gamma = -\frac{z_0}{r_0}$, kde $r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

92 $\frac{\pi}{2}$.

93 ≈ 3142.

95 $\frac{\partial^2 u}{\partial \vec{l}^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cos\alpha\cos\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma$.

96 Návod: Položte $y = 2x$. Potom 1. podmienku derivujte dvakrát podľa x a 2. podmienku raz podľa x ako zloženú funkciu. Tým dostanete systém lineárnych algebraických rovníc vzhľadom na hľadané druhé parciálne derivácie.
$u''_{xx}(x,2x) = u''_{yy}(x,2x) = -\frac{4}{3}$; $u''_{xy}(x,2x) = \frac{5}{3}x$.

97 Návod: Integrujte rovnicu postupne n - krát podľa y, pričom namiesto konštanty integrovania budeme mať vždy funkciu premennej x.
$z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \ldots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)$.

98 $z = x^2y + y^2 - 2x^4 + 1$.

99 $z = 1 + xy + y^2$.

100 $z = x + y^2 + 0,5xy(x+y)$.

101 Overte platnosť predpokladov vety 3.1.

102 Overte platnosť predpokladov vety 3.2.

103 Overte platnosť predpokladov vety 3.3.

104 Overte platnosť predpokladov vety 3.3.

105 1. Nekonečne veľa. Napríklad, ak $x_k = -1 + \frac{2k}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n$, $n = 2,3,\ldots$. tak pre každé $n = 2,3,\ldots$ definujte funkciu

$$y(x) = \begin{cases} -|x|, & \text{ak } x < -1 \\ |x|, & \text{ak } x_k < x \le x_{k+1} \\ -|x|. & \text{ak } x > x_{k+1}, \end{cases}$$

kde $k = 0,1,2,\ldots,n$. Táto funkcia je definovaná pre všetky x a spĺňa rovnicu (1).
2. štyri funkcie: $y = x$, $y = -x$, $y = |x|$, $y = -|x|$;
3. dve funkcie: $y = -x$, $y = x$;
4. a) dve funkcie; b) štyri funkcie;

5. jedna funkcia, pretože funkcie $y = x$ a $y = |x|$, ktoré prechádzajú bodom $(1,1)$ sú identické v intervale $(1-\delta, 1+\delta)$, $0 < \delta < 1$.

106 a) $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = -\frac{x_0}{z_0}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -\frac{y_0}{z_0}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{x_0 y_0}{z_0^3}$;

b) $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \frac{x_0^2+z_0^2+z_0}{x_0-x_0^2-z_0^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \frac{x_0^2+z_0^2}{x_0-x_0^2-z_0^2}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = \frac{x_0^2-z_0^2+2x_0 z_0-z_0+(z_0^2-x_0^2-x_0 z_0-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)}{(x_0-x_0^2-z_0^2)^2}$, kde $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$ je horeuvedený výraz.

c) $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \frac{z_0}{x_0} . \frac{x_0^{-1}}{1-z_0}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \frac{z_0}{y_0} . \frac{y_0^{-1}}{1-z_0}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = \frac{z_0\left[(x_0-1)^2+(1-z_0)^2\right]}{x_0^2(1-z_0)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{z_0}{x_0 y_0} . \frac{(x_0-1)(y_0-1)}{(1-z_0)^3}$;

d) $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = -\frac{1+y_0 z_0 \sin(x_0 y_0 z_0)}{1+x_0 y_0 \sin(x_0 y_0 z_0)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -\frac{1+x_0 z_0 \sin(x_0 y_0 z_0)}{1+x_0 y_0 \sin(x_0 y_0 z_0)}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{-\cos(x_0 y_0 z_0)\left[x_0 z_0 + x_0 y_0 \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\right] - \left[z_0 + x_0 \frac{\partial z}{\partial x}(M_0) + y_0 \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\right] . \sin(x_0 y_0 z_0)}{1+x_0 y_0 \sin(x_0 y_0 z_0)}$, kde $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$ sú predtým nájdené výrazy.

Návod: Druhé parciálne derivácie hľadajte derivovaním prvých parciálnych derivácii funkcie z podľa vhodnej premennej.

107 Vychádzajte z toho, že diferenciál $dy = f'(x)dx$ pre funkciu $y = f(x)$ určenú implicitne rovnicou $1 + xy = k(x-y)$ (pojem funkcie určenej implicitne je uvedený po vete 3.1.). Nájdite deriváciu $f'(x)$ podľa vety 3.1., vyjadríte konštantu k z danej rovnice, potom dosaďte to do výrazu pre dy.

108 Postup dôkazu je podobný ako v úlohe 107. Len tu treba rozriešiť rovnicu (1) vzhľadom na x (resp. na y) a to dosadiť do výrazu pre dy za predpokladu, že $xy > 0$.

109 a) -2; b) -1.

110 $dz(3,-2) = \frac{1}{9}(2dx - dy)$, $d^2 z(3,-2) = -\frac{2}{243}\left[2(dx)^2 - 5dxdy + 2(dy)^2\right]$, kde $dx = x-3, dy = y+2$.

111 Použiť techniku derivovania funkcií $u(x,y)$ a $v(x,y)$ daných implicitne systémom rovníc z vety 3.3.
$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv-yu}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{yu-xv}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 > 0$.

112 Funkia $z(x,y)$ je definovaná v oblasti $y > \frac{x^2}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v)$, $u \neq v$.
Návod: Oblasť existencie funkcie $z(x,y)$ nájdete z podmienky (na základe vety 3.3.), ktorá stanovuje, kedy systém prvých dvoch rovníc určuje jediné funkcie u a v premenných x a y. Vyjadrite tú podmienku pomocou výrazov pre x a y. Derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ hľadajte tak, že zderivujete tretiu rovnicu podľa x (resp. podľa y), berúc do úvahy, že u a v sú funkcie x a y, určené prvými dvomi rovnicami. Do získaného výsledku dosaďte (nájdené podľa vety 3.3) $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ (resp. $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$).

113 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}$.

114 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sin 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2v}{u^2}$, $u \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{115}}$ Návod: Derivujte rovnosť $z = x^2 + y^2$ podľa x, berúc do úvahy, že $y = y(x)$ je funkcia určená implicitne rovnicou $x^2 - xy + y^2 = 1$; deriváciu $\frac{dy}{dx}$ hľadajte na základe vety 3.3. a dosaďte ju do výrazu pre $\frac{dz}{dx}$. Ten istý postup zopakujte pre funkciu $\frac{dz}{dx}$. $\frac{dz}{dx} = \frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}$; $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4x-2y}{x-2y} + \frac{6x}{(x-2y)^3}$.

$\boxed{\mathbf{116}}$ Návod: Použite metódu matematickej indukcie. Pri dôkaze pre $n = 1$ postupujte nasledovne: a) derivujte podľa y funkciu $u = f(z)$ ako zloženú funkciu; b) nájdite na základe vety 3.2. parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, vyjadrite $\frac{\partial z}{\partial y}$ pomocou $\frac{\partial z}{\partial x}$ a dosaďte to do získaného výrazu v a). Predpokladajte, že Lagrangeov vzorec platí pre $n = k$: $\frac{\partial^k u}{\partial y^k} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left\{ [\varphi(z)]^k \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$ a dokážte jeho platnosť pre $n = k+1$ a to tým spôsobom, že derivujete poslednú rovnosť podľa y a upravíte $\frac{\partial^{k+1} u}{\partial y^{k+1}}$, použijúc výraz pre $\frac{\partial z}{\partial y}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$), ktoré ste našli v prípade $n = 1$.

$\boxed{\mathbf{117}}$ Návod: Parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ hľadáte podľa vety 3.2., pričom $F(x, y, z) = \Phi(x - az, y - bz)$ je zložená funkcia. Preto parciálne derivácie F'_x, F'_y, F'_z treba hľadať ako derivácie zloženej funkcie (odsek 2.4. z 2.).

$\boxed{\mathbf{118}}$ Návod: Derivujte 1. rovnicu podľa x (resp. podľa y), berúc do úvahy, že z a α sú funkcie x a y. Tak dostanete algebraickú rovnicu vzhľadom na $\frac{\partial z}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial z}{\partial y}$), ktorú po úprave a využíti 2. rovnice ľahko rozriešite.

$\boxed{\mathbf{119}}$ Návod: Derivujte 1. rovnicu podľa x (resp. podľa y), berúc do úvahy, že z je funkcia x a y a f je zložená funkcia premenných x a y. Tak dostanete algebraickú rovnicu vzhľadom na $\frac{\partial z}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial z}{\partial y}$), v ktorej koeficient pri $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$) sa rovná 0 na základe 2. rovnice.

$\boxed{\mathbf{120}}$ Návod: Berúc do úvahy 1. rovnicu systému, nájdete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, pritom sa využije 2. rovnica systému.

$\boxed{\mathbf{121}}$ Návod: Uvažujte zloženú funkciu premennej t: $u(t) = y(x)$, kde $x = e^t$. Postupným derivovaním funkcie $u(t)$ vyjadrite derivácie $y'(x)$, $y''(x)$ pomocou derivácii $u'(t)$, $u''(t)$ funkcie $u(t)$. Nájdené výrazy pre $y'(x)$, $y''(x)$ a $x = e^t$ dosadíte do danej rovnice. Tak dostanete transformovanú rovnicu: $\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0$.

$\boxed{\mathbf{122}}$ $\frac{d^3u}{dt^3} - 3\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} - 6u(t) = 0$. Návod: Pretože $t = \ln|x|$, $|x| = e^t$. Ďalej postupujeme, ako v úlohe 121.

$\boxed{\mathbf{123}}$ $\frac{d^2u}{dt^2} + n^2 u = 0$.

$\boxed{\mathbf{124}}$ $\frac{d^2u}{dt^2} + m^2 u = 0$. Návod: Úlohy riešime podobným spôsobom, ako úlohu 121.

$\boxed{\mathbf{125}}$ Návod: Dvojnásobným derivovaním výrazu pre y, v ktorom u je funkcia premennej x, dostanete výrazy pre y' a y'', ktoré dosadíte do danej rovnice. Tak dostanete rovnicu: $u'' \left[g(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) \right] u = 0$.

