Reinhard Diestel

Teória grafov

verzia **3.0** build **3** release **15**
posledne modifikované **4. januára 2000**

preklad:	Peter Hraško (kapitoly 1,2,3,4,6,9)
korektúry:	Peter Hraško

sádzané TEX-om, (distribúcia MiKTEX 1.20d)

Poznámky prekladateľa:

- VEĽMI DÔLEŽITÉ: Tento dokument bol pôvodne vyrobený LEN pre moju vlastnú potrebu a nemal som v úmysle ho dať do obehu. Teraz v podstate nie som proti tomu, ak niekto k nemu nejakým spôsobom príde, ale bol by som nesmierne šťastný, keby ste sa vyvarovali mailov/rozhovorov typu "Aha, Hraško ! Videl som tie tvoje skriptá z grafov. Teda poviem ti, riadne kraviny si tam popísal."

  Viem, čo tu teraz píšem, pretože sa mi to už stalo minulý rok, keď som si trochu vylepšil Vršanského poznámky z grafov a tieto sa nepeknou zhodou okolností dostali do rúk zlým a škaredým ľuďom, a tí na mňa po štátniciach vyrukovali s vetou "Aha, Hraško ! Chcel som sa učiť na štátnice z tých tvojich skrípt (to boli práve tie upravené Vršanského poznámky), ale popísal si tam také kraviny, že sa z toho nedalo učiť."

  Takže ... aby som to uzavrel ... keď tu zbadáte nejakú faktickú chybu, tak ma na to upozornite VČAS a hlavne SLUŠNOU FORMOU.

- Táto knižka BY NEMALA slúžiť ako absolútna náhrada osobne odsedeného času na prednáškach doc. Škovieru. Jej preklad bol myslený skôr ako pomôcka ku skúške, k štátnici, k vymeškanej jednej-dvom prednáškam, a pod.

- Nemal som úplný originál tejto knižky. Mal som len prefotenú verziu, v ktorej chýbali nejaké strany a dokonca aj niektoré celé kapitoly a teda ...

- Kopec textu ostal nedoprekladaný. Ak má niekto záujem na jeho doprekladaní, treba sa so mnou najprv dohodnúť. Ak by bol niekto veľmi-veľmi-veľmi iniciatívny a pustil by sa prekladať bez môjho vedomia, potom prosím používajte LaTeX2ε a kódovanie Win1250. Potom mi zdrojáky pošlite a ja ich zakomponujem do textu a dotyčného meno bude zverejnené na titulnej stránke.

- Mnoho obrázkov z pôvodnej knihy nie je prekreslených do tohto dokumentu. Opäť ... ak má niekto záujem na ich dokreslenie ... nutný formát je EPS (Adobe **E**ncpsulated **P**ost**S**cript). Mne sa všetky obrázky kresliť nechcelo, lebo jediný vektorový editor, ktorý som mal k dispozícii, bol CORELDRAW! 5, o ktorom sa vôbec nedá povedať, že by sa príjemne ovládal.

  Do vhodného EPS vie exportovať aj CorelXARA, len treba oseknúť nevhodnú hlavičku, ktorú tam XARA vyrobí.

- Kapitola 5 mi nebola k dispozícii. Jediný zdroj údajov náležiacich k tejto kapitole, boli Vršanského poznámky z prednášok ... čo nebolo boh-vie-čo ... ak sa niekomu chce pozháňať túto kapitolu, tak som ochotný to preložiť, ale mne sa to zháňať nechce, takže je to na vás.

- Kapitoly 7, 8, 10 a 11 mi taktiež neboli k dispozícii a nemal som k nim ani iné zdroje, a teda v tomto dokumente chýbajú úplne.

- Ak narazíte (a to je 100%-ne isté, že narazíte) na nejaký preklep/nedoklep/blbosť, oznámte mi to (najlepšie mailom) vo forme KAPITOLA — INKRIMINOVANÝ_TEXT.

Otázky prekladateľa:

- Ako sa prerobí číslovanie v zozname {`enumerate`} z default štýlu `\arabic{counter}.` na štýl (`\roman{counter}`) ?

- Ako sa robí podčiarknutý text cez viac riadkov ?

- Ako sa robí {`quote`} environment očíslovaný číslom zarovnaným vertikálne na pravý okraj stránky a horizontálne do stredu dotyčného {`quote`} ?

Použitá notácia:

- *Šikmým písmom* (*italics*) sa v pôvodnej knižke označovali práve-definované výrazy. Túto notáciu som zachoval.

- V texte sa objaví niekoľko podčiarknutých výrazov. Budú to výrazy, ktoré som nevedel preložiť, alebo som si ich prekladom nebol istý.

  Občas sa vyskytnú aj celé vety/odstavce v angličtine. Vzhľadom na to, že neviem napísať podčiarknutý text cez viac riadkov, som to riešil tak, že som celý anglický odstavec napísal ako `footnote`.

  Je tu však jeden extra výraz, ktorý mi počas celého prekladu pil krv, a to výraz in particular. Kreatívne maily na riešenie tejto problematiky sú vítané.

0. Základy

V tejto kapitole sa letmo oboznámime s väčšinou teminológie používanej ďalej v tejto knihe. Našťastie, väčšina štandardnej grafovej terminológie je tak intuitívna, že je nenáročná na zapamätanie; ďalšie pojmy budú vysvetlené neskôr, keď príde ich čas :-)

Písmenom $\mathbb{N}$ označujeme množinu prirodzených čísel vrátane nuly. Množina $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ celých čísel modulo n označíme $\mathbb{Z}_n$; jej prvky budeme písať ako $\bar{i} := i + n\mathbb{Z}$. Pre reálne číslo x označíme $\lfloor x \rfloor$ jeho dolnú celú časť a $\lceil x \rceil$ jeho hornú celú časť. Logaritmy písané ako 'log' sú pri základe 2; prirodzený logarmitmus bude označený 'ln'. Množina $\mathcal{A} = \{A_1, \dots A_k\}$ disjunktných podmnožín množiny A je *rozklad* A, ak $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ a $A_i = \emptyset$ pre každé i. Rozklad $\{A'_1, \dots A'_\ell\}$ množiny A *zjemňuje* rozklad $\mathcal{A}$ ak každá A_j obsahuje nejakú A'_i. Množinu všetkých k-prvkových podmnnožín množiny A označíme $[A]^k$. Množinu s k prvkami budeme nazývať k-množina; podmnožinu s k prvkami budeme nazávať k-podmnožina.

0.1 Grafy

Graf je dvojica $G = (V, E)$ disjunktných množín spĺňajúca $E \subseteq [V^2]$; teda prvky E sú 2-prvkové podmnožiny V. Prvky V sú *vrcholy* (*uzly* alebo *body*) grafu G, prvky E sú jeho hrany.

Graf s množinou vrcholov V budeme nazývať graf na V. Množinu vrcholov grafu G označíme $V(G)$ a množinu hrán $E(G)$. Tieto konvencie sú nezávislé od aktuálnych mien týchto dvoch množín ... množina vrcholov grafu $H = (W, F)$ je stále $V(H)$ a nie $W(H)$. Nebudeme vždy striktne rozlišovať medzi grafom a jeho množinou vrcholov alebo množinou hrán. Napr. budeme hovoriť o vrchole $v \in G$ (namiesto $v \in V(G)$), o hrane $e \in G$ atď.

Počet vrcholov grafu G je jeho *rád* a označujeme ho $|G|$; počet hrán grafu G označíme $||G||$. Grafy sú *konečné* alebo *nekonečné* v závislosti od svojho rádu. Ak nebude inak povedané, implicitne budeme uvažovať vždy konečné grafy.

Prázdny graf $(\emptyset, \emptyset)$ budeme označovať zjednodušene $\emptyset$. Grafy rádu 0 a 1 budeme nazývať *triviáne*. Niekedy, napr. pri báze indukcie, môžu byť triviálne grafy užitočné; inokedy budú vytvárať nezmyselné protipríklady a stanú sa otravnými. Aby sme sa vyhli rušeniu textu s netriviálnymi podmienkami, budeme väčšinou uvažovať triviálne grafy a čiastočne aj prázdny graf $\emptyset$.

Vrchol v je *incidentný* s hranou e ak $v \in e$. Dva vrcholy incidentné s tou istou hranou sú jej *koncové vrcholy* alebo *konce* a hrana *spája* svoje konce. Hrana $\{x, y\}$ sa zvyčajne bude písať ako (x, y) alebo xy. Ak $x \in X$ a $y \in Y$, potom xy je $X - Y$ *hrana*. Množinu všetkých $X - Y$ hrán v E označíme $E(X, Y)$; namiesto $E(\{x\}, Y)$ a $E(X, \{y\})$ jednoducho píšeme $E(x, Y)$ a $E(X, y)$. Množinu všetkých hrán v E incidentných s vrcholom v označíme $E(v)$.

Dva vrcholy x,y z G sú *susedné* ak xy je hrana v G. Dve hrany $e \neq f$ sú *susedné*, ak majú spoločný vrchol. Ak všetky vrcholy G sú navzájom susedné, potom G je *kompletný*. Kompletný graf na n vrcholoch je K_n; K_3 je *trojuholník*. Maximálny počet navzájom susedných vrcholov v G je *číslo kliky*[1] $\omega(G)$ v grafe G.

Navzájom nesusedné vrcholy alebo hrany nazývame *nesusedné*. Formálnejšie ... množina vrcholov alebo hrán je *nezávislá*, ak žiadne dva z jej prvkov nie sú susedné. Maximálna mohutnosť nezávislej množiny vrcholov v grafe G je jej *číslo nezávislosti* $\alpha(G)$.

Nech $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú dva grafy. Nazveme ich *izomorfné* a budeme písať $G \simeq G'$ ak existuje bijekcia $\varphi : V \to V'$, kde $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ pre každé $x, y \in V$. Takéto zobrazenie φ nazývame *izomorfizmus*; ak $G = G'$, tak φ nazveme *automorfizmus*. Normálne nerozlišujeme medzi izomorfnými grafmi. Teda zvyčajne píšeme $G = G'$ namiesto $G \simeq G'$.

Položíme $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ a $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$. Ak $G \cap G' = \emptyset$, potom G a G' sú *disjunktné*. Ak $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$, potom G' je *podgraf* G (a G je nadgraf G') ... píšeme $G \subseteq G$. Menej formálne ... povieme, že G *obsahuje* G'. Ak $G' \subseteq G$ a G' obsahuje všetky hrany $xy \in E$, kde $x, y \in V'$, potom G' je *indukovaný* (spanned) podgraf (podľa V' v G) a označujeme ho $G[V']$. Inými slovami, ak $V' \subseteq V$, potom $G[V']$ označuje graf na V', ktorého hrany sú presne tie hrany z G, ktorých oba konce patria do V'. Ak G' je podgraf G, nie nutne

[1] DEF: *Klika* = maximálny kompletný podgraf

indukovaný, zjednodušíme $G[V(G')]$ na $G[G']$. Nakoniec, $G' \subseteq G$ je faktor v G, ak $V' = V$.

Ak U je ľubovoľná množina vrcholov (zvyčajne v grafe G), píšeme $G - U$ pre $G[V - U]$. Inými slovami, $G - U$ dostaneme z G *vynechaním* všetkých vrcholov v $U \cap V$ a ich incidentných hrán. Ak $U = v$, tak píšeme $G - v$ namiesto $G - \{v\}$. Namiesto $G - V(G')$ jednoducho píšeme $G - G'$. Pre F podmnožinu $[V]^2$ píšeme $G - F := (V, E - F)$ a $G + F := (V, E \cup F)$; ako pre vrcholy, tak aj pre hrany píšeme zjednodušene $G - e$ a $G + e$ namiesto $G - \{e\}$ a $G + \{e\}$. Graf G voláme *hranovo maximálny* s danou vlastnosťou grafu, ak G má túto vlastnosť, ale $G + xy$ túto vlastnosť nemá (pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy $x, y \in G$.

Ak G a G' sú disjunktné, označíme $G * G'$ graf získaný z $G \cup G'$ spojením všetkých vrcholov G so všetkými vrcholmi G'. Napr. $K_2 * K_3 = K_5$. *Komplement* $\overline{G}$ grafu G je graf na V, s množinou hrán $[V]^2 - E$ (inak definované ... $\overline{G} := K_{|G|} - G$). Hranový graf $L(G)$ grafu G je graf na E, v ktorom $x, y \in E$ sú susedné ako vrcholy v $L(G)$ práve vtedy, keď sú susedné ako hrany v G.

0.2 Stupeň vrchola

Nech $G = (V, E)$ je (neprázdny) graf. Množinu susedov vrchola v v G označíme $N_G(v)$ aleb jednoducho $N(v)$.[2] Všeobecnejšie pre $U \subseteq V$, susedov v $V - U$ vrcholov v U nazývame *susedia* U a označujeme $N(U)$. Hranica $\partial_G U = \partial U$ z U je množina všetkých vrcholov v U, ktorí majú suseda v $V - U$.

Stupeň $d_G(v) = d(v)$ vrchola v je počet $|E(v)|$ hrán incidentných s v; podľa našej definície grafu[3], je to práve počet susedov v. Vrchol stupňa 0 je *izolovaný*. Číslo $\delta(G) := min\{d(v) \mid v \in V\}$ je *minimálny stupeň* grafu G, číslo $\Delta(G) := max\{d(v) \mid v \in V\}$ je *maximálny stupeň* grafu G. Ak všetky vrcholy G majú rovnaký stupeň k, potom G je *k-regulárny*, alebo jednoducho *regulárny*. 3-regulárny graf nazývame *kubický*.

Číslo

$$d(G) := \sum_{v \in V} \frac{d(v)}{|V|}$$

je *priemerný stupeň* grafu G. Je samozrejmé, že

$$\delta(G) \le d(G) \le \Delta(G).$$

Priemerný stupeň globálne vyčísľuje to, čo je lokálne merané stupňami vrcholov: približný počet hrán v G na jeden vrchol. Niekedy bude vhodné vyjadriť tento pomer priamo ako

$$\varepsilon(G) := \frac{|E|}{|V|}.$$

Veľkoti d a ε sú, samozrejme, úzko súvisiace. Samozrejme, ak sčítame všetky stupne vrcholov v G, každú hranu započítame presne dvakrát: raz z každého jej konca. A preto

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) \cdot |V|,$$

a teda

$$\varepsilon(G) = \frac{1}{2} d(G).$$

Lema 0.2.1: Počet vrcholov nepárneho stupňa v grafe je vždy párny.

Dôkaz: Graf na V má $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$ hrán, takže $\sum_{v \in V} d(v)$ je párne číslo. □

Ak graf má vysoký minimálny stupeň, t.j. všade lokálne má veľa hrán na jeden vrchol, taktiež má veľa hrán na jeden vrchol globálne: $\varepsilon(G) = \frac{1}{2} d(G) \ge \frac{1}{2} \delta(G)$. Obrátene ... jeho priemerný stupeň môže byť vysoký, aj keď minimálny stupeň je malý. Avšak vrcholy vysokého stupňa nemôžu byť rozptýlené úplne pomedzi vrcholy malého stupňa: ako nasledujúca lema ukazuje, každý graf obsahuje podgraf, ktorého priemerný stupeň nie je menší ako jeho vlastný priemerný stupeň, a ktorého minimálny stupeň je aspoň polovica z jeho priemerného stupňa:

[2] Tu, ako aj ďalej v texte vynecháme index odkazujúci na graf G, ak bude referencia samozrejmá.

[3] Nejedná sa o multigrafy ... pozri časť 0.10

Lema 0.2.2: Každý graf G s aspoň jednou hranou obsahuje podgraf H, kde platí $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Dôkaz: Aby sme skonštruovali H z G, pokúsime sa odstrániť vrcholy malého stupňa jeden po druhom, až kým nezostanú len vrcholy vysokého stupňa. Až do akého stupňa $d(v)$ si môžeme dovoliť odstrániť vrchol v, aby sme neznížili ε ? Samozrejme, až do $d(v) = \varepsilon$: potom sa počet vrcholov zníži o 1 a počet hrán aspoň o ε, takže celkový pomer ε hrán a vrcholov sa nezníži.

Formálne ... skonštruujeme postupnosť $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$ indukovaných podgrafov grafu G nasledovne. Ak G_i obsahuje vrchol v_i stupňa $d(v_i) \leq \varepsilon(G_i)$, položíme $G_{i+1} := G_i - v_i$; ak neobsahuje, ukončíme našu postupnosť a položíme $G_i := H$. Podľa voľby v_i dostaneme $\varepsilon(G_{i+1}) \geq \varepsilon(G_i)$ pre každé i a odtiaľ $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Čo ešte môžeme povedať o grafe H ? Pretože $\varepsilon(K_1) = 0 < \varepsilon(G)$, žiadny z grafov v našej postupnosti nie je triviálny, tak dostávame špeciálny prípad $H \neq \emptyset$. Skutočnosť, že H neobsahuje vrchol vyhovujúci odstráneniu teda implikuje $\delta(H) > \varepsilon(H)$, ako sme žiadali. $\square$

0.3 Cesty a cykly

Cesta je neprázdny graf $P = (V, E)$ tvaru

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \qquad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

kde x_i sú všetky navzájom rôzne. Vrcholy x_0 a x_k sú *spojené* cestou P a nazývajú sa *konce*; vrcholy $x_1, \dots, x_{k-1}$ sú *vnútorné* vrcholy cesty P. Počet hrán cesty je jej *dĺžka* a cestu dĺžky k označujeme P_k.

Často sa pozeráme na cestu podľa prirodzenej postupnosti jej vrcholov [4] a píšeme $P = x_0x_1 \dots x_k$ a voláme P cestou *z* x_0 *do* x_k (alebo aj cesta medzi x_0 a x_k).

Pre $0 \leq i \leq j \leq k$ píšeme

$$\begin{aligned} Px_i &:= x_0 \dots x_i \\ x_iP &:= x_i \dots x_k \\ x_iPx_j &:= x_i \dots x_j \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \dot{P} &:= x_1 \dots x_{k-1} \\ P\dot{x}_i &:= x_0 \dots x_{i-1} \\ \dot{x}_iP &:= x_{i+1} \dots x_k \\ \dot{x}_iP\dot{x}_j &:= x_{i+1} \dots x_{j-1} \end{aligned}$$

pre príslušné podcesty P. Použijeme podobnú intuitívnu notáciu pre spájanie ciest; napr. ak zjednotenie $Px \cup xQy \cup yR$ troch ciest je opäť cesta, môžeme ju jednoducho zapísať ako $PxQyR$.

Nech A,B sú množiny vrcholov. $P = x_0 \dots x_k$ nazveme $A - B$ *cesta*, ak $V(P) \cap A = \{x_0\}$ a $V(P) \cap B = \{x_k\}$. Ako predtým, budeme písať "$a - B$ cesta" namiesto "$\{a\} - B$ cesta", a pod. Dve a viac ciest je navzájom *nezávislých*, ak žiadna z nich neobsahuje vnútorný vrchol niektorej inej. Dve $a - b$ cesty napr. sú nezávislé práve vtedy, keď a a b sú ich jediné spoločné vrcholy.

Je daný graf H. P nazveme H*-cesta* ak P je netriviálna a pretína H presne vo svojich koncoch. Špeciálny prípad: hrana ľubovoľnej H-cesty dĺžky 1 nie je nikdy hranou H.

Ak $P = x_0 \dots x_{k-1}$ je cesta a $k \geq 3$, potom graf $C := P + x_{k-1}x_0$ sa nazýva *cyklus* (alebo *kružnica*). Ako s cestami, aj tu často označujeme cyklus podľa jeho cyklickej postupnosti vrcholov; definovaný cyklus C môže byť napísaný ako $x_0 \dots x_{k-1}x_0$. *Dĺžka* cyklu je počet jeho hrán (alebo vrcholov); cyklus dĺžky k nazývame k*-cyklus* a označujeme ho C_k.

[4] Presnejšie, podľa jednej z dvoch prirodzených postupností: $x_0 \dots x_k$ a $x_k \dots x_0$ označujú tú istú cestu. Stále však často pomôže fixovať (*fix*) jedno z týchto dvoch usporiadaní $V(P)$ ... potom môžeme hovoriť o *prvom vrchole* cesty P a pod.

Minimálna dĺžka cyklu v grafe G je *obvod* a označujeme ho $g(G)$. Maximálna dĺžka cyklu je *horný obvod*[5]. Ak G neobsahuje kružnicu, tak obe hodnoty položíme rovné ∞. Hrana, ktorá spája dva vrcholy cyklu ale sama nie je hranou cyklu, je *tetiva* tohto cyklu. Teda *indukovaný cyklus* v G – cyklus v G, ktorý vytvára indukovaný podgraf – je ten, ktorý neobsahuje tetivy.

Ak graf má veľký maximálny stupeň, tak obsahuje dlhé cesty a cykly:

Lema 0.3.1: Každý graf G obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$ a cyklus dĺžky aspoň $\delta(G)+1$ (pre $\delta(G) \geq 2$).

Dôkaz: Nech $x_0 \dots x_k$ je najdlhšia cesta v G. Potom všetci susedia x_k ležia na tejto ceste. Odtiaľ $k \geq d(x_k) \geq \delta(G)$. Ak $i < k$ je minimálne a $x_i x_k \in E(G)$, potom $x_i \dots x_k x_i$ je cyklus dĺžky aspoň $\delta(G)+1$. □

Vzdialenosť $d_G(x,y)$ v G dvoch vrcholov x,y je dĺžka najkratšej $x-y$ cesty v G; ak neexistuje taká cesta, položíme $d(x,y) := \infty$. Najväčšia vzdialenosť medzi dvomi crholmi v G je *priemer* grafu G a označujeme ho $\mathrm{diam}(G)$. Priemer a polomer spolu súvisia:

Lema 0.3.2: Každý graf G obsahujúci cyklus spĺňa $g(G) \leq 2\mathrm{diam}(G)+1$.

Dôkaz: Nech C je najkratší cyklus v G. Ak $g(G) \geq 2\mathrm{diam}(G)+2$, tak C obsahuje dva vrcholy, ktorých vzdialenosť v C je aspoň $\mathrm{diam}(G)+1$. V G majú tieto dva vrcholy menšiu vzdialenosť; ľubovoľná kratšia cesta P medzi nimi preto nie je podgraf C. Teda P neobsahuje C-cestu xPy. Spolu s najkratšou z dvoch $x-y$ ciest v C vytvára táto cesta kratší cyklus ako C, čo je spor. □

Vrchol nazveme *centrálny* v G, ak jeho najväčšia vzdialenosť od ľubovoľného iného vrchola je najmenšia možná. Táto vzdialenosť je *polomer* grafu G. Označujeme ho $\mathrm{rad}(G)$. Teda, formálne … $\mathrm{rad}(G) = \min\limits_{x\in V(G)}\left\{\max\limits_{y\in V(G)}\{d_G(x,y)\}\right\}$. Ľahko možno nahliadnuť, že dostaneme

$$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2\mathrm{rad}(G).$$

Priemer a polomer nesúvisia priamo s minimálnym alebo priemerným stupňom: graf môže spájať veľký minimálny stupeň s veľkým priemerom alebo malý priemerný stupeň s malým priemerom.

