# Pravdepodobnosť a štatistika

(zápisky z prednášok doc. Lamoša prednášaných v roku 2000)

Spísali:
Július Loman (*lomo@lomo.sk*)
Peter Kubíni (*8kubini@st.fmph.uniba.sk*)
Peter Hudec (*8hudecp@st.fmph.uniba.sk*)

15. decembra 2000

# Upozornenie

Tento dokument je a bol pôvodne vytvorený **len** a **len** pre našu vlastnú potrebu. Na naliehanie iných sme sa však rozhodli dať ho do obehu. Dokument **v žiadnom prípade** neslúži ako náhrada za prednášku, či doporučenú literatúru. Chceme upozorniť, že túto vlastnosť textu netreba brať na ľahkú váhu. Text zahrňuje len poznámky z prednášok doc. Lamoša prednášaných v roku 2000. Autori spísaného textu neručia za žiadne prípadné chyby, chýbajúce časti, či iné nedostatky. Prípadné doplnky, pripomienky a komentáre posielajte mailom na *skola@lomo.sk*

# Obsah


**1 Úvod** **3**
- 1.1 Základné definície . . . 3
- 1.2 Axiomatická definícia pravdepodobnosti . . . 4
- 1.3 Geometrická definícia pravdepodobnosti . . . 4
- 1.4 Klasická definícia pravdepodobnosti . . . 4
- 1.5 Základné vlastnosti pravdepodobnosti . . . 4
- 1.6 Podmienená pravdepodobnosť . . . 5
- 1.7 Nezávislosť náhodných udalostí . . . 7
- 1.8 Bernoulliho schéma . . . 7

**2 Náhodná premenná** **10**
- 2.1 Náhodná premenná . . . 10
- 2.2 Distribučná funkcia náhodnej premennej . . . 10
- 2.3 Vlastnosti distribučnej funkcie . . . 10
- 2.4 Parametre náhodných premenných . . . 11
- 2.5 Momenty náhodných premenných . . . 11
- 2.6 Dvojrozmerná náhodná premenná . . . 13
- 2.7 Momenty 2-rozmerných náhodných premenných . . . 14
- 2.8 Lineárna regresia . . . 15
- 2.9 Lineárna regresia z hľadiska pravdepodobnosti . . . 17

**3 Zákony rozdelenia pravdepodobností** **19**
- 3.1 Binomické rozdelenie . . . 19
- 3.2 Poissonove rozdelenie . . . 20
- 3.3 Hypergeometrické rozdelenie . . . 21
- 3.4 Normálne (Gaussovo) rozdelenie . . . 22
- 3.5 Výberové metódy . . . 24
- 3.6 Fisherovo-Snedecorovo rozdelenie (F-rozdelenie) . . . 27

**4 Štatistika** **28**
- 4.1 Batelttov test homogenity rozptylu . . . 28
- 4.2 Metódy odhadu štatistických parametrov . . . 28
- 4.3 Metóda maximálnej vierohodnosti . . . 28
- 4.4 Intervalové odhady . . . 29

**5 Testovanie špecifických hypotéz** **33**
- 5.1 Štatistická hypotéza . . . 33
- 5.2 Testovacie kritérium, chyba 1. a 2. druhu . . . 33
- 5.3 Postupy pre testovanie hypotéz . . . 33
  - 5.3.1 Nepoznáme $\mu$, poznáme $\sigma^2$ . . . 34
  - 5.3.2 Nepoznáme ani $\mu$, ani $\sigma^2$ . . . 35
  - 5.3.3 Poznáme $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ . . . 36
  - 5.3.4 Poznáme $\mu_1, \mu_2, \sigma^2$ . . . 38
  - 5.3.5 Nepoznáme $\mu, \sigma^2$ . . . 38

# 1 Úvod

## 1.1 Základné definície

**Definícia 1.1.1** *Budeme hovoriť, že pri realizácii náhodného pokusu nastala udalosť $A$, ak nastala elementárna udalosť $\omega \in A$.*

**Definícia 1.1.2** *Udalosť, ktorá nastane pri každej realizácii náhodného pokusu nazývame udalosťou istou. Udalosť istá je ekvivalentná s množinou elementárnych udalostí, a preto ju budeme označovať $\Omega$.*

**Definícia 1.1.3** *Udalosť, ktorá nenastane pri žiadnej z realizácii náhodného pokusu sa nazýva udalosť nemožná. Označujeme ju $\emptyset$.*

**Definícia 1.1.4** *Udalosť $A$ je časťou udalosti $B$, ak každá elementárna udalosť $\omega \in A$ je aj prvkom $B$. Zapisujeme to $A \subset B$.*

**Definícia 1.1.5** *Udalosť $A$ sa rovná udalosti $B$, ak $A \subset B$ a súčasne $B \subset A$.*

**Definícia 1.1.6** *Súčtom (zjednotením) udalostí $A_1, A_2, \ldots$ budeme nazývať takú udalosť $A$, ktorá nastane vtedy, keď nastane aspoň jedna udalosť z $A_1, A_2, \ldots$ Zapisujeme to $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$.*

**Definícia 1.1.7** *Prienikom udalostí $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ nazývame takú udalosť $A$, ktorá nastane vtedy a len vtedy, ak nastanú súčasne všetky udalosti. Zapisujeme $A = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$.*

**Definícia 1.1.8** *Komplementom alebo doplnkom udalosti $A$ nazývame udalosť $A^C$ ($\bar{A}$), ktorá nastane vtedy, ak nenastane $A$. Teda $A^C = \Omega - A$.*

**Definícia 1.1.9** *Nech $\Omega$ je neprázdna množina elementárnych udalostí, pričom $\Omega \neq \emptyset$. Neprázdny systém $S$ podmnožín elementárnych udalostí nazývame javové pole (pole náhodných udalostí) ($\sigma$ pole).*

1. *$A \in S$, potom $A^C \in S$* [1]
2. *$A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \in S$, Potom $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$* [2]

**Definícia 1.1.10** *Postupnosť udalostí $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa volá neklesajúcou (nerastúcou), ak pre každé $n$ platí $A_n \subset A_{n+1}$ ($A_n \supset A_{n+1}$)*

**Definícia 1.1.11** *Nech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť náhodných udalostí. Nech $A^*$ je množina elementárnych udalostí (výsledkov pokusu), ktoré patria do nekonečne veľa členov postupnosti $\{A_n\}$. Potom $A^*$ nazývame hornou limitou postupnosti $\{A_n\}$ a zapisujeme $\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sup A_n$.*

**Definícia 1.1.12** *Nech $A_*$ je množina všetkých elementárnych udalostí, ktoré patria do všetkých členov postupnosti $\{A_n\}$ s výnimkou konečného počtu. Potom $A_*$ nazývame dolnou limitou postupnosti $\{A_n\}$.*

**Poznámka 1.1.13** *Ak $\{A_n\}$ je taká, že $A^* = A_*$ hovoríme, že postupnosť má limitu $A$ a píšeme $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.*

**Poznámka 1.1.14** *Pre neklesajúcu postupnosť množín platí, že $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.*

*Pre nerastúcu postupnosť množín platí $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.*

[1] komplement

[2] spočítateľné zjednotenie

## 1.2 Axiomatická definícia pravdepodobnosti

**Definícia 1.2.1** *Nech $\Omega$ je neprázdna množina elementárnych udalostí. Nech $S$ je pole náhodných udalostí definované na $\Omega$. Potom pravdepodobnosťou nazveme ľubovoľnú reálnu funkciu $P$ definovanú na $S$, ktorá spĺňa nasledovné axiómy:*

- *Každej udalosti $A \in S$ je priradené nezávislé číslo $P(A) \geq 0$*
- *Istej udalosti je priradené číslo 1, teda $P(\Omega) = 1$*
- *Pre ľubovoľnú postupnosť udalostí $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ktoré sa navzájom vylučujú, t.j. $A_i \cap A_j$ je udalosť nemožná pre $i \neq j$. Potom platí $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$*

## 1.3 Geometrická definícia pravdepodobnosti

**Definícia 1.3.1** *Nech $G$ je nejaká rovinná množina, nech $g \subset G$. Pričom vieme vypočítať obsah oboch množín. Nech výsledok pokusu je určený náhodným zvolením bodu množiny $G$, potom pravdepodobnosť toho, že náhodne zvolený bod (nastatie udalosti) padne do množiny $g$ definujeme ako podiel plošných obsahov. $P = \frac{\mu(g)}{\mu(G)}$ , pričom $\mu(g) \geq 0$ a $\mu(G) > 0$*

## 1.4 Klasická definícia pravdepodobnosti

**Definícia 1.4.1** *Majme množinu $\Omega$ pozostávajúcu z $n$ elementárnych vzájomne sa vylučujúcich rovnako možných udalostí. Ak $m$ ($m \leq n$) z týchto elementárnych udalostí má za následok nastatie udalosti $A$ ($n - m$ elemetárnych udalostí nemá za následok nastatie udalosti $A$) potom pravdepodobnosť udalosti $A$ definujme ako podiel $P(A) = \frac{m}{n}$.*

## 1.5 Základné vlastnosti pravdepodobnosti

**Veta 1.5.1 (Pravdep. je monotónna, subtrakt. funkcia)** *Nech $(\Omega, S, P)$ je pravdepodobnostný priestor. $A, B \in S$, $A \subset B$. Potom platí $P(A) \leq P(B)$, $P(B - A) = P(B) - P(A)$.*

**Dôkaz:** $B = A \cup (B - A), A \cap (B - A) = \emptyset$
$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) \geq 0$
Z predchádzajúceho riadku nám vyplýva: $P(B) \geq P(A)$, pretože $P(B - A)$ je nezáporné. □

**Veta 1.5.2** *Nech $(\Omega, S, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Nech $A \in S$. Potom platí, $P(A^C) = 1 - P(A)$.*

**Dôkaz:** $A \in S$, $A^C \in S$,
$A \cup A^C \in S$, $\Omega \in S$
$A \cap A^C = \emptyset$
$A \cup A^C = \Omega$
Dostávame: $P(A) + P(A^C) = P(\Omega) = 1$ □

**Veta 1.5.3** *Nech $(\Omega, S, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Nech $\emptyset \in S$. Potom $P(\emptyset) = 0$.*

**Dôkaz:** $\emptyset = \Omega^C$
$P(\emptyset) = P(\Omega^C) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$ □

**Veta 1.5.4** *Nech $(\Omega, S, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Nech $A, B \in S$. Potom platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*

**Dôkaz:** Upravujeme dvojicu rovníc:

$$A \cup B = A \cup (A^C \cap B)$$
$$B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B)$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$$

Kvôli axióme o pravdepodobnosti zjednotenia:

$$A \cap (A^C \cap B) = \emptyset$$
$$(A \cap B) \cap (A^C \cap B) = \emptyset$$

Ďalej využijeme subtraktívnosť funkcie:

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

□

**Veta 1.5.5** *Nech $(\Omega, S, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je ľubovoľná postupnosť prvkov z $S$. Potom platí:*
$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j}^{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$

**Veta 1.5.6** *Nech $(\Omega, S, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Nech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť $A_n \in S, n = 1, 2, \ldots$ Potom platí*
$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k - A_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k - A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k - A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

## 1.6 Podmienená pravdepodobnosť

**Príklad 1.6.1** *$A, B, P(B) > 0$, $P(A \backslash B) \neq P(A)$*
*Vykonajme $n$ nezávislých pokusov a nech udalosť $B$ nastane $m_n(B)$-krát. Nech pri týchto $n$ nezávislých pokusoch súčasne s udalosťou $B$ nastala aj udalosť $A$ $m_n(B)$-krát. Podiel $\frac{m_n(A \cap B)}{m_n(B)}$ nazývame podmienená relatívna početnosť udalosti $A$ za podmienky, že nastala udalosť $B$. Ak označíme relatívne početnosti $f_n(B)$, $f_n(A \cap B)$, $f_n(A \backslash B)$ potom platí:*

$$f_n(B) = \frac{m_n(B)}{n} \quad f_n(A \cap B) = \frac{m_n(A \cap B)}{n}$$
$$f_n(A \backslash B) = \frac{m_n(A \cap B)}{m_n(B)} = \frac{\frac{m_n(A \cap B)}{n}}{\frac{m_n(B)}{n}} = \frac{f_n(A \cap B)}{f_n(B)}$$

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Definícia 1.6.2** *Nech $A, B \in S, P(B) > 0$. Potom podiel $P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ nazývame podmienenou pravdepodobnosťou nastatia udalosti $A$ za podmienky, že nastala udalosť $B$.*[3]

[3]Takto definovaná podmienená pravdepodobnosť je opäť pravdepodobnosťou spĺňajúcou axiómy.

**Veta 1.6.3** *Nech $B \in S, P(B) > 0$. Potom pre ľubovoľnú udalosť $A$ platí:*

- $P(A\backslash B) \geq 0$
- $P(\Omega\backslash B) = 1$
- $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\backslash B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n\backslash B)$
- $P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- $P(A_2\backslash A_1) = \frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)} \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2\backslash A_1)$

**Veta 1.6.4 (veta o súčine pravdepodobností)** *Nech $(\Omega, S, P)$, nech $A_1$, $A_2$, ..., $A_n \in S$, pričom platí $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Potom platí $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n) = P(A_1)P(A_2\backslash A_1)P(A_3\backslash A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n\backslash A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$*

**Veta 1.6.5 (veta o úhrnnej pravdepodobnosti)** *Nech $(\Omega, S, P)$, nech $A_1$, $A_2$, ..., $A_n \in S$ je postupnosť disjunktných udalostí s nenulovými pravdepodobnosťami takých, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, nech $B \in S$, pričom predpokladáme, že poznáme $P(B\backslash A_i)$. Potom platí $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B\backslash A_i)$.*

**Dôkaz:** $B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B)$
$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B\backslash A_i)$ □

**Príklad 1.6.6** *Aká je pravdepodobnosť, že pri kúpe jednej náhodnej žiarovky kúpime nepodarok ?*

| | | |
|---|---|---|
| *V prvej dodávke* | *400 kusov* | *1% zlé* |
| *V druhej dodávke* | *500 kusov* | *2% zlé* |
| *V tretej dodávke* | *100 kusov* | *4% zlé* |

**Riešenie 1.6.7**

| | | |
|---|---|---|
| *B - žiarovka je nepodarok* | | |
| *$A_1$- žiarovka je z prvej dodávky* | $P(A_1) = 0,4$ | $P(B\backslash A_1) = 0,01$ |
| *$A_2$ - žiarovka je z druhej dodávky* | $P(A_2) = 0,5$ | $P(B\backslash A_2) = 0,02$ |
| *$A_3$ - žiarovka je z tretej dodávky* | $P(A_3) = 0,1$ | $P(B\backslash A_3) = 0,04$ |

*Potom riešením je: $P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B\backslash A_i)$.*

**Veta 1.6.8 (Prvá Bayesova veta)** *Nech $(\Omega, S, P)$, nech $A_1$, $A_2$, ..., $A_n \in S$ je postupnosť disjunktných udalostí s nenulovými pravdepodobnosťami také, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, nech $B \in S$, pričom $P(B) > 0$, poznáme $P(B\backslash A_i)$. Potom platí*

$$P(A_i\backslash B) = \frac{P(A_i)P(B\backslash A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B\backslash A_j)}; \forall i = 1, \ldots, n$$

**Príklad 1.6.9 (Príklad na 1. Bayesovu vetu)** *V sklade je 40% prístrojov 1. akosti, 60% prístrojov druhej akosti. Pravdepodobnosť toho, že prístroj 1. akosti bude pracovať t hodín bez poruchy je 0,85, 2. akosti je 0,70. Zakúpili sme jeden prístroj a pracoval bez poruchy t hodín. Aká je pravdepodobnosť , že je prístroj 1. akosti ?*

**Veta 1.6.10 (Druhá Bayesova veta)** *Nech $(\Omega, S, P)$, nech $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$ je postupnosť disjunktných udalostí s nenulovými pravdepodobnosťami také, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, nech $B, C \in S$, pričom $P(B) > 0$, poznáme $P(B\backslash A_i)$, $P(C\backslash(A_i \cap B))$, pre $i = 1 \ldots n$. Potom platí*

$$P(C\backslash B) = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B\backslash A_i)P(C\backslash A_i \cap B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B\backslash A_j)}$$

## 1.7 Nezávislosť náhodných udalostí

**Definícia 1.7.1** *Budeme hovoriť, že udalosti sú navzájom nezávislé, ak platí* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

**Definícia 1.7.2** *Nech* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sú postupnosti udalostí. Budeme hovoriť, že sú po dvoch nezávislé, ak platí* $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, *pre* $i, j = 1, \ldots, n; i \neq j$.

**Poznámka 1.7.3** *Uvažujme* $A_1, A_2, A_3$.
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ *(1)*
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$ *(2)*
$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$
$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$
$(1) \not\Rightarrow (2); (2) \not\Rightarrow (1)$

**Definícia 1.7.4** *Hovoríme, že udalosti sú skupinove nezávislé, ak pre ľubovoľnú vybranú postupnosť indexov* $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, *platí* $P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_r}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2}) \ldots P(A_{k_r})$, *pre* $r = 2 \ldots n$.

**Veta 1.7.5** *Nech* $A, B \in S$ *sú nezávislé. Potom aj dvojice udalostí* $(A, B^c)$, $(A^c, B)$, $(A^c, B^c)$ *sú nezávislé.*

**Dôkaz:** Malý náznak toho ako to dokázať. $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, kedže $A, B$ sa navzájom vylučujú platí:
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$
$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A)P(B)$
Podobne pre zvyšné dve. □

**Veta 1.7.6** *Nech* $A, B \in S$, $0 < P(B) < 1$. *Udalosti* $A, B$ *su nezávislé práve vtedy, keď* $P(A \backslash B) = P(A \backslash B^c)$.

## 1.8 Bernoulliho schéma

**Príklad 1.8.1** *Strieľajme 3-krát na cieľ. Pravdepodobnosť zásahu nech je* $p \in (0, 1)$. *Aká je pravdepodobnosť, že 2-krát trafíme cieľ? Môžeme to zapísať nasledovne:*

$$\begin{aligned} B_{3,2} &= (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \\ P(B_{3,2}) &= P(A_1^c)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2^c)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3^c) = \\ &= (1-p)pp + p(1-p)p + pp(1-p) = 3p^2(1-p) \end{aligned}$$

**Veta 1.8.2** *Nech* $A \in S$ *nastane pri každom pokuse s* $P(A) = p \in (0, 1)$. *Potom pravdepodobnosť toho, že udalosť A po vykonaní n náhodných pokusov nastane k-krát je*

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

**Veta 1.8.3 (Laplaceova)** *Nech pravdepodobnosť nastatia udalosti $A$ je $P(A) = p \in (0,1)$. Potom pravdepodobnosť toho, že udalosť $A$ po vykonaní $n$ nezávislých pokusov nastane $k$-krát je*

$$P_{n,k}(A) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}; q = 1-p$$

*Funkcia $f(x)$ je párna.*

**Príklad 1.8.4** *Aká je pravedpodobnosť, že pri $n = 400$ pokusoch, $A$ nastane $k = 80$ krát, keď pravdepodobnosť nastatia pri každom pokuse je $p = 0,2$ ?*

**Riešenie 1.8.5** $P_{400,8}(A) \approx \frac{1}{\sqrt{400.0,2.0,8}} f(x)$ , $x = \frac{80-400.0,2}{\sqrt{64}} = 0$ , $f(0) = 0,3989 \Rightarrow P_{400,80}(A) \approx \frac{1}{8} 0,3989 = 0,0986$

**Veta 1.8.6 (integrálna Laplaceova)** *Nech pravdepodobnosť nastatia udalosti $A$ je $P(A) = p \in (0,1)$, $A \in S$. Potom pravdepodobnosť toho, že udalosť $A$ nastene pri $n$ nezávislých pokusoch nie menej ako $k_1$-krát a nie viac ako $k_2$-krát je*

$$P_{n,k_1,k_2}(A) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_1}^{k_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = F(x_2) - F(x_1)$$

$$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}; i = 1,2.$$

**Príklad 1.8.7** *Pravdepodobnosť zásahu cieľa pri výstrele je $p = 0,75$. Nájdite $P$ toho, že $n = 100$ výstreloch strela zasiahne cieľ nie menej ako 71 a nie viac ako 80 krát.*

**Riešenie 1.8.8** $p = 0,75$, $n = 100$, $k_1 = 71$, $k_2 = 80$ *Dosadením do vzorca dostávame*

$$P_{n,k_1,k_2}(A) \approx F(1,15) - F(-0,92) = 0,87493 - 0,17879 = 0,69614$$

**Veta 1.8.9 (Čebyševova nerovnosť - špeciálne znenie)** *Nech $A \in S$ taká, že nastane pri každom pokuse s pravdepodobnosťou $P(A) = p \in (0,1)$. Vykonáme $n$ nezávislých pokusov. Potom pravdepodobnosť toho, že relatívna početnosť udalosti $A$ (označujeme $\frac{k_n}{n}$) sa bude od neznámej pravdepodobnosti líšiť o menej ako $\varepsilon > 0$ sa rovná*

$$P\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

**Príklad 1.8.10** *Skúmajme $A$, vykonajme $n = 100$ pokusov. Nech $\frac{k_{100}}{100}$ je relatívna početnosť $A$. S akou istotou môžeme tvrdiť, že pravdepodobnosť $p$ (teoretická pravdepodobnosť) sa od relatívnej početnosti líši o menej ako 0,1 ?*