$\boxed{\mathbf{126}}$ $u''(t) + u'(t)(3 + u(t)) + 2u(t) = 0$. Návod: Pre vyjadrenie $\frac{dy}{dx}$ v nových premenných využijeme vzorec, uvedený v odseku 1, pričom $x = f(t)$, $y = g(t)$, kde $g(t)$ je súčin funkcií premennej t. Tak dostaneme $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$. Ďalej derivujeme získanú rovnosť pre $\frac{dy}{dx}$ podľa t, pričom ľavú stranu derivujeme ako zloženú funkciu premennej t (vnútorná zložka je $x = e^t$). Výrazy pre x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ v nových premenných dosadíme do danej rovnice.

127 $u''(t) + 8u\,(u'(t))^3 = 0$. Návod: Postupujeme tak isto ako v úlohe 126.

128 $u''(t) - u'(t) = \frac{A}{(a-b)^2}u(t)$. Návod: Z druhej rovnosti vyjadrite x ako funkciu t a potom podľa toho y ako funkciu t. Ďalej postupujte tak, ako v úlohe 126.

130 Návod: Pre vyjadrenie $\frac{dy}{dx}$ pomocou nových premenných r a φ použite vzorec z odseku 4.1. a vezmite do úvahy, že f a g sú súčiny funkcií premennej
$\varphi : f(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, g(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$. Preto sa derivácia $\frac{dy}{dx}$ vyjadrí v nových premenných vzorcom, uvedeným v návode k úlohe 126. Po dosadení nájdeného výrazu pre $\frac{dy}{dx}$ a výrazov pre x a y do danej rovnice dostanete algebraickú rovnicu vzhľadom na deriváciu $\frac{dr}{d\varphi}$. Výsledok: $\frac{dr}{d\varphi} = r$.

131 $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$.

132 $r\left[r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right] = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^3$. Návod: Postup riešenia je podobný, ako v úlohe 126, s tým rozdielom, že nová nezávislá premenná je tu φ.

133 $\frac{dr}{d\varphi}.\frac{1}{r}$.

134 Návod: Funkcia z je zložená funkcia premenných x a y, t.j. $z = z(\xi, \eta)$, kde $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Podľa pravidla derivovania zloženej funkcie vyjadrite parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial z}{\partial y}$) pomocou parciálnych derivácií $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ a $\frac{\partial z}{\partial \eta}$. Dosadením do danej rovnice dostanete parciálnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu $\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$. Jej integrovaním podľa η dostanete $z = \varphi(\xi) = \varphi(x + y)$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia.

135 Pozri návod na riešenie úlohy 134. $z(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia.

136 Návod: Tu pri derivovaní zloženej funkcie $z = z(\xi, \eta)$, kde $\xi = x$, $\eta = y - bz$, podľa x (resp. podľa y) treba brať do úvahy, že v druhej zložke $\eta = y - bz$ je z funkciou x a y. Riešenie rovnice je: $z(x, y) = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz)$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia.

137 Návod: Podobným spôsobom, ako v úlohe 134 vyjadríme derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ pomocou derivácií $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ a $\frac{\partial z}{\partial \eta}$. Dosadením do danej rovnice dostaneme: $\xi\frac{\partial z}{\partial \xi} = z$ alebo $\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{z} = \frac{1}{\xi}$, odkiaľ integrovaním podľa ξ máme $\ln|z(\xi, \eta)| = \ln|\xi| + \ln|\varphi(\eta)|$. Teda:
$z = \xi\varphi(\eta) = x\varphi(\frac{y}{x})$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia.

138 Návod: Podľa pravidla derivovania zloženej funkcie $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ (tu sú x a y funkcie t) a využitím rovnosti $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ nájdete výraz pre $r^2\frac{d\varphi}{dt}$. Derivovaním tohto výrazu ako zloženej funkcie t dostanete vyjadrenie w v premenných r a φ: $w = \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$.

$\boxed{139.}$ Návod: Položte $z = z(u, v)$, kde u a v sú uvedené v úlohe funkcie premenných x a y. Podľa pravidla derivovania zloženej funkcie nájdete výrazy pre $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$. Berúc do úvahy, že $x = e^u$, $y = \sinh v$ (hyperbolický sínus -v), vyjadrite $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ v nových premenných. $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^u \sinh v$.

$\boxed{140}$ $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

$\boxed{141}$ Návod: Postupujte podľa návodu na riešenie úlohy 139 s tým rozdielom, že výraz pre u a v obsahuje funkciu z premenných x a y. Nájdete vyjadrenie $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ pomocou parciálnych derivácií $\frac{\partial z}{\partial u}$ a $\frac{\partial z}{\partial v}$. Pri dosadení do danej rovnice využite ešte to, že $2x = u + z^2$, $\frac{y}{z} = v$, $\frac{x}{z} = \frac{u+z^2}{2z}$. $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{z}{v} \cdot \frac{u+z^2}{z^2-u}$ $(z^2 \neq u)$.

$\boxed{142}$ $3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. Návod: Uvažujte zloženú funkciu premenných x a y: $z = z(u, v)$, kde $u = x + 2y + 2$, $v = x - y - 1$. Dvojnásobným derivovaním tejto funkcie podľa pravidla derivovania zloženej funkcie vyjadrite všetky v rovnici uvedené parciálne derivácie z podľa premenných x a y cez parciálne derivácie funkcie z podľa premenných u a v.

$\boxed{143}$ $a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0$.

$\boxed{144}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$.

$\boxed{145}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + a^2 e^{2u} z = 0$. Návod: Pri riešení úlohy postupujete, ako je uvedené v odseku 4.2.

$\boxed{146}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2}{u(4-uv)} \frac{\partial z}{\partial v}$.

$\boxed{147}$ $(u^2 - v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = v\frac{\partial z}{\partial u}$.

$\boxed{148}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{2u}{u^2+v^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$.

$\boxed{149}$ a) $\triangle u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}$; b) $\triangle(\triangle u) = \frac{d^4 u}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 u}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{du}{dr}$.

$\boxed{150}$ $w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial w}{x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$.

$\boxed{151}$ $w = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2+v^2}$, $u^2 + v^2 \neq 0$. Návod: Postup riešenia je uvedený v odseku 4.2.

$\boxed{152}$ $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}$, $v \neq 0$. Návod: Položte v rovniciach (3) z odseku 4.3. $w = x$, $u = y - z$, $v = y + z$. Potom totálny diferenciál funkcie x $dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$, pričom

$$du = -\frac{\partial z}{\partial x}dx + \left(1 - \frac{\partial z}{\partial y}\right)dy,$$
$$dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)dy.$$

Po dosadení týchto výrazov do vzťahu pre dx a po porovnaní koeficientov pri dx a dy dostanete algebraické rovnice s neznámymi $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$. Ich rozriešením dostanete vyjadrenie parciálnych derivácií $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ pomocou parciálnych derivácií $\frac{\partial x}{\partial u}$ a $\frac{\partial x}{\partial v}$.

$\boxed{\mathbf{153}}$ $A = \frac{x^2u^2-2xu^3+u^4\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)}{x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)}$, $x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right) \neq 0$. Návod: Pozri návod na riešenie úlohy 152.

$\boxed{\mathbf{154}}$ $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$. Návod: Uvažujte v zloženej funkcii premenných $x, y, z : u = u(\xi, \eta, \zeta)$, kde $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = z - x$ a použite pravidlo derivovania zloženej funkcie podľa x, podľa y, resp. podľa z.

$\boxed{\mathbf{155}}$ $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$. Návod: Z 3. rovnosti máme $z = e^{w+x+y}$, kde $w = w(u, v)$ je zložená funkcia premenných x a y s vnútornými zložkami u a v. Derivovaním podľa x (resp. podľa y) danej rovnosti (s využitím pravidla derivovania zloženej funkcie pre w) a dosadením do získaných vzťahov pre $\frac{\partial z}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial lz}{\partial y}$) nájdených parciálnych derivácií $\frac{\partial u}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial v}{\partial x}$) a $\frac{\partial u}{\partial y}$ (resp. $\frac{\partial v}{\partial y}$) podľa prvých dvoch rovností dostanete vyjadrenie parciálnych derivácií $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ v nových premenných.

$\boxed{\mathbf{156}}$ $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$.

$\boxed{\mathbf{157}}$ $\left(u\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(v\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}$. Návod: Derivovaním rovnosti $z = we^w$ podľa x (resp. podľa y), kde $w = w(u, v)$ a u, v sú funkcie x a y určené implicitne systémom rovníc $x = ue^w$, $y = ve^w$, podľa pravidla derivovania zloženej funkcie dostanete

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^w(w+1)\left(\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^w(w+1)\left(\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Derivácie $\frac{\partial u}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$) a $\frac{\partial v}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial v}{\partial y}$) nájdete podľa vety 3.3. o existencii a derivovaní funkcie u a v daných systémom uvedených rovníc.

$\boxed{\mathbf{158}}$ $\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\xi\eta}{\zeta}$. Návod: Zderivujete rovnosť $u = wz$ podľa x (resp. podľa y, resp. podľa z), berúc do úvahy, že w je zložená funkcia premenných x, y a z s vnútornými zložkami $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$ a $\zeta = z$.

$\boxed{\mathbf{159}}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$. Návod: Z tretej rovnice máme $z = \frac{w+y}{x}$, pričom $w = w(u, v)$, kde $u = \frac{x}{y}$, $v = x$ je zložená funkcia premenných x a y. Dvojnásobným derivovaním tejto rovnosti podľa y (s použitím pravidla derivovania zloženej funkcie pre w), vyjadrite parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial y}$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ pomocou nových premenných u, v a w.

$\boxed{\mathbf{160}}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\mathbf{161}}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2w$.

$\boxed{\mathbf{162}}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = 0$. Návod: Postup riešenia je naznačený v odseku 4.3.

$\boxed{\mathbf{163}}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} + (e^w - 1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right]$.

164 $w = \frac{\partial u}{\partial \varphi}$. Návod: Postupom uvedeným v odseku 4.2. dostanete (nezávislé premenné sú r a φ):

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r},$$
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

pričom $\frac{\partial x}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$), $\frac{\partial y}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$) dostanete derivovaním podĺa r (resp. podĺa φ) daných vzťahov pre x a y. Rozriešením získaného systému rovníc vzhĺadom na $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}$ dostaneme, že

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r}\left(r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r} - \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r}\left(r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r} + \cos\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

Ďalej dosaďte tieto výrazy a $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ do výrazu w.