Maximálny stupeň sa tu správa inak: graf vysokého rádu môže mať malý polomer a priemer iba ak jeho maximálny stupeň je veľký. Tento vzťah je veľmi zhruba vyjadrený v nasledovnej leme:

Lema 0.3.3: Graf G s polomerom $\leq k$ a maximálnym stupňom $\leq d$ obsahuje aspoň $1+kd^k$ vrcholov.

Dôkaz: Nech z je centrálny vrchol v G a nech D_i označuje množinu vrcholov G vo vzdialenosti i od z. Potom $V(G) = \bigcup\limits_{i=0}^{k} D_i$ a $|D_0| = 1$. Pretože $\Delta(G) \leq d$, dostaneme $|D_i| \leq d|D_{i-1}|$ pre $i = 1,\dots,k$ a teda podľa indukcie $|D_i| \leq d^i$. Zlúčením týchto dvoch nerovností dostaneme

$$|G| \leq 1 + \sum_{i=1}^{k} d^i \leq 1 + kd^k.$$

□

Sled (dĺžky k) v grafe G je neprázdna striedavá postupnosť $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots e_{k-1} v_k$ vrcholov a hrán v G taká, že $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ pre každé $i < k$. Ak $v_0 = v_k$, potom je sled *uzavretý*. Ak hrany v slede sú navzájom rôzne, tak tento sled nazývame *ťah*. Ak sú vrcholy v slede navzájom rôzne, tak tento sled nazývame *cesta*. Vo všeobecnosti … každý sled medzi dvomi vrcholmi obsahuje cestu medzi týmito vrcholmi (dôkaz?).

[5] myslím, že takto nejako to pomenoval doc. Škoviera na cvičeniach 5.10.1999
IN ENGLISH:circumference

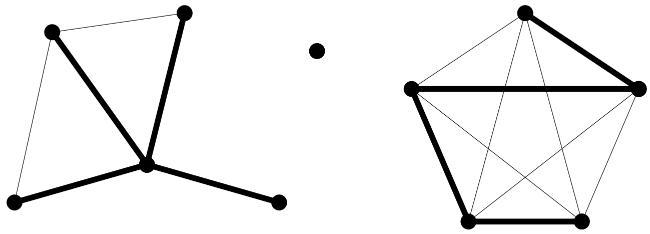
0.4 Súvislosť

Graf G nazveme *súvislý*, ak ľubovoľné dva jeho vrcholy sú spojené cestou. Ak $U \subseteq V(G)$ a $G[U]$ je spojitý, U taktiež nazývame spojitým (v G).

Lema 0.4.1: Vrcholy súvislého grafu G môžu vždy byť očíslované, povedzme $v_1, \dots v_n$ tak, že $G_i := G[v_1, \dots, v_i]$ je súvislý pre každé i.

Dôkaz: Zoberme si ľubovoľný vrchol v_1 a induktívne predpokladajme, že $v_1, \dots, v_i$ boli vybraté pre nejaké $i < |G|$. Teraz vyberme vrchol $v \in G - G_i$. Keďže G je súvislý, tak obsahuje $v - v_1$ cestu P. Vyberme v_{i+1} ako posledný vrchol P v $G - G_i$; potom v_{i+1} má suseda v G_i. Súvislosť každého G_i vyplýva podľa indukcie na i. $\square$

Nech $G = (V, E)$ je graf. Maximálny neprázdny súvislý podgraf G nazývame *komponent* grafu G.

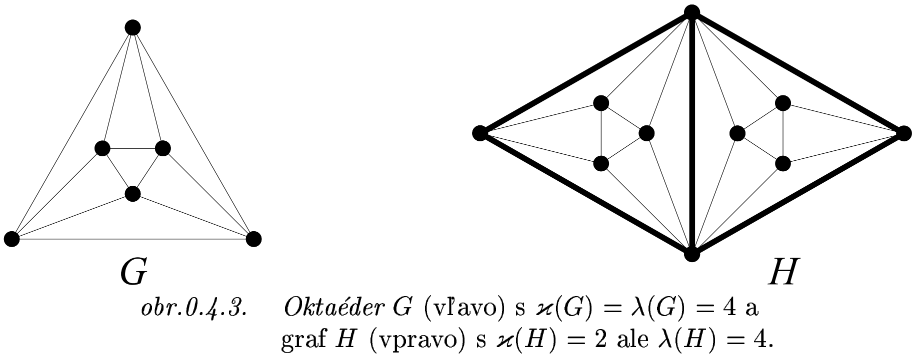


obr.0.4.1. Graf s tromi komponentmi a kostrou v každom z nich.

Ak $A, B \subseteq V$ a $X \subseteq V \cup E$ sú také, že každá $A - B$ cesta v G obsahuje vrchol alebo hranu z X, povieme, že X *oddeľuje* množiny A a B v G. Z toho vyplýva (špeciálny prípad), že $A \cap B \subseteq X$. Všeobecnejšie povieme, že X *oddeľuje* G a nazveme X *oddeľujúcou* množinou v G, ak X oddeľuje dva vrcholy $G - X$ v G. Vrchol, ktorý oddeľuje dva iné vrcholy toho istého komponentu, je *artikulácia* a hrana oddeľujúca jeho konce je *most*. Tzn. mosty v grafe sú presne tie hrany, ktoré neležia na žiadnej kružnici.

G nazveme k-súvislý (pre $k \in \mathbb{N}$), ak $|G| > k$ a $G - X$ je súvislý pre každú množinu $X \subseteq V$ s menej ako k vrcholmi. Inými slovami, žiadne dva vrcholy G nie sú oddelené menej ako k inými vrcholmi. Každý (neprázdny) graf je 0-súvislý a 1-súvislé grafy sú presne netriviálne súvislé grafy. Najväčšie celé $k < |G|$, pre ktoré G je k-súvislý, je *stupeň súvislosti* $\varkappa(G)$ grafu G. Tzn. $\varkappa(G) = 0$ práve vtedy, keď G je nesúvislý alebo $G = K_1$ a dostaneme $\varkappa(K_n) = n - 1$ pre všetky $n \geq 1$.

Ak $|G| > 1$ a $G - F$ je súvislý pre každú množinu $F \subseteq E$ s menej ako ℓ hranami, potom G nazveme *hranovo ℓ-súvislý*. Maximálne celé ℓ, pre ktoré G je hranovo ℓ-súvislý, je *stupeň hranovej súvislosti* $\lambda(G)$ grafu G. Špeciálne, ak G je nesúvislý, tak dostaneme $\lambda(G) = 0$.



obr.0.4.3. *Oktaéder* G (vľavo) s $\varkappa(G) = \lambda(G) = 4$ a graf H (vpravo) s $\varkappa(H) = 2$ ale $\lambda(H) = 4$.

Pre každý netriviálny graf G platí

$$\varkappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

takže in particular veľký stupeň súvislosti vyžaduje veľký minimálny stupeň. Obrátene, vysoký minimálny stupeň nezaručuje vysoký stupeň súvislosti a ani hranovej súvislosti. Avšak zaručuje existenciu vysoko-súvislého grafu:

Veta 0.4.2: (Mader 1972)
Každý graf s priemerným stupňom aspoň $4k$ obsahuje k-súvislý podgraf.

Dôkaz: Pre $k \in \{0, 1\}$ je tvrdenie triviálne.

Uvažujme $k \geq 2$ a graf $G = (V, E)$ s $|V| = n$ a $|E| = m$. Pre induktívne úvahy bude ľahšie dokázať silnejšie tvrdenie, že G obsahuje k-súvislý podgraf, keď

1. $n \geq 2k - 1$ a
2. $m \geq (2k-3)(n-k+1) + 1$.

(Toto tvrdenie je samozrejme silnejšie, t.j. (1) aj (2) vyplývajú z nášho predpokladu o $d(G) \geq 4k$: (1) vyplýva, pretože inak $2k > n + 1$ a odtiaľ $m = \frac{1}{2}d(G)n \geq 2kn > n(n+1)$; (2) vyplýva priamo z $m = \frac{1}{2}d(G)n \geq 2kn$.)

Použijeme indukciu na n. Ak $n = 2k - 1$, tak $k = \frac{1}{2}(n+1)$ a odtiaľ $m \geq \frac{1}{2}n(n-1)$ podľa (2). Teda $G = K_n \supseteq K_{k+1}$, čo dokazuje naše tvrdenie. Teraz predpokladajme, že $n \geq 2k$. Ak v je vrchol s $d(v) \leq 2k - 3$, tak môžeme použiť indukčný predpoklad na $G - v$ a je to hotovo. Takže predpokladajme, že $\delta(G) \geq 2k - 2$. Ak G je k-súvislý, potom niet čo dokazovať. Teda nech G má tvar $G = G_1 \cup G_2$ s $|G_1 \cap G_2| = k - 1$ a $|G_1|, |G_2| < n$. Pre každý vrchol v v $G_1 - G_2$ alebo v $G_2 - G_1$ dostaneme podľa predpokladu $d(v) \geq 2k - 2$, takže $|G_1|, |G_2| \geq 2k - 1$. Ale potom aspoň jeden z grafov G_1,G_2 musí spĺňať indukčný predpoklad. Ak ani jeden nespĺňa, tak dostaneme

$$\|G_i\| \leq (2k-3)(|G_i| - k + 1)$$

pre $i = 1, 2$ a odtiaľ

$$m \leq \|G_1\| + \|G_2\| \leq (2k-3)(|G_1| + |G_2| - 2k + 2) = (2k-3)(n-k+1) \qquad (\text{ podľa } |G_1 \cap G_2| = k - 1)$$

čo je v spore s (2). □

0.5 Stromy a lesy

Acyklický graf, t.j. taký, ktorý neobsahuje žiadne cykly, nazývame *les*. Súvislý les je *strom*. (Teda les je graf, ktorého komponenty sú stromy.) Vrcholy stupňa 1 v strome sú jeho *listy*. Každý netriviálny strom má aspoň dva listy — zoberme si, napr. konce najdlhšej cesty. Táto malá skutočnosť je často užitočná, najmä pri dôkazoch indukciou pri stromoch: ak odstránime list zo stromu, to, čo ostane, je stále strom.

Veta 0.5.1: Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné pre graf T:

1. T je strom
2. každé dva vrcholy T sú spojené jedinou (a jedinečnou) cestou v T
3. T je *minimálne súvislý*; tzn. T je súvislý, ale $T - e$ je nesúvislý pre každú hranu $e \in T$
4. T je *maximálne acyklický*; tzn. T je acyklický, ale $T + xy$ obsahuje cyklus pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy $x, y \in T$

Dôkaz vety 0.5.1 je priamočiary a je to dobré cvičenie pre každého, kto ešte nie je "zohratý" so všetkými pojmami, ktorých sa týka. Rozšírením nášho zápisu pre cesty z časti 0.3, píšeme xTy pre jedinečnú cestu v strome T medzi dvomi vrcholmi x,y (pozri (2) vyššie).

Časté použiie vety 0.5.1 je, že každý súvislý graf obsahuje kostru: podľa ekvivalencie (1) a (3), každý minimálny súvislý faktor bude strom. Obrázok 0.4.1 zobrazuje kostru v každom z troch komponentov znázorneného grafu.

Veta 0.5.2: Vrcholy stromu môžu vždy byť očíslované, povedzme $v_1, \ldots, v_n$, takže každý v_i pre $i \geq 2$ má jediného suseda v $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.

Dôkaz: Použijeme očíslovanie z 0.4.1. □

Veta 0.5.3: Súvislý graf s n vrcholmi je strom práve vtedy, keď má $n-1$ hrán.

Dôkaz: Indukcia na i ukazuje, že podgraf indukovaný prvými i vrcholmi vo vete 0.5.2 má $i-1$ hrán; pre $i=n$ toto dokazuje doprednú implikáciu. Obrátene, nech G je ľubovoľný súvislý graf s n vrcholmi a $n-1$ hranami. Nech G' je kostra G. Pretože G' má podľa prvej implikácie $n-1$ hrán, vyplýva z toho, že $G'=G$. □

Veta 0.5.4: Ak T je strom a G je ľubovoľný graf s $\delta(G) \geq |T|-1$, potom $T \subseteq G$, tzn. G obsahuje podgraf izomorfný s T.

Dôkaz: Nájsť kópiu T v G induktívne spolu s jej vrcholovým očíslovaním z vety 0.5.2. □

0.6 Bipartitné grafy

Nech $r \geq 2$ je celé číslo. Graf $G=(V,E)$ nazveme *r-partitný* ak V dovoľuje rozklad na r tried takých, že každá hrana má svoje konce v rôznych triedach: vrcholy v tej istej triede rozkladu nesmô byť susedné. 2-partitné grafy nazývame *bipartitné*.

r-partitný graf, v ktorom každé dva vrcholy z rôznych tried rozkladu sú susedné, sa nazýva ***kompletný***; kompletné r-partitné grafy pre všetky r dohromady sú ***kompletné multipartitné grafy***. Kompletný r-partitný graf $\overline{K_{n_1}} * \ldots * \overline{K_{n_r}}$ označujeme $K_{n_1,\ldots,n_r}$; ak $n_1 = \ldots = n_r = s$, píšeme stručnejšie K_s^r. teda K_s^r je kompletný r-partitný graf, v ktorom každá trieda rozkladu obsahuje presne s vrcholov. Grafy tvary $K_{1,n}$ sa nazývajú ***hviezdy***.

Samozrejme, bipartitný graf nemôže obsahovať nepárny cyklus (cyklus nepárnej dĺžky. V skutočnosti sú bipartitné grafy charakterizované touto vlastnosťou:

Veta 0.6.1: Graf je bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje nepárny cyklus.

Dôkaz: Nech $G=(V,E)$ je graf bez nepárnych cyklov; ukážeme, že G je bipartitný. Je jasné, že graf je bipartitný, ak všetky jeho komponenty sú tiež bipartitné. Takže môžeme predpokladať, že G je súvislý. Nech T je kostra v G a nech $v_1,\ldots,v_n$ je očíslovanie V také, že $T_i := T[v_1,\ldots,v_i]$ je spojitý pre všetky i (lema 0.4.1). Pre dané $v \in V$ má jediná cesta v_1Tv nepárnu alebo párnu dĺžku. Toto definuje rozklad V; ukážeme, že G je bipartitný s týmyo rozkladom. Ak v_iv_j je ľubovoľná hrana z T kde i¡j, potom v_i a v_j ležia v rôznych triedach rozkladu: pretože T_i je súvislý, jediná cesta v_1Tv_j musí byť cesta $v_1T_iv_iv_j$. Ostáva ukázať, žeaj hrany v $E-E(T)$ majú svoje konce v rôznych partíciách. Nech $e=xy$ je taká hrana. Ako sme práve videli, vrcholy na ceste xTy (ktoré sú spojené hranami T) sa striedajú medzi tými dvomi partíciami. Teraz cyklus $C_e := xTy+e$ je párny podľa predpokladu, takže xTy má párny počet vrcholov. Preto x a y ležia v rôznych partíciách, ako bolo požadované. □

0.7 Kontrakcie a minory[6]

Nech $e=xy$ je hrana grafu $G=(V,E)$. G/e označíme graf, ktorý dostaneme z G ***kontrakciou*** hrany e do nového vrchola v_e, ktorý bude incidentný so všetkými pôvodnými susedmi vrcholov x aj y. Formálne $G/e := (V',E')$, kde

$$V' := (V - \{x,y\}) \cup \{v_e\}$$

(kde v_e je nový vrchol, tzn. $v_e \notin V \cup E$) a

$$E' := \{vw \in E \mid \{v,w\} \cap \{x,y\} = \emptyset\} \cup \{v_ew \mid xw \in E - \{e\} \vee yw \in E - \{e\}\}.$$

Sám graf G/e nazveme ***kontrakcia***. Graf, ktorý vznikne kontrakciami hrán, ktoré majú aspoň jednen koncový vrchol stupňa aspoň 2 je ***subdivízia***.

[6]Minory som omylom nepreložil

0.8 Eulerovské ťahy

Uzavretý sled v grafe nazveme *Eulerovský ťah*, keď prechádza cez každú hranu grafu presne práve raz. Graf je *eulerovský*, keď umožnuje Eulerovský ťah.

Veta 0.8.1: (Euler 1736)
Súvislý graf je eulerovský práve vtedy, keď každý vrchol má párny stupeň.

Dôkaz: Podmienka o stupni vrchola je očividne dôležitá: vrchol objavujci sa k-krát v eulerovskom ťahu (alebo $k+1$-krát, ak je to počiatočný a koncový vrchol a teda je počítaný dvakrát) musí mať stupeň $2k$.

Obrátene … nech G je súvislý graf so všetkými vrcholmi párneho stupňa a nech

$$W = v_0 e_0 \dots e_{k-1} v_k$$

je sled maximálnej dĺžky v G, ktorý nepoužíva žiadnu hranu viac, než jedenkrát. Pretože W nemôže byť rozšírený, tak už obsahuje hrany pri v_k. Podľa predpokladu je počet takých hrán párny. Odtiaľ $v_k = v_0$, takže W je uzavretý sled.

Pripustime, že W nie je eulerovský ťah. Potom G obsahuje hranu e mimo W, ale incidentnú s vrcholom z W, povedzme $e = uv_i$. (Tu použijeme súvislosť G ako v dôkaze lemy 0.4.1.) Potom sled

$$uwv_i e_i \dots e_{k-1} v_k e_0 \dots e_{i-1} v_i$$

nie je dlhší ako W, čo je spor. □

0.9 Lineárna algebra na grafoch

Nech $G = (V, E)$ je graf o n vrcholoch a m hranách, povedzme $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. *Vrcholový priestor* $\mathcal{V}(G)$ grafu G je vektorový priestor nad 2-prvkovým poľom $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ všetkých funkcií $V \to \mathbb{F}_2$. Každý prvok $\mathcal{V}(G)$ prirodzene zodpovedá podmnožine V, množine tých vrcholov, ktorým priradí 1 a každá podmnožina V je jednoznačne určená v $\mathcal{V}(G)$ vektorom. Súčet $U + U'$ dvoch množín $U, U' \subseteq V$ je ich symetrická difenrencia (prečo?) a $U = -U$ pre všetky $U \subseteq V$. Nula v $\mathcal{V}(G)$ je prázdna množina (vrcholov) $\emptyset$. Pretože $\{\{v_1\}, \dots, \{v_n\}\}$ je *báza* $\mathcal{V}(G)$, dostávame $\dim \mathcal{V}(G) = n$.

Rovnakým spôsobom s funkciami $E \to \mathbb{F}_2$ možno definovať *hranový priestor* $\mathcal{E}(G)$: jeho prvky sú podmnožiny E, vektorový súčet vedie k symetrickej diferencii, $\emptyset \subseteq E$ je nula $\mathcal{E}(G)$ a $F = -F$ pre všetky $F \subseteq E$. Ako predtým, $\{\{e_1\}, \dots, \{e_m\}\}$ je *báza* $\mathcal{E}(G)$ a $\dim \mathcal{E}(G) = m$.

Pretože hrany grafu nosia svoju podstatnú štruktúru, väčšinou budeme zúčastnení s hranovým priestorom. Nech sú dané dve množiny hrán $F, F' \in \mathcal{E}(G)$ a ich koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ a $\lambda'_1, \dots, \lambda'_m$ s vzhľadom na bázu, potom píšeme

$$\langle F, F' \rangle := \lambda_1 \lambda'_1 + \dots + \lambda_m \lambda'_m \in \mathbb{F}_2.$$

Toto je opäť podpriestor $\mathcal{E}(G)$ (priestor všetkých vektorov, ktoré sú koreňmi určitej množiny lineárnych rovníc — ktorých?) a dostaneme[7]

$$\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^{\perp} = m.$$

Cyklový priestor $\mathcal{C}(G)$ je podpriestor $\mathcal{E}(G)$ indukovaný všetkými kružnicami v G — presnejšie, ich hranovými množinami[8]. Dimenzia $\dim \mathcal{C}(G)$ je *cyklomatické číslo* grafu G.

Lema 0.9.1: Indukované kružnice v G generujú jeho celý cyklový priestor.

Dôkaz: Podľa definície $\mathcal{C}(G)$ postačí ukázať, že indukované kružnice v G generujú každú kružnicu $C \subseteq G$ s

[7] Toto je známejšie pre reálne alebo komplexné vektorové priestory (kde $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{\perp}$ tvoria priamy súčet), ale platí tu to isté.
[8] Pre jednoduchosť nebudeme normálne rozlišovať medzi kružnicami a ich hranovými množinami v spojitosti s cyklovými priestormi.

tetivou e. Toto okamžite vyplynie z indukcie na $|C|$: tie dva cykly v $C + e$ obsahujúce e ale neobsahujúce žiadnu inú spoločnú hranu sú kratšie ako C, ale ich symetrická diferencia je presne C. $\square$

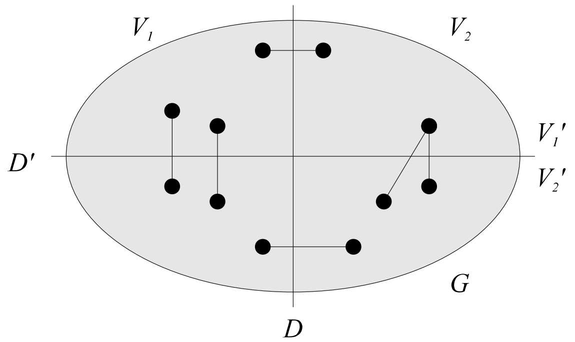
Lema 0.9.2: Množina hrán $F \subseteq E$ leží v $\mathcal{C}(G)$ práve vtedy, keď každý vrchol (V,F) má párny stupeň.

Dôkaz: Dopredná implikácia platí podľa indukcie na počet cyklov potrebných na generovanie F, spätná implikácia podľa indukcia na počet cyklov v (V, F). $\square$

Ak $\{V_1, V_2\}$ je rozklad V, množina $E(V_1, V_2)$ všetkých hrán G *križujúcich* (crossing) tento rozklad sa nazýva *rez*. Pre $V_1 = \{v\}$ je tento rez označený ako $E(v)$.

Lema 0.9.3: Spolu s $\emptyset$ vytvárajú rezy v G podpriestor $\mathcal{E}(G)$. Tento priestor je generovaný rezmi tvaru $E(v)$.

Dôkaz: Nech C^* označuje množinu všetkých rezov v G, spolu s $\emptyset$. To Aby sme dokázali, že $\mathcal{C}^*$ je podpriestor, ukážeme, že pre všetky $D, D' \in \mathcal{C}^*$ taktiež $D + D'$ $(= D - D')$ leží v $\mathcal{C}^*$. Pretože $D + D' = \emptyset \in \mathcal{C}^*$ a $D + \emptyset = D \in \mathcal{C}^*$, môžeme predpokladať, že D a D' sú rôzne a nenulové. Nech $\{V_1, V_2\}$ a $\{V_1', V_2'\}$ sú zodpovedajúce rozklady V. Potom $D + D'$ pozostáva zo všetkých hrán, ktoré pretínajú jeden z týchto rozkladov ale nepretínajú ostatné (obrázok 0.9.1). Ale tieto sú presne hrany medzi $(V_1 \cap V_1') \cup (V_2 \cap V_2')$ a $(V_1 \cap V_2') \cup (V_2 \cap V_1')$ a podľa $D \neq D'$ tieto dve množiny vytvárajú ďalší rozklad V. Odtiaľ $D + D' \subseteq \mathcal{C}^*$ a $\mathcal{C}^*$ je samozrejme, podpriestor $\mathcal{E}(G)$.



obr.0.9.1. Mosty v $D + D'$.

