Tento dokument je a bol pôvodne vytvorený **len** a **len** pre našu vlastnú potrebu. Na naliehanie iných sme sa však rozhodli dať ho do obehu. Dokument **v žiadnom prípade** neslúži ako náhrada za prednášku, či doporučenú literatúru. Chceme upozorniť, že túto vlastnosť textu netreba brať na ľahkú váhu. Text zahrňuje len poznámky z prednášok doc. Lamoša prednášaných v roku 2000. Autori spísaného textu neručia za žiadne prípadné chyby, chýbajúce časti, či iné nedostatky. Prípadné doplnky, pripomienky a komentáre posielajte mailom na *skola@lomo.sk*

1 Úvod

1.1 Základné definície

Definícia 1.1.1 *Budeme hovoriť, že pri realizácii náhodného pokusu nastala udalosť A, ak nastala elementárna udalosť $\omega \in A$.*

Definícia 1.1.2 *Udalosť, ktorá nastane pri každej realizácii náhodného pokusu nazývame udalosťou istou. Udalosť istá je ekvivalentná s množinou elementárnych udalostí, a preto ju budeme označovať Ω.*

Definícia 1.1.3 *Udalosť, ktorá nenastane pri žiadnej z realizácii náhodného pokusu sa nazýva udalosť nemožná. Označujeme ju $\emptyset$.*

Definícia 1.1.4 *Udalosť A je časťou udalosti B, ak každá elementárna udalosť $\omega \in A$ je aj prvkom B. Zapisujeme to $A \subset B$.*

Definícia 1.1.5 *Udalosť A sa rovná udalosti B, ak $A \subset B$ a súčasne $B \subset A$.*

Definícia 1.1.6 *Súčtom (zjednotením) udalostí $A_1, A_2, ...$ budeme nazývať takú udalosť A, ktorá nastane vtedy, keď nastane aspoň jedna udalosť z $A_1, A_2, ...$ Zapisujeme to $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$.*

Definícia 1.1.7 *Prienikom udalostí $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ nazývame takú udalosť A, ktorá nastane vtedy a len vtedy, ak nastanú súčasne všetky udalosti. Zapisujeme $A = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$.*

Definícia 1.1.8 *Komplementom alebo doplnkom udalosti A nazývame udalosť A^C ($\bar{A}$), ktorá nastane vtedy, ak nenastane A. Teda $A^C = \Omega - A$.*

Definícia 1.1.9 *Nech Ω je neprázdna množina elementárnych udalostí, pričom $\Omega \neq \emptyset$. Neprázdny systém S podmnožín elementárnych udalostí nazývame javové pole (pole náhodných udalostí) (σ pole).*

1. *$A \in S$, potom $A^C \in S$* [1]
2. *$A_1, A_2, ..., A_n, ... \in S$, Potom $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$* [2]

Definícia 1.1.10 *Postupnosť udalostí $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa volá neklesajúcou (nerastúcou), ak pre každé n platí $A_n \subset A_{n+1}$ ($A_n \supset A_{n+1}$)*

Definícia 1.1.11 *Nech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť náhodných udalostí. Nech A^* je množina elementárnych udalostí (výsledkov pokusu), ktoré patria do nekonečne veľa členov postupnosti $\{A_n\}$. Potom A^* nazývame hornou limitou postupnosti $\{A_n\}$ a zapisujeme $\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sup A_n$.*

Definícia 1.1.12 *Nech A_* je množina všetkých elementárnych udalostí, ktoré patria do všetkých členov postupnosti $\{A_n\}$ s výnimkou konečného počtu. Potom A_* nazývame dolnou limitou postupnosti $\{A_n\}$.*

Poznámka 1.1.13 *Ak $\{A_n\}$ je taká, že $A^* = A_*$ hovoríme, že postupnosť má limitu A a píšeme $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.*

Poznámka 1.1.14 *Pre neklesajúcu postupnosť množín platí, že $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Pre nerastúcu postupnosť množín platí $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

[1] komplement

[2] spočítateľné zjednotenie

Dôkaz: $\emptyset = \Omega^C$
$P(\emptyset) = P(\Omega^C) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$ $\square$

Veta 1.5.4 *Nech* (Ω, S, P) *je pravdepodobnostný priestor. Nech* $A, B \in S$. *Potom platí* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dôkaz: Upravujeme dvojicu rovníc:

$$A \cup B = A \cup (A^C \cap B)$$
$$B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B)$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$$

Kvôli axióme o pravdepodobnosti zjednotenia:

$$A \cap (A^C \cap B) = \emptyset$$
$$(A \cap B) \cap (A^C \cap B) = \emptyset$$

Ďalej využijeme subtraktívnosť funkcie:

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\square$

Veta 1.5.5 *Nech* (Ω, S, P) *je pravdepodobnostný priestor.Nech* $A_1, A_2, ..., A_n$ *je ľubovoľná postupnosť prvkov z* S. *Potom platí:*
$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i,j}^{i<>j} P(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$