**Riešenie 1.8.11** $n = 100$, $\varepsilon = 0,1$ *Potom*

$$P\left(\left|\frac{k_{100}}{100} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4.100.(0,1)^2} = \frac{3}{4} = 0,75$$

**Príklad 1.8.12** *Koľko pokusov by sme museli vykonať, aby sme mohli tvrdiť s 99% istotou, že relatívna početnosť udalosti A sa bude líšiť od neznámej pravdepodobnosti o menej ako 0,1 ?*

**Riešenie 1.8.13** $P\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| < 0,1\right) \geq 1 - \frac{1}{4.n.0,1^2} \geq 0,99 \Rightarrow n \geq 2500$ *pokusov*

# 2 Náhodná premenná

## 2.1 Náhodná premenná

**Definícia 2.1.1** *Funkciu $X(\omega)$ definovanú na $\Omega$; $\omega \in \Omega$, budeme nazývať náhodnou premennou vzhľadom na $S$, ak vzor ľubovoľného intervalu $(-\infty, x)$ je prvkom $S$, t.j.*

$$X^{-1}(-\infty, x) = \{\omega; \omega \in \Omega; X(\omega) \in (-\infty, x)\} = \{\omega; \omega \in \Omega; X(\omega) < x\} \in S; x \in R$$

## 2.2 Distribučná funkcia náhodnej premennej

**Definícia 2.2.1** *Distribučnou funkciou náhodnej premennej $X(\Omega)$ budeme nazývať funkciu reálnej premennej $F(x)$, danú $F(x) = P\{\omega; \omega \in \Omega; X(\omega) < x\} = P(X < x)$; $x \in R$.*

## 2.3 Vlastnosti distribučnej funkcie

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$
- $x_1, x_2; x_1 < x_2 \Longrightarrow F(x_1) < F(x_2)$
- distribučná funkcia je zľava spojitá v $x \in (-\infty, \infty)$, $\{x_n\}_1^\infty$ - rastúca postupnosť reálnych čísel $\lim_{x \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} F(x_n) = F(x_0)$

**Definícia 2.3.1** *Hovoríme, že náhodná premenná $X$ je diskrétnou náhodnou premennou, ak nadobúda konečne veľa, alebo spočítateľne veľa reálnych hodnôt čísel.*

**Definícia 2.3.2** *Nech náhodná premenná $X$ nadobúda hodnoty $x_i, i = 1 \ldots n$ s pravdepodobnosťami $p_i = P(X = x_i)$. Potom $p_i$ je rozdelenie pravdepodobností náhodnej premennej $X$, ak platí:*

$$\sum_i p_i = \sum_i P(X = x_i) = 1$$

**Definícia 2.3.3** *Distribučná funkcia diskrétnej náhodnej premennej je tvaru:*

$$F(X) = P(X < x) = \sum_{\{i; x_i < x\}} p_i; p_i = (X = x_i)$$

**Definícia 2.3.4** *Náhodná premenná $X$ s distribučnou funkciou $F(X)$ sa nazýva spojitá náhodná premenná, ak existuje taká nezáporná, po častiach spojitá $f(x) \geq 0$, pre ktorú platí $F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, kde $f(t)$ je hustota pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej.*

- $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$
- $F(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$
- $P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = P(x_2) - P(x_1)$

## 2.4 Parametre náhodných premenných

**Definícia 2.4.1** *Nech náhodná premenná $X$ nadobúda hodnoty $x_i$,$p_i = (X = x_i)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ . Potom výraz tvaru $E(X) = \sum_i x_i p_i$ sa nazýva stredná hodnota diskrétnej náhodnej premennej.*
*Tento rad musí konvergovať, teda $\sum |x_i| \, p_i < \infty$.*

**Príklad 2.4.2** *Príklad pre Bernoulliho schému*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \sum_{i=1} i \frac{n(n-1)! p p^{i-1} q^{n-1-(i-1)}}{i(i-1)!\,[n-1-(i-1)]!} =$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} p^k q^{n-1-k} = np$$

**Definícia 2.4.3** *Nech je daná náhodná premenná $X$ s hustotou pravdepodobnosti $f(x)$. Potom výraz $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ nazývame strednou hodnotou spojitej náhodnej premennej, pričom musí platiť $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx < \infty$ (teda konverguje).*

**Poznámka 2.4.4** *Vlastnosti strednej hodnoty:*

- $X = C$; $E(C) = C$
- $X = CX$; $E(CX) = C.E(X)$
- $X = CX + B$; $E(CX + B) = C.E(X) + B$

**Veta 2.4.5** *Stredná hodnota odchýlky náhodnej premennej od jej strednej hodnoty je rovná 0. $E(X - E(X)) = 0$.*

## 2.5 Momenty náhodných premenných

**Definícia 2.5.1** *Stredná hodnota $g(x) = X^k$ sa nazýva k-tym začiatočným momentom*

$$\nu_k = E(X^k) = \sum_i x_i^k p_i \text{ - diskrétna}$$

$$\nu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k f(x) dx \text{ - spojitá}$$

**Definícia 2.5.2** *Stredná hodnota z funkcie $g(x) = (X - A)^k$ je k-ty všeobecný moment $A \in R$ (ľub. konštanta). $\mu_k^{'} = E\left[(X - A)^k\right]$*

**Definícia 2.5.3** *Stredná hodnota z funkcie $g(x) = (X - E(X))^k$ sa nazýva k-ty centrálny moment.*

$$\mu_k = E\left[(X - E(X))^k\right] = \sum_i (x_i - E(X))^k p_i$$

$$\mu_k = E\left[(X - E(X))^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k f(x)\, dx$$

**Definícia 2.5.4** *Centrálny moment druhého rádu je disperzia (rozptyl).*

$$\mu_2 = D(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i$$

$$\mu_2 = D(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

**Definícia 2.5.5** *Druhá odmocnina z disperzie sa nazýva smerodajná odchýlka.*

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)}$$

**Veta 2.5.6** *Nech $X, E(X) \neq C$. Potom $D(X) < E[(X - C)^2]$*

**Dôkaz:** $E[(X-C)^2] = E[((X-E(X)) + (E(X)-C))^2] = E[(X-E(X))^2 + (E(X)-C)^2 + 2(X-E(X))(E(X)-C)] = D(X) + \underbrace{E((E(X)-C)^2) + E(\ldots)(\ldots)}_{>0}$ $\square$

**Poznámka 2.5.7** *Vlastnosti:*

- $D(C) = 0$
- $D(CX) = C^2 D(X)$
- $D(CX + B) = C^2 D(X)$

**Veta 2.5.8 (Čebyševova nerovnosť)** *Nech $X$ je náhodná premenná a nech existuje $E(X), D(X)$. Potom platí:*

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

**Dôkaz:** $A = \{x; |x - E(x)| \geq \varepsilon\}$

$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [X - E(X)]^2 f(x) dx \geq \int_A \varepsilon^2 f(x) dx = \varepsilon^2 \int_A f(x) dx = \varepsilon^2 P(A) =$

$= \varepsilon^2 P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$ $\square$

**Definícia 2.5.9** *Hovoríme, že $X$ je normovaná (štandardná), ak $E(X) = 0$, $D(X) = 1$*

**Veta 2.5.10** *Nech $X$ má $E(X), D(X)$. Potom $Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ je normovaná náhodná premenná.*

**Veta 2.5.11** *Podiel centrálneho momentu 3. rádu a 3. smerodajnej odchýlky nazývame koeficient asymetrie (nesúmernosti)*

$$\varepsilon = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

**Veta 2.5.12** *Koeficient strmosti je*

$$\delta = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$$

## 2.6 Dvojrozmerná náhodná premenná

**Definícia 2.6.1** *Dvojicu* $(X(\omega), Y(\omega))$ *definovanú nad* $\Omega, \omega \in \Omega$, *budeme nazývať dvojrozmernou náhodnou premennou vzhľadom na* $S$, *ak vzor ľubovoľného intervalu reálnych čísiel tvaru* $I_2 = (-\infty, x) \times (-\infty, y)$ *je prvkom* $S$, *t.j.*

$$X^{-1}(I_2) = \{\omega, (X(\omega), Y(\omega) \in I_2)\} = \{\omega, X(\omega) < x, Y(\omega) < y\} \in S, (x, y) \in R_2$$

**Definícia 2.6.2** *Distribučnou funkciou dvojrozmernej náhodnej premennej je reálna funkcia 2 reálnych premenných* $x, y$ *definovaná takto:*

$$F(x, y) = P\{\omega, X(\omega) < x, Y(\omega) < y\}$$

*Iný spôsob zápisu:*

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)(x, y) \in R_2$$

**Veta 2.6.3** *Nech* $F(x, y)$ *je distribúciou* $(x, y)$

- $F(-\infty, y) = 0, F(x, -\infty) = 0$
- $F(+\infty, +\infty) = 1$
- $x_1, x_2, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$
- $y_1, y_2, y_1 \leq y_2 \Longrightarrow F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$
  *potom platí :*
  $P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) =$
  $P(X < x_2, Y < y_2) - P(X < x_2, Y < y_1) - P(X < x_1, Y < y_2) +$
  $+P(X < x_1, Y < y_1) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$

**Definícia 2.6.4** *Nech* $(X, Y)$ *nadobúda hodnoty* $(x_i, y_i)$ *s pravdepodobnosťou* $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_i)$ $i, j = 1, \ldots, n$ . *Potom* $p_{ij}$ *sa nazýva rozdelenie pravdepodobnosti* $(X, Y)$ *premenných, ak platí* $\sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = 1$

**Definícia 2.6.5** *Distribučná funkcia diskrétnej 2-rozmernej náhodnej premennej je definovaná takto:*

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = \sum_{\{i, x_i < x\}} \sum_{\{j, y_j < y\}} p_{ij}$$

**Definícia 2.6.6** *Distribučná funkcia spojitej 2-rozmernej náhodnej premennej je definovaná takto :*

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) dx dy$$

**Definícia 2.6.7** *Marginálnymi pravdepodobnosťami zložiek diskrétnej premennej* $(X, Y)$ *nazývame výrazy tvaru*

$$\sum_{j}^{n} p_{ij} = p_{i\circ}, \sum_{i}^{m} p_{ij} = p_{\circ j}$$

**Definícia 2.6.8** *Marginálne distribučné funkcie zložiek $(X,Y)$ sú tvaru: pre diskrétne:*

$$F_1(x) = F_1(x,\infty) = \sum_{\{i,x_i<x\}} \sum_j p_{ij} = \sum_{\{i,x_i<x\}} p_{i\circ}$$

$$F_2(y) = F_1(\infty,y) = \sum_i \sum_{\{j,y_j<y\}} p_{ij} = \sum_{\{j,y_j<y\}} p_{\circ j}$$