Naše druhé tvrdenie, že rezy $E(v)$ generujú všetky z $\mathcal{C}^*$, vyplýva z faktu, že každá hrana $xy \in G$ leží presne v dvoch takých rezoch (v $E(x)$ a $E(y)$); teda každý rozklad $\{V_1, V_2\}$ množiny V spĺňa $E(V_1, V_2) = \sum_{v \in V_1} E(v)$. $\square$

Podpriestor $\mathcal{C}^* := \mathcal{C}^*(G)$ priestoru $\mathcal{E}(G)$ z lemy 0.9.3 nazveme *priestor rezov* grafu G. Nie je obtiažne nájsť medzi rezmi $E(v)$ explicitnú bázu pre $\mathcal{C}^*$ a teda určiť jeho dimenziu; spolu s vetou 0.9.5 prinesie nezávislý dôkaz vety 0.9.6.

Nasledujúca lema bude užitočná, keď budeme študovať dualitu planárnych grafov v časti 3.6:

Lema 0.9.4: Minimálne rezy v súvislom grafe generujú jeho celý priestor rezov.

Dôkaz: Všimnime si, že rez v súvisloom grafe $G = (V, E)$ je minimálny práve vtedy, keď obe množiny v odpovedajúcom rozklade V sú súvislé v G. Teraz uvažujme ľubovoľný neprázdny súvislý podgraf $C \subseteq G$. Ak D je komponent $G - C$, potom aj $G - D$ je súvislý; hrany medzi D a $G - D$ odtiaľ tvoria minimálny rez. Podľa voľby D je tento reaz presne množina $E(C, D)$ všetkých $C - D$ hrán v G.

Aby sme dokázali lemu, máme daný rozklad $\{V_1, V_2\}$ množiny V a uvažujme komponent C grafu $G[V_1]$. Potom $E(C, V_2) = E(C, G - C)$ je disjunktné zjednotenie hranových množín $E(C, D)$ nad všetkými komponentmi D z $G - C$ a teda aj disjunktné zjednotenie minimálnych rezov (viď vyššie). Teraz disjunktné zjednotenie všetkých týchto hranových množín $E(C, V_2)$ *prevedené na* (taken over) všetkých komponentoch C z $G[V_1]$ je presne náš rez $E(V_1, V_2)$. Takže tento rez je generovaný minimálnymi rezmi, ako bolo požadované. $\square$

Lema 0.9.5: Cyklový priestor $\mathcal{C}$ a priestor rezov $\mathcal{C}^*$ v každom grafe spĺňajú

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{*\perp} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{C}^* = \mathcal{C}^{\perp}.$$

Dôkaz: Uvažujme graf $G = (V, E)$. Očividne, každý cyklus v G má párny počet hrán v každom reze. Toto implikuje $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^{*\perp}$.

Obrátene, pripomeňme si z lemy 0.9.2, že pre každú hranovú množinu $F \notin \mathcal{C}$ existuje vrchol v incidentný s nepárnym počtom hrán v F. Potom $\langle E(v), F\rangle = 1$, takže $E(v) \in \mathcal{C}^*$ implikuje $F \notin \mathcal{C}^{*\perp}$. Toto doplňuje dôkaz $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{*\perp}$.

Na dôkaz $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^{\perp}$ teraz postačí ukázať $\mathcal{C}^* = (\mathcal{C}^{*\perp})^{\perp}$. Tu vyplýva $\mathcal{C}^* \subseteq (\mathcal{C}^{*\perp})^{\perp}$ priamo z definície $\perp$. Ale pretože

$$\dim \mathcal{C}^* + \dim \mathcal{C}^{*\perp} = m = \dim \mathcal{C}^{*\perp} + \dim(\mathcal{C}^{*\perp})^{\perp},$$

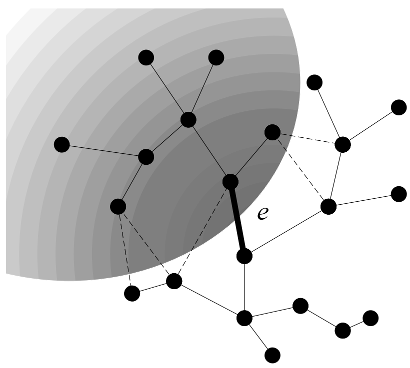
tak $\mathcal{C}^*$ má tú istú dimenziu ako $(\mathcal{C}^{*\perp})^{\perp}$, takže $\mathcal{C}^* = (\mathcal{C}^{*\perp})^{\perp}$, ako bolo požadované. □

Veta 0.9.6: Každý súvislý graf G s n vrcholmi a m hranami spĺňa

$$\dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1 \qquad \text{a} \qquad \dim \mathcal{C}^*(G) = n - 1.$$

Dôkaz: Nech $G = (V, E)$. Keďže podľa vety 0.9.5 $\dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{C}^* = m$, stačí nájsť $m - n + 1$ lineárne nezávislých vektorov v $\mathcal{C}$ a $n - 1$ lineárne nezávislých vektorov v $\mathcal{C}^*$: pretože tieto čísla (add up to) m, nemôže byť potom ani dimenzia $\mathcal{C}$, ani dimenzia $\mathcal{C}^*$ striktne väčšia.

Nech T je kostra v G. Podľa lemy 0.5.3. má T $n-1$ hrán, takže $m - n + 1$ hrán G leží mimo T. Pre každú z týchto $m - n + 1$ hrán $e \in E - E(T)$ obsahuje graf $T + e$ kružnicu C_e. Pretože žiadna z hrán e neleží na $C_{e'}$ pre $e' \neq e$, týchto $m - n + 1$ kružníc je lineárne nezávislých. Pre každú z $n - 1$ hrán $e \in T$ má graf $T - e$ presne dva komponenty a množina D_e hrán v G medzi týmito komponentmi tvorí rez. Pretože žiadna z hrán $e \in T$ neleží v $D_{e'}$ pre $e' \neq e$, týchto $n - 1$ rezov je lineárne nezávislých. □



obr.0.9.3. Rez D_e.

Incidenčná matica $B = (b_{ij})_{n\times m}$ grafu $G = (V, E)$ s $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ je definovaná nad $\mathbb{F}_2$ podľa

$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{ak } v_i \in e_j \\ 0 & \text{inak .} \end{cases}$$

Ako zvyčajne, nech B^t označuje transpozíciu B. Potom B a B^t definuje lineárne zobrazenia $B : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{V}(G)$ a $B^t : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{E}(G)$ vzhľadom na štandardné bázy.

Lema 0.9.7:

1. $\ker B = \mathcal{C}(G)$
2. $\operatorname{im} B^t = \mathcal{C}^*(G)$

Matica susednosti $A = (a_{ij})_{n\times n}$ grafu G je definovaná ako

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{ak } v_iv_j \in E \\ 0 & \text{inak .} \end{cases}$$

Naša posledná lema vytvorila jednoduchú súvislosť medzi A a B (nepozeráme sa na ne ako na reálne matice). Nech D označuje reálnu diagonálnu maicu $(d_{ij})_{n\times n}$ kde $d_{ii} = d(v_i)$ a $d_{ij} = 0$.

Dôsledok 0.9.8: $BB^t = A + D$.

0.10 Ďalšie pojmy súvisiace s grafmi

Pre úplnosť teraz budeme menovať niekoľko ďalších grafárskych pojmov, ktoré sa vyskytujú pomenej alebo vôbec v tejto knihe.

Hypergraf je dvojica (V, E) disjunktných množín, kde prvky E sú neprázdne podmnožiny (ľubovoľnej mohutnosti) V. Teda grafy sú špeciálnym prípadom hypergrafov.

Smerovaný graf (alebo *digraf*) je dvojica (V, E) disjunktných podmnožín (hrán a vrcholov) spolu s dvoma zobrazeniami init : $E \to V$ a ter : $E \to V$ priraďujúca každej hrane e *počiatočný vrchol* init(e) a *koncový vrchol* ter(e). Hrana e je nazvaná *smerovaná* z init(e) do ter(e). Všimnime si, že smerovaný graf môže mať niekoľko hrán medzi tými istými dvomi vrcholmi x,y. Také hrany sa nazývajú *násobné hrany*; ak majú rovnaký smer (povedzme z x do y), sú *paralelné*. Ak init(e) = ter(e), tak hranu e nazývame *slučka*.

Smerovaný graf D je *orientáciou* (nesmerovaného) grafu G ak $V(D) = V(G)$ a $E(D) = E(G)$ a ak $\{\text{init}(e), \text{ter}(e)\} = \{x, y\}$ pre každú hranu $e = xy$. Intuitívne, takýto *orientovaný* graf vznikne z nesmerovaného grafu jednoducho nasmerovaním každej hrany z jedného z jej koncov do toho druhého. Inak povedané, orientované grafy sú smerované grafy bez slučiek a násobných hrán.

Multigraf je dvojica (V, E) disjunktných množín (vrcholov a hrán) spolu so zobrazením $E \to V \cup [V]^2$ priraďujúcim každej hrane buď jeden alebo dva vrcholy ... jej *konce*. Teda multigrafy môžu tiež mať násobné hrany a slučky: môžeme uvažovať o multigrafe ako o smerovanom grafe, ktorého hranové smery boli 'zabudnuté'. Na vyjadrenie, že x a y sú konce hrany e stále píšeme $e = xy$, hoci to neurčuje e jednoznačne.

Graf je teda v podstate to isté, ako multigraf bez slučiek a násobných hrán. Niekedy, na počudovanie, možno dôkaz nejakej vety o grafe zjednodušiť tým, že ju budeme dokazovať o multigrafe. Okrem toho, sú oblasti v teórii grafov (ako napr. planárna dualita, pozri 3.6 a 5.5), kde multigrafy sú vhodnejšie ako grafy a kde obmedzenie tých druhých by vyzeralo umelé a bolo by technicky komplikované. Teda v týchto prípadoch budeme uvažovať multigrafy. Terminológia uvedená na začiatku pre grafy bude používaná odpovedajúco pre multigrafy.

Dva rozdiely však musia byť zdôraznené. Po prvé ... multigraf môže mať cykly dĺžky 1 alebo 2: slučky alebo dvojice násobných hrán (alebo *dvojhrán*). Po druhé ... pojem kontrakcie hrany je jednoduchší v multigrafoch ako v grafoch. Ak kontrahujeme hranu $e = x, y$ v multigrafe $G = (V, E)$ do nového vrchola v_e, netreba viac mazať akékoľvek hrany iné ako e: hrany paralelné s e sa stanú slučkami pri v_e, kým hrany xv a yv sa stanú paralelnými hranami medzi v_e a v. Teda formálne ... $E(G/e) = E - \{e\}$ a iba incidenčné zobrazenie $e' \mapsto \{\text{init}(e'), \text{ter}(e')\}$ v G bude upravené vzhľadom na novú množinu vrcholov v G/e.

Na záver ešte treba podotknúť, že veľa autorov, ktorí uvažujú o multigrafoch ako o samozrejmej veci, má sklony nazývať ich grafmi; v ich terminológii budú naše grafy nazývané jednoduché grafy.

1. Párenie

Predpokladajme, že máme daný graf a požadujeme nájdenie tak veľa nezávislých hrán, koľko sa len dá. Ako na to ? Budeme schopní spáriť všetky jeho vrcholy týmto spôsobom ? Ak nie, ako si môžeme byť istí, že je to vôbec možné ?

Množina M nezávislých hrán v grafe $G = (V, E)$ sa nazýva *párenie*. M je párenie $U \subseteq V$, ak každý vrchol v U je incidentý s hranou v M. Vrcholy v U sú potom nazývané *spárené* (podľa M); vrcholy neincidentné s akoukoľvek hranou z M sú *nespárené*.

k-regulárny podgraf obsahujúci všetky vrcholy sa nazýva *k-faktor*. Teda podgraf $H \subseteq G$ je 1-faktor v G práve vtedy, keď $E(H)$ je párenie V. Problém ako charakterizovať grafy, ktoré majú 1-faktor, tzn. párenie celej množiny vrcholov, bude našou hlavnou témou v nasledujúcej časti.

1.1 Párenie v bipartitných grafoch

Pre celú túto časť nech $G = (V, E)$ je pevný bipartitný graf s patríciami $\{A, B\}$. Vrcholy označené ako a,a', atď. budeme predpokladať, že ležia v partícii A, vrcholy označené ako b,b', atď. budú ležať v B.

Ako môžeme nájsť párenie v G s tak veľa hranami, ako je možné ? Začnime tým, že budeme uvažovať ľubovoľné párenie M v G. Cesta v G, ktorá začína v A nespáreným vrcholom a potom obsahuje striedavo hrany z $E - M$ a z M, je *alternujúca cesta* vzhľadom na M. Alternujúca cesta P, ktorá končí v nespárenom vrchole z B sa nazýva *zväčšujúca cesta*[9].

Alternujúce cesty hrajú dôležitú úlohu v praktickom hľadaní veľkých párení. V skutočnosti ak začneme s akýmkoľvek párením a budeme stále aplikovať zväčšujúce cesty, až kým už žiadne ďalšie také vylepšenie nebude možné, získané párenie bude vždy to optimálne — párenie s maximálnym možným počtom hrán (cvičenie). Algoritmický problém nájdenia párenia s maximálnou mohutnosťou sa teda zredukuje na problém nájdenia zväčšujúcich ciest — čo je zaujímavý a dosiahnuteľný algoritmický problém.

Naša prvá veta charakterizuje maximálnu mohutnosť párenia v G istým druhom podmienky duality. Nazvime množinu $U \subseteq V$ *vrcholové pokrytie* G, ak každá hrana z G je incidentná s vrcholom z U.

Veta 1.1.1: (König 1931)
Mohutnosť maximálneho párenia v G je rovná mohutnosti minimálneho vrcholového pokrytia.

Dôkaz: Nech M je párenie v G s maximálnou mohutnosťou. Z každej hrany v M vyberme jeden z koncov: koniec v B, ak nejaká alternujúca cesta končí v tomto vrchole, inak vyberieme vrchol z A. Dokážeme, že množina U týchto $|M|$ vrcholov pokrýva G; pretože ľubovoľné vrcholové pokrytie G musí pokrývať M, nemôže existovať také, ktoré by malo menej ako $|M|$ vrcholov ... a z toho bude vyplývať platnosť vety.

Nech $ab \in E$ je hrana; ukážeme, že buď a alebo b leží v U. Ak $ab \in M$, toto platí podľa definície U, a teda môžeme predpokladať, že $ab \notin M$. Pretože M je maximálne párenie, tak obsahuje hranu $a'b'$, kde buď $a = a'$ alebo $b = b'$. V skutočnosti môžeme predpokladať, že $a = a'$: keď a je nespárený (a $b = b'$), potom ab je alternujúca cesta, a tak koniec $a'b' \in M$ vybratej pre U bol vrchol $b' = b$. Teraz ak $a' = a \notin U$, potom $b' \in U$ a nejaká alternujca cesta P končí v b'. Ale potom existuje aj alternujúca cesta P' končiaca v b: buď $P' := Pb$ (ak $b \in P$) alebo $P' := Pb'a'b$. Podľa maximality M, keďže P' nie je zväčšujúca cesta, tak b musí byť spárený a bol vybratý do U z hrany z pokrytia M, ktorá ho obsahuje. $\square$

Vráťme sa k nášmu hlavnému problému, hľadaniu nejakej nutnej a postačujúcej podmienky existencie 1-faktora. V našom doterajšom prípade bipartitného grafu môžeme rovnako dobre požadovať všeobecnejšie kedy G obsahuje párenie A; toto bude definovať 1-faktor v G ak $|A| = |B|$ ... podmienka triviálne nutná pre existenciu 1-faktora.

[9] pretože ju môžeme použiť na rozšírenie párenia M na párenie s väčšou mohutnosťou: symetrická diferencia M s $E(P)$ je opäť párenie a množina spárených vrcholov sa zväčší o dva ... konce P.

Podmienka nutná pre existenciu párenia A je, že každá podmnožina A má dostatok susedov v B, tzn. že

$$|N(S)| \geq |S| \qquad \text{pre všetky } S \subseteq A.$$

Nasledujúca *manželská podmienka* hovorí, že zrejmá nutná podmienka je zároveň postačujúca:

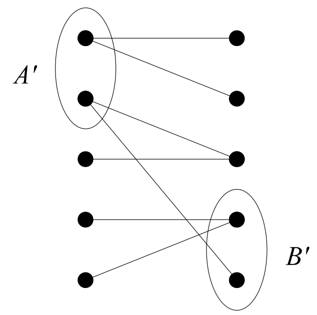
Veta 1.1.2: (Hall 1935)
G obsahuje párenie A práve vtedy, keď $|N(S)| \geq |S|$ pre všetky $S \subseteq A$.

Dôkaz: (1)
Dopredná implikácia je triviálna.
Nech $U = A' \cup B'$ je vrcholové pokrytie G s minimálnou mohutnosťou, kde $A' \subseteq A$ a $B' \subseteq B$. Sporom, nech G neobsahuje žiadne párenie pokrývajúce A, tak z vety 2.2.2 (König) vyplýva, že

$$|A'| + |B'| = |U| < A$$

a odtiaľ

$$|B'| < |A| - |A'| = |A - A'|.$$



obr.1.1.3. Pokrytie menej ako $|A|$ vrcholmi.

Podľa definície U, keďže G nemá hrany medzi $A - A'$ a $B - B'$, tak

$$|N(A - A')| \leq |B'| < |A - A'|$$

a manželská podmienka neplatí pre $S := A - A'$. □

Dôkaz: (2)
Dopredná implikácia je triviálna.
Uvažujme párenie M z G, ktoré necháva vrchol z A nespárený; skonštruujeme zväčšujúcu cestu vzhľadom na M. Nech $a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots$ je maximálna postupnosť rôznych vrcholov $a_i \in A$ a $b_i \in B$ spĺňajúcich nasledujúce podmienky:

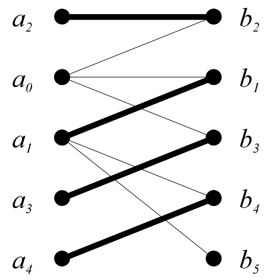
Pre každé $i \geq 1$ (obr.1.1.4):

1. a_0 je nespárený
2. b_i je susedný s nejakým vrcholom $a_{f(i)} \in \{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$
3. $a_i b_i \in M$

Podľa manželskej podmienky naša postupnosť nemôže končiť vo vrchole z A: vrcholy $a_0, \ldots, a_i - 1$ spolu majú aspoň i susedov v B, takže môžeme vždy nájsť nový vrchol $b_i \neq b_1, \ldots b_{i-1}$, ktorý spĺňa (2). Nech $b_k \in B$ je posledný vrchol v postupnosti. Podľa (i)-(iii)

$$P := b_k a_{f(k)} b_{f(k)} a_{f^2(k)} b_{f^2(k)} a_{f^3(k)} b_{f^3(k)} \ldots a_{f^r(k)}$$

(keď $f^r(k) = 0$) je alternujúca cesta.



obr.1.1.4. Dôkaz manželskej podmienky pomocou alternujúcich ciest.

Čo nám bráni rozšíreniu našej postupnosti ďalej ? Ak b_k je spárené, povedzme s a, môžeme ju samozrejme rozšíriť položením $a_k := a$ — pokiaľ nebude platiť $a = a_i$, kde $0 < i < k$, v ktorom prípade by (iii) implikovalo $b_k = b_i$, čo je spor. Takže b_k je nespárený a teda aj P je zväčšujúca cesta medzi a_0 a b_k. □

Dôkaz: (3)

Použijeme indukciu na $|A|$. Pre $|A| = 1$ je tvrdenie pravdivé. Teraz nech $|A| \geq 2$ a predpokladajme, že manželská podmienka je dostatočná pre existenciu párenia A, keď $|A|$ je menšie.

Ak $|N(S)| \geq |S| + 1$ pre každú neprázdnu množinu $S \subsetneq A$, vyberieme hranu $ab \in G$ a uvažujme graf $G' := G - \{a, b\}$. Potom každá neprázdna množina $S \subseteq A - \{a\}$ spĺňa

$$|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| - 1 \geq |S|,$$

takže podľa indukčného predpokladu G' obsahuje párenie $A - \{a\}$. Spolu s hranou ab toto prinesie párenie A v G.

Predpokladajme teraz, že A nemá neprázdnu vhodnú podmnožinu A' s $|B'| = |A'|$ pre $B' := N(A')$. Podľa indukčného predpokladu $G' := G[A' \cup B']$ obsahuje párenie A'. Ale $G - G'$ spĺňa manelskú podmienku tiež: pre ľubovoľnú množinu $S \subseteq A - A'$ s $|N_{G-G'}(S)| < |S|$ by sme mali $|N_G(S \cup A')| < |S \cup A'|$, naproti nášmu predpokladu. Opäť podľa indukcie $G - G'$ obsahuje párenie $A - A'$. Položením týchto dvoch párení dohromady dostaneme párenie A v G. □

Veta 1.1.3: Ak $|N(S)| \geq |S| - d$ pre každú množinu $S \in A$ a nejaké pevné $d \in \mathbb{N}$, potom G obsahuje párenie mohutnosti $|A| - d$.

Dôkaz: Pridáme d nových vrcholov k B a spojíme každý z nich so všetkými vrcholmi v A. Podľa manželskej podmienky nový graf obsahuje párenie A a aspoň $|A| - d$ hrán v tomto párení musia byť hrany z G. □

Veta 1.1.4: Ak G je k-regulárny s $k \geq 1$, potom G obsahuje 1-faktor.

Dôkaz: Ak G je k-regulárny, potom iste $|A| = |B|$; teda stačí ukázať podľa vety 1.1.2, že G obsahuje párenie A. Teraz každá množina $S \subseteq A$ je spojená s $N(S)$ celkovo $k|S|$ hranami a tieto sú medzi $k|N(S)|$ hranami z G incidentnými s $N(S)$. Preto $k|S| \leq k|N(S)|$, takže G spĺňa manželskú podmienku. □

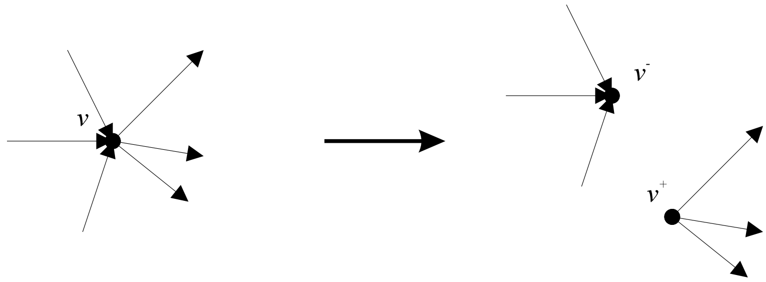
Napriek svojej zdanlivo úzkej formulácii sa manželská podmienka počíta medzi najčastejšie aplikované grafové teorémy ... aj v matematike, aj mimo nej. Často však pretvorenie problému v rámci bipartitného párenia vyžaduje nejakú rozumnú adaptáciu. Ako jednoduchý príklad teraz použijeme manželskú podmienku na odvodenie jedného z najvčasnejších výsledkov teórie grafov, výsledku, ktorého pôvodný dôkaz nie je až taký jednoduchý a určite nie krátky:

Dôsledok 1.1.5: (Petersen 1891)

Každý regulárny graf kladného párneho stupňa ($2k$-regulárny) obsahuje 2-faktor.