Veta 1.5.6 *Nech* (Ω, S, P) *je pravdepodobnostný priestor. Nech* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je neklesajúca postupnosť* $A_n \in S, n = 1, 2, ...$*Potom platí*
$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P\left[\bigcup_{n-1}^{\infty} A_n\right] = P\left[\bigcup_{k-1}^{\infty} (A_k - A_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k - A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k-1}^{\infty} P(A_k - A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k - A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

1.6 Podmienená pravdepodobnosť

Príklad 1.6.1 $A, B, P(B) > 0$, $P(A/B) \neq P(A)$

Vykonajme n nezávislých pokusov a nech udalosť B nastane $m_n(B)$*-krát. Nech pri týchto n nezávislých pokusoch súčasne s udalosťou B nastala aj udalosť A* $m_n(B)$*-krát. Podiel* $\frac{m_n(A\cap B)}{m_n(B)}$ *nazývame podmienená relatívna početnosť udalosti A za podmienky, že nastala udalosť B. Ak označíme relatívne početnosti* $f_n(B)$, $f_n(A \cap B)$, $f_n(A \backslash B)$ *potom platí:*

$$f_n(B) = \frac{m_n(B)}{n} \quad f_n(A \cap B) = \frac{m_n(A\cap B)}{n}$$
$$f_n(A\backslash B) = \frac{m_n(A\cap B)}{m_n(B)} = \frac{\frac{m_n(A\cap B)}{n}}{\frac{m_n(B)}{n}} = \frac{f_n(A\cap B)}{f_n(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definícia 1.6.2 *Nech* $A, B \in S, P(B) > 0$. *Potom podiel* $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ *nazývame podmienenou pravdepodobnosťou nastatia udalosti A za podmienky, že nastala udalosť B.*[3]

[3]takto definovaná podmienená pravdepodobnosť je opäť pravdepodobnosťou spĺňajúcou axiómy.

Definícia 1.6.11 *Hovoríme, že udalosti sú skupinove nezávislé, ak pre ľubovoľnú vybranú postupnosť indexov* $\{k_1, k_2, ..., k_r\} \subset \{1, 2, ..., n\}$, *platí* $P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap ... \cap A_{k_r}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2})...P(A_{k_r})$, *pre* $r = 2...n$.

Veta 1.6.12 *Nech* $A, B \in S$ *sú nezávislé. Potom aj dvojice udalostí* (A, B^c), (A^c, B), (A^c, B^c) *sú nezávislé.*

Dôkaz: Malý náznak toho ako to dokázať. $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, kedže A, B sa navzájom vylučujú platí:
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$
$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A)P(B)$
Podobne pre zvyšné dve. $\square$

Veta 1.6.13 *Nech* $A, B \in S$, $0 < P(B) < 1$. *Udalosti* A, B *su nezávislé práve vtedy, keď* $P(A \backslash B) = P(A \backslash B^c)$.

1.7 Bernoulliho schéma

Príklad 1.7.1 *Strieľajme 3-krát na cieľ. Pravdepodobnosť zásahu nech je* $p \in (0, 1)$. *Aká je pravdepodobnosť, že 2-krát trafíme cieľ? Môžeme to zapísať nasledovne:*

$$\begin{aligned} B_{3,2} &= (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \\ P(B_{3,2}) &= P(A_1^c)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2^c)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3^c) = \\ &= (1-p)pp + p(1-p)p + pp(1-p) = 3p^2(1-p) \end{aligned}$$

Veta 1.7.2 *Nech* $A \in S$ *nastane pri každom pokuse s* $P(A) = p \in (0, 1)$. *Potom pravdepodobnosť toho, že udalosť* A *po vykonaní* n *náhodných pokusov nastane* k*-krát je*

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Veta 1.7.3 (Laplaceova) *Nech pravdepodobnosť nastatia udalosti* A *je* $P(A) = p \in (0, 1)$. *Potom pravdepodobnosť toho, že udalosť* A *po vykonaní* n *nezávislých pokusov nastane* k*-krát je*

$$P_{n,k}(A) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}; q = 1 - p$$

Funkcia $f(x)$ *je párna.*

Veta 1.7.4 (integrálna Laplaceova) *Nech pravdepodobnosť nastatia udalosti* A *je* $P(A) = p \in (0, 1)$, $A \in S$. *Potom pravdepodobnosť toho, že udalosť* A *nastene pri* n *nezávislých pokusoch nie menej ako* k_1*-krát a nie viac ako* k_2*-krát je*

$$P_{n,k_1,k_2}(A) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{k_1}^{k_2} e^{-\frac{x^2}{2}} = F(x_2) - F(x_1)$$

2 Náhodná premenná

2.1 Náhodná premenná

Definícia 2.1.1 *Funkciu $X(\omega)$ definovanú na Ω; $\omega \in \Omega$, budeme nazývať náhodnou premennou vzhľadom na S, ak vzor ľubovoľného intervalu $(-\infty, x)$ je prvkom S, t.j.*

$$X^{-1}(-\infty, x) = \{\omega; \omega \in \Omega; X(\omega) \in (-\infty, x)\} = \{\omega; \omega \in \Omega; X(\omega) < x\}; x \in R$$