165. $w = r\frac{\partial u}{\partial r}$.

166 $w = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$. Návod: Derivovaním 1. rovnosti podĺa r a 2. rovnosti podĺa φ, ktoré sú uvedené na začiatku návodu k úlohe 164, podĺa pravidla derivovania zloženej funkcie nájdeme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.\frac{\partial x}{\partial r}.\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial^2 y}{\partial r^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.\frac{\partial x}{\partial \varphi}.\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}.$$

Do týchto rovností dosadíme nájdené výrazy pre $\frac{\partial u}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$) v nových premenných v úlohe 164 a výrazy pre $\frac{\partial x}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$), $\frac{\partial y}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$), $\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$ (resp. $\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}$), $\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$ (resp. $\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}$) nájdené na základe rovnosti $x = \cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Spočítaním prvého získaného vzťahu vynásobeného r^2 s druhým vzťahom dostanete algebraickú rovnicu s neznámou w.

167 Návod: Ak budete postupovať podĺa návodu k úlohe 166, dostanete $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi$. Vynásobením tohto výrazu r^2 a berúc do úvahy, že $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ nájdete, že $w = r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$.

168 Návod: Postupom uvedeným v návode k úlohe 166 vypočítate $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = r^2\sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - r\frac{\partial u}{\partial r}$. Berúc do úvahy tento vzťah, výsledok z úlohy 165 a vzťahy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dostanete $w = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$.

169 $I = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}.\frac{\partial v}{\partial r}\right)$. Návod: Postup riešenia je taký istý, ako v úlohe 164.

$\boxed{170}$ Návod: Zámenu premenných urobte ako kompozíciu dvoch čiastočných zámen: $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = Z$ a $R = r\sin\theta,\ \varphi = \varphi,\ z = r\cos\theta$. Pritom môžete využiť výsledky, ktoré ste dostali pri riešení úlohy 164 (tu len bude iné označenie premenných).

$$\triangle_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2,$$
$$\triangle_2 u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

$\boxed{171}$ Návod: a) Pod riešením budeme rozumieť spojitú funkciu $u(x,t)$, ktorá má spojité parciálne derivácie až do 2. rádu včítane v nejakej oblasti $G \subset R^2$, t.j. $u \in C^2(G,R)$, a ktorá vyhovuje danej rovnici.
b) Dvojnásobným derivovaním zloženej funkcie $u = u(\xi,\eta)$, kde $\xi = x - at,\ \eta = x + at$, podľa premennej x (resp. podľa t) dostaneme vyjadrenie parciálnej derivácie $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$) pomocou derivácií $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}$. Dosadením týchto výrazov do danej rovnice nájdete, že $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta} = 0$. Ak zintegrujete túto rovnicu najprv podľa ξ a potom výsledok podľa η, vypočítate $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

$\boxed{172}$ $f(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.

$\boxed{173}$ $f(x,y,z) = 3\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1)-\right.$ $\left.-(y-1)(z-1)\right] + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1)$.

$\boxed{174}$ Návod: V Taylorovom vzorci (1) položte $x_1 = 1 + h,\ x_2 = -1 + k$ a $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = -1$. $f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1) = h - 3k - h^2 - 2hk + k^2 + h^2k + hk^2$.

$\boxed{175}$ $1 + (x-1) + 2(x-1)(y-1)$.

$\boxed{176}$ $1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{8}(x^2+y^2)^2$.

$\boxed{177}$ a) $\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{x^2-y^2}{2}$; b) $\operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y} \approx \frac{\pi}{4} + x - xy$.

$\boxed{178}$ $f(x,y) = 1 + mx + nx + \frac{1}{2}\left(m(m+1)x^2 + 2mnxy + n(n-1)y^2\right) + \ldots$.

$\boxed{179}$ Návod: Pretože $1 + x + y$ je lineárna funkcia, tvar diferenciálu ľubovoľného rádu sa zachováva (pozri úlohu 82). Preto

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!x^m y^{n-m}}{m!(n-m)!} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^n(n-1)!}{m!(n-m)!}x^m y^{n-m},$$
$|x+y| < 1$.

180 $e^x \sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^m y^{2n+1}}{m!(2n+1)!}$ $(|x| < \infty,\ |y| < \infty)$. Návod: Maclaurinov rad pre funkciu

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(0,0),$$

možno zapísať vo tvare:

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(0,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n! x^m y^{n-m}}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m y^{n-m}}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}.$$

Kladúc $n - m = k$, dostaneme

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m y^k}{m!k!} \frac{\partial^{m+k} f(0,0)}{\partial x^m \partial y^k}. \tag{$*$}$$

Pre danú funkciu $f(x,y) = e^x \sin y$, $\frac{\partial^{m+k} f}{\partial x^m \partial y^k}(x,y) = e^x \sin(y + k\frac{\pi}{2})$. Vypočítajte $\frac{\partial^{m+k} f}{\partial x^m \partial y^k}$ v bode $(0,0)$ a dosaďte do vzorca $(*)$.

181 $e^x \cos y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^m y^{2n}}{m!(2n)!}$, $(|x| < \infty,\ |y| < \infty)$.

182 Návod: Využiť známy rozvoj $\sin u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $|u| < \infty$. Potom $\sin(x^2 + y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x^2+y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $x^2 + y^2 < \infty$.

184 Singulárny bod je $(0,0)$, pričom môžu nastať tieto tri prípady: a) ak $a < 0$, bod $(0,0)$ je izolovaný singulárny bod; b) ak $a > 0$, je to uzlový bod; c) ak $a = 0$, je to bod vratu ($y = \pm x^{3/2}$).

185 a) bod $(0,0)$ je uzlový singulárny bod; b) bod $(0,0)$ je izolovaný singulárny bod; c) bod $(0,0)$ je uzlový singulárny bod.

186 a) bod $(0,0)$ je bodom samodotyku; b) bod $(0,0)$ je bod vratu 2. druhu.

187 $x + 5y - z - 5 = 0$, $\frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-5}{-1}$.

188 $x + 4y - 4z - \frac{11}{2} = 0$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{4} = \frac{z+\frac{3}{8}}{-4}$.

189 $x + y + z - 3 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

190 $2x + y + z = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1}$.

191 $12x - 9y + 2z - 9 = 0$, $\frac{x-3}{12} = \frac{y-5}{-9} = \frac{z-9}{2}$.

192 $x - y + \sqrt{2}z - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 0$, $\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{193}$ $(e+1)x-(e+\pi)y+(e+1)z=0,\ \frac{x-e}{e+1}=\frac{y-(e+1)}{-(e+\pi)}=\frac{z-\pi}{e+1}.$

$\boxed{194}$ $x-y+2z-\sqrt{\frac{11}{2}}=0,\ x-y+2z+\sqrt{\frac{11}{2}}=0.$ Návod: Označte $F(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-1$. Body dotyku nájdete z podmienky rovnobežnosti dotykovej roviny a danej roviny: $\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{1}=\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{-1}=\frac{F'_z(x_0,y_0,z_0)}{2}=k$, kde (x_0,y_0,z_0) je hľadaný bod dotyku.

$\boxed{195}$ Návod: Položte $F(x,y,z)=(x+z)^2+(y-z)^2-18$. Potom smernice normály v danom bode (x,y,z) plochy budú: $m=F'_x,\ n=F'_y,\ p=F'_z$. Ak vezmeme do úvahy rovnicu roviny v tvare $Ax+By+Cz=0$, tak rovnica roviny xOy je $z=0$, t.j. $A=B=D=0, C=1$. Z podmienky rovnobežnosti priamky a roviny $Am+Bn+Cp=0$ dostanete rovnice, ktoré určujú hľadané geometrické miesto bodov.
Geometrické miesto bodov je určené rovnicami $x+z=y-z=\pm3$.

$\boxed{196}$ $A=\begin{pmatrix}2&-2&3\\-2&-1&0\\-1&0&3\end{pmatrix},\ \delta_1=2,\ \delta_2=-6,\ \delta_3=-21.$

$\boxed{197}$ Kvadratická forma $Q(x_1,x_2,x_3)$ je kladne definitná.

$\boxed{198}$ $z_{\text{l.min}}=z\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{108}.$

$\boxed{199}$ $z_{\text{l.min}}=z(1,1)=-1.$

$\boxed{200}$ $z_{\text{l.min}}=z(-1,-1)=z(1,1)=-2.$

$\boxed{201}$ $z_{\text{l.max}}=z(0,0)=0,\ z_{\text{l.min}}=z\left(\frac{1}{2},1\right)=z\left(\frac{1}{2},-1\right)=z\left(-\frac{1}{2},1\right)=z\left(-\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{9}{8}.$

$\boxed{202}$ $z_{\text{l.max}}=z(2,3)=108$, v bodoch $(0,y)$, kde $-\infty<y<+\infty$ alebo $6<y<+\infty$ má f maximum; v bodoch $(0,y)$, kde $0<y<6$ má f minimum; v bodoch $(0,0),\ (0,6),\ (x,0)$, kde $-\infty<x<+\infty$ nemá f extrémy.

$\boxed{203}$ $z_{\text{l.min}}=z(5,2)=30.$

$\boxed{204}$ $z_{\text{l.max}}=z\left(\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3}\right)=z\left(-\frac{a}{\sqrt3},-\frac{b}{\sqrt3}\right)=\frac{ab}{3\sqrt3},\ z_{\text{l.min}}=z\left(\frac{a}{\sqrt3},-\frac{b}{\sqrt3}\right)=z\left(-\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3}\right)=-\frac{ab}{3\sqrt3}.$

$\boxed{205}$ Stacionárne body neexistujú; v $(0,0)$ neexistujú parciálne derivácie, $z(x,y)-z(0,0)=-\sqrt{x^2+y^2}<0,\ z_{\max}=z(0,0)=1.$

$\boxed{206}$ $z_{\text{l.min}}=2r\pi-2-\sqrt3-\frac{\pi}{6},\ r=0,\pm1,\pm2,\dots,\ z_{\text{l.max}}=(2r-1)\pi+2+\sqrt3+\frac{\pi}{6},\ r=0,\pm1,\pm2,\dots$ stacionárne body dostanete riešením rovníc $z'_x=0,\ z'_y=0$, ktoré upravte takto:
$1-2\sin(x-y)+2\sin(x+y)=0$
$1+2\sin(x-y)+2\sin(x+y)=0$ odkiaľ
$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+(k+m)\frac{\pi}{2}$
$y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+(k-m)\frac{\pi}{2},\ k,m=0\pm1,\pm2,\dots,$ uvažujte a) $k=2r,\ m=2l-1$ a b) $k=2r-1,\ m=2l,\ r=0,\pm1,\pm2,\dots,\ l=0,\pm1,\pm2,\dots$.