Dôkaz: Nech G je ľubovoľný $2k$-regulárny graf ($k \geq 1$) bez újmy na všeobecnosti súvislý. Podľa vety

0.8.1 G obsahuje Eulerovský ťah $v_0e_0\dots e_{k-1}v_k$, kde $v_k = v_0$. Zameníme každý vrchol v dvojicou (v^-, v^+) a každú hranu $e_i = v_iv_{i+1}$ hranou $v_i^+v_{i+1}^-$. Výsledný bipartitný graf G' je k-regulárny, takže podľa vety 1.1.4 obsahuje 1-faktor. Zbalením každej dvojice vrcholov (v^-, v^+) späť do jedného vrchola v premeníme tento 1-faktor z G' na 2-faktor G. □



obr.1.1.5. Rozdelenie vrcholov v dôkaze dôsledku 1.1.5.

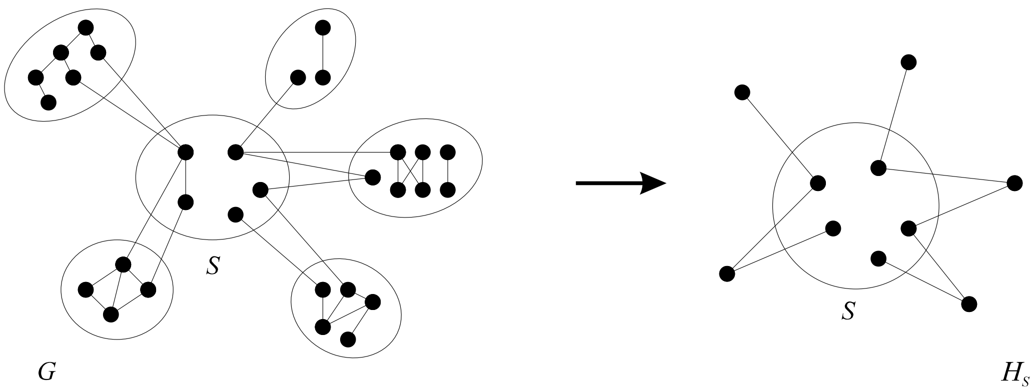
1.2 Párenie vo všeobecných grafoch

Pozn. prekladateľa: V celom (?) nasledujúcom odstavci budeme uvažovať netriviálne grafy s párnym počtom vrcholov.

Máme daný graf G. Označíme $\mathcal{C}_G$ množinu jeho komponentov, $c(G) = |\mathcal{C}_G|$ a $q(G)$ počet komponentov G nepárneho stupňa. Ak G obsahuje 1-faktor, potom určite

$$q(G - S) \leq |S| \qquad \text{pre všetky } S \subseteq V(G),$$

pretože každý nepárny komponent $G - S$ pošle faktorovú hranu do S.



obr.1.2.1. Tutteho podmienka $q(G - S) \leq |S|$ pre $q = 3$ a kontrahovaný graf H_S.

Opäť, táto nutná podmienka existencie 1-faktora je taktiež postačujúca. A nasleduje ďalšia klasika medzi včasnými teorémami teórie grafov:

Veta 1.2.1: (Tutte 1947) Graf G obsahuje 1-faktor práve vtedy, keď $q(G - S) \leq |S|$ pre všetky $S \subseteq V(G)$.

Namiesto vety 1.2.1 dokážeme nasledujúcu jemne silnejšiu verziu. Graf $G = (V, E)$ sa nazýva *faktorovo kritický*, ak $G \neq \emptyset$ a $G - v$ obsahuje 1-faktor pre každý vrchol $v \in G$. Potom G neobsahuje 1-faktor, lebo má nepárny rád. Množinu vrcholov $S \subseteq V$ nazveme *spáriteľnou s* $G - S$, ak (bipartitný[10]) graf H_S, ktorý vznikne z G kontrakciou komponentov $C \in \mathcal{C}_{G-S}$ do jediných vrcholov a odstránením všetkých hrán vnútri S obsahuje párenie S. (Formálne, H_S je graf s množinou vrcholov $S \cup \mathcal{C}_{G-S}$ a hrán $\{sC \mid \exists c \in C : sc \in E\}$).

[10]okrem "zakázaného" prípadu, že aj S aj $\mathcal{C}_{G-S}$ sú prázdne

Veta 1.2.2: Každý graf $G = (V, E)$ obsahuje množinu vrcholov S s nasledujúcimi dvomi vlastnosťami:

1. S je spáriteľná s $G - S$
2. každý komponent $G - S$ je faktorovo kritický

Keď je daná akákoľvek taká množina S, graf G obsahuje 1-faktor práve vtedy, keď $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$.

Pre ľubovoľné dané G tvrdenie Tutteho vety vyplýva ľahko z vyššieho výsledku. Samozrejme, podľa (i) a (ii) máme $|S| \leq |\mathcal{C}_{G-S}| = q(G - S)$ (pretože faktorovo kritické grafy majú nepárny rád); teda Tutteho podmienka $q(G - S) \leq |S|$ implikuje $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$ a existencia 1-faktora vyplýva z poslednej časti vety 1.2.2.

Dôkaz: Všimnime si, že posledné tvrdenie vety vyplýva naraz z tvrdení (i) a (ii): ak G obsahuje 1-faktor, máme $q(G - S) \leq |S|$ a odtiaľ $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$ ako vyššie; obrátene ak $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$, potom existencia 1-faktora vyplýva priamo z (i) a (ii).

Teraz dokážeme existenciu množiny S spĺňajúcej (i) a (ii). Aplikujeme indukciu na $|G|$. Pre $|G| = 0$ môžeme zobrať $S = \emptyset$. Teraz nech G je daný s $|G| > 0$ a predpokladajme, že tvrdenie platí pre grafy s menej vrcholmi.

Nech $d \in \mathbb{N}$ je minimálne také, že

$$q(G - T) \leq |T| + d \qquad \text{pre každú } T \subseteq V. \tag{1}$$

Potom existuje množina T pre ktorú rovnosť platí v (1): toto vyplýva z minimality d, ak $d > 0$ a z $q(G-\emptyset) \geq |\emptyset|+0$ ak $d = 0$. Nech S je taká množina T maximálnej mohutnosti a nech $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{G-S}$ a $H := H_S$.

Najprv ukážeme, že každý komponent $C \in \mathcal{C}$ je nepárny. Ak $|C|$ je párne, vyberieme vrchol $c \in C$ a nech $S' := S \cup \{c\}$ a $C' := C - c$. Potom C' má nepárny rád a teda má aspoň jeden nepárny komponent. Odtiaľ $q(G - S') \geq q(G - S) + 1$. Pretože $T := S$ spĺňa rovnosť v (1), dostaneme

$$q(G - S') \geq q(G - S) + 1 = |S| + d + 1 = |S'| + d,$$

čo je v spore s (1) aj s maximalitou S.

Nasledovne dokážeme tvrdenie (2), že každá $C \in \mathcal{C}$ je faktorovo kritická. Pripustime, že existuje $C \in \mathcal{C}$ a $c \in C$ také, že $C' := C - c$ neobsahuje 1-faktor. Podľa indukčného predpokladu (a skutočnosti, ako sme ukázali skôr, pre pevný G naša veta implikuje Tutteho teorému) existuje množina $T' \subseteq V(C')$ s

$$q(C' - T') > |T'|.$$

Pretože $|C|$ je nepárne a odtiaľ $|C'|$ je párne, čísla $q(C' - T')$ a $|T'|$ sú obe buď párne alebo obe nepárne, takže sa nemôžu líšiť presne o 1. Preto môžeme zostriť vyššiu nerovnosť na

$$q(C' - T') \geq |T'| + 2.$$

Pre $T := S \cup \{c\} \cup T'$ teda dostaneme

$$\begin{aligned} q(G - T) &= q(G - S) - 1 + q(C' - T') \\ &\geq |S| + d - 1 + |T'| + 2 \\ &= |T| + d, \end{aligned}$$

opať odporujúce aj (1) alebo maximalite S.

Ostáva ukázať, že S je spáriteľné s $G - S$. Ak $S = \emptyset$, je to triviálne, takže poredpokladajme, že $S \neq \emptyset$. Pretože $T = S$ spĺňa rovnosť v (1), toto implikuje, že ani $\mathcal{C}$ je neprázdne. Teraz aplikujeme vetu 1.1.3 na H, ale 'spätne', tzn. s $A := \mathcal{C}$. Keď je dané $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, položíme $S' := N_H(\mathcal{C}') \subseteq S$. Pretože každá $C \in \mathcal{C}'$ je nepárny komponent aj v $G - S'$, dostávame

$$|N_H(\mathcal{C}')| = |S'| \geq_{(1)} q(G - S') - d \geq |\mathcal{C}'| - d.$$

Podľa vety 1.1.3 potom H obsahuje párenie mohutnosti

$$|\mathcal{C}| - d = q(G - S) - d =_{(1)} |S|,$$

ktoré je potom párením S. $\square$

Teraz uvažujme ešte raz množinu S z vety 1.2.2, spolu s ľubovoľným párením M v G. Ako predtým, píšeme $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{G-S}$. Označme k_S počet hrán v M s aspoň jedným koncom v $G-S$. Pretože každá $C \in \mathcal{C}$ je nepárne, aspoň jeden z jej vrcholov nie je incidentný s hranou druhého typu. Preto každé párenie M spĺňa

$$k_S \leq |S| \qquad \text{a} \qquad k_C \leq \frac{1}{2}(|V| - |S| - |\mathcal{C}|). \tag{1}$$

Okrem toho, G obsahuje párenie M_0 s rovnosťou v oboch prípadoch: najprv vyberieme $|S|$ hrán medzi S a $\bigcup \mathcal{C}$ podľa (i) a potom použijeme (2), aby sme našli vhodnú množinu $\frac{1}{2}(|C|-1)$ hrán v každom komponente $C \in \mathcal{C}$. Toto párenie M_0 potom obsahuje presne

$$|M_0| = |S| + \frac{1}{2}(|V| - |S| - |\mathcal{C}|) \tag{2}$$

hrán.

Teraz (1) a (2) spolu implikujú, že každé párenie M s maximálnou mohutnosťou spĺňa obe časti (1) s rovnosťou: podľa $|M| \geq |M_0|$ a (2), M má najmenej $|S| + \frac{1}{2}(|V| - |S| - |\mathcal{C}|)$ hrán, čo implikuje podľa (1), že ani jedna z nerovností v (1) nemôže byť ostrá. Ale rovnosť v (1) (in turn) implikuje, že M má štruktúru popísanú vyššie: podľa $k_S = |S|$ každý vrchol $s \in S$ je koncom hrany $st \in M$ s $t \in G-S$ a podľa $k_\mathcal{C} = \frac{1}{2}(|V| - |S| - |\mathcal{C}|)$ presne $\frac{1}{2}(|C|-1)$ hrán z M leží v C pre každú $C \in \mathcal{C}$. Nakoniec, pretože tieto druhé hrany sa vyhýbajú iba jednému vrcholu v každom C, konce t hrán st (vyššie) ležia v rôznych komponentoch C pre rozdielne s.

Zjavne technická teoréma 1.2.2 teda skrýva hojnosť štrukturálnej informácie: obsahuje podstatu detailného popisu všetkých párení s maximálnou mohutnosťou vo všetkých grafoch[11].

Na uzavretie tejto časti, použijeme vetu 1.2.2 na získanie krákeho dôkazu ďalšieho výsledku zo skorých dní teórie grafov:

Veta 1.2.3: (Petersen 1891)
Každý kubický graf bez mostov obsahuje 1-faktor.

Dôkaz: Nech G je kubický graf bez mostov. Vyberme $S \subseteq V(G)$ ako vo vete 1.2.2 a položíme $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{G-S}$. Podľa vety 1.2.2 dostávame $|S| \leq |\mathcal{C}|$ a každý komponent $C \in \mathcal{C}$ je nepárny.

Ak k je počet $C-S$ hrán pre nejaké $C \in \mathcal{C}$, potom C má $\frac{1}{2}(3|C|-k)$ hrán. Odtiaľ k je nepárne, takže $k \geq 3$ pretože G neobsahuje most.

Teda máme celkovo najmenej $3|\mathcal{C}|$ hrán medzi S a $G-S$. Na druhej strane, pretože každý vrchol v S má stupeň 3, existuje najviac $3|S|$ takých hrán. Odtiaľ $|\mathcal{C}| \leq |S|$. Spolu s nerovnosťou z prvého odstavca dostaneme $|S| = |\mathcal{C}|$, takže G má 1-faktor podľa vety 1.2.2. $\square$

[11] Gallai-Edmondsova teoréma

2. Súvislosť

Naša definícia k-súvislosti uvedená v kapitole 0.4 bola tak trocha intuitívna. Nepovedala nám veľa o 'spojeniach' v k-súvislom grafe: všetko, čo povedala, je to, že potrebujeme aspoň k vrcholov, aby sme znesúvislili (rozpojili) graf. Nasledujúca definícia — ktorá mimochodom implikuje tú skoršiu — by mohla byť viac pozitívna: 'graf je *k-súvislý*, ak ľubovoľné dva jeho vrcholy môžu byť spojené k nezávislými cestami'.

Je to jeden z klasických výsledkov teórie grafov, že tieto dve definície sú fakticky ekvivalentné, že sú duálnym aspektom tej istej vlastnosti. Budeme to študovať ako Mengerovu vetu v časti 2.3.

Predtým, v častiach 2.1 a 2.2 budeme skúmať štruktúru 2-súvislých a 3-súvislých grafov. Pre tieto malé hodnoty k je stále možné dať jednoduchý všeobecný popis ako tieto grafy vyzerajú.

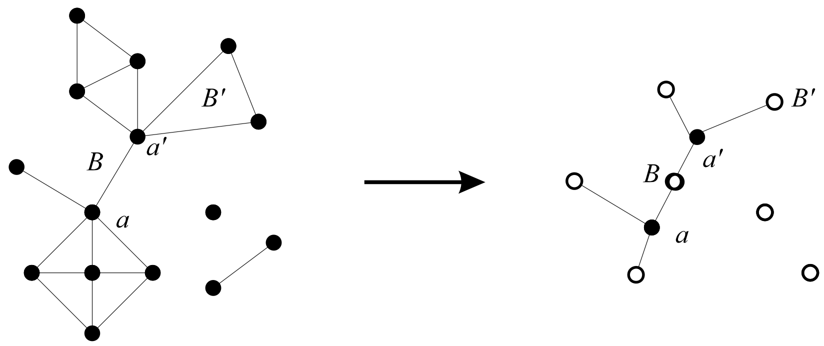
V ostávajúcich častiach tejto kapitoly sa pozrieme na ostatné predstavy o súvislosti, novšie ako klasické, ale o nič menej podstatné: na počet H-ciest v grafe pre daný podgraf H, na počet hranovo-disjunktných kostier a na disjunktné cesty spájajúce niekoľko daných dvojíc vrcholov.

2.1 2-súvislé grafy a podgrafy

Maximálny súvislý podgraf bez artikulácie sa nazýva *blok*. Teda každý blok grafu G je buď maximálny 2-súvislý podgraf alebo most alebo izolovaný vrchol. Obrátene, každý taký podgraf je blok. Podľa svojej maximality sa bloky G prekrývajú v najviac jednom vrchole, ktorý je potom artikuláciou G. Odtiaľ, každá hrana G leží v samostatnom bloku a G je zjednotením svojich blokov.

V istom zmysle sú bloky 2-súvislými analógiami komponentov, maximálnych 1-súvislých podgrafov grafu. Kým štruktúra G je určená plne tým o svojich komponentoch, je tu ešte čosi viac, než štruktúra všetkých jeho blokov: pretože bloky nemusia byť disjunktné, spôsob, akým sa pretínajú, definuje ďalšiu štruktúru, čo nám dáva hrubý obraz o G, akoby sme sa naň pozerali z diaľky.

Nasledujúca lema opisuje štruktúru G ako tvoreného jeho blokmi. Nech A označuje množinu artikulácií G a B množinu jeho blokov. Dostávame prirodzený bipartitný graf na $A \cup B$ tvorený hranami aB, kde $a \in B$. Tento *blokový graf* grafu G je zobrazený na obrázku 2.1.1.



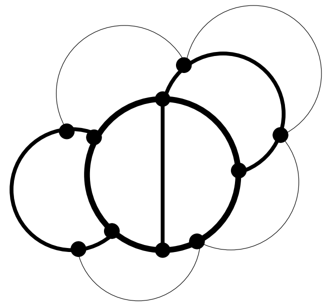
obr.2.1.1. Graf a jeho blokový graf.

Lema 2.1.1: Blokový graf súvislého grafu je strom.

Lema 2.1.1 redukuje štruktúru daného grafu na graf z jeho blokov. Takže čo môžeme povedať o blokoch samotných ? Nasledujúca lema ukazuje jednoduchú metódu, ktorou (v princípe) môže byť zoznam všetkých 2-súvislých grafov zostavený:

Lema 2.1.2: Graf je 2-súvislý práve vtedy, keď môže byť skonštruovaný z kružnice H postupným pridávaním H-ciest k už skonštruovanému grafu H (obr. 2.1.2).

Dôkaz: Je jasné, že každý graf skonštruovaný podľa lemy je 2-súvislý. Obrátene, nech G je 2-súvislý graf. Potom G obsahuje kružnicu a odtiaľ obsahuje maximálny podgraf H skonštruovateľný podľa lemy. Pretože ľubovoľná hrana $xy \in E(G) - E(H)$ s $x, y \in H$ by definovala H-cestu, H je indukovaný podgraf G. Teda ak $H \neq G$, potom podľa súvislosti G existuje hrana vw, kde $v \in G - H$ a $w \in H$. Keď G je 2-súvislý, $G - w$ obsahuje $v - H$ cestu P. Potom wvP je H-cesta v G a $H \cup wvp$ je skonštruovateľný podgraf G väčší ako H, čo je spor s maximalitou H. $\square$



obr.2.1.2. Konštrukcia 2-súvislých grafov.

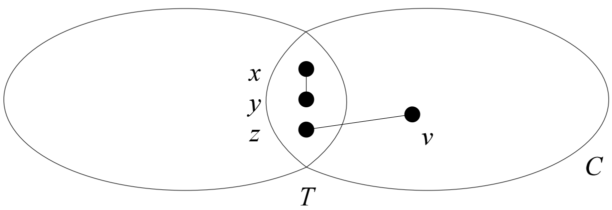
2.2 Štruktúra 3-súvislých grafov

Začneme túto časť s analógiou lemy 2.1.2 pre 3-súvislosť: naša prvá veta popisuje, ako každý 3-súvislý graf môže byť získaný z K_4 postupom elementárnych operácií zachovávajúcich 3-súvislosť. Potom dokážeme hlbší výsledok Tutteho vety o algebraickej štruktúre cyklového priestoru 3-súvislých grafov; toto bude hrať významnú úlohu opäť v časti 3.5 (v dôkaze vety 3.5.2).

Lema 2.2.1: Ak G je 3-súvislý a $|G| > 4$, potom G obsahuje hranu e takú, že G/e je opäť 3-súvislý.

Dôkaz: Predpokladajme, že neexistuje taká hrana e. Potom pre každú hranu $xy \in G$ graf G/xy obsahuje oddeľujúcu množinu S s aspoň dvomi vrcholmi. Pretože $\varkappa(G) \geq 3$, kontrahovaný vrchol v_{xy} z G/xy (pozri časť 0.7) leží v S a $|S| = 2$, tzn. G obsahuje vrchol $z \notin \{x, y\}$ taký, že $\{v_{xy}, z\}$ oddeľuje G/xy. Potom ľubovoľné dva vrcholy oddelené množinou $\{v_{xy}, z\}$ v G/xy sú oddelené v G množinou $T := \{x, y, z\}$. Pretože žiadna vlastná podmnožina T neoddeľuje G, každý vrchol v T má suseda v každom komponente C z $G - T$.

Vyberieme hranu xy, vrchol z a komponent C taký, že $|C|$ je minimálny a vyberieme suseda v vrchola z v C (obr.2.2.1). Podľa predpokladu, G/zv opäť nie je 3-súvislý, takže opäť existuje vrchol w taký, že $\{z, v, w\}$ oddeľuje G a ako predtým, každý vrchol v $\{z, v, w\}$ má suseda v každom komponente z $G - \{z, v, w\}$.



obr.2.2.1. Oddeľujúce vrcholy v dôkaze lemy 2.2.1.

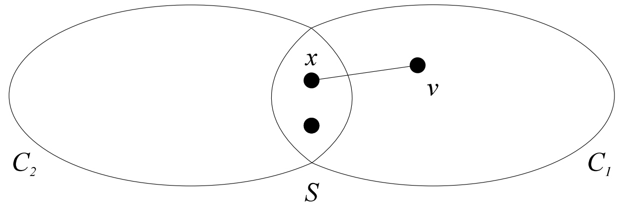
Ako x a y sú susedné, $G - \{z, v, w\}$ obsahuje komponent D taký, že $D \cap \{x, y\} = \emptyset$. Potom každý sused vrchola v v D leží v C (podľa $v \in C$), takže $D \cap C \neq \emptyset$ a odtiaľ $D \subsetneq C$ podľa voľby D. Toto je v spore s voľbou xy, z a C. $\square$

Veta 2.2.2: Graf je 3-súvislý práve vtedy, keď existuje postupnosť $G_0, \ldots G_n$ grafov s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. $G_0 = K_4$ a $G_n = G$
2. G_{i+1} obsahuje hranu xy s $d(x), d(y) \geq 3$ a $G_i = G_{i+1}/xy$ pre každé $i < n$.

Dôkaz: Ak G je 3-súvislý, postupnosť z vety existuje podľa lemy 2.2.1. Všimnime si, že všetky grafy v tejto postupnosti sú 3-súvislé.

Obrátene, nech $G_0, \dots, G_n$ je postupnosť grafov z vety. Ukážeme, že ak $G_i = G_{i+1}/xy$ je 3-súvislý, potom aj G_{i+1} je 3-súvislý, pre každé $i < n$. Predpokladajme, že nie je ... nech S je oddeľujúca množina s aspoň 2 vrcholmi v G_{i+1} a nech C_1, C_2 sú dva komponenty $G_{i+1} - S$. Keďže x a y sú susedné, môžeme predpokladať, že $\{x, y\} \cap V(C_1) = \emptyset$ (obr.2.2.2). Potom C_2 neobsahuje ani obsa vrcholy x, y ani vrchol $v \notin \{x, y\}$: inak by v_{xy} alebo v boli oddelené od C_1 v G_i najviac dvomi vrcholmi, čo je spor.



obr.2.2.2. Pozícia hrany $xy \in G_{i+1}$ v dôkaze vety 2.2.2.