2.2 Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia 2.2.1 *Distribučnou funkciou náhodnej premennej $X(\Omega)$ budeme nazývať funkciu reálnej premennej $F(x)$, danú $F(x) = P\{\omega; \omega \in \Omega; X(\omega) < x\} = P(X < x)$; $x \in R$.*

2.3 Vlastnosti distribučnej funkcie

- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$
- $\lim_{x\to\infty} F(x) = F(\infty) = 1$
- $x_1, x_2;\, x_1 < x_2 \Longrightarrow F(x_1) < F(x_2)$
- distribučná funkcia je zľava spojitá v $x \in (-\infty, \infty)$, $\{x_n\}_1^\infty$ - rastúca postupnosť reálnych čísel $\lim_{x\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$

Definícia 2.3.1 *Hovoríme, že náhodná premenná X je diskrétnou náhodnou premennou, ak nadobúda konečne veľa, alebo spočítateľne veľa reálnych hodnôt čísel.*

Definícia 2.3.2 *Nech náhodná premenná X nadobúda hodnoty $x_i, i = 1 \ldots n$ s pravdepodobnosťami $p_i = P(X = x_i)$. Potom p_i je rozdelenie pravdepodobností náhodnej premennej X, ak platí:*

$$\sum_i p_i = \sum_i P(X = x_i) = 1$$

Definícia 2.3.3 *Distribučná funkcia diskrétnej náhodnej premennej je tvaru:*

$$F(X) = P(X < x) = \sum_{\{i; x_i < x\}} p_i; p_i = (X = x_i)$$

Definícia 2.3.4 *Náhodná premenná X s distribučnou premennou $F(X)$ sa nazýva spojitá náhodná premenná, ak existuje taká nezáporná, po častiach spojitá $f(x) \geq 0$, pre ktorú platí $F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, kde $f(t)$ je hustota pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej.*

- $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$
- $F(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$
- $P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = P(x_2) - P(x_1)$

$$\mu_k = E\left[(X - E(X))^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - E(X))^k f(x)\,dx$$

Definícia 2.5.4 *Centrálny moment druhého rádu je disperzia (rozptyl).*

$$\mu_2 = D(x) = E\left[(x - E(x))^2\right] = \sum_i (x_i - E(x))^2 p_i$$

$$\mu_2 = D(x) = E\left[(x - E(x))^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^2 f(x) dx$$

Definícia 2.5.5 *Druhá odmocnina z disperzie sa nazýva smerodajná odchýlka.*

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)}$$

Veta 2.5.6 *Nech $X, E(X) \neq C$. Potom $D(X) < E[(X-C)^2]$*

Dôkaz: $E[(X-C)^2] = E[((X-E(X)) + (E(X)-C))^2] = E[(X-E(X))^2 + (E(X)-C)^2 +$
$+2(X-E(X))(E(X)-C)] = D(X) + E((E(X)-C)^2) + E(...)(...)$ □

Poznámka 2.5.7 *Vlastnosti:*

- $D(C) = 0$
- $D(CX) = C^2 D(X)$
- $D(CX + B) = C^2 D(X)$

Veta 2.5.8 (Čebyševova nerovnosť) *Nech X je náhodná premenná a nech existuje $E(X), D(X)$. Potom platí:*

$$P(X - E(X) \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Dôkaz: $A = \{x; |x - E(x)| \geq \varepsilon\}$
$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [X - E(X)]^2 f(x)dx \geq \int_A \varepsilon^2 [X - E(X)]^2 f(x)dx = \varepsilon^2 \int_A f(x)dx = \varepsilon^2 P(A) =$
$= \varepsilon^2 P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$ □

Definícia 2.5.9 *Hovoríme, že X je normovaná (štandardná), ak $E(X) = 0$, $D(X) = 1$*

Veta 2.5.10 *Nech X má $E(X), D(X)$. Potom $Y = \frac{x - E(x)}{\sqrt{D(x)}} = \frac{x - E(x)}{\sigma(x)}$ je normovaná n.p.*

Veta 2.5.11 *Podiel centrálneho momentu 3. rádu a 3. smerodajnej odchýlky nazývame koeficient asymetrie (nesúmernosti)*

$$\varepsilon = \frac{\mu_3}{\sigma x^3}$$

Veta 2.5.12 *Koeficient strmosti je*

$$\delta = \frac{\mu_4}{\sigma x^4} - 3$$

Definícia 2.6.8 *Marginálne distribučné funkcie zložiek* (X,Y) *sú tvaru:*
pre diskrétne:

$$F_1(x) = F_1(x,\infty) = \sum_{\{i,x_i<x\}} \sum_j p_{ij} = \sum_{\{i,x_i<x\}} p_{i\circ}$$

$$F_2(y) = F_1(\infty,y) = \sum_i \sum_{\{j,y_j<y\}} p_{ij} = \sum_{\{j,y_j<y\}} p_{\circ j}$$

pre spojité:

$$F_1(x) = F_1(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \right) dx$$

$$F_2(y) = F_2(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \right) dy$$

Definícia 2.6.9 *Budeme hovoriť, že náhodne premenné sú štatisticky nezávislé, ak platí*