207 $z_{\text{l.min}} = z(0,0) = 0$, $z_{\text{l.max}} = e^{-1}$, kde body (x,y) ležia na kružnici $x^2+y^2=1$ (zaveďte substitúciu $t = x^2+y^2$ a nájdite lokálne extrémy funkcie $z = te^{-t}$).

208 $z_{\text{l.min}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\frac{1}{2e}$; $z_{\text{l.max}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \frac{1}{2e}$.

209 f nemá lokálne extrémy.

210 $z_{\text{l.min}} = z(x,0) = 0$, kde $0 < x < 4$; $z_{\text{l.max}} = z(x,0) = 0$, kde $(x<0) \vee (x>4)$, $z_{\text{l.max}} = z(1,2) = 4$.

211 $u_{\text{l.min}} = u(0, 0-1) = 2$.

212 $u_{\text{l.min}} = u(1,-1,1) = 1$.

213 $u_{\text{l.min}} = u(-1,-2,3) = -14$.

214 $u_{\text{l.min}} = u\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{27}$.

215 $u_{\text{l.min}} = u(24,-144,-1) = -6913$.

216 $u_{\text{min}} = u\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = 4$.

217 $u_{\text{l.min}} = u\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$; $u_{\text{l.max}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

218 $u_{\text{l.max}} = u\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$.

219 $u_{\text{l.max}} = u\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}$.

220 $f_{\text{max}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}$; $g_{\text{min}} = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}$.

221 $f_{\text{l.min}} = f(-3) = 6$; $g_{\text{l.max}} = g(3) = -6$.

222 $f_{\text{l.max}} = f\left(-6 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = -6 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$; $f_{\text{l.min}} = f\left(-6 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = -6 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

223 $f_{\text{l.max}} = f\left(0, \frac{16}{7}\right) = -\frac{8}{7}$; $g_{\text{l.min}} = f(0,-2) = 1$.

224 $f_{\text{l.min}} = f(0,0) = -\sqrt{2}$; $f_{\text{l.max}} = f(1,1) = f(-1,-1) = \sqrt{1+\sqrt{3}}$; $g_{\text{l.min}} = g(1,1) = g(-1,-1) = -\sqrt{1+\sqrt{3}}$; $g_{\text{l.max}} = g(0,0) = \sqrt{2}$.

225 $f_{\text{l.max}} = f\left(-6, 6\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3}$; $g_{\text{l.min}} = f\left(-6, -6\sqrt{3}\right) = -12\sqrt{3}$.

226 $z_{\text{min}} = z\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

227 $z_{\text{min}} = z\left(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a\right) = 2\sqrt{2}a$; $z_{\text{max}} = a\left(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a\right) = -2\sqrt{2}a$.

228 $z_{\text{min}} = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$; $z_{\text{max}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

229 $z_{\text{min}} = z\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3}$; $z_{\text{max}} = z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$.

230 $u_{\text{min}} = u\left(\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$.

$\boxed{\mathbf{231}}$ Nemá extrémy.

$\boxed{\mathbf{232}}$ $u_{\min} = u\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -3;\ u_{\max} = u\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3.$

$\boxed{\mathbf{233}}$ $u_{\max} = u\,(1,1,1) = 1.$

$\boxed{\mathbf{234}}$ $u_{\min} = u\,(-1,0,0) = u\,(1,0,0) = a^{-2};\ u_{\max} = u\,(0,0,-1) = u\,(0,0,1) = c^{-2}.$

$\boxed{\mathbf{235}}$ $u_{\min} = u\,(-1,-1,-1) = u\,(-1,1,1) = u\,(1,-1,1) = u\,(1,1,-1) = -01;\ u_{\max} = u\,(1,1,1) = u\,(1,-1,-1) = u\,(-1,1,-1) = u\,(-1,-1,1) = 1.$

$\boxed{\mathbf{236}}$ $u_{\min} = u\,(-1,1,0) = 0.$

$\boxed{\mathbf{237}}$ $u_{\min} = u\,(2,2,1) = u\,(2,1,2) = u\,(1,2,2) = 4;\ u_{\max} = u\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = u\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) = u\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = 4\frac{4}{27}.$

$\boxed{\mathbf{238}}$ $r = 3,\ h = 6.$

$\boxed{\mathbf{239}}$ $x = \frac{2a}{\sqrt{3}},\ y = \frac{2b}{\sqrt{3}},\ z = \frac{2c}{\sqrt{3}}.$

$\boxed{\mathbf{240}}$ $\varrho_{\min} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$

$\boxed{\mathbf{241}}$ Zostrojte funkciu $\Phi = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \lambda\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ a zostavte systém rovníc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} &= (a_{11}-\lambda)\,x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} &= a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)\,x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\,x_n = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Systém (1) má netriviálne riešenie $\Longleftrightarrow$ ak λ je koreňom rovnice

$$\det\ (A - \lambda I) = 0, \tag{2}$$

kde A je matica systému (1) a I je jednotková matica.
Prepíšte systém (1) do tvaru

$$Ax = \lambda x. \tag{3}$$

Dokážte, že čísla λ sú reálne. Nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sú korene rovnice (1). Potom pre každé $\lambda_i, i = 1,2,\ldots,n$ zo systému (1) pri podmienke $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ nájdite stacionárne body $\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Ak vynásobíte rovnice zo systému (1) s $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a sčítate ich dostanete

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.$$

Ak beriete do úvahy rovnicu väzby dostanete rovnosť $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda$, ktorá v stacionárnych bodoch má tvar $u\left(x_i^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\right) = \lambda_i,\ i = 1, 2, \dots, n$. Odtiaľ vyplýva, že $u_{\max} = \max\limits_{1\le i\le u} \lambda_i,\ u_{\min} = \min\limits_{1\le i\le u} \lambda_i$.

$\boxed{\mathbf{242}}$ Označte $u = \frac{x^n+y^n}{2}$, $x + y = s$ a utvorte funkciu Φ: $\Phi = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(s - x - y)$. Z rovníc $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$, $x + y = s$ dostanete: $\lambda = \frac{n}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-1}$, $x = y = \frac{s}{2}$. Pretože $d^2\Phi\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) > 0$, tak $u_{\min} = u\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^n \le u(x, y)$, ak $x + y = s$, alebo $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \le \frac{x^{x^2}+y^{x^2}}{2}$.

$\boxed{\mathbf{243}}$ Utvorte funkciu Φ

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i^m + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na\right).$$

Zo systému rovníc

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} &= mx_i^{m-1} + \lambda = 0,\ i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i &= na, \end{aligned} \tag{1}$$

nájdete $\lambda = -ma^{m-1}$ a stacionárny bod $a^0 = (a, a, \dots, a)$. Zistite, že $d^2\Phi(a^0) > 0$, teda $z_{\min} = na^n$.

$\boxed{\mathbf{244}}$ Nájdite viazaný lokálny extrém funkcie

$$u = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{1/q} \quad \text{pri väzbe } A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ A = \text{konštanta}.$$

Zostrojte funkciu

$$\Phi = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{1/q} + \lambda\left(A - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

a vypočítajte

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_j},\ j = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

Predpokladajte, že $x_i > 0,\ a_i > 0,\ i = 1, 2, \dots, n$, vydeľte j-tú rovnosť s m-tou rovnosťou zo systému (1) a dostanete $\left(\frac{x_j}{x_m}\right)^{q-1} = \frac{a_j}{a_m}$ odkiaľ pri pevnom m dostanete:

$$x_j = x_m\left(\frac{a_j}{a_m}\right)^{1/(q-1)},\ j = 1, 2, \dots, n,\ j \ne m \tag{2}$$

a po dosadení (2) do rovnice väzby dostanete:

$$\sum_{\substack{i=1\\ inot=m}}^{n} a_i x_m \left(\frac{a_i}{a_m}\right)^{1/(q-1)} + a_m x_m = A. \tag{3}$$

Ďalej využite vzťah $\frac{q}{q-1} = p \Longrightarrow \frac{1}{q-1} = \frac{p}{q}$ a upravte (3) na tvar $\frac{x_m}{a_m^{1/(q-1)}} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{q/(q-1)} = A$, z ktorého dostaneme stacionárny bod $x^{(0)}$ so súradnicami $x_m = \frac{A.a_m^{p/q}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}$, $m = 1, 2, \ldots, n$. Vyjadrite druhý diferenciál funkcie Φ a uvážte, že z rovnice väzby vyplýva $\sum_{i=1}^{n} a_i dx_i = 0$. V stacionárnom bode dostanete

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{q-1} dx_i\right)^2 = \left(\frac{A}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\right)^{2(g-1)} \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i = 0.$$

Nakoniec dostanete, že $d^2\Phi\left(x^{(0)}\right) > 0$, teda v stacionárnom bode $x^{(0)}$ má funkcia u minimum $u_{\min} = A$ t.j. $u \geq A$, čo je Hölderova nerovnosť.

245 $\max\limits_M z = z(3, -4) = 125$; $\min\limits_M z = z(-3, 4) = -75$.

246 $\max\limits_M z = z(0, 0) = -1$; $\min\limits_M z = z(0, 3) = -19$.

247 $\max\limits_M z = z(0, 1) = z(1, 0) = z(0, -1) = 1$; $\min\limits_M z = z(0, 0) = 0$.

248 $\max\limits_M z = z(2, 0) = z(-2, 0) = 4$; $\min\limits_M z = z(0, -2) = z(0, 2) = -4$.

249 $\max\limits_M z = z(1, 0) = z(-1, 0) = \frac{3}{2}$; $\min\limits_M z = z(0, 0) = 0$.