Ale teraz C_2 obsahuje iba jeden vrchol: buď x alebo y. Toto je v spore s našim predpokladom, že $d(x), d(y) \geq 3$.
□

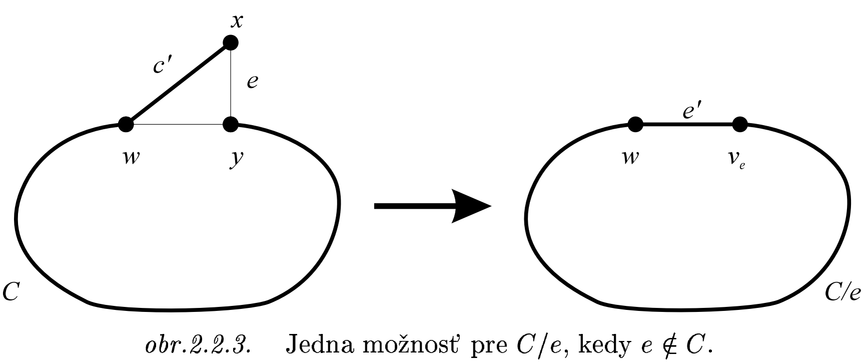
Veta 2.2.2 je podstatným jadrom Tutteho, známym ako jeho <u>*kolesová veta*</u> (wheel theorem).[12] Ako lema 2.1.2 pre 2-súvislé grafy, aj 2.2.2 nám umožňuje skonštruovať všetky 3-súvislé grafy jednoduchým induktívnym procesom závislým oba na lokálnej informácii: začínajúc z K_4 vyberieme vrchol v v už skonštruovanom grafe, rozdelíme ho na dva susedné vrcholy v', v'' a spojíme ich s pôvodnými susedmi v ako sa nám len chce — s tým, že v' aj v'' získajú každý aspoň 3 incidentné hrany a že každý pôvodný sused v sa stane susedným s jedným z dvoch nových vrcholov.

Veta 2.2.3: (Tutte 1963)
Cyklový priestor 3-súvislého grafy je generovaný jeho neoddeľujúcimi indukovanými kružnicami.

Dôkaz: Aplikujeme indukciu na $|G|$. V K_4 je každá kružnica trojuholníkom alebo (pre hrany) symetrickou diferenciou trojuholníkov. Ako sú obsa tieto indukované a neoddeľujúce, tvrdenie platí pre $|G| = 4$.

Pre indukčný krok nech $e = xy$ je hrana z G pre ktorú $G' := G/e$ je opäť 3-súvislý; viď lema 2.2.1. Potom každá hrana $e' \in E(G') - E(G)$ je tvaru $e' = v_e w$, kde aspoň jedna z dvoch hrán xw a yw leží v G. Vyberieme jednu, ktorá leží v G (buď xw alebo yw) a identifikujeme ju <u>notationally</u> s hranou e'. Týmto spôsobom môžeme <u>posudzovať</u> (regard) $E(G')$ ako podmnožinu $E(G)$ a $\mathcal{E}(G')$ ako podpriestor $\mathcal{E}(G)$; <u>in particular</u> všetky vektorové operácie sa budú konať jednoznačne v $\mathcal{E}(G)$.

Dovoľme si uvažovať indukovanú kružnicu $C \subseteq G$. Ak $e \in C$ a $C = C_3$, nazveme C *fundamentálnym trojuholníkom*; potom $C/e = K_2$. Ak $e \in C$ ale $C \neq C_3$, potom C/e je kružnica v G'. Nakoniec ak $e \notin C$, potom najviac jeden z x, y leží na C (inak e bude tetiva), takže vrcholy C v poradí tiež tvoria kružnicu v G' ak zameníme x alebo y vrcholom v_e ako bude potrebné; táto kružnica tiež bude označená C/e. Teda kým (tak dlho, ako) C nebude fundamentálnym trojuholníkom, C/e bude vždy označovať jedinečnú kružnicu v G'. Všimnime si, že v prípade $e \notin C$, hranová množina z C/e, keď sa na ňu pozrieme ako na podmnožinu $E(G)$, sa nepotrebuje zhodovať s $E(C)$: hrana $yw \in E(C)$ napr. dáva <u>pôvod</u> (rise) hrane $v_e w \in E(C/e)$, ale ak táto hrana bola určená radšej s xw ako s yw, potom $E(C/e)$ definuje $x - y$ cestu v G, nie kružnicu C (obr.2.2.3).



obr.2.2.3. Jedna možnosť pre C/e, kedy $e \notin C$.

[12] Grafy tvaru $C_n * K_1$ sa nazývajú *kolesá*; teda K_4 je najmenšie koleso.

Hovorme o neoddeľujúcich indukovaných kružniciach v G alebo G' ako o *základných* cykloch. Prvok $\mathcal{C}(G)$ nazveme *dobrý*, ak je lineárnou kombináciou základných cyklov v G. Teda chceme ukázať, že každý prvok $\mathcal{C}(G)$ je dobrý.

Začneme dôkazom troch pomocných tvrdení.

(1) Každý fundamentálny trojuholník je základným cyklom v G.

Fundamentálny trojuholník, povedzme $wxyw$ je iste indukovaný v G. Ak oddelil G, potom $\{v_w, w\}$ by oddeľovala G', čo je v spore s voľbou e. Toto dokazuje (1).

(2) Ak $C \subseteq G$ je indukovaná kružnica ale nie je fundamentálny trojuholník, potom $C + C/e + D \in \{\emptyset, \{e\}\}$ pre nejakú dobrú $D \in \mathcal{C}(G)$. (2)

Podstata (2) je, že in terms of 'generatability' C a C/e sa líšia iba trochu: po pridaní prípustného error term D, by at most the edge e.

NEMOŽNO DOPREKLADAŤ ... SLABÁ SLOVNÁ ZÁSOBA.

2.3 Mengerova veta

Nasledujúca klasická Mengerova veta je jedným zo základných kameňov teórie grafov. Uvedieme dva dôkazy[13].

Veta 2.3.1: (Menger 1927) Nech $G = (V, E)$ je graf a $A, B \subseteq V$. Potom minimálny počet vrcholov oddeľujúcich A od B v G je rovný maximálnemu počtu disjunktných $A - B$ ciest v G.

Dôkaz: Nech k je minimálny počet vrcholov, oddeľujúcich A a B v G. Potom iste nemôže existovať viac ako k disjunktných $A - B$ ciest. Indukciou na $|G| + \|G\|$ ukážeme, že k takýchto ciest existuje.

Pre $k \leq 1$ (a teda $|G| + \|G\|$ ohraničené) tvrdenie triviálne platí.

Nech $k \geq 2$ a nech tvrdenie platí pre všetky grafy s menej vrcholmi alebo menej hranami. Nech X je množina k prvkov, oddeľujúca A od B. Ak $\exists x \in A \cap B$, tak $X - x$ je minimálna množina, oddeľujúca $A - x$ od $B - x$ v $G - x$ a teda podľa indukčného predpokladu existuje v $G - x$ $k - 1$ disjunktných $(A - x) - (B - x)$ ciest. V G potom spoločne s triviálnou cestou $\{x\}$ existuje požadovaných k disjunktných $A - B$ ciest. Teraz môžeme predpokladať, že

$$A \cap B = \emptyset \tag{1}$$

Najprv skonštruujeme požadované cesty pre prípad, že A a B sú oddelené množinou $X \subseteq V$, kde $|X| = k$ a $X \neq A, B$. Nech C_A je zjednotenie všetkých komponentov z $G - X$, ktoré majú s A nepázdny prienik; všimnime si, že $C_A \neq \emptyset$, pretože $|A| \geq k = |X|$ ale $A \neq X$. Podgraf C_B definovaný podobne tiež nie je prázdny a $C_A \cap C_B = \emptyset$. Označme $G_A := [C_A \cup X]$ a $G_B := [C_B \cup X]$. Pretože každá $A - B$ cesta v G obsahuje $A - X$ cestu v G_A, nemôžeme oddeliť A od X v G_A menej ako k vrcholmi. Teda podľa indukčného predpokladu G_A obsahuje k disjunktných $A - X$ ciest. Rovnako, v G_B existuje k disjunktných $X - B$ ciest. Keď $|X| = k$, môžeme zložiť tieto cesty dokopy a vyrobiť k disjunktných $A - B$ ciest.

Vo všeobecnom prípade, nech P je ľubovoľná $A - B$ cesta v G. Podľa (1) P obsahuje hranu ab, kde $a \in B$ a $b \in A$. Nech Y je množina čo najmenej vrcholov oddeľujúcich A od B v grafe $G - ab$. Potom množiny $Y_a := Y \cup \{a\}$ a $Y_b := Y \cup \{b\}$ oddeľujú A od B v grafe G a podľa definície k dostaneme

$$|Y_a|, |Y_b| \geq k$$

Ak platí rovnosť, môžeme predpokladať podľa už dokázaného prípadu, že $\{Y_a, Y_b\} \subseteq \{A, B\}$, takže $\{Y_a, Y_b\} = \{A, B\}$, pretože $a \notin B$ a $b \notin A$. Teda $Y = A \cap B$. Pretože $|Y| \geq k - 1 \geq 1$, dostávame spor s (1).

[13] Ďalší dôkaz bude vyplývať ako ľahké cvičenie z vety o tokoch v sieťach v kapitole 5.

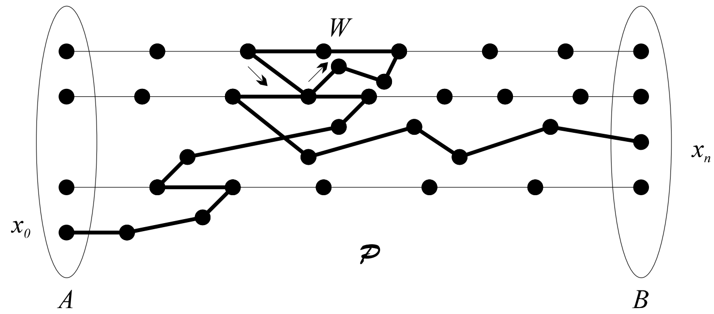
Z toho dôvodu máme $|Y_a| > k$ alebo $|Y_b| > k$, a preto $|Y| \geq k$. Podľa indukčného predpokladu potom existuje k disjunktných $A - B$ ciest nakoniec aj v $G - ab \subseteq G$. □

Použitá na bipartitné grafy sa Mengerova veta špecializuje na tvrdenie Königovej vety (1.1.1). Pre náš druhý dôkaz teraz prispôsobíme dôkaz Königovej vety s alternujúcimi cestami k všeobecnejšiemu setup vety 2.3.1. Nech sú opäť dané G, A, B a nech $\mathcal{P}$ je množina disjunktných $A - B$ ciest v G. Píšeme

$$\begin{aligned} V[\mathcal{P}] &:= \bigcup\{V(\mathcal{P}) \mid P \in \mathcal{P}\} \\ E[\mathcal{P}] &:= \bigcup\{E(\mathcal{P}) \mid P \in \mathcal{P}\}. \end{aligned}$$

Sled $W = x_0 e_0 x_1 e_1 \dots e_{n-1} x_n$ v G s $e_i \neq e_j$ pre $i \neq j$ je povedzme *alternujci* vzhľadom na $\mathcal{P}$, ak nasledovné tri podmienky sú splnené pre všetky $i < n$ (obr.2.3.3):

1. ak $e_i = e \in E[\mathcal{P}]$, potom W traverzuje hranu e spätne, tzn. $x_{i+1} \in P\dot{x}$ pre nejaké $P \in \mathcal{P}$
2. ak $x_i = x_j$, kde $i \neq j$, potom $x_i \in V[\mathcal{P}]$
3. ak $x_i \in V[\mathcal{P}]$, potom $\{e_{i-1}, e_i\} \cap E[\mathcal{P}] \neq \emptyset$.[14]



obr.2.3.3. Alternujúca cesta z A do B.

Uvažujme sled $W = x_0 e_0 x_1 e_1 \dots e_{n-1} x_n$ z $A - V[\mathcal{P}]$ do $B - V[\mathcal{P}]$ alternujúci vzhľadom na $\mathcal{P}$. Podľa (ii) sa každý vrchol mimo $V[\mathcal{P}]$ sa vyskytuje najviac raz na W. Pretože hrany e_i z W sú navzájom rôzne, (iii) implikuje, že ľubovoľný vrchol v $V[\mathcal{P}]$ sa vyskytuje najviac dvakrát na W. Toto sa môže stať v dvoch prípadoch: ak $x_i = x_j$ s $o < i < j < n$, povedzme, potom

$$\begin{aligned} \text{buď } e_{i-1}, e_j \in E[\mathcal{P}] \quad &\text{a} \quad e_i, e_{j-1} \notin E[\mathcal{P}] \\ \text{alebo } e_i, e_{j-1} \in E[\mathcal{P}] \quad &\text{a} \quad e_{i-1}, e_j \notin E[\mathcal{P}]. \end{aligned}$$

Lema 2.3.2: Ak taký sled W existuje, potom G obsahuje $|\mathcal{P}| + 1$ disjunktných $A - B$ ciest.

Dôkaz: Nech H je graf na $V[\mathcal{P}] \cup \{x_0, \dots, x_n\}$, ktorého hranová množina je symetrickou diferenciou $E[\mathcal{P}]$ s $\{w_0, \dots, e_{n-1}\}$. V H majú konce ciest v $\mathcal{P}$ a z W stupeň 1 (alebo 0, ak je cesta alebo W triviálna) a všetky ostatné vrcholy majú stupeň 0 alebo 2. Pre každý z $|\mathcal{P}| + 1$ vrcholov $a \in (A \cap V[\mathcal{P}]) \cup \{x_0\}$, preto komponent z H obsahujúci a je cestou povedzme $P = v_0 \dots v_k$, ktorá začína v a a končí v A alebo B. Použijúc podmienky (i) a (iii) ľahko možno ukázať indukciou na $i = 0, \dots, k-1$, že P traverzuje každú zo svojich hrán $e = v_i v_{i+1}$ v doprednom smere vzhľadom na $\mathcal{P}$ alebo W. (Formálne: ak $e \in P'$ s $P' \in \mathcal{P}$, potom $v_i \in P' \dot{v}_{i+1}$; ak $e = e_j \in W$, potom $v_i = x_j$ a $v_{i+1} = x_{j+1}$.) Odtiaľ, P končí v B. Keďže dostaneme $|\mathcal{P}| + 1$ disjunktných takých ciest P, toto ukončí dôkaz. □

Dôkaz: (Druhý dôkaz Mengerovej vety)

Nech $\mathcal{P}$ je množina tak veľa disjunktných $A - B$ ciest v G ako je možné. Pokiaľ nebude povedané inak, všetky uvažované alternujúce sledy sú alternujúce vzhľadom na $\mathcal{P}$. Položíme

$$A_1 := A \cap V[\mathcal{P}] \qquad \text{a} \qquad A_2 := A - A_1$$

[14]Pre $i = 0$ nech $\{e_{i-1}, e_i\} := \{e_0\}$.

a

$$B_1 := B \cap V[\mathcal{P}] \qquad \text{a} \qquad B_2 := B - B_1.$$

Pre každú cestu $P \in \mathcal{P}$ nech x_P je posledný vrchol P, ktorý leží na nejakom alternujúcom slede začínajúcom v A_2; ak neexistuje žiadny taký vrchol, nech x_P prvým vrcholom P. Iste má množina

$$X := \{x_P \mid P \in \mathcal{P}\}$$

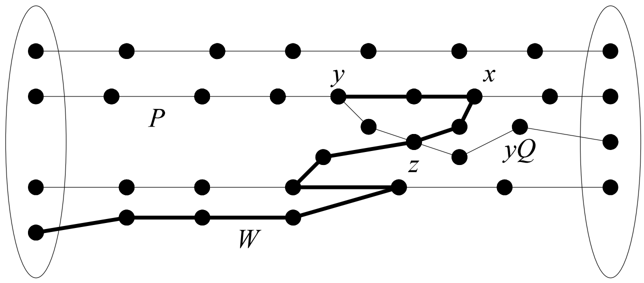
mohutnosť $|\mathcal{P}|$; teda stačí ukázať, že X oddeľuje A od B.

Nech Q je ľubovoľná $A - B$ cesta v G; ukážeme, že Q sa pretína s X.

Predpokladajme, že nepretína. Podľa maximality $\mathcal{P}$ sa cesta Q pretína s $V[\mathcal{P}]$. Pretože $A - V[\mathcal{P}]$ cesta v Q je triviálne alternujúcim sledom, Q sa tiež pretína s vrcholovou množinou $V[\mathcal{P}']$ grafu

$$\mathcal{P}' := \{Px_p \mid P \in \mathcal{P}\};$$

nech y je posledný vrchol Q v $V[\mathcal{P}']$, nech P je cesta v $\mathcal{P}$ obsahujúca y a nech $x := x_P$. Nakoniec, nech W je alternujúci sled z A_2 do x, ako v definícii x_P. Podľa predpokladu, Q sa vyhýba X a teda aj x, takže $y \in P\dot{x}$ a $W \cup xPyQ$ je sled z A_2 do B (obr.2.3.4). Ak je tento sled alternujúci a končí v B_2, sme doma: potom G obsahuje $|\mathcal{P}|_1$ disjunktných $A - B$ ciest podľa lemy 2.3.2, čo je v spore s maximalitou $\mathcal{P}$.



obr.2.3.4. Alternujúce sledy v druhom dôkaze Mengerovej vety.

Ako by mohol $W \cup xPyQ$ nebyť alternujúcim sledom ? Pre začiatok, W by už mohol použiť hranu z xPy. Ale ak x' je prvý vrchol W na $xP\dot{y}$, potom $W' := Wx'Py$ je alternujúci sled z A_2 do y. (Pod Wx' myslíme počiatočný segment W končiaci na prvom výskyte x' na W; odtadiaľ dopredu W' sleduje P späť do y.) Dokonca aj náš nový sled $W'yQ$ ešte neptrebuje byť alternujúcim: W' stále môže pretínať $\dot{y}Q$. Podľa definície $\mathcal{P}'$ a W a voľby y na Q dostaneme

$$V(W') \cap V[\mathcal{P}] \subseteq V[\mathcal{P}'] \qquad \text{a} \qquad V(\dot{y}Q) \cap V[\mathcal{P}'] = \emptyset.$$

A teda W' a $\dot{y}Q$ sa môžu pretnúť iba mimo $\mathcal{P}$.

Ak W' sa predsa pretne $\dot{y}Q$, nech z je prvý vrchol W na $\dot{y}Q$. Ako z leží mimo $V[\mathcal{P}]$, objaví sa iba raz na W' (podmienka (ii)) a nech $W'' := W'zQ$. Na druhej strane ak $W' \cap \dot{y}Q = \emptyset$, položíme $W'' := W' \cap yQ$. V oboch prípadoch W'' je alternujúci vzhľadom na $\mathcal{P}'$, pretože W' je tiež a $\dot{y}Q$ sa vyhýba $V[\mathcal{P}']$. (Všimnime si, že W'' spĺňa podmienku (iii) na y v druhom prípade, kým v prvom prípade nie je (iii) aplikovateľná na z.) Podľa definície $\mathcal{P}'$ sa preto W'' vyhýba $V[\mathcal{P}] - V[\mathcal{P}']$; in particular, $V(\dot{y}Q) \cap V[\mathcal{P}] = \emptyset$. Teda W'' je tiež alternujúci vzhľadom na $\mathcal{P}$ a končí v B_2. (Všimnime si, že y nemôže byť posledným vrcholom W'', pretože $y \in P\dot{x}$ a teda aj $y \notin B$.) Ďalej ešte W'' začína v A_2, pretože aj W sa začína v A_2. Preto môžeme použiť lemu 2.3.2 na získanie požadovaného sporu s maximalitou $\mathcal{P}$. □

Množina $a - B$ ciest sa nazýva $a - B$ *vejár*, ak ľubovoľné dve z tých ciest majú spoločný len vrchol a.

Lema 2.3.3: Pre $B \subseteq V$ a $a \in V - B$ je minimálny počet vrcholov rôznych od a oddeľujúcich a od B v G rovný maximálnemu počtu ciest vytvárajúcich $a - B$ vejár v G.

Dôkaz: Použijeme vetu 2.3.1 s $A := N(a)$. □

Lema 2.3.4: Nech a a b sú dva rôzne vrcholy G.

1. Ak $ab \notin E$, potom minimálny počet vrcholov rôznych od a aj b v G je rovný maximálnemu počet nezávislých $a - b$ ciest v G.

2. Minimálny počet hrán oddeľujúcich a od b v G je rovný maximálnemu počtu hranovo-disjunktných $a - b$ ciest v G.

Dôkaz:

1. Použijeme vetu 2.3.1 s $A := N(a)$ a $B := N(b)$.

2. Použijeme vetu 2.3.1 na hranový graf $L(G)$ s $A := N(a)$ a $B := N(b)$. □

Veta 2.3.5: (Globálna verzia Mengerovej vety; Whitneyho veta)

1. Graf je k-súvislý práve vtedy, keď obsahuje k nezávislých ciest medzi ľubovoľnými dvomi vrcholmi.

2. Graf je hranovo k-súvislý práve vtedy, keď obsahuje k hranovo-disjunktných ciest medzi ľubovoľnými dvomi vrcholmi.

Dôkaz: (i) Ak graf G obsahuje k nezávislých ciest medzi ľubovoľnými dvomi vrcholmi, potom $|G| > k$ a G nemôže byť oddelený menej ako k vrcholmi; teda G je k-súvislý.

Obrátene, uvažujme, že G je k-súvislý (a in particular má viac, ako k vrcholov) ale obsahuje vrcholy a, b nespojené k nezávislými cestami. Podľa lemy 2.3.4 (i) sú a a b susedné; nech $G' := G - ab$. Potom G' obsahuje najviac $k - 2$ nezávislých $a - b$ ciest. Podľa lemy 2.3.4 (i) môžeme oddeliť a a b v G' množinou X s najviac $k - 2$ vrcholmi. Keďže $|G| > K$, existuje aspoň jeden ďalší vrchol $v \notin X \cup \{a, b\}$ v G. Teraz X oddeľuje v v G' od buď a alebo b — povedzme, že od a. Ale potom $X \cup \{b\}$ je množina najviac $k - 1$ vrcholov oddeľujúca v od a v G, čo je v spore s k-súvislosťou G.

(ii) vyplýva priamo z lemy 2.3.4 (ii). □

2.4 Maderova veta

V analógii s Mengerovou vetou môžeme uvažovať nasledovnú otázku: máme daný graf G s infukovaným podgrafom H ... koľko nezávislých H-ciest možno až nájsť v G ?

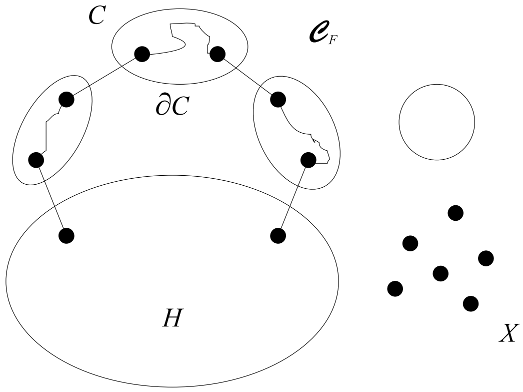
V tejto časti uvedieme bez dôkazu Maderovu vetu, ktorá rieši zmienený problém v štýle podobnom Mengerovej vete. Opäť, veta hovorí, že horná hranica počtu takých ciest, ktoré vzniknú prirodzene z veľkosti určitých oddeľovačov, je iste dosiahnutá nejakou vhodnou množinou ciest.