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

pre spojité $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, *pre diskrétne* $p_{ij} = p_{i\circ}p_{\circ j}$

2.7 Momenty 2-rozmerných náhodných premenných

Definícia 2.7.1 *Stredná hodnota z funkcie* $g(x,y) = x^k y^s$ *sa nazýva (k,s)-tým začiatočným momentom*

$$\nu_{k,s} = E(x^k y^s) = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij},\ \textit{pre diskrétne}$$

$$\nu_{k,s} = E(x^k y^s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k y_j^s f(x,y)dxdy,\ \textit{pre spojité}$$

Definícia 2.7.2 *Stredná hodnota* $g(X,Y) = (X-E(X))^k(Y-E(Y))^s$ *je (k,s)-tým centrálnym momentom* $\mu_{k,s} = E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^s] = \sum_i \sum_j (x_i - E(x)^k)(y_j - E(y))^s p_{ij}$, *pre diskrétne a* $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i - E(x)^k)(y_j - E(y))^s f(x,y)dxdy$

Definícia 2.7.3 *Centrálny moment 1.rádu 2-rozmernej náhodnej premennej nazývame kovariancia*

$$\mu_{1,1} = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = cov(X,Y)$$

Veta 2.7.4 *Vlastnosti:*

- $cov(x,y) = cov(y,x)$

riešime ju Cramerovým pravidlom:

$$D_s = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix}$$

$$D_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & n \end{vmatrix}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i \end{vmatrix}$$

riešením je $a = \frac{D_a}{D_s}, b = \frac{D_b}{D_s}$. To znamená, že hľadaná priamka je $y = ax + b$. Podobne sa postupuje, ak počítame lineárnu regresiu náhodne premennej X vzhľadom na náhodne premennú Y. Počítame ju v tvare $x = cy + d$.

Tabuľka početnosti:

$X\backslash Y$	y_1	$\ldots$	y_m
x_1	f_{11}	$\ldots$	f_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	f_{n1}	$\ldots$	f_{nm}

Marginálne funkcie početnosti:

$$\begin{aligned} f_{i\bullet} &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m f_{ij} \\ f_{\bullet j} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_{ij} \end{aligned}$$

Koeficient korelácie:

$$r_{xy} = \frac{1}{N s_x s_y}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m (x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) f_{ij}$$

$$r_{xy} = \frac{1}{N s_x s_y}[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m x_i y_j f_{ij} - N\overline{x}\overline{y}]$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 f_{1\bullet} + x_2 f_{2\bullet} + \ldots + x_n f_{n\bullet}}{f_{1\bullet} + f_{2\bullet} + \ldots + f_{n\bullet}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_{i\bullet}}{N}$$

$$\overline{y} = \frac{y_1 f_{\bullet 1} + y_2 f_{\bullet 2} + \ldots + y_m f_{\bullet m}}{f_{\bullet 1} + f_{\bullet 2} + \ldots + f_{\bullet m}} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i f_{\bullet i}}{N}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 f_{i\bullet}}{N} \qquad s_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \overline{y})^2 f_{\bullet j}}{N}$$

$$\overline{x}_{y_1} = \frac{x_1 f_{11} + x_2 f_{21} + \ldots + x_n f_{n1}}{f_{\bullet 1}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_{i1}}{f_{\bullet 1}}$$

$$\frac{\delta S(a',b')}{\delta b} = 2b' - 2E(Y) + 2a'E(X) = 0$$

ďalej:

$$a'E(X) + b' = E(Y) \qquad\qquad / - E(X)$$

$$a'(\sigma_x^2 + E^2(X)) + b'E(X) = \mu_{11} + E(X)E(Y)$$

vyjadríme a' a b' a dostaneme:

$$a' = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}$$

$$b' = E(Y) - \mu_{11}\frac{E(X)}{\sigma_x^2}$$

teda rovnica regresnej priamky je:

$$y = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}x + E(Y) - \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}E(X)$$

alebo

$$y - E(Y) = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}(X - E(X))$$

□

3.2 Poissonove rozdelenie

Definícia 3.2.1 *Náhodná premenná X má Poissonove rozdelenie, ak nadobúda hodnoty j s pravdepodobnosťou*

$$p_j = P(X = j) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!};\ j = 0, 1, \dots, n;\ \lambda > 0 \text{ - parameter}$$

Príklad 3.2.2 *Teraz si ukážeme, že je to rozdelenie pravdepodobnosti, teda* $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{\text{viď matalýza}} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

stredná hodnota

$$E(X) = \sum_j j p_j = \sum_{j=0}^{\infty} j \tfrac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{j=0}^{\infty} j \tfrac{\lambda^{j-1}}{j(j-1)!} =$$
$$= e^{-\lambda}\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \overset{k=j-1}{=} e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^k}{k!} = \lambda$$

disperzná hodnota

$$D(X) = \lambda \text{ - podobne ako u binomickej pravdepodobnosti}$$

a kde sa toto rozdelenie dá použiť.