*pre spojité:*

$$F_1(x) = F_1(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \right) dx$$

$$F_2(y) = F_2(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \right) dy$$

**Definícia 2.6.9** *Budeme hovoriť, že náhodné premenné sú štatisticky nezávislé, ak platí*

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

*pre spojité $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, pre diskrétne $p_{ij} = p_{i\circ}p_{\circ j}$*

## 2.7 Momenty 2-rozmerných náhodných premenných

**Definícia 2.7.1** *Stredná hodnota z funkcie $g(X,Y) = X^kY^s$ sa nazýva (k,s)-tým začiatočným momentom*

$$\nu_{k,s} = E(X^kY^s) = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}, \text{ pre diskrétne}$$

$$\nu_{k,s} = E(X^kY^s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy, \text{ pre spojité}$$

**Definícia 2.7.2** *Stredná hodnota $g(X,Y) = (X-E(X))^k(Y-E(Y))^s$ je (k,s)-tým centrálnym momentom*

$$\mu_{k,s} = E\left[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^s\right] = \sum_i \sum_j (x_i - E(X)^k)(y_j - E(Y))^s p_{ij} \text{ - pre diskrétne}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - E(X))^k (y_j - E(Y))^s f(x,y)dxdy \text{ - pre spojité}$$

**Definícia 2.7.3** *Centrálny moment 1.rádu 2-rozmernej náhodnej premennej nazývame kovariancia*

$$\mu_{1,1} = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] = cov(X, Y)$$

**Veta 2.7.4** *Vlastnosti kovariancie:*

- $cov(x, y) = cov(y, x)$
- $cov(x, x) = D(x), cov(y, y) = D(y)$

**Veta 2.7.5** *Nech $X, Y$ sú nezávislé náhodné premenné, potom $cov(x, y) = 0$.*

**Definícia 2.7.6** *Nech $(X, Y)$ je dvojrozmerná náh. premenná. Nech existujú $D(X), D(Y)$, $\mu_{11}$.Potom výraz tvaru:*

$$\rho(x, y) = \frac{E[(X - E(X))(Y - E(Y))]}{\sqrt{E[(X - E(X))^2]}\sqrt{E[(Y - E(Y))^2]}} = \frac{cov(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

*sa nazýva koeficient korelácie. $\rho$ nadobúda hodnoty z intervalu od -1 po 1.*

**Veta 2.7.7** *Nech náhodné premenné $X, Y$ sú zviazané lineárnym vzťahom $Y = aX + b$, kde $a \neq 0$,$b$ je ľubovoľná konštanta, potom $\rho_{x,y} = \pm 1$*

**Dôkaz:** Priamo, z definície koeficientu korelácie dosadením $Y = aX + b$ a využitím vlastností strednej hodnoty a disperzie. □

## 2.8 Lineárna regresia

$y = ax + b$

$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 = \min$

Chceme aby, $\frac{\delta S(a,b)}{\delta a} = 0, \frac{\delta S(a,b)}{\delta b} = 0,$

$$0 = \frac{\delta S(a, b)}{\delta a} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)(-x_i)$$

z toho nám po úprave plynie:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

z druhej rovnice dostávame:

$$0 = \frac{\delta S(a, b)}{\delta b} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)(-1)$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Takže máme sústavu:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

riešime ju Cramerovým pravidlom:

$$D_s = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix}$$

$$D_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix}$$

Riešením je $a = \frac{D_a}{D_s}, b = \frac{D_b}{D_s}$. To znamená, že hľadaná priamka je $y = ax + b$. Podobne sa postupuje, ak počítame lineárnu regresiu náhodne premennej $X$ vzhľadom na náhodne premennú $Y$. Počítame ju v tvare $x = cy + d$.

Tabuľka početnosti:

| $X \backslash Y$ | $y_1$ | $\dots$ | $y_m$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $f_{11}$ | $\dots$ | $f_{1m}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $x_n$ | $f_{n1}$ | $\dots$ | $f_{nm}$ |

Marginálne funkcie početnosti:

$$f_{i\bullet} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f_{ij}$$

$$f_{\bullet j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{ij}$$

Koeficient korelácie:

$$r_{xy} = \frac{1}{N s_x s_y}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - \overline{X})(y_j - \overline{Y}) f_{ij}$$

$$r_{xy} = \frac{1}{N s_x s_y}[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j f_{ij} - N\overline{xy}]$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 f_{1\bullet} + x_2 f_{2\bullet} + \cdots + x_n f_{n\bullet}}{f_{1\bullet} + f_{2\bullet} + \cdots + f_{n\bullet}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_{i\bullet}}{N}$$

$$\overline{y} = \frac{y_1 f_{\bullet 1} + y_2 f_{\bullet 2} + \cdots + y_m f_{\bullet m}}{f_{\bullet 1} + f_{\bullet 2} + \cdots + f_{\bullet m}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i f_{\bullet i}}{N}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 f_{i\bullet}}{N} \qquad s_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} (y_j - \overline{y})^2 f_{\bullet j}}{N}$$

$$\overline{x}_{y_1} = \frac{x_1 f_{11} + x_2 f_{21} + \cdots + x_n f_{n1}}{f_{\bullet 1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_{i1}}{f_{\bullet 1}}$$

## 2.9 Lineárna regresia z hľadiska pravdepodobnosti

**Definícia 2.9.1** *Nech $(X,Y)$ sú náhodne premenné. Regresnou priamkou náhodne premennej $Y$ vzhľadom na náhodne premennú $X$ budeme nazývať priamku tvaru $y = ax + b$, ak platí*

$$E[(Y - aX - b)^2] \leq E[(Y - a'X - b')^2], \text{ pre ľubovoľné } a', b'$$

**Definícia 2.9.2** *Priamka $x = cy + d$ sa nazýva regresnou priamkou $X$ vzhľadom na $Y$, ak platí*

$$E[(X - cY - d)^2] \leq E[(X - c'Y - d')^2], \text{ pre ľubovoľné } c', d'$$

**Veta 2.9.3** *Nech $(X,Y)$ je 2-rozmerná náhodná premenná. Nech*

$$E(X) = \mu_x, D(X) = \sigma_x^2, E(Y) = \mu_y, D(Y) = \sigma_y^2$$

$$\mu_{11} = cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

*Potom priamka tvaru:*

$$Y - E(X) = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}(X - E(X))$$

*je regresnou priamkou náhodne premennej $Y$ vzhľadom na náhodne premennú $X$.*

**Dôkaz:**

$$S(a',b') = E[(Y - a'X - b')^2] = E[Y^2 + a'^2X^2 + b'^2 - 2a'XY - 2b'Y + 2a'b'X] =$$

$$= E(Y^2) + a'^2E(X^2) - 2a'E(XY) - 2b'E(Y) + 2a'b'E(X) + b'^2 =$$

$$E(Y^2) - E^2(Y) + E^2(Y) + a'^2E(X^2) - a'^2E^2(X) + a'^2E^2(X) - 2a'(E(XY) -$$

$$-E(X)E(Y) + E(X)E(Y)) - 2b'E(Y) + 2a'b'E(X) + b'^2$$

ďalej

$$\sigma_y^2 + E^2(Y) + a'^2(\sigma_x^2 + E^2(X)) - 2a'(\mu_{11} + E(X)E(Y)) + b'^2 - 2bE(Y) + 2a'b'E(X)$$

keďže:

$$\frac{\delta S(a', b')}{\delta a} = 0 \qquad \frac{\delta S(a', b')}{\delta b} = 0$$

z toho vyplýva:

$$\frac{\delta S(a', b')}{\delta a} = 2a'(\sigma_x^2 + E^2(X)) - 2(\mu_{11} + E(X)E(Y)) + 2b'E(X) = 0$$

$$\frac{\delta S(a', b')}{\delta b} = 2b' - 2E(Y) + 2a'E(X) = 0$$

ďalej:

$$a'E(X) + b' = E(Y) \qquad / - E(X)$$

$$a'(\sigma_x^2 + E^2(X)) + b'E(X) = \mu_{11} + E(X)E(Y)$$

vyjadríme $a'$ a $b'$ a dostaneme:

$$a' = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}$$

$$b' = E(Y) - \mu_{11}\frac{E(X)}{\sigma_x^2}$$

teda rovnica regresnej priamky je:

$$y = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}x + E(Y) - \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}E(X)$$

alebo

$$y - E(Y) = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}(X - E(X))$$

□

# 3 Zákony rozdelenia pravdepodobností

## 3.1 Binomické rozdelenie

**Definícia 3.1.1** *Náhodná premenná $X$ má binomické rozdelenie, ak nadobúda hodnoty $j$ s pravdepodobnosťou*

$$p_j = P(X = j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j};\ j = 0, 1, \ldots, n$$

**Príklad 3.1.2** *Teraz si ukážeme, že je to rozdelenie pravdepodobností, teda* $\sum_{j=0}^{n} p_j = 1$

$$\sum_{j=0}^{n} p_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = (p+q)^n = (p + (1-p))^n = 1$$

**Veta 3.1.3** *Distribučná funkcia*

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{\{j; x_j < x\}} p_j = \sum_{\{j; j < x\}} p_j$$

*Stredná hodnota*

$$E(X) = \sum_j x_j p_j = \sum_{j=0}^{n} j p_j = \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = np$$

*Disperzná hodnota*

$$D(X) = E\left(X - E\left(X\right)\right) = \underbrace{E(X^2)}_{*} - E^2(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = npq$$

$$* \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} j^2 \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (j(j-1) + j) \binom{n}{j} p^j q^{n-j} =$$
$$\underbrace{\sum_{j=0}^{n} j(j-1) \binom{n}{j} p^j q^{n-j}}_{**} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} p^j q^{n-j}}_{=np}$$

$$** = \sum_{j=2}^{n} j(j-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{j(j-1)(j-2)!} p^2 p^{j-2} q^{n-2-(j-2)} \overset{k=j-2}{=}$$
$$n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k q^{n-2-k}}_{=1} = n(n-1)p^2$$

## 3.2 Poissonove rozdelenie

**Definícia 3.2.1** *Náhodná premenná $X$ má Poissonove rozdelenie, ak nadobúda hodnoty $j$ s pravdepodobnosťou*

$$p_j = P(X = j) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!};\ j = 0, 1, \ldots, n;\ \lambda > 0 \text{ - parameter}$$

**Príklad 3.2.2** *Teraz si ukážeme, že je to rozdelenie pravdepodobnosti, teda* $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{\text{viď matalýza}} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

**Veta 3.2.3** *Stredná hodnota*

$$E(X) = \sum_j j p_j = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^{j-1}}{j(j-1)!} =$$
$$= e^{-\lambda}\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \overset{k=j-1}{=} e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$$