Ako vyzerá taká horná hranica ? Iste, ak $X \subseteq V(G - H)$ a $G \subseteq E(G - H)$ sú také, že každá H-cesta v G obsahuje vrchol alebo hranu v $X \cup F$, potom G nemôže obsahovať viac, než $|X \cup F|$ nezávislých H-ciest. Teda aj najmenšia mohutnosť takej množiny $X \cup F$ je prvou hornou hranicou pre maximálny počet nezávislých H-ciest. (Všimnime si, že každá H-cesta pretína $G - H$, pretože H je indukovaný v G a hrany H sa nerátajú ako H-cesty.)

Hoci to môže vyzerať nepravdepodobne, táto hranica stále môže byť vylepšovaná. Pre začiatok predpokladajme, že žiadna hrana v F nemá koniec v X: inak by táto hrana nebola potrebná v oddeľovači. Nech $Y := V(G - H) - X$ a označme $\mathcal{C}_F$ množinu komponentov grafu (Y, F). Pretože každá H-cesta vyhýbajúca sa X obsahuje hranu z F, má aspoň dva vrcholy v $\partial_{G-X} C$ pre nejaké $C \in \mathcal{C}_F$ (obr.2.4.1). Počet nezávislých H-ciest v G je preto zhora ohraničený

$$M_G(H) := \min \left(|X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \frac{1}{2} |\partial_{G-X} C| \right\rfloor \right),$$

kde minimum je prevzaté zo všetkých X a F ako bolo popísané vyššie: $X \subseteq V(G - H)$ a $F \subseteq E(G - H - X)$ také, že každá H-cesta v G obsahuje vrchol alebo hranu v $X \cup F$.



obr.2.4.1. H-cesta v $G - X$.

Teda Maderova veta hovorí, že táto horná hranica je vždy dosiahnutá nejakou množinou nezávislých H-ciest:

Veta 2.4.1: (Mader 1978)
Nech je daný graf G s indukovaným podrafom H, vždy existuje $M_G(H)$ nezávislých H-ciest v G.

Za účelom získania priamych analógií s vrcholovou a hranovou verziou Mengerovej vety uvažujme dva špeciálne prípady zmieneného problému, kde buď F alebo X sú nutne prázdne. Je daný indukovaný podgraf $H \subseteq G$. Označíme $\varkappa_G(H)$ najmenšiu mohutnosť vrcholovej množiny $X \subseteq V(G-H)$, ktorá pretína každú H-cestu v G. Podobne, nech $\lambda_G(H)$ označuje najmenšiu mohutnosť hranovej množiny $F \subseteq E(G)$, ktorá pretína každú H-cestu v G.

Lema 2.4.2: Je daný graf G s indukovaným podgrafom H. Existuje aspoň $\frac{1}{2}\varkappa_G(H)$ nezávislých H-ciest a aspoň $\frac{1}{2}\lambda_G(H)$ hranovo disjunktných H-ciest v G.

Dôkaz: Na dôkaz prvého tvrdenia nech k je maximálny počet nezávislých H-ciest v G. Podľa vety 2.4.1 existujú množiny $X \subseteq V(G-H)$ a $F \subseteq E(G-H-X)$ také, že

$$k = |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \frac{1}{2}|\partial_{G-X} C| \right\rfloor$$

také, že každá H-cesta v G obsahuje vrchol v X alebo hranu v F. Pre každý $C \in \mathcal{C}_F$ s $\partial_{G-X} C \neq \emptyset$, vyberieme vrchol $v \in \partial_{G-X} C$ a nech $Y_C := (\partial_{G-X} C) - \{v\}$; ak $\partial_{G-X} C = \emptyset$, nech $Y_C := \emptyset$. Potom $\lfloor \frac{1}{2}|\partial_{G-X} C| \rfloor \geq \frac{1}{2}|Y_C|$ pre každé $C \in \mathcal{C}_F$. Okrem toho, pre $Y_C := \bigcup_{C \in \mathcal{C}_F} Y_C$ každá H-cesta má vrchol v $X \cup Y$. Odtiaľ

$$k \geq |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \frac{1}{2}|Y_C| \geq \frac{1}{2}|X \cup Y| \geq \frac{1}{2}\varkappa_G(H),$$

ako sme požadovali.

Druhé tvrdenie vyplýva z prvého uvažovaním o hranovom grafe $L(G)$ (cvičenie). $\square$

Môže pripadať ako prekvapenie vidieť, že hranice v leme 2.4.2 sú najlepšie možné (ako všeobecné hranice): možno nájsť príklady pre G a H, kde G obsahuje nie viac ako $\frac{1}{2}\varkappa_G(H)$ nezávislých H-ciest alebo nie viac ako $\frac{1}{2}\lambda_G(H)$ hranovo-disjunktných H-ciest (pozri cvičenia).

2.5 Hranovo disjunktné kostry

Hranová verzia Mengerovej vety nám hovorí, kedy graf G obsahuje k hranovo-disjunktných ciest medzi ľubovoľnými dvomi vrcholmi. Aktuálne trasy týchto ciest vnútri G môžu veľmi závisieť na voľbe tých dvoch vrcholov: majúc nájdené tie cesty pre jednu dvojicu koncových vrcholov, we are not necessarily better placed, aby sme ich našli pre ďalšiu dvojicu.

V situácii, kde rýchly prístup k množine k hranovo-disjunktných ciest medzi ľubovoľnými dvomi vrcholmi je žiadateľný, môže byť dobrým nápadom žiadať viac, ako hranovú k-súvislosť. Napr., ak G obsahuje *k hranovo disjunktných kostier*, bude existovať k zovšeobecnených takých ciest medzi ľubovoľnými dvomi vrcholmi, jedným v každom strome.

Kedy taký stromy existujú ? Ak existujú, graf je iste hranovo k-súvislý. Ľahko možno vidieť, že obrátenosť (the converse) je chybná; samozrejme, nie je vždy jasné, či ľubovoľná hranová súvislosť, akokoľvek vysoká, bude implikovať existenciu k hranovo-disjunktných kostier. Naším prvým cieľom v tejto časti bude študovať podmienky, pod ktorými k hranovo-disjunktných kostier existuje.

Ako predtým, je ľahko napísať nejaké zrejmé nutné podmienky pre existenciu k hranovo-disjunktných kostier. Vzhľadom na ľubovoľný rozklad $V(G)$ do r množín, každá kostra grafu G má aspoň $r-1$ *krížových hrán* — hrán, ktorých konce ležia v rôznych partíciách. (Prečo?) Teda ak G obsahuje k hranovo-disjunktných kostier, obsahuje aj aspoň $k(r-1)$ krížových hrán.

Ešte raz ... táto zrejmá nutná podmienka je tiež postačujúcou:

Veta 2.5.1: (Tutte 1961; Nash-Williams 1961)

Multigraf obsahuje k hranovo-disjunktných kostier práve vtedy, keď každý rozklad P jeho vrcholovej množiny má aspoň $k(|P|-1)$ krížových hrán.

Skôr, než dokážeme vetu 2.5.1, všimnime si prekvapujúce tvrdenie: na zaručenie existencie k hranovo-disjunktných kostier stačí zdvihnúť hranovú-súvislosť na práve $2k$:

Lema 2.5.2: Každý hranovo $2k$-súvislý multigraf G obsahuje k hranovo-disjunktných kostier.

Dôkaz: Každá množina vo vrcholovom rozklade G je spojená s inými partíciami aspoň $2k$ hranami. Odtiaľ, pre ľubovoľný rozklad na r množín G obsahuje aspoň $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} 2k = kr$ krížových hrán. Tvrdenie teda vyplýva z vety 2.5.1. $\square$

Pre dôkaz vety 2.5.1 nech multigraf $G=(V,E)$ a $k \in \mathbb{N}$ sú dané. Nech $\mathcal{F}$ he množina všetkých k-tic $F = (F_1,\dots,F_k)$ hranovo-disjunktných lesov v G s maximálnym celkovým počtom hrán, tzn. takých, že $\|F\| := |E[F]|$ s $E[F] := E(F_1)\cup\dots\cup E(F_k)$ je najväčšie možné.

Ak $F=(F_1,\dots,F_k)\in\mathcal{F}$ a $e \in E - E[F]$, potom každý $F_i + e$ obsahuje kružnicu ($i = 1,\dots,k$): inak by sme mohli zameniť F_i za F_i+e v F a získať spor s maximalitou $\|F\|$. Uvažujme hranu $e' \neq e$ tejto kružnice pre nejaké pevné i. Položiac $F_i' := F_i + e - e'$ a $F_j' := F_j$ pre všetky $j \neq i$ vidíme, že $F' := (F_1',\dots,F_k')$ je opäť v $\mathcal{F}$; povieme, že F' bolo získané z F zámenou hrany e' s e. Všimnime si, žekomponent z F_i obsahujúci e' zachováva svoju vrcholovú množinu, keď sa zmení na komponent z F_i'. Odtiaľ pre každú cestu $x\dots y \subseteq F_i'$ existuje jedinečná cesta xF_iy v F_i; toto použijeme neskôr.

Teraz uvažujme pevnú k-ticu $F^0 = (F_1^0,\dots,F_k^0)\in\mathcal{F}$. Množina všetkých k-tic v $\mathcal{F}$, ktoré môžu byť získané z F^0 sériou hranových zámen bude označená $\mathcal{F}^0$. Nakoniec, nech

$$E^0 := \bigcup_{F\in\mathcal{F}^0} (E - E[F])$$

a $G^0 := (V, E^0)$.

Lema 2.5.3: Pre každé $e^0 \in E - E[F^0]$ existuje množina $U \subseteq V$, ktorá je súvislá v každom F_i^0 ($i=1,\dots,k$) a obsahuje konce e^0.

Dôkaz: Keďže $F^0 \in \mathcal{F}^0$, dostaneme $e^0 \in E^0$; nech C^0 je komponent z G^0 obsahujúci e^0. Dokážeme tvrdenie pre $U := V(C^0)$.

Nech $i \in \{1,\dots,k\}$ je dané; máme ukázať, že U je súvislé v F_i^0. Aby sme toto dokončili, musíme najpr dokázať nasledovné:

(1) Nech $F = (F_1, \dots, F - k) \in \mathcal{F}^0$ a nech $(F'_1, \dots, F'_k)$ bolo získané z F zámenou hrany z F_i. Ak x, y sú konce cesty v $F'_i \cap C^0$, potom aj $xF_iy \subseteq C^0$.

Nech $e = vw$ je nový hrana v $E(F'_i) - E[F]$; toto je jediná hrana z F'_i neležiaca v F_i. Predpokladáme, že $e \in xF'_iy$: inak by sme mali $xF_iy = xF'_iy$ a niet čo ukazovať. Stačí ukázať, že $vF_iw \subseteq C^0$: potom $(xF'_iy - e) \cup vF_iw$ je súvislý podgraf $F_i \cap C^0$, ktorý obsahuje x, y a teda aj xF_iy. Nech e' je hrana z vF_iw. Pretože môžeme zameniť e' v $F \in \mathcal{F}^0$ s e a získame prvok $\mathcal{F}^0$ neobsahujúci e', dostaneme $e' \in E^0$. Teda $vF_iw \subseteq G^0$ a teda aj $vF_iw \subseteq C^0$, pretože $v, w \in xF'_iy \subseteq C^0$. Toto dokazuje (1).

Za účelom dôkazu, že $U = V(C^0)$ je súvislé v F_i^0, ukážeme $xF_i^0y \subseteq C^0$ pre každú hranu $xy \in C^0$. Keďže C^0 je súvislé, zjednotenie všetkých týchto ciest bude potom súvislým podgrafom (obsahujúcim všetky vrcholy) $F_i^0[U]$.

Takže nech $e = xy \in C^0$ je dané. Keďže $e \in E^0$, existuje $s \in \mathbb{N}$ a k-tice $F^r = (F_1^r, \dots, F_k^r)$ pre $r = 1, \dots, s$ také, že každé F^r je získané z F^{r-1} hranovou zámenou a $e \in E - E[F^s]$. Položiac $F := F^s$ v (1) môžeme uvažovať o e ako o ceste dĺžky 1 v $F'_i \cap C^0$. Postupné aplikácie (1) na $F = F^s, \dots, F^0$ potom dajú $xF_i^0 \subseteq C^0$, ako bolo požadované. □

Dôkaz: (vety 2.5.1)

Dokážeme spätnú implikáciu indukciou na $|G|$. Pre $|G| = 2$ tvrdenie platí. Pre indukčný krok teraz predpokladajme, že pre každý rozklad P množiny V existuje aspoň $k(|P| - 1)$ krížových hrán a skonštruujeme k hranovo-disjunktných kostier v G.

Zoberme si k-ticu $F^0 = (F_1^0, \dots, F_k^0) \in \mathcal{F}$. Ak každé F_i^0 je strom, tak sme skončili. Ak nie, dostaneme

$$\|F^0\| = \sum_{i=1}^{k} \|F_i^0\| < k(|G| - 1)$$

podľa lemy 0.5.3. Na druhej strane, dostávame $\|G\| \geq k(|G| - 1)$ podľa predpokladu: uvažujme rozklad V na jednotlivé vrcholy. Takže existuje hrana $e^0 \in E - E[F^0]$. Podľa lemy 2.5.3 existuje množina $U \subseteq V$, ktorá je súvisláv každom F_i^0 a obsahuje konce e_0; in particular, $|U| \geq 2$. Pretože každý rozklad kontrahovaného multigrafu G/U indukuje rozklad G s tými istými krížovými hranami,[15] G/U obsahuje aspoň $K(|P| - 1)$ krížových hrán vzhľadom na ľubovoľný rozklad P. Podľa indukčného predpokladu preto G/U obsahuje k hranovo-disjunktných kostier $T_1, \dots, T_k$. Zámenou v každej T_i vrchol v_U kontrahovaný z U kostrou $F_i^0 \cap G[U]$ grafu $G[U]$, dostaneme k hranovo-disjunktných kostier v G. □

Povieme, že podgrafy $G_1, \dots, G_k$ grafu G *rozkladajú* G, ak ich hranové množiny tvoria rozklad $E(G)$. Náš problém s kostrami môže potom byť pretvorený nasledovne: do koľkých súvislých podgrafov obsahujúcich všetky vrcholy môžeme rozložiť daný graf ? Ospravedlnením za rephrasing nášho jednoduchého problému s kostrami týmto komplikovanejším spôsobom je, že teraz má očividný duálny problém (viď vetu 0.5.1): do koľko málo acyklických podgrafov (obsahujúcich všetky vrcholy) môžeme rozložiť daný graf ? Alebo pre dané k: ktoré grafy môžu byť rozložené do najviac k lesov ?

Zrejmou nutnou podmienkou teraz je, že každá množina $U \subseteq V(G)$ indukuje najviac $k(|U| - 1)$ hrán, nie viac ako $|U| - 1$ pre každý les. Ešte raz, táto podmienka sa tiež zmení na nutnú. A prekvapujúco, toto možno ukázať s tou istou lemou 2.5.3 navrhnutou pre dôkaz našej vety o hranovo-disjunktných kostrách:

Veta 2.5.4: Multigraf $G = (V, E)$ môže byť rozložený na najviac k lesov práve vtedy, keď $\|G[U]\| \leq k(|U| - 1)$ pre každú neprázdnu množinu $U \subseteq V$.

Dôkaz: Dopredná implikácia bola ukázaná vyššie. Obrátene, ukážeme, že každá k-tica $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{F}$ rozkladadá G, tzn. že $E[F] = E$. Ak nie, nech $e \in E - E[F]$. Podľa lemy 2.5.3 exsituje množina $U \subseteq V$, ktorá je súvislá v každom F_i a obsahuje konce e. Potom $G[U]$ obsahuje $|U| - 1$ hrán z každého F_i, a in addition hranu e. Teda $\|G[U]\| > k(|U| - 1)$, v spore s naším predpokladom. □

[15] pozri časť 0.10 na kontrakciu multigrafov

3. Planárne grafy

Na úvod tejto kapitoly musím (ja – prekladateľ) podotknúť, že prefotená Pexova anglická knižka neobsahovala kapitolu 3 o planárnych grafoch. Jediný zdroj, ktorý som mal, boli Vršanského "poznámky z prednášok". Praktický význam to má ten, že hoci vety a lemy budú očíslované (ako všetky ostatné), ďalej v texte použité číselné odkazy na vety z tejto kapitoly budú chybné.

Ospravedlňujem sa všetkým prípadnym čitateľom, že to takto dopadlo, ale iná možnosť nebola — aspoň v čase písania týchto skrípt.

3.1 Planárne grafy

Rovinnou reprezentáciou multigrafu G rozumieme také jeho zakreslenie na rovinnú plochu, pri ktorom vrcholy nahradíme bodmi a hrany jednoduchými krivkami. Hrany grafu sa pri rovinnej reprezentácii nesmú pretínať.

Multigraf, pre ktorý existuje rovinná reprezentácia, sa nazýva *planárny graf.*

Veta 3.1.1: (Eulerov polyhedrálny vzorec)

Každá rovinná reprezentácia súvislého planárneho grafu s v vrcholmi a e hranami má presne $r = 2 + e - v$ oblastí. Teda $v - e + r = 2$ pre každý súvislý planárny graf.

Dôkaz: Pri fixovanom v použijeme indukciu na e. Keďže G je súvislý, tak $e \geq v - 1$. Pre $e = v - 1$ je G strom a ako taký má iba jednu oblasť ... $(1 = 2 + (v - 1) - v)$. Pridaním ľubovoľnej hrany rozdelíme nejakú oblasť na dve, čiže jednu pridáme ... $v - (e + 1) + (r + 1) = v - e + r = 2$. □

Multigraf G^* nazveme *duálny* k planárnemu grafu G, ak bol vytvorený nasledovným spôsobom:

- Každá oblasť rovinnej reprezentácie G je reprezentovaná jedným vrcholom G^*.
- Cez každú hranu G vedie práve jedna hrana G^*, spájajúca vrcholy reprezentujúca oblasti po oboch stranách tejto hrany.

Nech $v = |G|$, $e = \|G\|$ a r je počet oblastí planárneho grafu G. Pre takto vytvorený graf G^* platia nasledujúce zrejmé vzťahy:

$$v^* = r$$
$$r^* = v$$
$$e^* = e$$

Ľahko možno vidieť, že $(G^*)^* = G$.

Veta 3.1.2: Pre každý planárny graf s n vrcholmi a m hranami platí

$$m \leq 3n - 6,$$

pričom $m = 3n - 6$ práve vtedy, keď existuje rovinná reprezentácia G, ktorej všetky oblasti sú trojuholníky. Ak existuje rovinná reprezentácia G (úplne) bez trojuholníkov, potom

$$m \leq 2n - 4.$$

Dôkaz: V planárnom grafe G platí

$$2m(= 2\|G\|) = \sum_{v \in G} d(v) \geq 3r.$$

S použitím Eulerovho polyhedrálneho vzorca $(r = 2 - n + m)$ dostávame

$$2m \geq 3r = 3(2 - n + m) = 6 - 3n + 3m \Rightarrow -m \geq 6 - 3n \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

Ak G obsahuje len trojuholníkové oblasti, potom

$$2m = \sum_{v \in G} d(v) = 3r$$

a teda

$$m = 3n - 6.$$

Ak G neobsahuje žiadne trojuholníkové oblasti, potom

$$2m = \sum_{v \in G} d(v) \geq 4r$$

a teda

$$2m \geq 4r = 4(2 - n + m) = 8 - 4n + 4m \Rightarrow -2m \geq 8 - 4n \Rightarrow m \leq 2n - 4.$$

□

Veta 3.1.3: (Whitney)
Každý 3-súvislý planárny graf možno v rovine nakresliť jediným spôsobom.

Dôkaz: Nedokazujeme :-) □

3.2 Kuratowského veta

Lema 3.2.1: V 2-súvislom planárnom grafe je každá oblasť ohraničená kružnicou.

Dôkaz: Podľa lemy 2.1.2 je 2-súvislý graf G skonštruovateľný z kružnice pridávaním G-ciest. Obe oblasti kružnice sú ohraničené kružnicou (tou istou) a každá pridaná G-cesta iba rozdelí vonkajšiu oblasť na dve, tiež ohraničené kružnicou. □

Veta 3.2.2: (Kuratowski)
G je planárny práve vtedy, keď neobsahuje subdivíziu K_5 ani $K_{3,3}$.

Dôkaz: Dôkaz tvrdenia je pomerne zložitý a preto ho vykonáme špeciálne iba pre 3-súvislé grafy. Použijeme indukciu na $|G|$: Pre K_4 tvrdenie platí. Podľa vety 2.2.2 je každý 3-súvislý graf skonštruovateľný z K_4 dilatáciami vrcholov do hrán. Podľa lemy 2.2.1 navyše vieme, že v G existuje hrana e, kontrakciou ktorej bude G/e stále 3-súvislý. Tvrdenie dokážeme, ak dokážeme, že

- ak G/e je planárny a G už nie je, tak G musí obsahovať $S(K_5)$ alebo $S(K_{3,3})$,
- ak G/e nie je planárny, potom ani G nie je planárny.

Nech teda G/e je planárny. Čo sa môže stať kontrakciou e ? Môžu nastať jediné dva prípady, kedy G nebude planárny. V prvom prípade má dilatovaný vrchol v štyroch susedov, v poradí si ich očíslujme povedzme 1 až 4. Ak po dilatovaní pripadne vrcholu v_1 sused 1 a 3 a v_2 2 a 4, výsledok nie je planárny. Ako sa však možno presvedčiť na papieri, vzniká pri tom $K_{3,3}$. V druhom prípade má dilatovaný vrchol troch susedov, ktorých si oba vrcholy v_1 a v_2 ponechajú, čím opäť vznikne neplanárny graf. Ľahko sa však možno presvedčiť, že v_1 a v_2 tvoria spolu s ich tromi susedmi K_5.

Ostáva ukázať, že ak G/e nie je planárny, tak ani G nie je planárny. To platí, ak planárny graf ostane po kontrakcii e planárny. A to ostane, pretože kontrakciu hrany možno pohodlne vykonať aj na papieri bez "poškodenia" rovinného zobrazenia grafu. □

4. Farbenie

Koľko farieb potrebujeme na zafarbenie krajín na mape takým spôsobom, že susedné kajiny budú zafarbené rozdielne ? Koľko dní má byť naplánovaných pre stretnutia parlamentného výboru, ak každý výbor má v úmysle stretnúť sa v jeden deň a niektorí členovia parlamentu patri do niekoľkých výborov ? Ako môžeme nájsť školský rozvrh hodín minimálnej celkovej dĺžky, založený na informácii, ako často každý učiteľ má učiť každú triedu ?