Príklad 3.2.3 (Príklady použitia)

- *počet signálov do telefónnej ústredne za jednotku času*
- *počet roztrhnutých vlákien na tkáčskom stroji za jednotku času*

Poznámka 3.2.4 *Za istých okolností môžeme binomické rozdelenie pravdepodobnosti aproximovať Poissonovým rozdelením*

$$\lim_{\substack{n \longrightarrow \infty \\ p \longrightarrow 0}} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{e^{-x}\lambda^x}{x!};\ np = \lambda > 0$$

Príklad 3.2.5 *Pravdepodobnosť toho, že niť na jednom vretene za čas t sa roztrhne je $p = 0,005$. Aká je pravdepodobnosť toho, že z 800 vretien sa za čas t nepretrhne viac ako 10 nití?*

Riešenie 3.2.6 *X - náhodná premenná; $j = 1, 2, \dots, 800$; $p_j = \binom{800}{j} 0.005^j (1 - 0.005)^{800-j}$*

$F(11) = P(X < 11) = \sum_{j=0}^{10} \binom{800}{j} 0.005^j (1 - 0.005)^{800-j}$
$\overset{\lambda=800*0.005}{\doteq} \sum_{j=0}^{10} e^{-4} \frac{4^j}{j!} = 0.997$

3.4 Normálne (Gaussovo) rozdelenie

Definícia 3.4.1 *Náhodná premenná X má normálne (Gaussovo) nenormované rozdelenie, ak jej funkcia hustoty pravdepodobnosti je tvaru*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu\sigma)^2};\ x \in (-\infty; \infty)$$

- μ, σ^2 *- neznáme parametre*
- $\mu \in (-\infty; \infty)$ *-stredná hodnota*
- $\sigma^2 > 0$ *- disperzia náhodnej premennej*

Označíme $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Príklad 3.4.2 *Teraz si ukážeme, že je to rozdelenie pravdepodobností, teda* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu\sigma)^2} dx = \begin{bmatrix} y = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ \sigma dy = dx \end{bmatrix} =$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_{\text{Laplaceov rozvoj } = \sqrt{2\pi}} = 1$$

stredná hodnota

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{1}{2}(x-\mu\sigma)^2} dx \overset{\text{tá istá substitúcia}}{=}$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma y)e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_{=0 \text{ (párna funkcia)}} = \mu$$

disperzná hodnota

$$D(X) = E\left[(x-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx =$$
$$\tfrac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\tfrac{x-\mu}{\sigma})^2 e^{-\frac{1}{2}(x-\mu\sigma)^2} dx \overset{\text{substitúcia}}{=}$$
$$\tfrac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \begin{bmatrix} u = y & u' = 1 \\ v' = ye^{-\frac{1}{2}y^2} & v = -e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{bmatrix} =$$
$$\tfrac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-ye^{-\frac{1}{2}y^2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \tfrac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sigma^2$$

Poznámka 3.4.3 *Všetky nepárne momenty sú nulové (centrálne).*

3.5 Výberové metódy

Definícia 3.5.1 *Náhodným výberom zo súboru nazývame n-ticu* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *náhodných premenných s vlastnosťami*

- $X_1, X_2, ..., X_n$ *sú nezávislé*
- $X_1, X_2, ..., X_n$ *majú rovnaké rozdelenie* $f(x,p)$

Veta 3.5.2 (1) *Nech* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *je náhodný výber zo základného súboru s rovnomernou funkciou rozdelenia tvaru* $f(x,\theta), \mu, \sigma^2$ *sú stredná hodnota a disperzia. Pritom pre výberový priemer* $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *platí:*

- $E(\overline{X}) = \mu$
- $D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
- *Pre všetky* ε *kladné* $\lim_{n->\infty} P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) = 1$

Dôkaz:

- $E(\overline{X}) = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu$
- $D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$
- $\varepsilon > 0, P(|\overline{X} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \Longrightarrow P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \Longrightarrow \lim_{n->\infty} P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \lim_{n->\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 1 \Longrightarrow$
  $\Longrightarrow \lim_{n->\infty} P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) = 1$

$\square$

Veta 3.5.3 (2) *Nech* $(X_1,X_2,...,X_n)$ *je náhodný výber základného súboru* $f(x,\theta)$, μ, σ^2 *Nech existuje* μ_4. *Potom pre výberovú disperziu tvaru*

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

platí

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \sigma^2 \\ D(S^2) &= \frac{1}{n}(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4) \end{aligned}$$

Veta 3.5.4 (3) *Nech* $(X_1,X_2,...,X_n)$ *je náhodný výber zo základného súboru* $f(x,\theta), \mu, \sigma^2$ *sú stredná hodnota, disperzia a nech existuje* μ_4. *Potom pre výberovú disperziu tvaru:*

$$S_o^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

platí:

$$\begin{aligned} E(S_0^2) &= \sigma^2 \\ D(S_0^2) &= \frac{1}{n}(\mu_4 - \sigma^4) \end{aligned}$$

Veta 3.5.10 (5) [6] *Nech* $(X_1, X_2, ..., X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$ *Potom*

$$y = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \text{ , } kde\ s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_i^n (X_i - \overline{X})^2$$

