Domáca úloha č. 1., príklad č. 5.
Počet relácií ekvivalencie na n-prvkovej množine.

Keďže relácie ekvivalencie na množine S sú v jednoznačnej korešpondencii s rozkladmi množiny S, počet všetkých relácií ekvivalencie na množine S je rovnaký ako počet všetkých rozkladov množiny S.

Nech S je n-prvkova mnozina. Každý rozklad tejto množiny pozostáva z k podmnožín pre nejaké $1 \leq k \leq n$. Prvú si teda odvoďme formulu na výpočet počtu rozkladov n-prvkovej množiny na k dizjunktných tried. Tento počet je číslo, ktoré sa v literatúre nazýva *Stirlingovo číslo druhého druhu* (existuje samozrejme aj Stirlingovo číslo prvého druhu) a označuje sa symbolom $S(n,k)$.

Ak si (ľubovoľným spôsobom) očíslujeme množiny rozkladu číslami od 1 do k, každý rozklad našej množiny S na k podmnožín môžeme zároveň chápať aj ako surjektívne zobrazenie z S do $\{1,2,3,\ldots,k\}$, ktoré každému prvku $s \in S$ priradí číslo množiny, do ktorej s patrí. Keďže počet všetkých očíslovaní našich k množín rozkladu je $k!$, je počet rozkladov množiny S na k množín $k!$ krát menší ako počet surjekcií z S do $\{1,2,\ldots,k\}$. Vypočítajme teda počet takýchto surjekcií – výpočet je ukážkovým príkladom aplikácie princípu vypojenia a zapojenia. Každá takáto surjekcia je samozrejme funkciou z S do $\{1,2,\ldots,k\}$. Vieme, že počet funkcií z S do $\{1,2,\ldots,k\}$ je k^n. Tento počet však zahŕňa aj funkcie, ktoré nie sú surjekcie, teda funkcie, pre ktoré existuje $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, ktoré nie je obrazom žiadneho $s \in S$. Pre každé takéto i existuje presne $(k-1)^n$ funkcií, pre ktoré i nie je v ich obore hodnôt. Všetky tieto funkcie musíme od k^n odpočítať, celkovo teda musíme odpočítať $k \cdot (k-1)^n$. Pre každý výber i a j, $i \neq j$, sme však teraz odpočítali priveľa: všetky tie funkcie, ktoré vynechávajú zo svojho oboru hodnôt aj i aj j. Tie sa musia spätne pričítať, takže musíme k doterajšiemu počtu pripočítať $\left(\begin{array}{c} k \\ 2 \end{array}\right) \cdot (k-2)^n$. Takýmto opakovaným pripočítavaním a odčítavaním dostávame nakoniec kompletnú formulu na výpočet počtu všetkých surjekcií z S do $\{1,2,\ldots,k\}$:

$$k^n - \left(\begin{array}{c} k \\ 1 \end{array}\right) \cdot (k-1)^n + \left(\begin{array}{c} k \\ 2 \end{array}\right) \cdot (k-2)^n - \ldots + (-1)^k \left(\begin{array}{c} k \\ k \end{array}\right) \cdot (k-k)^n$$

a keďže $S(n,k)$ je $k!$ krát menšie:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}[k^n - \left(\begin{array}{c} k \\ 1 \end{array}\right) \cdot (k-1)^n + \left(\begin{array}{c} k \\ 2 \end{array}\right) \cdot (k-2)^n - \ldots + (-1)^k \left(\begin{array}{c} k \\ k \end{array}\right) \cdot (k-k)^n].$$

Teraz si už len pripomeňme, že celkový počet relácií ekvivalencie na n-prvkovej množine je súčet všetkých Stirlingových čísel $S(n,k)$ pre $1 \leq k \leq n$, z čoho vyplýva, ze počet $\mathcal{E}_n$ všetkých relácií ekvivalencie na n-prvkovej množine sa rovná

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}[k^n - \left(\begin{array}{c} k \\ 1 \end{array}\right) \cdot (k-1)^n + \left(\begin{array}{c} k \\ 2 \end{array}\right) \cdot (k-2)^n - \ldots + (-1)^k \left(\begin{array}{c} k \\ k \end{array}\right) \cdot (k-k)^n] =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right) \cdot (k-i)^n.$$

Bónus za 5 bodov:
Dokážte pre každé prirodzené n:

$$n^n - \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) \cdot (n-1)^n + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right) \cdot (n-2)^n - \ldots + (-1)^n \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) \cdot (n-n)^n = n!$$