*Disperzná hodnota*

$$D(X) = \lambda \text{ - podobne ako u binomickej pravdepodobnosti}$$

**Príklad 3.2.4** *Príklady použitia*

- *počet signálov do telefónnej ústredne za jednotku času*
- *počet roztrhnutých vlákien na tkáčskom stroji za jednotku času*

**Poznámka 3.2.5** *Za istých okolností môžeme binomické rozdelenie pravdepodobnosti aproximovať Poissonovým rozdelením*

$$\lim_{\substack{n\longrightarrow\infty \\ p\longrightarrow 0}} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{e^{-x}\lambda^x}{x!};\ np = \lambda > 0$$

**Príklad 3.2.6** *Pravdepodobnosť toho, že niť na jednom vretene za čas $t$ sa roztrhne je $p = 0,005$. Aká je pravdepodobnosť toho, že z 800 vretien sa za čas $t$ nepretrhne viac ako 10 nití?*

**Riešenie 3.2.7** *$X$ - náhodná premenná; $j = 1, 2, \ldots, 800$;* $p_j = \binom{800}{j} 0.005^j (1 - 0.005)^{800-j}$

$F(11) = P(X < 11) = \sum_{j=0}^{10} \binom{800}{j} 0.005^j (1-0.005)^{800-j} \overset{\lambda=800*0.005}{\doteq} \sum_{j=0}^{10} e^{-4}\frac{4^j}{j!} =$ 0.997

## 3.3 Hypergeometrické rozdelenie

Skúsme najprv malý príklad:

**Príklad 3.3.1** *Majme $N$ prvkov a nech $M$ má určitú vlastnosť ($M \leq N$). Vykonajme náhodný výber rozsahu $n$. Aká je pravdepodobnosť, že medzi $n$ prvkami bude práve $x$ prvkov s vlastnosťou $M$?*

**Riešenie 3.3.2** *Odvodíme hypergeometrické rozdelenie:*

- $\binom{N}{n}$ - *počet všetkých výberov*
- $\binom{M}{x}$ - *počet výberov, ktoré majú tú vlastnosť*
- $\binom{N-M}{n-x}$ - *počet výberov, ktoré nemajú tú vlastnosť*
- $\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}$ - *počet priaznivých výberov*

  *teda dostávame* $P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ - *hypergeometrická schéma*

**Definícia 3.3.3** *Náhodná premenná $X$ má hypergeometrické rozdelenie, ak nadobúda hodnoty $x$ s pravdepodobnosťou*

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}; x = 0, 1, \ldots, \min(M, n)$$

**Príklad 3.3.4** *Teraz si ukážeme, že je to rozdelenie pravdepodobností, teda $\sum_{x=0} P(X = x) = 1$ (viď kombinatoricka analýza = identita)*

**Veta 3.3.5** *Stredná hodnota*

$$E(X) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_x x\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x} = \frac{1}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} M \sum_x \binom{M-1}{x-1}\binom{N-M}{n-x} = \frac{M}{\frac{N}{n}} = n\frac{M}{N}$$

*v úlohách sa používa $p = \frac{M}{N}$*

**Poznámka 3.3.6** *Limitou hypergeometrického rozdelenia je binomické rozdelenie, pre $n \to \infty$.*

**Príklad 3.3.7** *Za smenu sa vyrobí $1000ks$ výrobkov. Z nich $50ks$ býva chybných. Aká je pravdepodobnosť, že v zásielke $n = 100ks$ bude $x = 10ks$ chybných?*

**Riešenie 3.3.8** *Ako teda vyzerajú čísla $n$, $p$ ?*

- $n = 100$
- $p = \frac{50}{1000} = 0,05$
- $P(X = 10) = \frac{\binom{50}{10}\binom{1000-50}{100-10}}{\binom{1000}{100}} = \frac{\binom{50}{10}\binom{950}{90}}{\binom{1000}{100}} \doteq \binom{100}{10}.0,05^{10}.0,95^{90} \doteq 0,00166$

## 3.4 Normálne (Gaussovo) rozdelenie

**Definícia 3.4.1** *Náhodná premenná $X$ má normálne (Gaussovo) nenormované rozdelenie, ak jej funkcia hustoty pravdepodobnosti je tvaru*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2};\ x \in (-\infty;\infty)$$

- $\mu, \sigma^2$ - *neznáme parametre*
- $\mu \in (-\infty;\infty)$ *-stredná hodnota*
- $\sigma^2 > 0$ - *disperzia náhodnej premennej*
  *Označujeme to* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

**Príklad 3.4.2** *Teraz si ukážeme, že je to rozdelenie pravdepodobností, teda* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = \left[ \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ \sigma dy = dx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_{Laplaceov\ rozvoj = \sqrt{2\pi}} = 1$$

**Veta 3.4.3** *Stredná hodnota*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx \overset{tá\ istá\ substitúcia}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma y)e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_{=0\ (párna\ funkcia)} = \mu$$

*Disperzná hodnota*

$$D(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx =$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{x-\mu}{\sigma})^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx \overset{substitúcia}{=}$$

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \left[ \begin{array}{cc} u = y & u' = 1 \\ v' = ye^{-\frac{1}{2}y^2} & v = -e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{array} \right] =$$

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-ye^{-\frac{1}{2}y^2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sigma^2$$

**Poznámka 3.4.4** *Všetky nepárne momenty sú nulové (centrálne).*

**Definícia 3.4.5** *Hovoríme, že náhodná premenná $\phi$ má normované normálne rozdelenie, ak hustota pravdepodobnosti je tvaru:*

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, y \in (-\infty, \infty)$$

$$X \sim f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

$$F(X) = \int_{\infty}^{x} f(t)dt$$

*po substitúcii dostaneme:*

$$Y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$\Phi(y) = P(Y < y) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} < y) = P(X < \mu + \sigma y) = F(\mu + \sigma y)$
*z toho:*
$\Phi(y) = F(\mu + \sigma y)$
$Y(y) = \frac{d}{dy}\Phi(y) = \frac{d}{dy}F(\mu + \sigma y) = \sigma f(\mu + \sigma y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\mu+\sigma y-\mu}{\sigma})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}y^2}$

**Príklad 3.4.6** *Aká je pravdepodobnosť, že náhodná premenná $X$ nadobúda hodnoty väčšie ako $x_0$?*

**Riešenie 3.4.7** $P(X > x_0) = 1 - P(X \leq x_0) = 1 - P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_0-\mu}{\sigma}) = 1 - P(U \leq \frac{x_0-\mu}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{x_0-\mu}{\sigma})$

**Príklad 3.4.8** $X \sim N(20, 4)$*.Aká je pravdepodobnosť, že náhodná premenná $X$ nadobúda hodnoty väčšie ako 23?*

**Riešenie 3.4.9** $P(X > 23) = 1 - P(X \leq 23) = 1 - P(\frac{x-20}{2} \leq \frac{23-20}{2}) =$
$= 1 - P(U \leq 1,5) = 1 - \Phi(1,5) = 1 - 0,933 = 0,067$

**Príklad 3.4.10** $X \sim N(28,38; 0,16)$*. Aká je pravdepodobnosť toho, že* $27 < X < 30$*?*

**Riešenie 3.4.11** $P(27 < X < 30) = P(\frac{27-28,38}{0,4} < \frac{x-28,38}{0,4} < \frac{30-28,38}{0,4}) =$
$P(-3,45 < U < 4,05) = \Phi(4,05) - \Phi(-3,45) = 0,99997 - 0,00028 = 0,99969$

**Príklad 3.4.12** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$*. Aká je pravdepodobnosť, že náhodná premenná nadobúda hodnoty z intervalu*

- $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$
- $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$
- $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$

**Riešenie 3.4.13** *Vypočítame pravdepodobnosť pre interval $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$. Ostatné prípady riešime analogicky.*

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= P(\tfrac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} < \tfrac{x-\mu}{\sigma} < \tfrac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}) = \\ &= P(-1 < U < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \\ &= 0,84134 - 0,15666 = \\ &= 0,68268 = 68,2\% \end{aligned}$$

**Poznámka 3.4.14** *V iných rozdeleniach ako normálnych nenormujeme.*

## 3.5 Výberové metódy

**Definícia 3.5.1** *Náhodným výberom zo súboru nazývame n-ticu* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *náhodných premenných s vlastnosťami*

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sú nezávislé*
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *majú rovnaké rozdelenie* $f(x, p)$

**Veta 3.5.2 (1)** *Nech* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *je náhodný výber zo základného súboru s rovnomernou funkciou rozdelenia tvaru* $f(x, \theta), \mu, \sigma^2$ *sú stredná hodnota a disperzia. Potom pre výberový priemer* $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *platí:*

- $E(\overline{X}) = \mu$
- $D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
- *Pre všetky* $\varepsilon$ *kladné* $\lim_{n->\infty} P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) = 1$

**Dôkaz:**

- $E(\overline{X}) = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu$
- $D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$
- $\varepsilon > 0, P(|\overline{X} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \Longrightarrow P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \Longrightarrow \lim_{n->\infty} P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \lim_{n->\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 1 \Longrightarrow$
  $\Longrightarrow \lim_{n->\infty} P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) = 1$

□

**Veta 3.5.3 (2)** *Nech* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *je náhodný výber základného súboru* $f(x, \theta)$, $\mu$, $\sigma^2$ *Nech existuje* $\mu_4$. *Potom pre výberovú disperziu tvaru*

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

*platí*

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \sigma^2 \\ D(S^2) &= \frac{1}{n}(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4) \end{aligned}$$

**Veta 3.5.4 (3)** *Nech* $(X_{1,}X_2, \ldots, X_n)$ *je náhodný výber zo základného súboru* $f(x, \theta), \mu, \sigma^2$ *sú stredná hodnota, disperzia a nech existuje* $\mu_4$. *Potom pre výberovú disperziu tvaru:*

$$S_o^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

*platí:*

$$\begin{aligned} E(S_0^2) &= \sigma^2 \\ D(S_0^2) &= \frac{1}{n}(\mu_4 - \sigma^4) \end{aligned}$$

*alebo ak máme disperziu tvaru:*

$$S_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

*platí:*

$$\begin{aligned} E(S_*^2) &= \frac{n-1}{n}\sigma^2 \\ D(S_*^2) &= \frac{(n-1)^2}{n^3}(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4) \end{aligned}$$

**Veta 3.5.5 (4)** *Nech* $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, *nech* $\sigma^2$ *poznáme. Potom náhodná premenná*[4]

$$U = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

***Definícia 3.5.6*** *Číslo* $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *nazývame* $(1-\frac{\alpha}{2})$*-tým kvantilom normálneho rozdelenia, ak platí*

$$\Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = P(U < u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \int_{-\infty}^{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} f(x)dx = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

**Definícia 3.5.7** [5]*Náhodná premenná* $X$ *má* $\chi^2$ *rozdelenie s* $n$ *stupňami voľnosti, ak jej funkcia hustoty (pravdepodobnosti) je (definované len pre* $X > 0$*)*

$$f_n(X) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}X^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\nu_k = E(X^k) = 2^k\frac{\Gamma(k+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