Definícia 3.5.11 *Náhodná premenná X má Studentovo rozdelenie (t-rozdelenie) s n stupňami voľnosti ak jej funkcia hustoty je tvaru*

$$f_n(X) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{n}}(1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

Definícia 3.5.12 *Číslo* $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *nazývame* $(1-\frac{\alpha}{2})$*-tým kvantilom normálneho rozdelenia, ak platí*

$$\Phi(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = P(X < t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \int_{-\infty}^{t_{1-\frac{\alpha}{2}}} f_n(X)dx = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Pre $n > 1$ $D(X) = 0$ *, pre* $n > 2$ $D(X) = \frac{n}{n-2}$

Veta 3.5.13 (fund. veta St. rozdelenia) *Nech* X_1, X_2 *sú náhodné nezávislé premenné. Nech* $X_1 \sim N(0,1)$ *a* $X_2 \sim \chi^2(n)$ *. Potom* $X = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{x_2}{n}}} \sim$ *TODO*

Studentovo rozdelenie s n-stupňami voľnosti.

Veta 3.5.14 (6) *Nech* $(X_1, X_2, ..., X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, *a* μ, σ^2 *sú neznáme parametre. Potom náhodná premenná* $t = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$ *má stupeň rozdelenia* $(n-1)$ *st. voľnosti.*

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

Veta 3.5.15 (7) [7] *Nech* $(X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, *nech* $(X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n_2}) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, *a* μ_2, σ_2^2 *sú známe. Potom pre výberové priemery* $\overline{X_1}, \overline{X_2}$ *platí*

$$E(\overline{X_1}, \overline{X_2}) = \mu_1 - \mu_2$$

$$D(\overline{X_1}, \overline{X_2}) = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}$$

$$X = \overline{X_1} - \overline{X_2}$$

Vyrobme novú náhodnú premennú

$$U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

[6] Vetu používame k testovaniu hypotézy o neznámom parametri σ^2 a možno ju použiť aj k odhadu spoľahlivosti neznámeho parametra σ^2.

[7] Vetu používame na testovanie hypotézy $H_0 : (\mu_1 = \mu_2)$, $H_0 : (\mu_1 - \mu_2 = 0)$

4 Štatistika

4.1 Batelttov test homogenity rozptylu

Definícia 4.1.1 [10] *Nech* $(X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in_1}) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, ...$ *Nech* $S_i^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{j=1}^{n_{i0}}(x_{ij} - \overline{x_{i\cdot}})^2$ *, potom náhodná premenná B je tvaru*

$$\frac{2{,}3026}{c} = \{(n-k)\log\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2}{n-k} - \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2\}$$
$$kde\ c = 1 + \frac{1}{3(k-1)}(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{n-k})$$

a má asymptoticky χ^2 *rozdelenie o* $k-1$ *st. voľnosti. Platí tiež* $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

4.2 Metódy odhadu štatistických parametrov

Delíme ich na metódy:

- bodového odhadu
- intervalového odhadu

Odhad T_n je nevychýleným odhadom parametra Θ. $T_n = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Platí $E(\overline{X}) = \mu$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, $E(S^2) = \sigma^2$
Tu je konzist. odhadu Θ, ak $\varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \Theta| < \varepsilon) = 1$
Ak T_n je nevychýlený a patí, že $\lim_{n\to\infty} D(T_n) = 0$, tak odhad je konzistentný.
T_n je nevychýlený, ak $D(T_n) \leq D(T_n^*)$

4.3 Metóda maximálnej vierohodnosti

Definícia 4.3.1 *Nech* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *je náhodný výber zo základného súbou so známym rozdelením pravdepodobnosti* $f(x, \Theta)$ *, kde* Θ *je neznámy parameter. Potom funkciu rozdelenia pri realizovaných hodnotách* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *tvaru* $L(\mathbf{x}, \Theta) = f(x_1, \Theta)f(x_2, \Theta)...f(x_n, \Theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \Theta)$ *. Takúto funkciu voláme funkciou vierohodnosti, pričom jej prirodzený logaritmus je tvaru* $\ln L(\mathbf{x},\Theta) = \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i, \Theta)$

Definícia 4.3.2 *Maximálne vierohodný odhad neznámej hodnoty parametra* Θ *nazývame taký odhad* $\hat{\Theta}$ *, ktorý maximalizuje funkciu vierohodnosti alebo jej prirodzený logaritmus. Odhad získame riešením rovnice*

$$\frac{d}{d\Theta}L(\mathbf{x},\Theta) = 0, \frac{d}{d\Theta}\ln L(\mathbf{x},\Theta) = 0$$

[10] vraj sa týmto tiež netreba príliš zaoberať pri príprave na skúšku...