250 $\max\limits_M z = z\left(1, \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{9}$; $\min\limits_M z = 0$ na celej hranici množiny M.

251 $\max\limits_M u = u(0, 0, 10) = 300$; $\min\limits_M u = u(0, 0, 0) = 0$.

252 $\max\limits_M u = u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = 1 + \sqrt{2}$; $\min\limits_M u = u\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2}$.

253 $\max\limits_M u = u\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = a^2$; $\min\limits_M u = -\frac{a^2}{2}$ na celej krivke
$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
$x + y + z = 0$.

IV. Parametrické integrály

1. Riemannov parametrický integrál

Definícia 1.1. *Nech $E =< a, b > \times (c, d)$ a nech funkcia $f : E \to R$ je pre každé $y \in (c, d)$ riemannovsky integrovateľná na intervale $< a, b >$. Potom funkciu*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

nazývame Riemannovým parametrickým integrálom.

Veta 1.1. *Ak je funkcia f spojitá na množine E, tak funkcia F je spojitá na intervale (c, d).*

Veta 1.2. *Ak je funkcia f spojitá na množine E a hranice integrovania sú spojité funkcie φ a ψ, ktoré zobrazujú interval (c, d) do intervalu $< a, b >$, tak funkcia*

$$I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

je spojitá na intervale (c, d).

Veta 1.3. *Za predpokladov vety 1.1, resp. vety 1.2, platí pre $y_0 \in (c, d)$:*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y) dx,$$

resp.

$$\lim_{y \to y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0) dx.$$

Veta 1.4. *Ak spojitá funkcia $f : E \to R$ má na množine E spojitú parciálnu deriváciu $\frac{\partial f}{\partial y}$, tak funkcia $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ je diferencovateľná na (c, d) a platí*

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \text{ (tzv. Leibnizov vzorec).}$$

Veta 1.5. *Ak spojitá funkcia $f : E \to R$ má na množine E spojitú parciálnu deriváciu $\frac{\partial f}{\partial y}$ a funkcie φ a ψ, ktoré zobrazujú interval (c, d) do intervalu $< a, b >$, sú diferencovateľné na (c, d), tak funkcia $I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx$ je diferencovateľná na (c, d) a platí*

$$I'(y) = f\left(\psi(y), y\right)\psi'(y) - f\left(\varphi(y), y\right)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Veta 1.6. *Ak je funkcia f spojitá na množine $< a, b > \times < c, d >$, tak*

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx.$$

1. Nájdite definičný obor funkcie $F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2}$.

2. Zistite, kde sú spojité nasledujúce funkcie:

a) $F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{\pi}{4}}(x^2 + y^2 + 1)}$,

b) $F(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^2}{(x + |y|)\sqrt{\operatorname{tg} \frac{y}{2}}} dx, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$

c) $F(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\operatorname{arctg}\,(x^2 + y^2) \sin x} dx, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

3. Zistite, pre ktoré hodnoty argumentu y je spojitá funkcia

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx,$$

kde funkcia f je spojitá a kladná na intervale $< 0, 1 >$.

4. Dokážte, že funkcia

$$F(y) = \int_0^{\pi} \frac{2\cos x + 2y}{1 + 2y\cos x + y^2} dx$$

nie je spojitá v bodoch $y = 1$ a $y = -1$.

5. Ukážte, že integrál $F(y) = \displaystyle\int_0^1 f(x, y)dx$ z nespojitej funkcie $f(x, y) = \operatorname{sgn}\,(x - y)$ je spojitou funkciou. Zostrojte graf funkcie F.

6.* Dokážte, že funkcia $F(y) = \int_a^b \varphi(x) f(x,y)dx$ je spojitá na $< c,d >$, ak sú splnené podmienky:
(i) funkcia f je spojitá na $< a,b > \times < c,d >$,
(ii) funkcia φ je absolútne integrovateľná na intervale (a,b).

7. Nájdite:

a) $\lim\limits_{y\to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+y^2}dx,\ |y| < \frac{1}{2}$,

b) $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x+y)}{x^2y^2+xy+1}dx$,

c) $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^2 x^2 \cos xydx$,

d) $\lim\limits_{y\to +\infty} \int_1^2 \frac{y}{x+y}e^{-x^2y}dx$,

e) $\lim\limits_{y\to 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2},\ |y| < 1$,

f) $\lim\limits_{n\to \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$,

g) $\lim\limits_{y\to \infty} \int_1^2 \frac{\ln(x+|y|)}{\ln(x^2+y^2)}dx$.

8. Nájdite $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta$.

9. Nech funkcia f je spojitá na intervale $< A,B >$. Dokážte, že

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x \left[f(t+h)-f(t)\right]dt = f(x)-f(a)\ (A < a < x < B).$$

10. Je možné uskutočniť limitný prechod za znakom integrálu vo výraze

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx?$$

11. Dokážete, že v nasledujúcich prípadoch je možný limitný prechod za znakom integrálu:

a) $\int_0^2 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x+y^2}}dx$ pre $y\to\infty$,

b) $\int_{-1}^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{1+y}\right)dx$ pre $y\to 0$.

12. Nech
(i) funkcia $\frac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá na $< a,b > \times < c,d >$,
(ii) funkcia φ je absolútne integrovateľná na intervale (a,b).
Potom integrál

$$F(y) = \int_a^b \varphi(x)f(x,y)dx$$

je spojite diferencovateľnou funkciou premennej $y \in (c,d)$ a platí

$$F'(y) = \int_a^b \varphi(x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

Dokážte!

13. Vypočítajte $F'(y)$, ak

$$F(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx, \; y > 0.$$

Čo možno povedať o derivácii v bode $y = 0$?

14. Je možné vypočítať pomocou Leibnizovho vzorca deriváciu funkcie

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx,$$

v bode $y = 0$?

15. Nájdite $F'(y)$, ak

a) $F(y) = \displaystyle\int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx,$

b) $F(y) = \displaystyle\int_{y^2}^{3y^2+1} \frac{e^{xy}}{x} dx, \; y \neq 0,$

c) $F(y) = \displaystyle\int_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx,$

d) $F(y) = \displaystyle\int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x} dx,$

e) $F(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx,$

f) $F(y) = \displaystyle\int_0^y f(x+y, x-y) dx,$

g) $F(y) = \displaystyle\int_0^{y^2} dx \int_{x-y}^{x+y} \sin\left(x^2 + t^2 - y^2\right) dt.$

16. Nájdite $F''(y)$, ak

a) $F(y) = \displaystyle\int_0^y (x+y) f(x) dx$, kde f je diferencovateľná funkcia,

b) $F(y) = \displaystyle\int_a^b |x-y| f(x) dx$, kde $a < b$ a f je spojitá funkcia na $< a, b >$,

c) $F(y) = \frac{1}{h^2} \displaystyle\int_0^h d\xi \int_0^h f(y + \xi + \eta) \, d\eta$ $(h > 0)$, kde f je spojitá funkcia.

17. Nájdite $F^{(n)}(y)$, ak

$$F(y) = \int_0^y (y-x)^{n-1} f(x) dx$$

a f je spojitá funkcia.

18. Dokážte správnosť vzorca

$$I_n = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \psi_n(x), \; n = 1, 2, \ldots,$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ak } x \neq 0, \\ 1, & \text{ak } x = 0, \end{cases}$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x y^n \cos\left(y + \frac{n\pi}{2}\right) dy, & \text{ak } x \neq 0, \\ \dfrac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n+1}, & \text{ak } x = 0, \; n = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Použijúc uvedený vzorec urobte odhad

$$\left| \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right| \leq \frac{1}{n+1} \text{ pre } x \in (-\infty, +\infty).$$

19. Funkciu $f(x) = x^2$ na intervale $< 1, 3 >$ približne zameňte lineárnou funkciou $a + bx$ tak, aby hodnota integrálu

$$\int_1^3 \left(a + bx - x^2\right)^2 dx$$

bola minimálna.

20. Dokážte, že Besselova funkcia celého indexu n

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin\varphi)\, d\varphi$$

vyhovuje Besselovej rovnici

$$x^2 I_n''(x) + x I_n'(x) + \left(x^2 - n^2\right) I_n(x) = 0.$$

21. Vypočítajte $\displaystyle\int_1^2 x^n dx$ pre $n \neq -1$ a potom pomocou derivovania podľa parametra vypočítajte $\displaystyle\int_1^2 x^n \ln x dx$.

22. Vyjdúc z rovnosti

$$\int_0^b \frac{dx}{1 + ax} = \frac{1}{a} \ln(1 + ab)$$

odvoďte pomocou derivovania podľa parametra vzorec

$$\int_0^b \frac{x dx}{(1 + ax)^2} = \frac{1}{a^2} \ln(1 + ab) - \frac{b}{a(1 + ab)}.$$

23. Vyjdúc z rovnosti

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arctg } \frac{b}{a}$$

vypočítajte

$$\int_0^b \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}, a \neq 0.$$

24. Pomocou derivovania podľa parametra vypočítajte nasledujúce integrály:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2-\sin^2 x\right) dx,\ \ a>1,$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right) dx,$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1-2a\cos x + a^2\right) dx,$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{arctg }(a\text{tg } x)}{\text{tg } x} dx,$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}.\frac{dx}{\cos x},\ \ |a|<1.$

25. V ktorých prípadoch je prípustná zámena poradia integrovania?

a) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\cos xy}{x+y} dx,$

b) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx,$

c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^1 \frac{\text{tg }(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dx,$

d) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-1}^1 \frac{1}{y}\text{arctg }\frac{x}{y} dx.$

26. Použijúc vzorec

$$\frac{\text{arctg } x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2},$$

vypočítajte integrál

$$\int_0^1 \frac{\text{arctg } x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

27. Pomocou integrovania podľa parametra vypočítajte integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x} dx, a>0, b>0.$$

28. Vypočítajte integrály:

a) $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x} dx,$

b) $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x} dx,\ \ a>0,\ \ b>0.$

29. Dokážte správnosť vzorca

$$\int_0^x tI_0(t)dt = xI_1(x),$$

kde $I_0(x)$ a $I_1(x)$ sú Besselove funkcie indexov 0 a 1 (pozri úlohu 20).