*a ďalej* $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ *potom* $E(X) = n$ *a disperzia* $D(X) = 2n$
*Definujeme náhodnú premennú* $U = \frac{X-n}{\sqrt{2n}} \sim N(0,1) \quad n > 30$

**Definícia 3.5.8** *Počet stupňov voľnosti je súčet štvorcov odchýliek pomocou lineárnej transformácie. Ich počet určíme tak, že od počtu všetkých sčítancov v súčte štvorcov odchýliek odpočítame počet tých lineárnych väzieb, s ktorými sú sčítance zviazané. Napríklad:*

| | | |
|---|---|---|
| $Q_1 = \Sigma_{i=1}^{n}(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma})^2$ | $\overline{X} = \frac{1}{n}\Sigma x_i$ | *(n-1) stupňov voľnosti* |
| $Q_2 = \Sigma_{i=1}^{n}(\frac{X_{ij} - \overline{X}_{i\circ}}{\sigma})^2$ | $\overline{X}_{1\circ} = \frac{1}{p}\Sigma_{j=1}^{p}X_{ij}$ | *má (np-n) stupňovvoľnosti* |

**Definícia 3.5.9** *Číslo* $\chi_\alpha^2(n-1)$ *nazývame kritickou hodnotou* $\chi^2$ *rozdelenia ak platí*

$$P(X > \chi_\alpha^2(n-1)) = \int_{\chi_\alpha^2(n-1)}^{\infty} f_n(x)dx = \alpha$$

[4]Náhodná premenná U sa používa na testovanie hypotézy o neznámom parametri $\mu$ alebo na odhad intervalu spoľahlivosti pre neznámu premennú $\mu$.

[5]Vraj netreba vedieť na skúšku

**Veta 3.5.10 (5)** [6]*Nech* $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$ *Potom*

$$y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \text{ , kde } S^2 = \frac{1}{n-2}\sum_i^n (X_i - \overline{X})^2$$

**Definícia 3.5.11** *Náhodná premenná X má Studentovo rozdelenie (t-rozdelenie) s n stupňami voľnosti ak jej funkcia hustoty je tvaru*

$$f_n(X) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{n}}(1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

**Definícia 3.5.12** *Číslo* $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *nazývame* $(1-\frac{\alpha}{2})$*-tým kvantilom Studentovho rozdelenia, ak platí*

$$\Phi(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = P(X < t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \int_{-\infty}^{t_{1-\frac{\alpha}{2}}} f_n(X)dx = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

*Pre* $n > 1$ $E(X) = 0$ *, pre* $n > 2$ $D(X) = \frac{n}{n-2}$

**Veta 3.5.13 (fund. veta St. rozdelenia)** *Nech* $X_1, X_2$ *sú náhodné nezávislé premenné. Nech* $X_1 \sim N(0,1)$ *a* $X_2 \sim \chi^2(n)$ *. Potom* $X = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{X_2}{n}}}$ *má Studentovo rozdelenie s n-stupňami voľnosti.*

**Veta 3.5.14 (6)** *Nech* $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$*, a* $\mu, \sigma^2$ *sú neznáme parametre. Potom náhodná premenná* $t = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$ *má Studentovo rozdelenie s* $(n-1)$ *stupňami voľnosti.*

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

**Veta 3.5.15 (7)** [7]*Nech* $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$*, nech* $(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$*, a* $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ *sú známe. Potom pre výberové priemery* $\overline{X_1}, \overline{X_2}$ *platí*

$$E(\overline{X_1}, \overline{X_2}) = \mu_1 - \mu_2$$

$$D(\overline{X_1}, \overline{X_2}) = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}$$

$$X = \overline{X_1} - \overline{X_2}$$

*Vyrobme novú náhodnú premennú*

$$U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

[6]Vetu používame k testovaniu hypotézy o neznámom parametri $\sigma^2$ a možno ju použiť aj k odhadu spoľahlivosti neznámeho parametra $\sigma^2$.

[7]Vetu používame na testovanie hypotézy $H_0 : (\mu_1 = \mu_2)$, $H_0 : (\mu_1 - \mu_2 = 0)$

**Veta 3.5.16 (8)** *Nech* $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, *nech* $(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}) \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, *a* $\sigma^2$ *je neznámy parameter. Potom náhodná premenná*

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \text{ kde } S^2 = \frac{(S_1^2(n_1 - 1) + S_2^2(n_2 - 1))}{n_1 - n_2 - 2}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \overline{X_1})^2 \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \overline{X_2})^2$$

*má Studentovo rozdelenie o* $(n_1 + n_2 - 2)$ *st. voľnosti.*

## 3.6 Fisherovo-Snedecorovo rozdelenie (F-rozdelenie)

**Definícia 3.6.1** [8] *Hovoríme, že náhodná premenná X má F-S rozdelenie s* $(n_1, n_2)$ *st. voľnosti, ak jej funkcia hustoty je tvaru*

$$f_{n_1,n_2}(X) = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} (\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{n_2}} X^{\frac{n_1}{2}-1} (1 + \frac{n_1}{n_2} X)^{\frac{-n_1+n_2}{2}}$$
$$x > 0, n_1 \to \infty, n_2 \to \infty$$

**Definícia 3.6.2** *Číslo* $X_\alpha$ *nazývame kritickou hodnotou F-S rozdelenia, ak náhodná premenná X nadobúda hodnoty väčšie ako* $X_\alpha$.

$$P(X > X_\alpha) = \int_{X_\alpha}^{\infty} f_n(X)dx = \alpha$$

**Veta 3.6.3 (9)** [9] *Nech* $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ , $(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ *sú neznáme a nech* $S_1^2, S_2^2$ *sú výberové rozptyly, kde* $S_1^2 > S_2^2$. *Potom náhodná premenná* $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ *má* $F-S$ *rozdelení o* $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ *stupňoch voľnosti. Pričom*

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \overline{X_1})^2 \quad S_1^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \overline{X_2})^2$$

[8] tak takúto haluz určite nebude treba vedieť na skúšku :-)

[9] Vetu používame na testovanie hypotézy o rovnosti rozptylov základných súborov. $H_0$ : $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$

# 4 Štatistika

## 4.1 Batelttov test homogenity rozptylu

**Definícia 4.1.1** [10] *Nech* $(X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in_1}) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots$. *Nech* $S_i^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j=1}^{n_{i0}} (x_{ij} - \overline{x_{i\circ}})^2$ *, potom náhodná premenná* $B$ *je tvaru:*

$$\frac{2{,}3026}{c} = \{(n-k) \log \frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) S_i^2}{n-k} - \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) S_i^2\}$$

$$kde\ c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} (\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n-k})$$

*a má asymptoticky* $\chi^2$ *rozdelenie o* $k-1$ *st. voľnosti. Platí tiež* $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

## 4.2 Metódy odhadu štatistických parametrov

Delíme ich na metódy:

- bodového odhadu
- intervalového odhadu

Odhad $T_n$ je nevychýleným odhadom parametra $\Theta$, ak $T_n = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
Platí $E(\overline{X}) = \mu$ , $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ , $E(S^2) = \sigma^2$
Tu je konzistencia odhadu $\Theta$, ak $\varepsilon > 0 \ \lim_{n \to \infty} P(|T_n - \Theta| < \varepsilon) = 1$
Ak $T_n$ je nevychýlený a platí, že $\lim_{n \to \infty} D(T_n) = 0$ , tak odhad je konzistentný.
$T_n$ je nevychýlený, ak $D(T_n) \leq D(T_n^*)$

## 4.3 Metóda maximálnej vierohodnosti

**Definícia 4.3.1** *Nech* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *je náhodný výber zo základného súboru so známym rozdelením pravdepodobnosti* $f(x, \Theta)$ *, kde* $\Theta$ *je neznámy parameter. Potom funkciu rozdelenia pri realizovaných hodnotách* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *tvaru* $L(\mathbf{x}, \Theta) = f(x_1, \Theta) f(x_2, \Theta) \ldots f(x_n, \Theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \Theta)$ *. Takúto funkciu voláme funkciou vierohodnosti, pričom jej prirodzený logaritmus je tvaru* $\ln L(\mathbf{x},\Theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \Theta)$

**Definícia 4.3.2** *Maximálne vierohodný odhad neznámej hodnoty parametra* $\Theta$ *nazývame taký odhad* $\hat{\Theta}$ *, ktorý maximalizuje funkciu vierohodnosti alebo jej prirodzený logaritmus. Odhad získame riešením rovnice*

$$\frac{d}{d\Theta} L(\mathbf{x},\Theta) = 0, \frac{d}{d\Theta} \ln L(\mathbf{x},\Theta) = 0$$

**Príklad 4.3.3** $f(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!}$ - *funkcia Poissonovho rozdelenia*
*Metódou vierohodnosti odhadujeme* $\lambda$ *Potrebujeme vedieť* $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.
$L(k, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k_1}}{k_1!} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k_2}}{k_2!} \ldots \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k_n}}{k_n!}$
*Urobíme* $\ln L(k, \lambda) = -\lambda + k_1 \ln \lambda - \ln k_1! - \lambda + k_2 \ln \lambda - \ln k_2! - \cdots - \lambda + k_n \ln k_n! =$
$-n\lambda + \sum_{i=1}^{n} k_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln k_i!$
$\frac{d}{d\lambda} \ln L(k, \lambda) = -n + \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{1}{\lambda} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i = n\lambda \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i = \overline{k}$

[10] Vraj sa týmto tiež netreba príliš zaoberať pri príprave na skúšku.