$P(-u \leq U \leq u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)dx - \int_{-\infty}^{-u} f(x)dx = \phi(u) - \phi(-u) =$
$= 2\phi(u) - 1 = 1 - \alpha \Rightarrow \phi(u) = 2 - \alpha \Rightarrow \phi(u) = \frac{2-\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$
Čiže $u = 1 - \frac{\alpha}{2}$ *kvantil.*
Pravdepodobnosť toho, že $P(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq U \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$ *TODO*
$P(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{u} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$
$-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{u}$
$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}n_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \overline{x} - \mu \Rightarrow \mu \leq \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\overline{x} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
dostávame $\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2} \leq \mu}$

Príklad 4.4.3 *Predpokladáme, že výška chlapcov má norm. rozdelenie so strednou hodnotou* $N(\mu; 39,1125)$, $n = 15$, $\overline{X} = 139,13$ *Odhadni strednú výšku s 99% istotou.*

Riešenie 4.4.4 $\overline{X} = 139,13$, $\sigma^2 = 39,1125 \Rightarrow \sigma = 6,254$, $\alpha = 0,001$
$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_1 - \frac{0,01}{2} = u_{0,995} = 2,2576$
$139,13 - \frac{6,254}{\sqrt{15}}2,576 \leq \mu \leq 139,13 + \frac{6,254}{\sqrt{15}}2,576$
$136,13 \leq \mu \leq 142,14$

$P(U > u) = \alpha$ alebo $P(U < -u) = \alpha$
$P(U \leq u_{1-\alpha})$
$P(\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$
$\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha}$
$x - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha} \leq \mu < +\infty$
$P(U < -u) = \alpha$, $P(U \geq -u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$
Keď za u dosadíme náhodnú premennú, tak máme:
$\overline{x} - \mu \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}$
$\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha} \geq \mu$

Veta 4.4.5 (11) *Nech* $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, *kde* μ, σ^2 *sú neznáme parametre. Nech* $\alpha \in (0,1)$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *je* $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$*-tý kvantil Studentovho rozdelenia. Potom OIS pre neznámy parameter* μ *je tvaru*

$$P\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Dôkaz: K dôkazu použijeme náhodnú premennú tvaru $t = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim$ Studentovo rozdelenie (Veta 6) Uvažujme pravdepodobnostnú rovnicu $P\left(|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha$, teda $P\left(|t| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$

- $P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq t \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$
- $-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \Longrightarrow \mu \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

□

Teraz sa pozrieme na jednostranné IS

zhora	zdola
$P\left(\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}\right) = \alpha$	$P\left(\chi^2 > \chi^2_{\alpha}\right) = \alpha$
$P\left(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}\right) = 1-\alpha$	$P\left(\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha}\right) = 1-\alpha$
$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_{1-\alpha} \Longrightarrow \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}}$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha} \Longrightarrow \sigma^2 \geq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}}$

Veta 4.4.9 (13) *Nech* $(X_{11},\ X_{12},\ \ldots,\ X_{1n_1}) \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, $(X_{21},\ X_{22},\ \ldots,\ X_{2n_2}) \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ *kde* σ_1^2, σ_2^2 *sú dané. Nech* $\alpha \in (0,1)$,$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *je* $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$*-tý kvantil normálneho rozdelenia. Potom pre OIS, pre normálny rozdiel parametrov* $\mu_1 - \mu_2$ *platí:*

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{u_1} + \frac{\sigma_2^2}{u_2}}\mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{u_1} + \frac{\sigma_2^2}{u_2}}\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \\ = 1-\alpha$$

Dôkaz: Ak by sme uvažovali náhodnú premennú tvaru $u = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{u_1} + \frac{\sigma_2^2}{u_2}}}$

- $P\left(|u| > \mu_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha$
- A teraz každý sám ... Kedže je to veľa písania o ničom, nemalo by vám to robiť problémy

□

Jednosmernné IS. Postup je ako predtým, takže iba výsledky

- $-\infty < \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{u_1} + \frac{\sigma_2^2}{u_2}}\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$
- $\infty > \mu_1 - \mu_2 \geq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{u_1} + \frac{\sigma_2^2}{u_2}}\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Veta 4.4.10 (14) *Nech* $(X_{11},\ X_{12},\ \ldots,\ X_{1n_1}) \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, $(X_{21},\ X_{22},\ \ldots,\ X_{2n_2}) \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ *kde* σ_1^2, σ_2^2, μ_1, μ_2 *sú neznáme. Nech* $\alpha \in (0,1)$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *je* $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$*-tý kvvantil Studentovho rozdelenia. Potom pre OIS, pre neznáme* $\mu_1 - \mu_2$ *platí:*

$$P\left(\begin{array}{c} \overline{X}_1 - \overline{X}_2 - S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}t(n_1+n_2-2) \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \\ \leq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}t(n_1+n_2-2) \end{array}\right) = \quad 11$$

$$= 1-\alpha \text{ , } kde\ S = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_1-1)S_1^2}{n_1+n_2-2}}$$

Dôkaz: Použitím vety 8: $t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \mu_1 - \mu_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ má Studentovo rozdelenie s $(n_1 + n_2 - 2)$ stuňami voľnosti. □

5.3 Postupy pre testovanie hypotéz

- Podľa danej situácie si zvolíme testovacie kritérium (niektorá z viet výberovej teórie). Vieme, aké má toto kritérium rozdelenie.
- Zvolíme si chybu prvého druhu α. Vieme nájsť kritickú hodnotu resp. kvantil, ktorý nám rozdelí obor náhodnej premennej na kritický a doplnkový.
- Vypočítame si hodnotu testovacieho kritéria. Ak testovacie kritérium patrí do kritického oboru prijímame alternatívnu hypotézu H_1, inak prijímame testovaciu hypotézu H_0.