Vrcholové farbenie grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : V \to S$ také, že $c(v) \neq c(w)$ vždy, keď v a w sú susedné. Prvky množiny S sa nazývajú použiteľné *farby*. Všetko, čo nás zaujíma o S je jej veľkosť: poväčšine budeme uvažovať najmenšie $k \in \mathbb{N}$ také, že G má *k-farbenie*, vrcholové farbenie $c : V \to \{1, \ldots, k\}$. Toto k je *chromatické číslo* grafu G; označuje sa $\chi(G)$. Graf G s $\chi(G) = k$ sa nazýva *k-chromatický*; ak $\chi(G) \leq k$, G nazveme *k-zafarbiteľný*.

Všimnime si, že k-farbenie nie je nič, len vrcholový rozklad na k nezávislých množín, teraz nazývaných *farebné triedy*; netriviálne 2-farbiteľné grafy napr. sú bipartitné grafy. Historicky, terminológia farbenia pochádza z prirodzeného problému farbenia mapy, menovaného vyššie, ktorý vedie k problému rozhodnutia maximálneho chromatického čísla planárnych grafov. Problém časovania výborov tiež môže byť obrátený na vrcholové farbenie — ako ?

Hranové farbenie grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : E \to S$, kde $c(e) \neq c(f)$ pre ľubovoľné dve susedné hrany e, f. Minimálne $k \in \mathbb{N}$, pre ktoré *hranové k-farbenie* existuje, tzn. hranové farbenie $c : E \to \{1, \ldots, l\}$, je *chromatický index* grafu G; je označený $\chi'(G)$. Tretia z našich úvodných otázok môže byť modelovaná ako problém hranového farbenia v bipartitnom multigrafe (ako?).

Samozrejme, každé hranové farbenie G je vrcholovým farbením jeho hranového grafu $L(G)$ a naopak; teda $\chi'(G) = \chi(L(G))$. Problém nájdenia dobrých hranových farbení môže byť teda videný ako obmedzenie všeobecnejšieho problému vrcholového farbenia na túto špeciálnu triedu grafov. Ako uvidíme, tento vzťah medzi dvomi typmi problému farbenia je obrazom zjavného rozdielu v našom poznaní o ich riešeniach: kým exsistujú iba veľmi hrubé odhady pre χ, jeho sestra χ' vždy má jednu z dvoch hodnôt ... buď Δ alebo $\Delta + 1$.

4.1 Farbenia a planárne grafy

Ak akýkoľvek výsledok v teórii grafov má nárok byť známym celému svetu, je to práve nasledovná *4CT – veta o 4 farbách* (**4CT=Four C**olor **T**heorem) — ktorá hovorí, že každá mapa môže byť ofarbená najviac štyrmi farbami:

Veta 4.1.1: (4CT)
Každý planárny graf má vrcholové farbenie s najviac 4 farbami.

4CT nebudeme dokazovať. Najjednoduchší dôkaz má vyše 100 strán. Dokážeme len nasledovné zoslabenie:

Veta 4.1.2: (5CT, Heawood)
Každý planárny graf je 5-zafarbiteľný.

Dôkaz: Budeme postupovať indukciou na $|G|$.

Nech G je planárny graf s $n \geq 3$ vrcholmi a m hranami. Induktívne predpokladáme, že každý graf s menej ako n vrcholmi môže byť 5-zafarbiteľný. Podľa dôsledku 3.1.2 ($m \leq 3n - 6$) platí

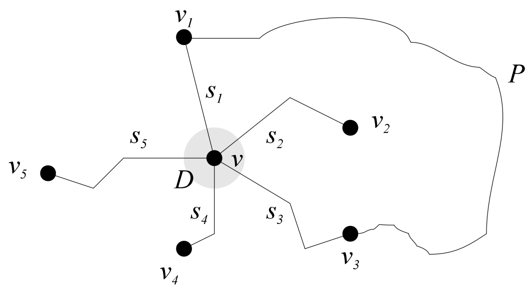
$$d(G) = 2\frac{m}{n} \leq \frac{6(n-2)}{n} < 6;$$

nech v je vrchol stupňa najviac 5. Podľa indukčného predpokladu existuje pre graf $H := G - v$ 5-farbenie $c : V(H) \to \{1, \ldots, 5\}$. Ak c používa najviac 4 farby pre susedov vrchola v, môžeme ho rozšíriť na 5-farbenie grafu G. Takže predpokladajme, že v má presne 5 susedov a títo majú rôzne farby.

Nech D je otvorený kruh okolo v tak malý, že pretína iba tých päť "straight" hranových segmentov v G, ktoré obsahujú v. Pomenujme tieto segmenty podľa ich cyklickej pozície v D ako $s_1, \ldots, s_5$ a nech vv_i je hrana obsahujúca s_i ($i = 1, \dots, 5$; pozri obr.4.1.1). Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $c(v_i) = i$ pre každé i.

Najprv ukážeme, že každá $v_1 - v_3$ cesta $P \subseteq H$ oddeľuje v_2 od v_4 v grafe G. Samozrejme, tento prípad nastane len ak cyklus $C := vv_1Pv_3v$ oddeľuje v_2 od v_4 v G. Dokážeme to tým, že ukážeme, že v_2 a v_4 ležia v rôznych oblastiach C.

Uvažujme dve oblasti $D - \{s_1 \cup s_2\}$. Jedna z týchto oblastí sa pretína s s_2, druhá s s_4. Pretože $C \cap D \subseteq s_1 \cup s_3$, obidve oblasti sú obsiahnuté vnútri oblasti C. Okrem toho, tieto oblasti sú rôzne: inak by sa D pretínalo len s jednou stranou C, v spore k faktu, že v leží na hranici oboch oblastí. Teda $D \cap s_2$ a $D \cap s_4$ ležia v rôznych častiach oblasti C. Keďže sa C dotýka hrán $vv_2 \supseteq s_2$ a $vv_4 \supseteq s_4$ iba vo vrchole v, to isté platí pre v_2 a v_4. (???)



obr.4.1.1. Dôkaz *5CT*.

Máme $i, j \in \{1, \dots, 5\}$, nech $H_{i,j}$ je podgraf H indukovaný vrcholmi ofarbenými farbami i alebo j. Môžeme predpokladať, že komponent C_1 z $H_{1,3}$ obsahujúci v_1 tiež obsahuje v_3. Samozrejme, ak zameníme farby 1 a 3 vo všetkých vrcholoch z C_1, získame ďalšie 5-zafarbenie H; ak $v_3 \notin C_1$, potom v_1 aj v_3 sú zafarbené farbou 3 v novom farbení a môžeme priradiť farbu 1 vrcholu v. Teda $H_{1,3}$ obsahuje $v_1 - v_3$ cestu P. Ako už bolo povedané, P oddeľuje v_2 od v_4 v H. Pretože $P \cap H_{2,4} = \emptyset$, toto znamená, že v_2 a v_4 ležia v rôznych komponentoch $H_{2,4}$. V komponente obsahujúcom v_2 teraz zameníme farby 2 a 4, teda prefarbenie v_2 farbou 4. Teraz už vrchol v nemá suseda farby 2 a môžeme mu priradiť túto farbu. $\square$

Ešte jedna posledná veta, na záver k dvom predchádzajúcim:

Veta 4.1.3: (Grötzsch 1959)
Každý planárny graf neobsahujúci trojuholník je 3-zafarbiteľný.

4.2 Farbenie vrcholov

Ako zistíme chromatické číslo daného grafu ? Ako môžeme nájsť vrcholové farbenie čo najmenším počtom farieb ? Ako súvisí chromatické číslo s inými garfovými invariantmi, ako napr. priemerný stupeň, súvislosť alebo obvod ?

Priamo z definície chromatického čísla môžeme odvodiť nasledujúce horné ohraničenie:

Lema 4.2.1: Pre každý graf G s m hranami platí

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Dôkaz: Nech c je vrcholové farbenie G s $k = \chi(G)$ farbami. Potom G obsahuje aspoň jednu hranu medzi ľubovoľnými dvomi farebnými triedami: ak nie, mohli by sme použiť tú istú farbu pre obe triedy. Teda $m \geq \frac{1}{2}k(k-1)$. Vyriešením tejto nerovnosti pre k dostaneme $k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ a s použitím predpokladu $k = \chi(G)$ dostaneme dokazovanú nerovnosť. $\square$

Jeden zrejmý spôsob ofarbenia grafu G nie príliš veľa farbami je nasledujúci *greedy algoritmus*: začnúc s nejakým pevným očíslovaním vrcholov $v_1, \dots, v_n$ grafu G ($n = |G|$), uvažujeme vrcholy in turn a ofarbíme každý

v_i prvou voľnou farbou — napr. s najmenším kladným celým číslom nepoužitým na ofarbenie ľubovoľného suseda v_i medzi $v_1, \dots, v_{i-1}$. Týmto spôsobom nikdy nepoužijeme viac, ako $\Delta(G) + 1$ farieb, dokonca aj pre nepriaznivé voľby očíslovania $v_1, \dots, v_n$. Ak G je kompletný, alebo cyklus nepárnej dĺžky, potom je toto ofarbenie dokonca najlepším možným.

Vo všeobecnosti, hoci táto horná hranica $\Delta(G) + 1$ je vcelku veľkorysá, dokonca aj pre greedy farbenia. Samozrejme, keď ideme zafarbiť vrchol v_i v uvedenom algoritme, potrebujeme iba supply of $d_{G[v_1,\dots,v_i]}(v_i) + 1$ namiesto $d_G(v_i)$ farieb to proceed; recall this, v tejto etape algoritmus ignoruje akýchkoľvek susedov v_j alebo v_i, kde $i < j$. A preto vo väčšine grafov bude existovať príležitosť pre vylepšenie $\Delta(G)+1$ hranice vybratím čiastočne vhodného vrcholového usporiadania, s ktorým začneme: napr. takým, ktoré vyberie najprv vrcholy vysokého stupňa (kedy väčšina susedov je ignorovaná) a vrcholy malého stupňa posledné. Lokálne, počet $d_{G[v_1,\dots,v_i]}(v_i)+1$ potrebných farieb bued najmenší, ak v_i má minimálny stupeň v $G[v_1, \dots, v_i]$. Ale toto možno ľahko dosiahnuť: iba najprv vyberieme v_n s $d(v_n) = \delta(G)$, potom ako v_{n-1} vrchol s minimálnym stupňom v $G - v_n$ atď.

Teda dostávame nasledovné vylepšené ohraničenie:

Lema 4.2.2: Každý graf G spĺňa

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) \mid H \subseteq G\}.$$

Dôsledok 4.2.3: Každý graf G obsahuje podgraf minimálneho stupňa aspoň $\chi(G) - 1$.

Ako možno ľahko overiť (cvičenie), hranica z lemy 4.2.2 je vždy aspoň taká dobrá ako hranica z lemy 4.2.1.

Počet $1 + \max_{H\subseteq G} \delta(H)$ vystupujúci v leme 4.2.2 je niekedy nazývaný *farbiace číslo* grafu G. Ako zdôraznila veta 2.5.4, farbiace číslo grafu je blízko súvislé s jeho arboricity.

Ako sme videli, každý graf G spĺňa $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$, kde rovnosť platí pre kompletné grafy a nepárne kružnice. Vo všetkých ostatných prípadoch táto všeobecná hranica môže byť mierne vylepšená.

Veta 4.2.4: (Brooks 1941)

Nech G je súvislý graf. Ak G nie je ani kompletný graf, ani nepárny cyklus, potom

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Dôkaz: Použijeme indukciu na $|G|$. Ak $\Delta(G) \leq 2$, potom G je cesta alebo kružnica a tvrdenie je triviálne. Takže predpokladajme, že $\Delta := \Delta(G) \geq 3$ a že tvrdenie platí pre všetky grafy menšieho rádu. Predpokladajme, že $\chi(G) > \Delta$.

Nech $v \in G$ je vrchol stupňa Δ. Potom $H := G - v$ spĺňa $\chi(H) \leq \Delta$. Samozrejme, indukciou pre každý komponent H' z H máme $\chi(H') \leq \Delta(H') \leq \Delta$, až pokiaľ H' nebude kompletný graf alebo nepárna kružnica, v tom prípade $\chi(H') = \Delta(H') + 1 \leq \Delta$, pretože každý vrchol z H' má maximálny stupeň v H' a jeden taký vrchol je tiež susedný s v v G.

Pretože H môže byť Δ-ofarbený, ale G nemôže, dostávame nasledovné:

(1) Každé Δ-farbenie H používa všetky farby $1, \dots, \Delta$ na susedoch vrchola v.

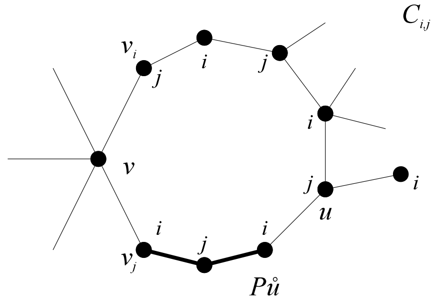
Je dané ľubovoľné Δ-farbenie H, označme suseda vrchola v zafarbeného farbou i ako v_i pre $i = 1, \dots \Delta$. Pre všetky $i \neq j$ nech $H_{i,j}$ označuje podgraf H indukovaný všetkými vrcholmi zafarbenými farbou i alebo j.

(2) Pre všetky $i \neq j$ ležia vrcholy v_i a v_j v spoločnom komponente $C_{i,j}$ z $H_{i,j}$.

Inak by sme mohli zameniť farby i a j v jednom z tých komponentov; potom by v_i a v_j boli zafarbené narovnako v spore s (1).

(3) $C_{i,j}$ je vždy $v_i - v_j$ cesta.

Samozrejme, nech P je $v_i - v_j$ cesta v $C_{i,j}$. Keďže $d_H(v_i) \leq \Delta - 1$, susedia vrchola v_i majú navzájom rozdielne farby: inak by sme mohli prefarbiť v_i v spore s (1). Teda sused v_i na P bude jeho jediným susedom v $C_{i,j}$ a podobne pre v_j. Teda ak $C_{i,j} \neq P$, potom P má vnútorný vrchol s tromi rovnako zafarbenými susedmi v H; nech u je prvý taký vrchol na P (obr.4.2.1). Pretože je na susedoch vrchola u použitých najviac $\Delta - 2$ farieb, môžeme vrchol u prefarbiť. Ale toto spraví z $P\mathring{u}$ komponent z $H_{i,j}$, čo je v spore s (2).



obr.4.2.1. Dôkaz (3) v Brooksovej vete.

(4) Pre rôzne i, j, k sa cesty $C_{i,j}$ a $C_{i,k}$ pretínajú iba vo vrchole v_i.

Ak $u \neq v_i \in C_{i,j} \cap C_{i,k}$, potom vrchol u má dvoch susedov zafarbených farbou j a dvoch susedov zafarbených farbou k, a tak môžeme prefarbiť u. V novom farbení, v_i a v_j ležia v rôznych komponentoch z $H_{i,j}$, čo je spor s (2).

Dôkaz vety už teraz bude pomerne ľahký. Ak susedia v sú navzájom susední, potom každý z nich už má Δ susedov v $N(v) \cup \{v\}$, takže $G = G[N(v) \cup \{v\}] = K_{\Delta+1}$. Ak je G kompletný graf, už niet čo dokazovať. Môžeme predpokladať, že $v_1 v_2 \notin G$, kde $v_1, \ldots v_\Delta$ majú mená odvodené od nejakého pevného Δ-farbenia c grafu H; nech $u \neq v_2$ je sused v_1 na ceste $C_{1,2}$; potom $c(u) = 2$. Zámenou farieb 1 a 3 v $C_{1,3}$ dostaneme nové farbenie c' grafu H; nech v'_i, $H'_{i,j}$, $C'_{i,j}$, atď. sú definované vzhľadom na c' zrejmým spôsobom. Ako sused $v_1 = v'_3$, náš vrchol u teraz leží v $C'_{2,3}$, pretože $c'(u) = c(u) = 2$. Podľa (4) pre c si cesta $\mathring{v}_1 C_{1,2}$ predsa len ponechala svoje pôvodné farbenie, takže $u \in \mathring{v}_1 C_{1,2} \subseteq C'_{1,2}$. Preto $u \in C'_{2,3} \cap C'_{1,2}$, čo je spor s (4) pre c'. □

Ako sme videli, graf G vysokého chromatického čísla musí mať vysoký maximálny stupeň: aspoň $\chi(G) - 1$. Čo iné môžeme povedať o štruktúre grafov s vysokým chromatickým číslom ?

Jeden zrejmý možný dôvod pre $\chi(G) \leq k$ je prítomnosť K_k ako podgrafu. Toto je lokálna vlastnosť G, zlúčiteľná s ľubovoľnými hodnotami globálnych invariantov, ako napr. ε a $\varkappa$. Odtiaľ, predpoklad $\chi(G) \geq k$ nám nič nehovorí o týchto invariantoch, aspoň nie o G samotnom.

Ale objavuje sa vždy vysoké chromatické číslo ako lokálny fenomén ? Môžeme pinpoint akékoľvek kanonické zovšeobecnené lokálne štruktúry spôsobujúce to, tzn. existuje malá zbierka k-chromatických grafov — možno even just $\{K_k\}$ — takých, že každý graf G s $\chi(G) \geq k$ obsahuje jeden z nich ?

Podľa dôsledku 4.2.3 G obsahuje podgraf H s $\delta(H) \geq k - 1$ a teda podľa vety 0.4.2 podgraf H' s $\varkappa(H') \geq \frac{1}{4}(k-1)$. Avšak, také podgrafy konštantného priemerného stupňa — ohraničené zospodu iba funkciou k, nie funkciou $|G|$ — nie sú dosť tesné, aby obsahovali (nutne) akýkoľvek konkrétny graf vysokého chromatického čísla, let alone K_k.[16]

Až doteraz, dokonca aj keď sa naše výsledky o hranovej hustote neukazujú ako schopné pomoci, mohol by stále byť the case, že vysoké chromatické číslo nejako vynucuje existenciu istých zovšeobecnených vysoko chromatických podgrafov. Že toto nie je v skutočnosti ten prípad, bude náš hlavný výsledok v kapitole 9: podľa klasického výsledku od Erdösa, dokázaného pravdepodobnostnými metódami, existujú grafy ľubovoľne veľkého chromatického čísla a yet ľubovoľne veľkého obvodu (veta 9.2.2). Teda daný ľubovoľný graf H, ktorý nie je les, pre každé $k \in \mathbb{N}$ existujú grafy G s $\chi(G) \geq k$ ale $H \nsubseteq G$.[17]

Teda, obrátene s našou počiatočnou myšlienkou, že veľké chromatické číslo by mohlo vždy byť spôsobené nejakou hustou lokálnou podštruktúrou, môže sa v skutočnosti objaviť ako čisto globálny fenomén: po všetkom,

[16]Toto je zrejmé z príkladov $K_{n,n}$, ktoré sú 2-chromatické, ale ktorých priemerný stupeň n prekračuje akúkoľvek konštatntnú hranicu. Ktorý priemerný stupeň presne bude vynucovať existenciu daného podgrafu, bude témou kapitoly 6.

[17]Podľa dôsledkov 4.2.3 a 0.5.4, samozrejme, každý graf dostatočne vysokého chromatického čísla bude obsahovať ľubovoľný daný les.

lokálne (okolo každého vrchola) vyzerá graf s veľkým obvodom ako strom a je tam in particular 2-zafarbiteľný !

Až doteraz sme sa pýtali, čo spôsobí vysoké chromatické číslo: vplýva na invarianty δ,d,Δ a $\varkappa$ v nejakom podgrafe, ale neimplikuje existenciu akéhokoľvek konkrétneho podgrafu veľkého chromatického čísla. Uvažujme teraz obrátenú otázku: z akých predpokladov môžeme dedukovať, že chromatické číslo daného grafu je vysoké ?

Short of a concrete subgraph known to be highly chromatic (ako napr. K_k), there is little or nothing in sight: žiadne hodnoty doteraz študovaných invariantov neimplikujú, že uvažovaný graf má veľké chromatické číslo. (S odvolaním na príklad $K_{n,n}$). Takže čo presne môže spôsobiť vysokú chromaticitu ako globálny fenomén do značnej miery ostáva záhadou !

Napriek tomu, existuje jednoduchý — hoci nie vždy krátky — spôsob na skonštruovanie všetkých grafov chromatického čísla $\geq k$. Pre každé $k \in \mathbb{N}$ definujme triedu *k-skonštruovateľných* grafov rekurzívne nasledovne:

1. K_k je k-skonštruovateľný.

2. Ak G je k-skonštruovateľný a $x, y \in V(G)$ sú nesusedné, potom aj $(G + xy)/xy$ je k-skonštruovateľný.

3. Ak G_1, G_2 sú k-skonštruovateľné a existujú vrcholy x, y_1, y_2 také, že $G_1 \cap G_2 = \{x\}$, $xy_1 \in E(G_1)$ a $xy_2 \in E(G)$, potom aj $(G_1 \cap G_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2$ je k-skonštruovateľný.

Ľahko možno nahliadnuť, že všetky k-skonštruovateľné grafy — a teda aj ich nadgrafy — sú aspoň k-chromatické. Je pozoruhodné, že opak platí tiež:

Veta 4.2.5: (Hajós 1961)

Nech G je graf a $k \in \mathbb{N}$. Potom $\chi(G) \geq k$ práve vtedy, keď G obsahuje k-skonštruovateľný podgraf.

Dôkaz: Nech G je graf s $\chi(G) \geq k$; ukážeme, že G obsahuje k-skonštruovateľný podgraf.

Predpokladajme, že neobsahuje ... potom $k \geq 3$. Pridanie nejakých hrán, ak to bude potrebné, nám dovolí urobiť G hranovo-maximálnym s vlastnosťou, že žiadny z jeho podgrafov nie je k-skonštruovateľný. Teraz G nie je kompletný r-partitný graf pre ľubovoľné r: for then $\chi(G) \geq k$ by implikovalo $r \geq k$ a G by obsahoval k-skonštruovateľný graf K_k.

Takže $\overline{G}$ obsahuje komponent C, ktorý nie je kompletný; nech $v, w \in C$ sú dva nesusedné vrcholy. Nech y_1, x, y_2 sú prvé tri vrcholy na najkratšej $v - w$ ceste v C (teda $y_1 = v$); potom $y_1y_2 \in E(G)$ a $xy_1, xy_2 \notin E(G)$. Pretože G je hranovo-maximálny bez k-skonštruovateľného podgrafu, hrana xy_i leží v nejakom k-skonštruovateľnom podgrafe H_i grafu $G + xy_i$ $(i = 1, 2)$.

Nech H_2' je izomorfná kópia H_2, ktorá obsahuje x a $H_2 - H_1$, ale inak je disjunktná s G, spolu s izomorfizmom $v \mapsto v'$ z H_2 do H_2', ktorý fixuje $H_2 \cap H_2'$ pointwise. Potom $H_1 \cap H_2' = \{x\}$, takže

$$H := (H_1 \cup H_2') - xy_1 - xy_2' + y_1y_2'$$

je k-skonštruovateľný podľa (iii). Jeden vrchol at a time, identifikujme v H každý vrchol $v' \in H_2 - G$ s jeho partnerom v; pretože vv' nie je nikdy hranou H, každá z týchto identifikácií amounts ku konštrukčnému kroku typu (ii). Eventuálne, dostaneme graf

$$(H_1 \cup H_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2 \subseteq G;$$

toto je požadovaný k-skonštruovateľný podgraf G. □

4.3 Farbenie hrán

Je jasné, že pre každý graf G platí $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Pre bipartitné grafy tu dostávame rovnosť:

Veta 4.3.1: (König 1916)

Každý bipartitný graf G spĺňa $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Dôkaz: Indukciou na $\|G\|$. Pre $\|G\| = 0$ tvrdenie platí. Nech teraz $\|G\| = m \geq 1$ a nech tvrdenie platí pre grafy s menším počtom hrán. Označme $\Delta := \Delta(G)$, zvoľme ľubovoľnú $xy \in E(G)$ a označme c Δ-farbenie grafu $G - xy$, ktorého existencia vyplýva z indukčného predpokladu. Hrany, ofarbené farbou α budem nazývať skrátene α-hrany.