2. Nevlastné parametrické integrály

A. Nevlastný parametrický integrál prvého druhu

Definícia 2.1. *Nech f je reálna funkcia definovaná na množine $< a, \infty) \times (c, d)$ a nech pre každé $y \in (c, d)$ existuje integrál $\int_a^\infty f(x, y)dx$. Potom funkciu*

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$$

nazývame nevlastným parametrickým integrálom prvého druhu.

Definícia 2.2. *Integrál $F(y)$ nazývame rovnomerne konvergentným na intervale (c, d), ak*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B(\varepsilon) > a, \text{že } \forall b > B(\varepsilon) \text{ a } \forall y \in (c, d)$$

platí

$$\left| \int_b^\infty f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

Veta 2.1. *(Cauchyho kritérium.) Nevlastný parametrický integrál $F(y)$ konverguje rovnomerne na (c, d) vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje také $B(\varepsilon) > a$, že pre každé $b' > B(\varepsilon)$ a $b'' > B(\varepsilon)$ platí*

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

pre všetky $y \in (c, d)$.

Veta 2.2. *(Weierstrassovo kritérium.) Ak existuje taká funkcia $g :< a, \infty) \to R$, že*

$$|f(x, y)| \leq g(x)$$

pre všetky $x \in < a, \infty)$ a $y \in (c, d)$ a nevlastný integrál

$$\int_a^\infty g(x)dx$$

konverguje, tak nevlastný parametrický integrál $F(y)$ konverguje absolútne a rovnomerne na intervale (c, d).

Veta 2.3. *Ak je funkcia f spojitá na množine $< a, \infty) \times (c, d)$ a integrál $F(y)$ konverguje rovnomerne na (c, d), tak funkcia $F(y)$ je spojitá na intervale (c, d).*

Veta 2.4. *Za predpokladov vety 2.3 platí*

$$\lim_{y \to y_0 \in (c,d)} \int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty f(x, y_0)dx.$$

Veta 2.5. *Ak*

1. *funkcie f a $\frac{\partial f}{\partial y}$ sú spojité na množine $< a,\infty) \times (c,d)$,*
2. *integrál $\int_a^\infty f(x,y)dx$ konverguje pre všetky $y \in (c,d)$,*
3. *integrál $\int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ konverguje rovnomerne na intervale (c,d),*

tak funkcia F je diferencovateľná na (c,d) a platí

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$$

pre $y \in (c,d)$.

Veta 2.6. *Ak je funkcia f spojitá na množine $< a,\infty)\times < c,d >$ a integrál $F(y)$ konverguje rovnomerne na $< c,d >$, tak*

$$\int_c^d \left[\int_a^\infty f(x,y)dx\right] dy = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx.$$

Tento vzorec platí aj v prípade, že $d = \infty$, ak funkcia f je nezáporná a spojitá na $< a,\infty)\times < c,\infty)$, integrály

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx \text{ a } G(y) = \int_c^\infty f(x,y)dy$$

konvergujú a sú spojitými funkciami na intervaloch $< a,\infty)$, resp. $< c,\infty)$, a aspoň jeden z integrálov

$$\int_c^\infty \left[\int_a^\infty f(x,y)dx\right] dy \text{ alebo } \int_a^\infty \left[\int_c^\infty f(x,y)dy\right] dx$$

konverguje.

B. Nevlastný parametrický integrál druhého druhu

Definícia 2.3. *Nech f je reálna funkcia definovaná na množine $< a,b) \times (c,d)$ a nech je neohraničená na každom intervale $(b-\delta,b) \times (c,d), \delta > 0$. Ak pre každé $y \in (c,d)$ konverguje nevlastný integrál*

$$\int_a^b f(x,y)dx,$$

tak funkciu

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

nazývame nevlastným parametrickým integrálom druhého druhu.

Poznámka 2.1. Podobne ako v odseku A je možné aj v prípade nevlastného parametrického integrálu druhého druhu zaviesť pojem rovnomernej konvergencie a dokázať podobné tvrdenia ako boli tie, ktoré platili pre nevlastný parametrický integrál na neohra-ničenom intervale.

30. Nájdite všetky hodnoty parametra, pri ktorých konvergujú nasledujúce nevlastné parametrické integrály:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^y}$, b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xy}}{1+x^2}dx$,

c) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{x\cos x}{x^y+a^y}dx,\ a>0$, d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^q}{x^p}dx$,

e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^y}$, f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^y+\sin x}dx,\ y>0$.

31. Dokážte, že integrál

$$F(y)=\int_0^\infty ye^{-xy}dx$$

a) konverguje rovnomerne v ĺubovoĺnom intervale $<a,b>$, kde $a>0$,
b) konverguje nerovnomerne v intervale $<0,b>$.

32. Dokážte, že Dirichletov integrál

$$D(y)=\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}dx$$

a) konverguje rovnomerne na ĺubovoĺnom intervale $<a,b>$ neobsahujúcom bod $y=0$,
b) konverguje nerovnomerne na každom intervale $<a,b>$ obsahujúcom bod $y=0$.

33. Dokážte, že integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\cos x dx$$

rovnomerne konverguje na ĺubovoĺnom uzavretom intervale neobsahujúcom ± 1.

34. Zistite, či rovnomerne konverguje integrál

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^y}$$

v nasledujúcich intervaloch:

a) $1<y_0\le y<\infty$,
b) $1<y<\infty$.

35. Zistite, či konvergujú rovnomerne na daných intervaloch nasledujúce integrály:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin xy dx,\ -\infty<y<\infty$, b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x\sqrt{x}}dx,\ 0<y\le A$,

c) $\displaystyle\int_1^\infty x^y e^{-x}dx,\ a\le y\le b$, d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}dx,\ -\infty<y<\infty$,

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x-y)^2+1},\ 0 \le y < \infty,$ f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx,\ 0 \le y < \infty,$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-yx^2} dx,\ 0 \le y < \infty,$ h) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-(x-y)^2} dx,\ \alpha)\ a < y < b,\ \beta)\ -\infty < y < \infty,$

i) $\displaystyle\int_0^1 yx^{y-1} dx,\ 0 < \delta \le y < 1,$ j) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2(1+x^2)} \sin y dx,\ -\infty < y < \infty,$

k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^y}{\sqrt{1-x^2}} dx,\ 0 \le y < \infty,$ l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^y} \sin\frac{1}{x} dx,\ 0 < y < 2.$

36. Dokážte, že integrál

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-(x-y)^2} dx$$

je spojitou funkciou parametra y.

37. Zistite, či sú spojité v daných intervaloch nasledujúce funkcie:

a) $\displaystyle F(y) = \int_0^\infty \frac{x}{2+x^y} dx,\ (2,\infty),$ b) $\displaystyle F(y) = \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^y} dx,\ (0,\infty),$

c) $\displaystyle F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin\left[(1-y^2)x\right]}{x} dx,\ (-\infty,\infty),$ d) $\displaystyle F(y) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^y} dx,\ (0,2),$

e) $\displaystyle F(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{|\sin x|^y} dx,\ (0,1),$ f) $\displaystyle F(y) = \int_0^\infty ye^{-xy^2} dx,\ (-\infty,\infty).$

38. Je prípustný prechod k limite za znakom integrálu vo výraze $\displaystyle\lim_{y\to+0} \int_0^\infty ye^{-xy} dx$?

39. Nech f je funkcia integrovateľná v intervale $(0,\infty)$. Dokážte, že platí

$$\lim_{y\to+0} \int_0^\infty e^{-xy} f(x) dx = \int_0^\infty f(x) dx.$$

40. Vypočítajte integrál

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right] dx$$

použijúc limitný prechod za znakom integrálu.

41. Nájdite

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1},$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x) dx$, kde $f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}, & \text{ak } x > 0, \\ 0, & \text{ak } x = 0, \end{cases}$

c) $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin 2xy}{x} dx,$

d) $\lim\limits_{y\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-y^2(x^2+1)}}{x^2+1} dx$.

42. Použijúc vzorec $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}, n > 0$, vypočítajte integrál $I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx$, kde m je prirodzené číslo.

43. Pomocou rovností $\int_0^\infty e^{-xy} dx = \frac{1}{y}, y > 0$, vypočítajte $\int_0^\infty e^{-xy} x^{n-1} dx$, kde n je celé číslo.

44. Pomocou rovnosti $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+y^2} dx = \frac{\pi}{2y}$ vypočítajte $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+y^2)^n} dx$, kde n je celé číslo.

45. Dokážte, že Dirichletov integrál

$$D(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} dx$$

má pre $y \neq 0$ deriváciu, avšak nedá sa nájsť pomocou Leibnizovho vzorca.

46. Dokážte správnosť Froullaniho vzorca

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \ a > 0, \ b > 0,$$

kde f je spojitá funkcia a integrál $\int_A^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ má zmysel pre ĺubovoĺné $A > 0$.

47. Pomocou Froullaniho vzorca vypočítajte nasledujúce integrály, v ktorých $a > 0, b > 0$:

a) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$,

b) $\int_0^\infty \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx$,

c) $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$,

d) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx$.

48. Pomocou derivovania podĺa parametra vypočítajte nasledujúce nevlastné integrály:

a) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx, \ a > 0, \ b > 0$,

b) $\int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right)^2 dx, \ a > 0, \ b > 0$,

c) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx, \ a > 0, \ b > 0$,

d) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos mx dx, \ a > 0, \ b > 0$,

e) $\int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx, \ |a| \le 1$,

f) $\int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \ |a| \le 1$,

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1 + a\sin x}{1 - a\sin x}\right) \frac{dx}{\sin x}, \ |a| < 1$,

h) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} dx$,

i) $\int_0^\infty \frac{\ln(x^2 + a^2)}{x^2 + b^2} dx$,

j) $\int_0^\infty \frac{\ln(1 + a^2x^2)\ln(1 + b^2x^2)}{x^4} dx$.

