Domáca úloha #1

Tu je dlho očakávaná prvá domáca úloha. Problémy vypracujte čo najpresnejšie a najpodrobnejšie, aby sa dali sledovať všetky vaše argumenty. Každý príklad píšte na novú stranu papiera. Presne označte, ktorý príklad riešite. Úlohu odovzdajte v pondelok 18. marca na začiatku prednášky.

1a) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k sa šachovnica rozmerov $2^k \times 2^k$, z ktorej vyrežeme ľavé horné políčko, dá presne pokryť kachličkami s troma políčkami spojenými do "L".

b) Dokážte, že "normálna" šachovnica rozmerov 8×8 (z ktorej nič nevyrezávame) sa takýmito kachličkami pokryť nedá.

2. Nasledovný príklad je variáciou na príklad, v ktorom sme počítali počet oblastí vytvorených v rovine k nerovnobežnými priamkami.

   Povedzme, že namiesto priamok používame jedenkrát zalomené čiary "cik-caky" (dve nerovnobežné polpriamky spojené v koncových bodoch). Nájdite formulu, závislú len od n, na výpočet maximálneho počtu c_n oblastí vytvorených v rovine n cik-cakmi. Podrobne dokážte správnosť vami nájdenej formulky.

3a) Dokážte, že každá postupnosť $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}$ reálnych čísel obsahuje buď neklesajúcu podpostupnosť (t.j. vybranú postupnosť) dĺžky $n+1$ alebo nerastúcu podpostupnosť dĺžky $n+1$.

   Tento výsledok bol po prvý raz dokázaný dvojicou Erdös, Szekeres.

b) Dokážte, že výsledok neplatí , ak zoberieme postupnosť dĺžky n^2.

4. Študent má 37 dní na prípravu na skúšku. Zo skúsenosti vie, že mu stačí, ak sa bude učiť spolu 60 hodín, ale určite sa chce učiť aspoň hodinu denne. Dokážte, že bez ohľadu na to, aký si urobí plán, existuje postupnosť následných dní, počas ktorých sa bude učiť presne 13 hodín.

   Predpokladáme, že každý deň sa bude učiť celočíselný počet hodín.

5. Označme $\mathcal{E}_n$ počet všetkých relácií ekvivalencie na n-prvkovej množine. Nájdite formulku na výpočet hodnoty $\mathcal{E}_n$ pre každé n a podrobne dokážte jej správnosť.