**Definícia 4.3.4** *Nech* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *je náhodný výber zo základného súboru s náhodným rozdelením* $f(x, \Theta)$ *kde* $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$. *Potom funkciu náhodného rozdelenia pri realizovaných hodnotách* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *tvaru* $L(x, \Theta) = f(x_1, \Theta), \ldots, f(x_n, \Theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \Theta)$ *nazývame funkciou vierohodnosti. Jej prirodzený logaritmus je tvaru* $\ln L(x, \Theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \Theta)$

**Definícia 4.3.5** *Maximálnym vierohodným odhadom nazveme hodnotu vektoru parametrov* $\hat{\Theta} = (\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \ldots, \hat{\Theta}_n)$, *ktorý maximalizuje funkciu vierohodnosti alebo jej prirodzený logaritmus. Odhady* $\hat{\Theta}_i$ *získame riešením systému rovníc*

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_r)}{\partial \Theta_i} = 0 \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, r$$

**Príklad 4.3.6** $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$

$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

$$\begin{aligned} L(x, \mu, \sigma^2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_1-\mu}{\sigma})^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_2-\mu}{\sigma})^2} \cdots \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_n-\mu}{\sigma})^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_1-\mu}{\sigma})^2} \cdots = \\ &= \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_1-\mu}{\sigma})^2} \cdots \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_n-\mu}{\sigma})^2} = \\ &= \left(\frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu}{\sigma})^2} \end{aligned}$$

$\ln L(\mathbf{x}, \mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu}{\sigma})^2$

$\frac{\partial \ln L(x,\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = -\frac{1}{2}2\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu}{\sigma})(-1) = 0$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = \mu n \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\frac{\partial \ln L(x,\hat{\mu},\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2\frac{1}{2\sigma^4} = 0$

$= n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2 = n\sigma^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2$

## 4.4 Intervalové odhady

**Veta 4.4.1 (10)** *Nech* $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, *kde* $\mu$ *je neznáme číslo. Nech* $\alpha \in (0, 1)$ *a* $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *je* $(1 - \frac{\alpha}{2})$*-kvantilom normálneho rozdelenia.*

$$\Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \int_{-\infty}^{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} f(x)dx = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

*Potom obojstranný interval spoľahlivosti pre neznámy parameter* $\mu$ *je*

$$P\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{u}}u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{u}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

**Dôkaz:** Uvažujme pravdepodobnostnú rovnicu $P(|U| > u) = \alpha$.
Podľa vety č. (4) vieme, že $U - \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$. Použijeme ju k odvodeniu obojstranného intervalu spoľahlivosti pre $\mu$.
$P(|U| \leq u) = 1 - \alpha$
$P(-u \leq U \leq u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)dx - \int_{-\infty}^{-u} f(x)dx = \phi(u) - \phi(-u) =$
$= 2\phi(u) - 1 = 1 - \alpha \Rightarrow 2\phi(u) = 2 - \alpha \Rightarrow \phi(u) = \frac{2-\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$
Čiže $u = 1 - \frac{\alpha}{2}$ kvantil.

Pravdepodobnosť toho, že $P(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq U \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$
$P(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

1. $-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$
   $-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \overline{X}-\mu \Rightarrow \mu \leq \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

2. $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
   $\overline{X}-\mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu$

□

**Príklad 4.4.2** *Predpokladáme, že výška chlapcov má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $N(\mu; 39,1125)$, $n = 15$ , $\overline{X} = 139,13$ Odhadni strednú výšku s 99% istotou.*

**Riešenie 4.4.3** $\overline{X} = 139,13$ , $\sigma^2 = 39,1125 \Rightarrow \sigma = 6,254$ , $\alpha = 0,01$
$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{1-\frac{0,01}{2}} = u_{0,995} = 2,2576$
$139,13 - \frac{6,254}{\sqrt{15}}2,576 \leq \mu \leq 139,13 + \frac{6,254}{\sqrt{15}}2,576$
$136,13 \leq \mu \leq 142,14$

**Veta 4.4.4 (11)** *Nech $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu, \sigma^2$ sú neznáme parametre. Nech $\alpha \in (0,1)$ , $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je $(1-\frac{\alpha}{2})$-tý kvantil Studentovho rozdelenia. Potom OIS pre neznámy parameter $\mu$ je tvaru*

$$P\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

**Dôkaz:** K dôkazu použijeme náhodnú premennú tvaru $t = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim$ Studentovo rozdelenie (Veta 6) Uvažujme pravdepodobnostnú rovnicu $P(|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$, teda $P(|t| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

- $P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq t \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$
- $P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$
- $-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \Longrightarrow \mu \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}$
- $t_{1-\frac{\alpha}{2}} \geq \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \Longrightarrow \mu \geq \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

□

**Príklad 4.4.5** *Máme dané realizácie daného výpočtu $\sim N(\mu, \sigma^2)$*
$(2, 12, 8, 11, 22, -4, 10, 25, 17, -5)$. *Máme vypočítať 95%-OIS pre $\mu$.*

**Riešenie 4.4.6** $n = 10$, $\overline{X} = 9,8$, $\alpha = 0,05$

- $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 = 103,4 \Longrightarrow S = 10,17$
- $t_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{0,05}{2}} = t_{0,975}(9) = 2,362$ *(v tabuľkách)*

*ďalej si to už hádam každý zráta sám :-)*

Teraz sa pozrieme na jednostranné IS

| LIS(príp. PIS) :-) | PIS |
|---|---|
| $P(t > t_{1-\alpha}) = \alpha$ | $P(t < t_{1-\alpha}) = \alpha$ |
| $P(t \leq t_{1-\alpha}) = 1-\alpha$ | $P(t \geq t_{1-\alpha}) = 1-\alpha$ |
| $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \leq t_{1-\alpha} \Longrightarrow \mu \geq \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}$ | $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \geq t_{1-\alpha} \Longrightarrow \mu \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}$ |

**Veta 4.4.7 (12)** *Nech* $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, *kde* $\mu, \sigma^2$ *sú neznáme parametre. Nech* $\alpha \in (0,1)$ ,$\chi_{\frac{\alpha}{2}}$, $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *sú kritické hodnoty* $\chi^2$- *rozdelenia. Potom OIS pre neznámy parameter* $\sigma^2$ *je tvaru*

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

**Dôkaz:** Podľa vety (5) platí, že náhodná premenná $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ má $\chi^2$-rozdelenie s $(n-1)$-stupňami voľnosti

- $P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$
- $P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$
- $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Longrightarrow \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$
- $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \geq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Longrightarrow \sigma^2 \geq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}$

□

Teraz sa pozrieme na jednostranné IS

| zhora | zdola |
|---|---|
| $P(\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}) = \alpha$ | $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha}) = \alpha$ |
| $P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}) = 1-\alpha$ | $P(\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha}) = 1-\alpha$ |
| $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_{1-\alpha} \Longrightarrow \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}}$ | $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha} \Longrightarrow \sigma^2 \geq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}}$ |

**Veta 4.4.8 (13)** *Nech* $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ *kde* $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$ *sú dané. Nech* $\alpha \in (0,1)$ ,$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *je* $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$*-tý kvantil normálneho rozdelenia. Potom pre OIS, pre normálny rozdiel parametrov* $\mu_1 - \mu_2$ *platí:*

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

**Dôkaz:** Ak by sme uvažovali náhodnú premennú tvaru

$$u = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- $P\left(|u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha$
- A teraz každý sám. Kedže je to veľa písania o ničom, nemalo by vám to robiť problémy

□

Jednosmernné IS. Postup je ako predtým, takže iba výsledky

- $-\infty < \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{u_1} + \frac{\sigma_2^2}{u_2}}\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$
- $\infty > \mu_1 - \mu_2 \geq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{u_1} + \frac{\sigma_2^2}{u_2}}\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$

**Veta 4.4.9 (14)** *Nech* $(X_{11},\ X_{12},\ \ldots,\ X_{1n_1}) \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, $(X_{21},\ X_{22},\ \ldots,\ X_{2n_2}) \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ *kde* $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$, $\mu_1$, $\mu_2$ *sú neznáme. Nech* $\alpha \in (0,1)$ , $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *je* $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$*-tý kvantil Studentovho rozdelenia. Potom pre OIS, pre neznáme* $\mu_1 - \mu_2$ *platí:*

$$P\left(\begin{array}{c} \overline{X}_1 - \overline{X}_2 - S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \\ \leq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t(n_1+n_2-2) \end{array}\right) =$$
$$= 1-\alpha \text{ , kde } S = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_1-1)S_1^2}{n_1+n_2-2}}$$

*(To má byť v jednom riadku, ale bohužiaľ, nezmestilo sa to...)*

**Dôkaz:** Použitím vety (8):

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \mu_1 - \mu_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

má Studentovo rozdelenie s $(n_1 + n_2 - 2)$ stupňami voľnosti. □

# 5 Testovanie špecifických hypotéz

## 5.1 Štatistická hypotéza

- predpoklady kladené na rozdelenie pravdepodobností náhodných premenných alebo na ich parametre
- overovanie správnosti - *testovanie*
- hypotéza, ktorej platnosť overujeme = *testovaná (nulová) hypotéza*
- proti testovanej hypotéze kladieme *alternatívnu hypotézu*

## 5.2 Testovacie kritérium, chyba 1. a 2. druhu

- na overovanie používame štatistiky $g(x)$ - testovacie kritérium[11]
- obor hodnôt, ktoré môže testovacie kritérium nadobúdať je rozdelený na dva disjunktné obory
  - kritický $W_\alpha$(obor zamietnutia testovanej hypotézy)
  - doplnkový $W_{\alpha'}$ (obor prijatia testovanej hypotézy)
- ak hodnota testovaného kritéria vypočítaná na základe experimentu nadobúda hodnotu z kritického oboru, tak testovanú hypotézu $H_0$ zamietneme, ak z doplnkového oboru, testovaciu hypotézu prijímame

**Definícia 5.2.1** *Chybu, ktorá spočíva v zamietnutí testovanej hypotézy, hoci je pravdivá, nazývame chybou prvého druhu, tzn. platí:*

$$P(G_0(x) \in W_\alpha / H_0) = \alpha$$

$H_0$ je pravdivá, ak hodnoty sú z doplnkového oboru.
$H_1$ je pravdivá, ak hodnoty sú z kritického oboru.

**Definícia 5.2.2** *Chyba, ktorá spočíva v zamietnutí alternatívnej hypotézy nazývame chybou druhého druhu.*

$$P(G_0(x) \in W'_\alpha / H_1) = P(G_0(x) \notin W_\alpha / H_1) = \beta$$

**Poznámka 5.2.3** *Prakticky, zvolíme chybu prvého druhu $\alpha$ a použijeme také testy, aby chyba druhého druhu bola čo najmenšia.*

## 5.3 Postupy pre testovanie hypotéz

- Podľa danej situácie si zvolíme testovacie kritérium (niektorá z viet výberovej teórie). Vieme, aké má toto kritérium rozdelenie.
- Zvolíme si chybu prvého druhu $\alpha$. Vieme nájsť kritickú hodnotu resp. kvantil, ktorý nám rozdelí obor náhodnej premennej na kritický a doplnkový.
- Vypočítame si hodnotu testovacieho kritéria. Ak testovacie kritérium patrí do kritického oboru prijímame alternatívnu hypotézu $H_1$, inak prijímame testovaciu hypotézu $H_0$.