49. Dokážte, že funkcia

$$y(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

vyhovuje diferenciálnej rovnici

$$xy'' - 2ny' + xy = 1.$$

50. Vypočítajte Eulerov-Poissonov integrál

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

pomocou vzťahu

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty x e^{-x^2 y^2} dy.$$

51. Pomocou Eulerovho-Poissonovho integrálu vypočítajte:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+2bx+c)} dx,\ a>0,\ ac-b^2>0,$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} \mathrm{ch}\ bx dx,\ a>0,$

c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx,\ a>0,$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2} dx,\ a>0,\ b>0,$

e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx dx,\ a>0,$ f) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-ax^2} \sin bx dx,\ a>0.$

52. Vyjdúc z integrálu

$$I(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx, a \ge 0, b \in R,$$

vypočítajte Dirichletov integrál

$$D(b) = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx.$$

53. Pomocou Dirichletovho integrálu a Froullaniho vzorca vypočítajte:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-\cos bx}{x^2} dx,\ a>0,$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx,\ a,b \in R,$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx,\ a \ne \pm b,$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 ax}{x} dx,\ a \in R,$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx,\ a \in R,$ f) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^3 dx,\ a \in R,$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx,$ h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 ax - \sin^4 bx}{x} dx,\ ab \ne 0,$

i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}dx.$

54. Pomocou rovnosti

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-y(1+x^2)}dy$$

vypočítajte Laplaceov integrál

$$L(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}dx.$$

55. Vypočítajte integrály:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx,$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2}dx,$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \alpha x}{ax^2+2bx+c}dx,\ a>0,\ ac-b^2>0.$

56. Pomocou rovností $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy^2}dy,\ x>0,$ vypočítajte tzv. Fresnelove integrály

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx,$$
$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx.$$

57. Pomocou Fresnelových integrálov vypočítajte:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin\left(ax^2+2bx+c\right)dx,\ a\neq 0,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin x^2 . \cos 2ax dx,$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \cos x^2 . \cos 2ax dx.$

58. Dokážte, že pre Laplaceovu funkciu $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ platia vzťahy:

a) $\displaystyle\int_0^x \Phi(at)dt = \frac{e^{-a^2x^2}-1}{a\sqrt{\pi}} + x\Phi(ax),$ b) $\displaystyle\int_0^\infty [1-\Phi(x)]\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$

59. Dokážte, že pre Besselovu funkciu nultého rádu $I_0(x) = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos\left(x\sin\varphi\right)d\varphi$ platí:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}I_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a>0,$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}I_0(x)dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ak } a\geq 1,\\ \arcsin a, & \text{ak } |a|\leq 1,\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ak } a\leq -1.\end{cases}$

60. Nájdite Laplaceovu transformáciu $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt,\ p > 0$, funkcie f, ak:

a) $f(t) = t^n$, n - prirodzené číslo,

b) $f(t) = \sqrt{t}$,

c) $f(t) = \cos t$,

d) $f(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t}$,

e) $f(t) = \sin\left(\alpha\sqrt{t}\right)$.

3. Eulerove integrály

A. Beta-funkcia

Definícia 3.1. *Funkciu*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt,$$

ktorá je definovaná pre $x > 0,\ y > 0$, *nazývame Eulerovým integrálom prvého druhu alebo beta - funkciou.*

Základné vlastnosti:

(i) $B(x,y) = B(y,x)$.

(ii) $B(x,y) = \dfrac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1)$.

(iii) $B(x,n) = \dfrac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}$ pre $n = 1,2,\dots$.

(iv) $B(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$.

(v) $B(x,1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x},\ 0 < x < 1$.

B. Gama-funkcia

Definícia 3.2. *Funkciu*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$$

ktorá je definovaná pre $x > 0$, *nazývame Eulerovým integrálom druhého druhu alebo gama-funkciou.*

Základné vlastnosti:

(i) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

(ii) $\Gamma(n) = (n-1)!$ pre prirodzené n.

(iii) $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x},\ 0 < x < 1$.

(iv) $\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\,\Gamma(2x)$, špeciálne:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad \text{pre prirodzené } n.$$

(v) $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

(vi) $, (x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} n^x$.

61. Pomocou Eulerových integrálov vypočítajte nasledujúce integrály:

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{3}}dx$,

c) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0$,

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x^3)^2}dx$,

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$,

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx$,

g) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx,\ n\in N$.

62. Určte oblasť existencie a vyjadrite pomocou Eulerových integrálov:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx,\ n>0$,

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}dx$,

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}dx,\ a>0,\ b>0,\ n>0$,

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}},\ m>0$,

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx$,

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^{\,n} x\,dx$,

g) $\displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-x^n}dx$,

h) $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$,

i) $\displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-ax}\ln x\,dx,\ a>0$,

j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$,

k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx$,

l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx,\ 0<p<1$.

63. Vypočítajte:

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln , (x)dx$ (Raabeho integrál),

b) $\displaystyle\int_a^{a+1} \ln , (x)dx,\ a>0$,

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln , (x)\sin\pi x\,dx$,

d) $\displaystyle\int_0^1 \ln , (x)\cos 2n\pi x\,dx$, n je prirodzené číslo.

64. Dokážte, že ak $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$ a $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx$, n je prirodzené číslo, tak

$$I_1 I_2 = \frac{\pi}{2n}.$$

65. Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^n}dx = 1$.

66. Pomocou rovnosti $\dfrac{1}{x^m} = \dfrac{1}{,\,(m)} \displaystyle\int_0^\infty t^{m-1} e^{-xt} dt$, $x > 0$, nájdite integrály:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^m} dx,\ 0 < m < 1,\ a \neq 0,$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^m} dx,\ 0 < m < 2.$

67. Nájdite dĺžku lemniskáty $r^2 = a^2 \cos 2\varphi,\ a > 0$.

68. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkou $r^4 = \sin^3 \varphi \cos \varphi$.

69. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkou $|x|^n + |y|^n = a^n,\ n > 0,\ a > 0$.

Výsledky, návody a poznámky

1 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2 a) Spojitá; b) spojitá; c) spojitá pre $y \neq 0$.

3 Spojitá pre $y \neq 0$.

7 a) 1; b) 1; c) $\frac{8}{3}$; d) 0; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\ln \frac{2e}{1+e}$; g) $\frac{1}{2}$.

8 0.

10 Nie. (Prejdúc k limite za znakom integrálu dostávame nulu. Ak najskôr vypočítame integrál a potom prejdeme k limite, dostávame $\frac{1}{2}$. Všimnite si, že v bode $(0,0)$ integrovaná funkcia nie je spojitá.)

13 $\frac{1}{2} \ln \left[\frac{y^2}{1+y^2}\right]$, pre $y > 0$. V bode $y = 0$ derivácia neexistuje.

14 Nie. ($F'(0) = \pi$, kým derivácia podintegrálnej funkcie podĺa y sa pre $y = 0$ rovná nule.)

15 a) $2ye^{-y^5} - e^{-y^3} - \int_y^{y^2} x^2 e^{-x^2 y} dx$; b) $e^{(3y^2+1)y}\left[\frac{1}{y} + \frac{6y}{(3y^2+1)}\right] - \frac{3e^{y^3}}{y}$; c) $e^{y|\cos y|}\cos y - \ e^{y|\sin y|}\sin y + \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}e^{y\sqrt{1-x^2}}dx$; d) $\left[\frac{1}{b} + \frac{1}{(b+y)}\right]\sin[y(b+y)] - \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{(a+y)}\right]\sin[y(a+y)]$; e) $(\frac{2}{y}\ln(1+y^2)$; f) $f(y,-y) + 2\int_0^y f'_u(u,v)dx$, kde $u = x + y$ a $v = x - y$; g) $2y\int_{y^2-y}^{y^2+y} \sin\left(t^2 + y^4 - y^2\right) dt + 2\int_0^{y^2} \sin 2x^2 . \cos 2xy dx -$
$2y\int_0^{y^2} dx \int_{x-y}^{x+y} \cos\left(x^2 + t^2 - y^2\right) dt$.

16 a) $F''(y) = 3f(y) + 2yf'(y)$; b) $F''(y) = 2f(y)$, ak $y \in (a,b), F''(y) = 0$, ak $y \notin (a,b)$; c) $F''(y) = \frac{\triangle^2 f(y)}{h^2}$, kde $\triangle^2 f(y) = f(y+2h) - 2f(y+h) + f(y)$.

17 $F^{(n)}(y) = (n-1)! f(y)$.

19 $4x - \frac{11}{3}$.

21 $\frac{(n+1)2^{n+1}\ln 2 - 2^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$.

23 $\frac{b}{8a^4}\left[\frac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{3}{ab}\mathrm{arctg}\ \frac{b}{a}\right]$.

24 a) $\pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$; b) $\pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}$; c) 0, ak $|a| \leq 1; \pi \ln a^2$, ak $|a| > 1$; d) $\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\ a \ln(1+|a|)$; e) $\pi \arcsin a$.

25 a) Áno; b) nie; c) áno; d) nie.

26 $\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

27 $\ln \frac{b+1}{a+1}$.

28 a) $\operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; b) $\frac{1}{2} \ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$.

30 a) $y > 1$; b) $y \geq 0$; c) $y > 1$; d) $\left|\frac{p-1}{q}\right| < 1$; e) $y < 1$; f) $y > \frac{1}{2}$.

33 Prepíšte daný integrál ako $\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(y+1)x+\sin(y-1)x}{x} dx$.

34 a) Konverguje rovnomerne; b) konverguje nerovnomerne.

35 a) Rovnomerne; b) rovnomerne; c) rovnomerne; d) rovnomerne; e) nerovnomerne; f) rovnomerne; g) nerovnomerne; h) α) rovnomerne; β) nerovnomerne; i) rovnomerne; j) nerovnomerne; k) rovnomerne; l) nerovnomerne.

37 a) Spojitá; b) spojitá; c) nespojitá v ± 1; d) spojitá; e) spojitá; f) nespojitá v $y = 0$.

38 Nie, pretože zámena poradia limity a integrálu dáva ako výsledok 0, kým v skutočnosti je daná limita rovná 1.

39 Ukážte, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje dostatočne veľké B a y vyhovujúce podmienke $0 \leq y \leq \frac{1}{B} \ln \frac{2MB}{2MB-\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 2MB)$, kde $M = \sup_{0 \leq x \leq B} |f(x)| \neq 0$, tak, že $|\int_0^\infty e^{-yx} f(x) dx - \int_0^\infty f(x) dx| < \varepsilon$.

40 Zameňte poradie limity a integrálu a použite substitúciu $x = \sqrt{n}.\operatorname{ctg} z$. Pri počítaní limity, ktorú dostanete, použite Wallisov vzorec.