5.3.1 Nepoznáme μ, poznáme σ^2

Majme náhodný výber $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ je neznámy parameter, σ^2 je známe. Testujme hypotézu $H_0 : (\mu = \mu_0)$ proti alternatíve $H_1 : (\mu \neq \mu_0)$. Za testovacie kritérium zvolíme náhodnú premennú

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

podľa vety číslo 4 . Kritická oblasť pre dvojstrannú alternatívnu hypotézu je daná nerovnosťou

$$P(|U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$$

Ak platí

$$|U_0| = \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

tak testovanú hypotézu $H_0(\mu = \mu_0)$ zamietame a prijímame alternatívnu hypotézu $H_1(\mu \neq \mu_0)$..

Ak platí

$$|U_0| = \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

tak testovanú hypotézu H_0 prijímame s rizikom α.

a) Majme náhodný výber $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ je neznámy parameter a σ^2 je známe. Testujeme hypotézu $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$. Za testovacie kritérium zvolíme náhodnú premennú

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

podľa vety číslo 4. Kritická oblasť pre jednostrannú alternatívnu hypotézu je daná nerovnosťou

$$P(U > u_{1-\alpha}) = \alpha$$

5.3.2 Nepoznáme ani μ, ani σ^2

Uvažujme náhodný výber $(X_1, X_2, ..., X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, pričom nepoznáme ani μ, ani σ^2. $H_0 : (\mu = \mu_0), H_1 : (\mu \neq \mu_0)$. Za testovacie kritérium si zvolíme náhodnú premennú tvaru

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

ktorá má podľa vety číslo 6 Studentovo rozdelenie s n stupňami voľnosti. Kritická oblasť pre testovanú hypotézu je tvaru

$$P(|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$$

Ak hodnota testovacieho kritéria vypočítaného na základe experimentu je

$$|t_0| = \frac{|\overline{X} - \mu|}{S}\sqrt{n} > t_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

tak H_0 zamietneme.
Ak hodnota testovacieho kritéria vypočítaného na základe experimentu je

$$|t_0| = \frac{|\overline{X} - \mu|}{S}\sqrt{n} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

tak H_0 príjmeme.

(Pre jednostranné hypotézy je to podobne ako pri normálnom rozdelení spomenutom vyššie)

Príklad 5.3.3 *Meral sa percentuálny odhad cínu vo vzorkách rudy. Výsledky merania:*

x	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
$f(x)$	4	6	8	15	25	50	8	7	5	2

$\alpha = 0,05, H_0 : (\mu = \mu_0), H_1 : (\mu \neq \mu_0)$, *kde* $\mu_0 = 50$.

Riešenie 5.3.4 *Vypočítame rozptyl a priemer získaných dát pomocou známych vzťahov*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} x_i f_i$$

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2$$

a dosadíme do vzorca pre t_0

$$|t_0| = \frac{|\overline{X} - \mu|}{S}\sqrt{n} > t_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

zistíme, či sa t_0 *nachádza v kritickom* (H_0 *zamietame) alebo v doplnkovom* (H_0 *prijímame) obore.*

Po zvolení α vieme nájsť kvantily. Kritický obor je určený nasledovnou nerovnosťou

$$P(U < -u_{1-\alpha}) = \alpha$$

Testovacia hodnota je (rozdiel $\mu_1 - \mu_2$ vypadne, pretože podľa hypotézy je to 0)

$$U_0 = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Ak $U_0 < -u_{1-\alpha}$, H_0 zamietame, inak H_0 prijímame.

5.3.4 Poznáme μ_1,μ_2,σ^2

Nech $(X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma^2)$,$(X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n_1}) \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, μ_1,μ_2,σ^2 sú známe. Na testovanie hypotézy použijeme náhodnú premennú t s rozdelením

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Toto rozdelenie má o $n_1 + n_2 - 2$ stupňoch voľnosti, kde

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$H_0 : (\mu = \mu_0), H_1 : (\mu \neq \mu_0)$

$$P(|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$$

testovacie kritérium

$$|t_0| = \frac{|\overline{X_1} - \overline{X_2}|}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

ak $|t_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, tak testovaciu hypotézu H_0 zamietame a prijímame alternatívnu hypotézu.

Príklad 5.3.5 $\alpha = 0,05$. *Testujte hypotézu, či prípravok znižuje alebo zvyšuje pevnosť ocele.*

X	5,6	5,9	...	5,5
Y	6,2	5,7	...	5,8

Z experimentu nám vyšlo, že $\overline{X_1} = 5,7$, $\overline{X_2} = 6,00$, $s_1^2 = 0,0266$, $s_2^2 = 0,0711$.

Riešenie 5.3.6 *Vypočítame* S :

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = 0,2209$$

$$|t_0| = \frac{|\overline{X_1} - \overline{X_2}|}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Z tabuliek vieme, že $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(18)} = 2,101$. *Ak* $|t_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, *odmietneme hypotézu* H_0.