[11] niektorá z viet 4-9(10)

### 5.3.1 Nepoznáme $\mu$, poznáme $\sigma^2$

Majme náhodný výber $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu$ je neznámy parameter, $\sigma^2$ je známe. Testujme hypotézu $H_0 : (\mu = \mu_0)$ proti alternatíve $H_1 : (\mu \neq \mu_0)$. Za testovacie kritérium zvolíme náhodnú premennú

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

podľa vety číslo 4 . Kritická oblasť pre dvojstrannú alternatívnu hypotézu je daná nerovnosťou

$$P(|U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$$

Ak platí

$$|U_0| = \frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

tak testovanú hypotézu $H_0(\mu = \mu_0)$ zamietame a prijímame alternatívnu hypotézu $H_1(\mu \neq \mu_0)$..
Ak platí

$$|U_0| = \frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

tak testovanú hypotézu $H_0$ prijímame s rizikom $\alpha$.

a) Majme náhodný výber $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu$ je neznámy parameter a $\sigma^2$ je známe. Testujeme hypotézu $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$. Za testovacie kritérium zvolíme náhodnú premennú

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

podľa vety číslo 4. Kritická oblasť pre jednostrannú alternatívnu hypotézu je daná nerovnosťou

$$P(U > u_{1-\alpha}) = \alpha$$

Ak platí

$$U_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\alpha}$$

tak testovanú hypotézu $H_0(\mu = \mu_0)$ zamietame a prijímame alternatívnu hypotézu $H_1(\mu \neq \mu_0)$..
Ak platí

$$|U_0| = \frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha}$$

tak testovanú hypotézu $H_0$ prijímame s rizikom $\alpha$.

b) Majme náhodný výber $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu$ je neznámy parameter a $\sigma^2$ je známe. Testujeme hypotézu $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$. Za testovacie kritérium zvolíme náhodnú premennú

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

podľa vety číslo 4. Kritická oblasť pre jednostrannú alternatívnu hypotézu je daná nerovnosťou

$$P(U < -u_{1-\alpha}) = \alpha$$

Ak platí

$$U_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} < -u_{1-\alpha}$$

tak testovanú hypotézu $H_0(\mu = \mu_0)$ zamietame a prijímame alternatívnu hypotézu $H_1(\mu \neq \mu_0)$..
Ak platí

$$|U_0| = \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} \geq -u_{1-\alpha}$$

tak testovanú hypotézu $H_0$ prijímame s rizikom $\alpha$.

**Príklad 5.3.1** *Treba overiť, či pevnosť ocele zodpovedá predpokladanej hodnote* 66 *jednotiek t.j.* $\mu_0 = 66, \sigma = 3,011$. *Na základe realizácie náhodného výberu budeme na hladine významnosti* $\alpha = 0,01$ *študovať hypotézu* $H_0 : (\mu = 66), H_1 : (\mu \neq 66)$

**Riešenie 5.3.2** *Vieme, že* $\mu_0 = 66, \sigma = 3,011, n = 10$, *na základe experimentu sme zistili, že* $\overline{X} = 67,8$.
*Musíme zistiť testovaciu hodnotu* $U_0 = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{67,8-66}{3,011}\sqrt{10} = 1,89$
*Hľadáme v tabuľkách kvantil* $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{1-\frac{0,01}{2}} = u_{0,995} = 2,57$
*Keďže testovacia hodnota* $1,89$ *leží v doplnkovom obore, príjmeme hypotézu* $H_0$

### 5.3.2 Nepoznáme ani $\mu$, ani $\sigma^2$

Uvažujme náhodný výber $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, pričom nepoznáme ani $\mu$, ani $\sigma^2$. $H_0 : (\mu = \mu_0), H_1 : (\mu \neq \mu_0)$. Za testovacie kritérium si zvolíme náhodnú premennú tvaru

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

ktorá má podľa vety číslo 6 Studentovo rozdelenie s n stupňami voľnosti. Kritická oblasť pre testovanú hypotézu je tvaru

$$P(|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$$

Ak hodnota testovacieho kritéria vypočítaného na základe experimentu je

$$|t_0| = \left|\frac{\overline{X} - \mu}{S}\right|\sqrt{n} > t_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

tak $H_0$ zamietneme.
Ak hodnota testovacieho kritéria vypočítaného na základe experimentu je

$$|t_0| = \left|\frac{\overline{X} - \mu}{S}\right|\sqrt{n} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

tak $H_0$ príjmeme.

(Pre jednostranné hypotézy je to podobne ako pri normálnom rozdelení spomenutom vyššie)

**Príklad 5.3.3** *Meral sa percentuálny odhad cínu vo vzorkách rudy. Výsledky merania:*

| $x$ | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 6 | 8 | 15 | 25 | 50 | 8 | 7 | 5 | 2 |

$\alpha = 0,05, H_0 : (\mu = \mu_0), H_1 : (\mu \neq \mu_0)$, *kde* $\mu_0 = 50$.

**Riešenie 5.3.4** *Vypočítame rozptyl a priemer získaných dát pomocou známych vzťahov*

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} x_i f_i$$

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \overline{X})^2$$

*a dosadíme do vzorca pre* $t_0$

$$|t_0| = \left| \frac{\overline{X} - \mu}{S} \right| \sqrt{n} > t_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

*zistíme, či sa* $t_0$ *nachádza v kritickom* ($H_0$ *zamietame) alebo v doplnkovom* ($H_0$ *prijímame) obore.*

### 5.3.3 Poznáme $\sigma_1^2, \sigma_2^2$

Majme $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_1}) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, kde $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ sú dané. Testujme hypotézu $H_0 : (\mu_1 - \mu_2 = 0), H_1 : (\mu_1 - \mu_2 \neq 0)$. Za testovacie kritérium si zvolíme náhodnú premennú z vety číslo 7 majúcu normálne rozdelenie:

$$U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Po zvolení $\alpha$ vieme nájsť kvantily. Kritický obor je určený nasledovnou nerovnosťou

$$P(|U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$$

Testovacia hodnota je (rozdiel $\mu_1 - \mu_2$ vypadne, pretože podľa hypotézy je to 0)

$$U_0 = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Ak $|U_0| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $H_0$ zamietame, inak $H_0$ prijímame.

a) jednostranná hypotéza

Majme $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,$(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_1}) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

kde $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ sú dané. Testujme hypotézu $H_0 : (\mu_1 - \mu_2 = 0), H_1 : (\mu_1 - \mu_2 \neq 0)$. Za testovacie kritérium si zvolíme náhodnú premennú z vety číslo 7 majúcu normálne rozdelenie:

$$U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Po zvolení $\alpha$ vieme nájsť kvantily. Kritický obor je určený nasledovnou nerovnosťou

$$P(U > u_{1-\alpha}) = \alpha$$

Testovacia hodnota je (rozdiel $\mu_1 - \mu_2$ vypadne, pretože podľa hypotézy je to 0)

$$U_0 = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Ak $U_0 > u_{1-\alpha}$, $H_0$ zamietame, inak $H_0$ prijímame.

b) obdobne pre druhú stranu

Majme $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,$(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_1}) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

kde $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ sú dané. Testujme hypotézu $H_0 : (\mu_1 - \mu_2 = 0), H_1 : (\mu_1 - \mu_2 \neq 0)$. Za testovacie kritérium si zvolíme náhodnú premennú z vety číslo 7 majúcu normálne rozdelenie:

$$U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Po zvolení $\alpha$ vieme nájsť kvantily. Kritický obor je určený nasledovnou nerovnosťou

$$P(U < -u_{1-\alpha}) = \alpha$$

Testovacia hodnota je (rozdiel $\mu_1 - \mu_2$ vypadne, pretože podľa hypotézy je to 0)

$$U_0 = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Ak $U_0 < -u_{1-\alpha}$, $H_0$ zamietame, inak $H_0$ prijímame.

### 5.3.4 Poznáme $\mu_1,\mu_2,\sigma^2$

Nech $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma^2)$,$(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_1}) \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, $\mu_1,\mu_2,\sigma^2$ sú známe. Na testovanie hypotézy použijeme náhodnú premennú $t$ so Studentovým rozdelením

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Toto rozdelenie má $n_1 + n_2 - 2$ stupňov voľností, kde

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$H_0 : (\mu_1 - \mu_2 = 0), H_1 : (\mu_1 - \mu_2 \neq 0)$

$$P(|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$$

testovacie kritérium

$$|t_0| = \frac{|\overline{X_1} - \overline{X_2}|}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

ak $|t_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, tak testovaciu hypotézu $H_0$ zamietame a prijímame alternatívnu hypotézu.

**Príklad 5.3.5** $\alpha = 0,05$. *Testujte hypotézu, či prípravok znižuje alebo zvyšuje pevnosť ocele.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $5,6$ | $5,9$ | $\ldots$ | $5,5$ |
| $Y$ | $6,2$ | $5,7$ | $\ldots$ | $5,8$ |

*Z experimentu nám vyšlo, že* $\overline{X_1} = 5,7$, $\overline{X_2} = 6,00$, $S_1^2 = 0,0266$, $S_2^2 = 0,0711$.

**Riešenie 5.3.6** *Vypočítame* $S$ :

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = 0,2209$$

$$|t_0| = \frac{|\overline{X_1} - \overline{X_2}|}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

*Z tabuliek vieme, že* $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(18)} = 2,101$. *Ak* $|t_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, *odmietneme hypotézu* $H_0$.

### 5.3.5 Nepoznáme $\mu,\sigma^2$

Nech $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu, \sigma^2$ sú neznáme. Testujeme hypotézu $H_0 : (\sigma^2 = \sigma_0^2), H_1 : (\sigma^2 \neq \sigma_0^2)$. Za testovacie kritérium si zvolíme náhodnú premennú

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

podľa vety číslo 5 je toto $\chi^2$-rozdelenie s n-1 stupňami voľnosti. Kritický obor je daný nerovnosťami

$$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Vypočítame hodnotu $\chi^2_0 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2_0}$, ak $\chi^2_0 = \frac{(n-1)S^2_1}{\sigma^2_0} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ alebo $\chi^2_0 = \frac{(n-1)S^2_1}{\sigma^2_0} \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$, tak hypotézu zamietame, inak ju prijímame.

a) Testujeme hypotézu $H_0 : (\sigma^2 = \sigma^2_0), H_1 : (\sigma^2 > \sigma^2_0)$. Kritická oblasť je daná nerovnicou

$$\chi^2_0 > \chi^2_\alpha$$

b) Testujeme hypotézu $H_0 : (\sigma^2 = \sigma^2_0), H_1 : (\sigma^2 < \sigma^2_0)$. Kritická oblasť je daná nerovnicou

$$\chi^2_0 > \chi^2_{1-\alpha}$$

**Príklad 5.3.7** *Pri meraní teploty steny sme namerali hodnoty* $0,61, 0,62, \ldots ,0,59$. *Treba testovať hypotézu* $H_0 : (\sigma^2 = \sigma^2_0), H_1 : (\sigma^2 > \sigma^2_0)$ *s mierou rizika* $\alpha = 0,003$ *a* $\sigma^2_0 = 0,003$, *počet nameraných hodnôt je* 8.

$$\chi^2_0 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2_0} = \frac{7.0,00064}{0,003} = 1,49$$

*testovacie kritériá sú*

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(7) = 1,69$$
$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(7) = 16,0$$

$H_0$ *je zamietnuté, lebo* $1,49$ *leží mimo intervalu* $1,69$ *a* $16,0$.