41 a) 1; b) 1; c) $\frac{\pi}{2}$; d) 0.

42 $(-1)^m \frac{m!}{n^{m+1}}$.

43 $\frac{(n-1)!}{y^n}$.

44 $\frac{\pi}{2y^{2n-1}} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}$.

45 Návod: Položte $xy = t$.

47 a) $\ln \frac{b}{a}$; b) 0; c) $\ln \frac{b}{a}$; d) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$.

48 a) $\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$; b) $\ln \frac{(2a)^{2a}(2b)^{2b}}{(a+b)^{2a+2b}}$; c) $\operatorname{arctg} \frac{m(b-a)}{ab+m^2}$; d) $\frac{1}{2} \ln \frac{b^2+m^2}{a^2+m^2}$; e) $\pi\left(\sqrt{1-a^2}-1\right)$; f) $-\pi \ln \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$; g) $\pi \arcsin a$; h) $I = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\,(ab) \ln \frac{(|a|+|b|)^{|a|+|b|}}{|a|^{|a|}|b|^{|b|}}$, ak $ab \neq 0$, $I = 0$, ak $ab = 0$; i) $\frac{\pi}{|b|} \ln(|a|+|b|)$, $b \neq 0$; j) $\frac{2\pi}{3}\left[ab(a+b) + a^3 \ln a + b^3 \ln b - \left(a^3+b^3\right) \ln(a+b)\right]$, $a > 0$, $b > 0$.

50 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Návod: V integráli $I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$ urobte substitúciu $t = xy$, $x > 0$, potom vynásobte e^{-x^2} a integrujte v hraniciach $0 \leq x < +\infty$. Dostanete vzťah $I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty x e^{-x^2 y^2} dy$. V integráli na pravej strane využite substitúciu $\alpha = x^2\left(y^2+1\right)$ a dostanete $I^2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}$.

51 a) $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$; b) $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$; c) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$; d) $\sqrt{\pi}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)$; e) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$; f) $\frac{b}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

52 $\frac{\pi}{2}\text{sgn } b$.

53 a) $\pi\frac{|b|}{2} - \sqrt{\pi a}$; b) $\frac{\pi}{4}\left[\text{sgn } (a+b) + \text{sgn } (a-b)\right]$; c) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$; d) $\frac{\pi}{4}\text{sgn } a$; e) $\frac{\pi}{2}|a|$; f) $\frac{3\pi}{8}a|a|$; g) $\frac{\pi}{4}$; h) $\frac{3}{8}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$; i) $\frac{\pi}{4}$.

54 $\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$.

55 a) $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2}\right)$; b) $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4}e^{-|\alpha|}$; c) $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{\alpha b}{a}e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}$.

56 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

57 a) $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{\pi}{4}\text{sgn } a\right)$; b) $\sqrt{\pi}\cos\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$; c) $\sqrt{\pi}\sin\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$.

60 a) $\frac{n!}{p^{n+1}}$; b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; c) $\frac{p}{p^2+1}$; d) $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$; e) $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$.

61 a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{60\pi}$, ${}^3\left(\frac{1}{3}\right)$; c) $\pi\frac{a^4}{16}$; d) $\frac{\pi}{(5\sin\frac{2\pi}{5})}$; e) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; f) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; g) $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$.

62 a) $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, $0<m<n$; b) $B\left(n-m,m\right)$, $0<m<n$; c) $\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}B\left(\frac{m+1}{n}, p-\frac{m+1}{n}\right)$, $0<\frac{m+1}{n}<p$, d) $\frac{1}{m}B\left(\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{n}\right)$, $n<0$ alebo $n>1$; e) $\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$, $m>-1$, $n>-1$; f) $\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$, $|n|<1$; g) $\frac{1}{|n|}$, $\left(\frac{m+1}{n}\right)$, $\frac{m+1}{n}>0$; h) , $(p+1)$, $p>-1$; i) $\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right]$, $p>-1$; j) $-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$, $0<p<1$; k) $\ln\left|\frac{\text{tg } \frac{p\pi}{2}}{\text{tg } \frac{q\pi}{2}}\right|$, $0<p<1$, $0<q<1$; $\pi\text{cotg } \pi p$ (Návod: Integrál možno chápať ako $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon)\right]$.).

63. a) $\ln\sqrt{2\pi}$ (Vyjdite z toho, že daný integrál je možné prepísať ako $\frac{1}{2}\int_0^1\ln\left[,(x),(1-x)\right]dx$ a potom použite vzorec (iii) pre gama - funkciu.) b) $\ln\sqrt{2\pi} + a(\ln a - 1)$ (Derivujte daný integrál podľa parametra a.) c) $\frac{1}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)$ (Prepíšte daný integrál ako $\frac{1}{2}\int_0^1\ln\left[,(x),(1-x)\right]\sin\pi x dx$ a využite vzorec (iii) pre gama - funkciu.) d) $\frac{1}{4n}$.

65 Urobte substitúciu $x = t^{\frac{1}{n}}$ a využite spojitosť gama - funkcie pre $x>0$.

66 a) $\frac{\pi|a|^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}, a\neq 0$; b) $I = \frac{\pi a}{2|a|^{2-m}\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}$, ak $a\neq 0, I=0$, ak $a=0$.

67 $aB\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

68 $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

69 $\frac{2a^2}{n}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}$.

Literatúra

[1] *ALEKSANDROV, P. S.*: Úvod do obecné teórie množín a funkcií. Praha, 1954.

[2] *ALEKSANDROV, P. S.*: Vvedenije v teoriju množestv i obščuju topologiju. Moskva, 1977.

[3] *BARNOVSKÁ, M., SMÍTALOVÁ, K.*: Matematická analýza III. Skriptum. Bratislava, UK 1991.

[4] *BARNOVSKÁ, M., SMÍTALOVÁ, K.*: Matematická analýza IV. Skriptum. Bratislava, UK 1984.

[5] *BERMAN, G. N.*: Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza. Moskva, Nauka 1965. (Existuje aj slovenský preklad: Zbierka úloh z matematickej analýzy. Bratislava, SVTL 1957.)

[6] *BUTUZOV, V. F., KRUTICKAJA, N. Č., MEDVEDEV, G. N., ŠIŠKIN, A. A.*: Matematičeskij analiz v voprosach i zadačach. Funkcii neskoľkich peremennych. Moskva, Vysšaja škola 1988.

[7]] *DANKO, P. E., POPOV, A. G., KOŽEVNIKOVA, T. J.*: Vysšaja matematika v upražnenijach i zadačach. Časť 2. Moskva, Vysšaja škola 1980.

[8]] *DAVYDOV, N. A., KOROVKIN, P. P., NIKOĽSKIJ, V. N.*: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Moskava, Prosveščenije 1973.

[9] *DEMIDOVIČ, B. P.*: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu. Moskva, Nauka 1977.

[10] *ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.*: Zbierka úloh z vyššej matematiky. 3. časť. Bratislava, Alfa 1972.

[11] *ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.*: Zbierka úloh z vyššej matematiky. 4. časť. Bratislava, Alfa 1970.

[12] *ENGELKING, R.*: Topologia ogolna. Warszawa 1976.

[13] *GILLMAN, L., McDOWELL, R. H.*: Matematická analýza. Praha, SNTL 1980.

[14] *GREBENČA, M. K., NOVOSELEV, G. J.*: Kurs matematičeskogo analiza, 2. Moskva, Vysšaja škola 1961.

[15] *IVAN, J.*: Matematika II. Bratislava, Alfa 1989.

[16] *KELLEY, I. L.*: General Tolology (ruský preklad: Obščaja topologija. Moskva, Nauka 1968.)

[17] *KLUVÁNEK, I., MIŠÍK, L., ŠVEC, M.*: Matematika. I. diel. Bratislava, SVTL 1961.

[18] *KUDRJAVCEV, L. D., KUTASOV, A. D., ČECHOV, V. I., ŠABUNIN, M. I.*: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Moskva, Nauka 1984.

[19] *LEFORD, G.*: Algébre et analyse exercices. Paris, DUNOD 1964.

[20] *LJAŠKO, I. I., BOJARČUK, A. K., GAJ, J. G., GOLOVAČ, G. P.*: Matematičeskij analiz v primerach i zadačach. Časť pervaja. Kijev, Vyšča škola 1975.

[21] *LJAŠKO, I. I., BOJARČUK, A. K., GAJ, J. G., GOLOVAČ, G. P.*: Matematičeskij analiz v primerach i zadačach. Časť vtoraja. Kijev, Vyšča škola 1977.

[22] *OČAM, J. S.*: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Moskava, Prosveščenije 1981.

[23] *SADOVNIČIJ, V. A., PODKOLZIN, A. S.*: Zadači studenčeskich olimpiad po matematike. Moskva, Nauka 1978.

[24] *SIKORSKI, R.*: Funkcje rzeczywiste. Tom II. Monografie Mat. 37. Warszawa 1959.

[25] *ŠALAT, T.*: Vybrané časti z matematiky III. Kapitoly z teórie metrickéch priestorov a reálnych funkcií. Skriptum. Bratislava, UK 1976.

[26] *ŠALAT, T.*: Metrické priestory. Bratislava, Alfa 1981.

[27] *VILENKIN, N. J., BOCHAN, K. A., MARON, I. A., MATVEJEV, I. V., SMOLJANSKIJ, M. L., CVETKOV, A. T.*: Zadačnik po kursu matematičeskogo analiza. Časť I. Moskva, Prosveščeni- je 1971.

[28] *VILENKIN, N. J., BOCHAN, K. A., MARON, I. A., MATVEJEV, I. V., SMOLJANSKIJ, M. L., CVETKOV, A. T.*: Zadačnik po kursu matematičeskogo analiza. Časť II. Moskva, Prosveščenije 1971.

[29] *VINGRADOV, I. A., OLECHNIK, S. N., SADOVNIČEJ, V. A.*: Zadači i upražnenija po matematičeskomu analizu. Izd. Moskovskogo universiteta 1988.

[30] *ZORIČ, V. A.*: Matematičeskij analiz I. Moskva, Nauka 1981.

[31] *ZORIČ, V. A.*: Matematičeskij analiz II. Moskva, Nauka 1984.