Domáca úloha #4 a #5

Problémy vypracujte čo najpresnejšie a najpodrobnejšie, aby sa dali sledovať všetky vaše argumenty. Každý príklad píšte na nový list papiera. Presne označte, ktorý príklad riešite. Úlohu odovzdajte v stredu 15. mája na cvičeniach.

1. (2 body)

   Nech $\varphi(n)$ označuje počet kladných prirodzených čísel menších ako prirodzené číslo $n > 1$ a nesúdeliteľných s číslom n. Nech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ je kanonický rozklad čísla n na súčin mocnín rôznych prvočísel. Potom

   $$\varphi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_r}).$$

   Dokážte toto tvrdenie.

2. (2 body)

   Nasledovný príklad je obdobou *Jozefovho problému*, ktorý sme riešili na cvičeniach.

   Jozef má priateľa, ktorý sa môže zachrániť, ak sa postaví na miesto, ktoré príde na rad predposledné (Jozef si samozrejme pre istotu podrží posledné miesto pre seba).

   Nájdite pozíciu predposledného prežívajúceho $I(n)$, ak je popravovaný každý druhý.

3. (3 body)

a) Doká žte, že počet všetkých *jednoduchých* grafov s n vrcholmi je najviac $2^{n(n-1)/2}$.

b) Nájdite (použijúc nejakú podobnú úvahu) horný odhad pre počet všetkých k-regulárnych jednoduchých grafov s n vrcholmi. Predpokladajte $1 \leq k < n$.

4. (3 body)

a) Nech $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ a nech G je graf s vrcholovou množinou V. Dokážte, že G je izomorfný s najviac $n!$ grafmi, ktorých vrcholová množina je V.

b) Nájdite graf G s vrcholovou množinou $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$, ktorý nie je izomorfný žiadnemu inému grafu s tou istou vrcholovou množinou.

c) Dokážte, že počet všetkých *jednoduchých* grafov s n vrcholmi je aspoň

$$\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}$$

5. (3 body)

a) Nech $G = (V, E, I)$ je graf s vrcholmi $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. *Postupnosť stupňov* grafu G je postupnosť nezáporných celých čísel $deg_G(v_1), deg_G(v_2), \dots, deg_G(v_n)$. Dokážte, že postupnosti stupňov dvoch izomorfných grafov G a G' sú rovnaké až na poradie.

b) Nájdite dva neizomorfné kubické grafy na desiatich vrcholoch (čím dokážete, že tvrdenie z časti a) sa nedá obrátiť).

6. (3 body) Súvislý jednoduchý graf bez kružníc nazývame *stromom*.

a) Dokážte, že pre každé dva rôzne vrcholy u a v stromu existuje práve jeden $u - v$ ťah.

b) Dokážte, že každé tri rôzne vrcholy stromu G sa dajú usporiadať tak, že súčet vzdialenosti prvého a druhého vrchola a vzdialenosti druhého a tretieho vrchola sa rovná vzdialenosti prvého a tretieho vrchola.

7. (4 body)

a) Nech G je graf s k komponentami súvislosti a nech e je hrana grafu G. Dokážte, že počet komponent súvislosti grafu $G - \{e\}$ je menší ako $k + 2$.

b) Nájdite príklad súvislého grafu G s vrcholom v takým, že počet komponent súvislosti grafu $G - \{v\}$ je aspoň 5.

a) Nech G je graf s k komponentami súvislosti a nech v je vrchol grafu G. Dokážte, že počet komponent súvislosti grafu $G - \{v\}$ je $\leq k + deg_G(v)$.