V $G - xy$ platí, že aj x aj y sú incidentné s najviac $\Delta - 1$ hranami. Preto máme $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, \Delta\}$ také, že vrchol x nie je incidentný s α-hranou a y nie je incidentný s β-hranou. Ak $\alpha = \beta$, môžeme ofarbiť hranu xy touto farbou a skončili sme; takže môžeme predpokladať, že $\alpha \neq \beta$ a že x je incidentný s β-hranou.

Teraz rozšírme túto hranu na maximálny sled W, ktorého hrany sú striedavo ofarbené farbami α a β. Pretože žiadny taký sled neobsahuje vrchol dvakrát, W existuje a je to cesta. Okrem toho, sled W neobsahuje vrchol y. Ak by obsahoval, končil by v y na α-hrane (podľa voľby β) a preto má párnu dĺžku, takže $W + xy$ by bola nepárna kružnica v G. Teraz prefarbíme všetky hrany na W tým, že zameníme α a β. Podľa voľby α a maximality W, susedné hrany grafu $G - xy$ sú stále zafarbené rozdielne. A teda sme našli hranové Δ-farbenie grafu $G - xy$, v ktorom ani x ani y nie je incidentný s β-hranou. Zafarbením xy farbou β rozšírime toto farbenie na hranové Δ-farbenie grafu G. □

Veta 4.3.2: (Vizing 1964)

Pre každý graf G platí

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dôkaz: $\Delta(G) \leq \chi'(G)$ je zrejmé, pretože pre hrany, incidentné s vrcholom stupňa $\Delta = \Delta(G)$ musíme použiť Δ farieb.

Druhú nerovnosť dokážeme indukciou na $\|G\|$. Pre $\|G\| = 0$ je tvrdenie triviálne. Nech teraz $G = (V, E)$ kde $\Delta := \Delta(G) > 0$ je dané a predpokladajme, že tvrdenie platí pre grafy s menej hranami. Namiesto "$(\Delta+1)$-hranové-farbenie" budeme hovoriť zjednodušenie "farbenie". Hrana ofarbená farbou α bude opäť nazývaná α-hrana, atď.

Pre každú hranu $e \in G$ existuje podľa indukčného predpokladu farbenie $G - e$. V takomto farbení používajú hrany na danom vrchole v najviac $d(v) \leq \Delta$ farieb, takže nejaká farba $b \in \{1, \ldots, \Delta + 1\}$ *chýba na* v. Pre ľubovoľnú inú farbu α existuje maximálny sled (pravdepodobne triviálny) začínajúci vo v, ktorého hrany sú zafarbené striedavo α a β. Tento sled je cesta; nazvime ho *α/β-cesta z v*.

Predpokladajme, že G nemá farbenie. Potom platí nasledovné:

(1) Majme hranu $xy \in E$ a ľubovoľné farbenie grafu $G - xy$, v ktorom chýba farba α na x a chýba farba β na y, potom α/β-cesta z y končí v x.

Inak by sme mohli zameniť farby α a β pozdĺž tejto cesty a zafarbiť xy farbou α, pričom by sme dostali farbenie G (spor).

Nech $xy_0 \in G$ je hrana. Podľa indukcie má $G_0 := G - xy_0$ farbenie c_0. Nech α je farba chýbajúca na x v tomto farbení. Ďalej, nech $y_0, y_1, \ldots, y_k$ je najväčšia postupnosť odlišných susedov vrchola x v G taká, že $c_0(xy_i)$ chýba na y_{i-1} pre každé $i = 1, \ldots, k$. Pre každý z grafov $G_i := G - xy_i$ definujme farbenie c_i nasledovne:

$$c_i := \begin{cases} c_0(xy_{j+1}) & \text{pre } e = xy_j \text{ s } j \in \{0, \ldots, i-1\} \\ c_0(e) & \text{inokedy;} \end{cases}$$

všimnime si, že v každom z týchto farbení na x chýbajú tie isté farby ako v c_0.

Teraz nech β je chýbajúca farba na y_k v c_0. Je jasné, že β stále chýba na y_k v c_k. Ak by β chýbala aj na x, mohli by sme zafarbiť xy_k farbou β a potom rozšíriť c_k na farbenie grafu G. Teda x je incidentný s β-hranou (v každom farbení). V skutočnosti, podľa maximality k platí:

$$c_0(xy_i) = \beta \qquad \text{pre nejaké } i \in \{1, \ldots, k-1\}. \tag{2}$$

Nech P je α/β-cesta z y_k v G_k (vzhľadom na c_k ... obr.4.3.1). Podľa (1) P končí v x na β-hrane, pretože α chýba na x. Keďže $\beta = c_0(xy_i) = c_k(xy_{i-1})$, toto je hrana xy_{i-1}. Avšak podľa (2) a voľby y_i na y_{i-1} chýba β vo farbení c_0 a teda aj v c_{i-1}; nech P' je α/β-cesta z y_{i-1} v G_{i-1} (vzhľadom na c_{i-1}). Pretože P' je jednoznačne určená, začína s $y_{i-1}Py_k$; všimnime si, že hrany $P\dot{x}$ sú zafarbené rovnako v c_{i-1} ako v c_k. Ale v c_0 a teda v c_{i-1} nie sú žiadne β-hrany na y_k (podľa voľby β). Z toho vyplýva, že P' končí v y_k, čo je spor s (1). □

Vizingova veta rozdeľuje konečné grafy do dvoch tried podľa ich chromatického indexu; grafy spĺňajúce $\chi'(G) = \Delta(G)$ sa nazývajú *trieda 1*, tie, ktoré $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ sú *trieda 2*.

4.4 Výberové farbenia — farbenia podľa zoznamu

V tejto časti sa pozrieme na relatívne časté zovšeobecnenie konceptov farbenia doteraz študovaných. Toto zovšeobecnenie môže vyzerať trochu far-fetched na prvý pohľad, ale it turns out to supply fundamentálne spojenie medzi klasickými (vrcholovými a hranovými) chromatickými číslami grafu a jeho inými invariantmi.

Predpokladajme, že máme daný graf $G = (V, E)$ a pre každý vrchol G zoznam farieb, ktoré sú povolené na tomto konkrétnom vrchole: kedy môžeme ofarbiť G (v zvyčajnom zmysle) tak, že každý vrchol dostane farbu zo svojho zoanamu ? Formálnejšie, nech $(S_v)_{v\in V}$ je rodina množín. Vrcholové farbenie c grafu G s $c(v) \in S_v$ pre všetky $v \in V$ farbením ***podľa zoznamov** S_v*. Graf G sa nazýva ***výberovo**, k-**zafarbiteľný***, alebo k-***voliteľný***, ak pre každú rodinu $(S_v)_{v\in V}$ s $|S_v| = k$ pre všetky v existuje vrcholové farbenie G zo zoznamov S_v. Najmenšie $k \in \mathbb{N}$, pre ktoré G je k-voliteľný, je ***výberové číslo*** $\mathrm{ch}(G)$ grafu G.

Zoznamové farbenie hrán je definované analogicky. Najmenšie $k \in \mathbb{N}$ také, že G má hranové farbenie z rodiny zoznamov veľkosti k je ***výberový chromatický index*** $\mathrm{ch}'(G)$ grafu G; formálne, iba položíme $\mathrm{ch}'(G) := \mathrm{ch}(L(G))$, kde $L(G)$ je hranový graf G.

V princípe ukázať, že daný graf je k-voliteľný, je obtiažnejšie, ako dokázať, že je k-zafarbiteľný: to druhé je len špeciálnym prípadom pôvodného, kde všetky zoznamy $= \{1, \dots, k\}$. Teda

$$\mathrm{ch}(G) \geq \chi(G) \qquad \text{a} \qquad \mathrm{ch}'(G) \geq \chi'(G)$$

pre všetky grafy G.

Napriek týmto nerovnostiam, veľa zo známych horných ohraničení pre chromatické číslo have turned out to be valid tiež pre výberové číslo. Príklady pre tento fenomén zahŕňajú lemu 4.2.2 (s tým istým dôkazom) a Brooksovu vetu. Na druhej strane, je ľahké skonštruovať grafy, pre ktoré sú tie dva invarianty wide apart. Vzaté spolu, tieto dve skutočnosti trochu indikujú, ako tieto všeobecné horné hranice chromatického čísla môžu byť ďaleko od pravdy.

Nasledujúca veta ukazuje, že (in terms if its relationship k ostatným grafovým invariantom je výberové číslo v podstate rozdielne od chromatického čísla. Ako bolo povedané predtým, existujú 2-chromatické grafy ľubovoľne veľkého minimálneho stupňa, napr. grafy $K_{n,n}$. Výberové číslo však bude forced up veľkými hodnotami invariantov ako δ,ε alebo $\varkappa$:

Veta 4.4.1: (Alon 1993)

Existuje funkcia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taká, že $\mathrm{ch}(G) \geq k$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a všetky grafy G s priemerným stupňom $d(G) \geq f(k)$.

Dôkaz vety 4.4.1 používa pravdepodobnostné metódy ako bude uvedené v kapitole 9.

Empiricky, odlišný charakter výberového čísla je zvýraznený ďalším fenoménom: dokonca aj v prípadoch, kde by známe hranice pre chromatické číslo mohli byť prenesené na chromatické číslo, ich dôkazy mali sklon (have tended) byť skôr odlišné.

Jeden z najjednoduchších a najpôsobivejších príkladov pre toto je zoznamová verzia 5CT: *každý planárny graf je 5-voliteľný.* Toto bol len v úrovni dohadov takmer 20 rokov predtým, než Thomassen našiel veľmi jednoduchý induktívny dôkaz. Tento dôkaz nepoužíva 5CT — which thus gets reproved in a very different way.

Veta 4.4.2: (Thomassen 1994)

Každý planárny graf je 5-voliteľný.

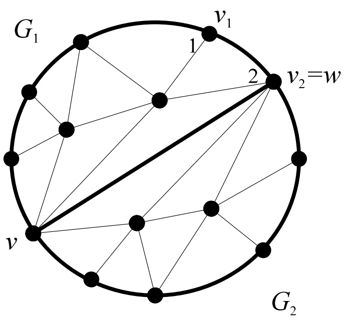
Dôkaz: Dokážeme nasledujúce tvrdenie pre všetky planárne grafy G s aspoň tromi vrcholmi:

> **(*)** Predpokladajme, že každá vnútorná oblasť G je ohraničená trojuholníkom a jeho vonkajšia oblasť kružnicou $C = v_1 \dots v_k v_1$. Predpokladajme ďalej, že v_1 už bol ofarbený farbou 1 a v_2 farbou 2.

Predpokladajme nakoniec, že s každým iným vrcholom C je asociovaný zoznam ≥ 3 farieb a s každým vrcholom $G - C$ zoznam ≥ 5 farieb. Potom farbenie v_1 a v_2 môže byť rozšírené na farbenie G z daných zoznamov.

Overme najprv, že (*) implikuje tvrdenie vety. Nech je daný ľubovoľný planárny graf spolu so zoznamom 5 farieb pre každý vrchol. Pridávame hrany k tomuto grafu, pokiaľ to nebude maximálny planárny graf G. Podľa lemy 3.2.6, G je triangulácia roviny; nech $v_1v_2v_3v_1$ je hrancica jeho vonkajšej oblasti. Teraz zafarbíme v_1 a v_2 (rozdielne) z ich zoznamova rozšírime toto farbenie pomocou (*) na farbenie G z daných zoznamov.

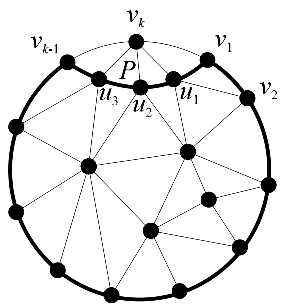
Dokážeme (*) indukciou na $|G|$. Ak $|G| = 3$, potom $G = C$ a tvrdenie je triviálne. Teraz nech $|G| \geq 4$ a predpokaldajme, že (*) platí pre menšie grafy. Ak C má tetivu vw, potom vw leží na dvoch jedinečných kružniciach $C_1, C_2 \subseteq C + vw$ s $v_1v_2 \in C_1$ a $v_1v_2 \notin C_2$. Pre $i = 1, 2$ nech G_i označuje podgraf G indukovaný vrcholmi ležiacimi na C_i alebo na jeho vnútornej oblasti (obr.4.4.1). Použitím indukčného predpokladu najprv na G_1 a potom — s farbami teraz priradenými vrcholom v a w — na G_2 prinesie požadované farbenie grafu G.



obr.4.4.1. Indukčný krok s tetivou vw.

Ak C neobsahuje tetivu, nech $v_1, u_1, \dots, u_m, v_{k-1}$ sú susedia v_k v ich prirodzenom cyklickom poradí okolo v_k;[18] podľa definície C, všetci tí susedia u_i ležia vo vnútornej oblasti C (obr.4.4.2). Keďže sú vnútorné oblasti C ohraničené trojuholníkomi, $P := v_1u_1 \dots u_mv_{k-1}$ je cesta v G a $C' := P \cup (C - v_k)$ je kružnica.

Teraz vyberieme dve rôzne farby $j, \ell \neq 1$ zo zoznamu vrchola v_k a odstránime tieto farby zo zoznamov všetkých vrcholov u_i. Potom každý zoznam vrchola na C' stále má ešte aspoň 3 farby, takže indukciou môžeme ofarbiť C' a jeho vnútro, tzn. graf $G - v_k$. Aspoň jedna z tých dvoch farieb j, ℓ nie je použitá pre v_{k-1} a môžeme ju priradiť vrcholu v_k. □



obr.4.4.2. Indukčný krok bez tetivy.

Ako je často the case s indukčnými dôkazmi, trik uvedeného dôkazu leží v delikátne vyváženom zosilnení dokôzaného tvrdenia.[19] Všimnime si, že dôkaz nepoužíva ani triadičné farbiace argumenty (ako je zámena farieb pozdĺž na ceste), ani Eulerov polyhedrálny vzorec, ktoré boli implicitné v dôkaze klasickej 5CT. Toto poukazuje na to, že možno aj v iných nevyriešených farbiacich problémoch by mohlo byť výhodou ísť priamo na ich zoznamovú verziu, tzn. dokázať tvrdenie tvaru $\mathrm{ch}(G) \leq k$ namiesto formálne slabšieho $\chi(G) \leq k$. Nanešťastie, toto priblíženie je nanič pre 4CT: planárne grafy vo všeobecnosti **nie sú** 4-voliteľné.

[18] ako v prvom dôkaze 5CT

[19] IN ENGLISH: As is often the case with induction proofs, the trick of the proof above lies in the delicately balanced strengthening of the assertion proved.

Ako bolo povedané skôr, chromatické číslo grafu a jeho výberové číslo sa môžu poriadne odlišovať. Hoci prekvapujúco, nie sú známe žiadne také príklady pre hranové farbenia. Samozrejme, sú hypotézy, že žiadne také neexistuje:

Hypotéza o hranových farbeniach (LCC[20]): Pre každý graf G platí $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G)$.

Dokážeme LCC pre bipartitné grafy. Ako užotočný nástroj použijeme orientácie grafov definované v časti 0.10. Ak D je smerovaný graf a $v \in V(D)$, označíme $N^+(v)$ množinu vrcholov w takých, že D obsahuje hranu smerovanú z v do w a $d^+(v) = |N^+(v)|$.

Množinu nezávislých vrcholov $U \subseteq V(D)$ takú, že každý vrchol v $D - U$ pošle hranu do U (formálne: takú, že pre každý $v \in V(D) - U$ existuje hrana $e \in D$ s $\mathrm{init}(e) = v$ a $\mathrm{ter}(e) \in U$) budeme nazývať *jadro* D. Všimnime si, že jadrá neprázdnych smerovaných grafov sú samy (sami?) neprázdne.

Nasledujúca lema je vylešením greedy algoritmu uvedeného v časti 4.2, rephrased v jazyku hranových orientácií:

Lema 4.4.3: Nech H je graf a $(S_v)_{v \in V(H)}$ je rodina zoznamov. Ak H má orientáciu D s $d^+(v) < |S_v|$ pre každý v a taký, že každý indukovaný podgraf grafu D má jadro, potom H môže byť ofarbený podľa zoznamov S_v.

Dôkaz: Použíjeme indukciu na $|H|$. Pre $|H| = 0$ zoberieme prázdne farbenie. Pre indukčný krok nech $|H| > 0$. Nech α je farba vyskytujúca sa v jednom zo zoznamov S_v a nech D je oriantácia H. Vrcholy v s $\alpha \in S_v$ indukujú (span) neprázdny podgraf D' v D; podľa predpokladu, D' má jadro $U \neq \emptyset$.

Ofarbime vrcholy v U farbou α a odstráňme α zo zoznamov všetkých ostaných vrcholov D'. Pretože každý z týchto vrcholov pošle hranu do U, modifikované zoznamy S'_v pre $v \in D - U$ opäť spĺňajú podmienku $d^+(v) < |S_v|$ v $D - U$. Pretože $D - U$ je orientáciou $H - U$, môžeme teda ofarbiť $H - U$ z t7ch zoznamov podľa indukčného predpokladu. Keďže žiadny z týchto zoznamov neobsahuje α, toto rozšíri naše farbenie $U \to \{\alpha\}$ na požadované farbenie H. □

Veta 4.4.4: (Galvin 1995)

Pre každý bipartitný graf G platí $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G)$.

Dôkaz: Nech $G := (X \cup Y, E)$, kde $\{X, Y\}$ je bipartícia G. Povieme, že dve hrany G *sa pretínajú v* X, ak zdieľajú koniec v X, a odpovedajúco pre Y. Nech $\chi'(G) = k$ a nech c je hranové k-farbenie G.

Je zrejmé, že $\mathrm{ch}'(G) \geq k$; dokážeme, že $\mathrm{ch}'(G) \leq k$. Náš plán je použiť lemu 4.4.3 na dôkaz, že hranový graf $H = L(G)$ je k-voliteľný. Pre použitie lemy 4.4.3 stačí nájsť orientáciu D grafu H s $d^+(v) < k$ pre každý vrchol v a takú, že každý indukovaný podgraf grafu D má jadro. Pre definovanie D uvažujme susedné $e, e' \in E$, kde povedzme $c(e) < c(e')$. Ak sa e a e' stretávajú v X, orientujeme hranu $ee' \in H$ z e' smerom k (towards) e; ak sa e a e' stretávajú v Y, orientujeme hranu ee' z e do e'.

Vypočítajme $d^+(e)$ pre daný $e \in E = V(D)$. Ak povedzme $c(e) = i$, potom každý $e' \in N^+(e)$ pretínajúci e v X má svoju farbu v $\{1, \dots, i-1\}$ a každý $e' \in N^+(e)$ pretínajúci e v Y má svoju farbu v $\{i+1, \dots, k\}$. Keďže ľubovoľní dvaja susedia e' vrchola e pretínajú e obidva buď v X alebo obidva v Y sú themselves susedné a teda aj zafarbené rozdielne, toto implikuje $d^+(e) < k$, ako sme požadovali.

Ostáva ukázať, že každý indukovaný podgraf D grafu D má jadro. Toto ukážeme indukciou na $|D'|$. Pre $D' = \emptyset$, prázdna množina je jadrom; takže nech $|D'| \geq 1$. Nech $E' := V(D') \subseteq E$. Pre každý $x \in X$, pri ktorom E' má hranu, nech $e_x \in E'$ je hrana pri x s minimálnou c-hodnotou a nech U označuje množinu všetkých tých hrán e_x. Potom každá hrana $e' \in E' - U$ sa pretína s $e \in U$ v X a hrana $ee' \in D'$ je smerovaná z e' do e. Ak U je nezávislá, je to teda jadro D' a sme doma; predpokladajme preto, že U nie je nezávislá.

Nech $e, e' \in U$ sú susedné a predpokladajme, že $c(e) < c(e')$. Podľa definície sa U, e a e' stretávajú v Y, takže hrana $ee' \in D'$ je smerovaná z e do e'. Podľa indukčného predpokladu $D' - e$ má jadro U'. Ak $e' \in U'$, potom U' je tiež jadrom D' a skončili sme. Ak $e' \notin U'$, potom existuje $e'' \in U'$ taký, že D' má hranu smerovanú z e' do e''. Ak sa e' a e'' stretli v X, potom $c(e'') < c(e')$ podľa definície D, čo je v spore s $e' \in U$. Teda aj e' a e'' sa pretínajú v Y a $c(e) < c(e') < c(e'')$. Takže hrana ee'' je smerovaná z e smerom k (towards) e'', takže opäť je U' tiež jadrom D'. □

[20]List Colouring Conjecture

Podľa lemy 4.3.1 teraz poznáme presný výberový index bipartitných grafov:

Dôsledok 4.4.5: Pre každý bipartitný graf G platí $\mathrm{ch}'(G) = \Delta(G)$.

4.5 Perfektné grafy

Ako bolo povedané v časti 4.2, vysoké chromatické číslo sa môže javiť ako globálny fenomén: dokonca aj keď graf má veľký obvod a teda lokálne vyzerá ako strom, jeho chromatické číslo môže byť ľubovoľne vysoké. Pretože taká 'globálna závislosť' je očividne náročná to deal with, one may become interested in graphs, kde sa tento fenomén nevyskytuje, tzn. ktorých chromatické číslo je vysoké iba keď preň existuje lokálny dôvod.

Before we make this more precise, let us recall two definitions: $\alpha(G)$ označíme najväčšiu mohutnosť nezávislej množiny vrcholov v G a $\omega(G)$ označíme najväčšie n také, že $K_n \subseteq G$. Je jasné, že $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ a $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Graf nazývame *perfektný*, ak každý indukovaný podgraf $H \subseteq G$ má chromatické číslo $\chi(H) = \omega(H)$, tzn. ak triviálna dolná hranica $\omega(H)$ farieb vždy postačí na ofarbenie vrcholov H. Teda, kým dokázanie tvrdenia typu $\chi(G) > k$ môže byť vo všeobecnosti obtiažne, dokonca aj v princípe, pre daný graf G, môže byť vždy done pre perfektný graf jednoducho ukázaním (by exhibiting) nejakého K_{k+1} podgrafu ako 'certifikátu' pre nezafarbiteľnosť s k farbami.

[21] Avšak, perfektnosť je jedným z centrálnych pojmov teórie grafov: skutočnosť, že niekoľko dôležitých tried grafov je perfektných (akoby šťastnou náhodou (as if by fluke)) môže slúžiť ako povrchná indikácia tohto.[22]

Ktoré grafy sú teda perfektné ? Bipartitné grafy napríklad sú. Menej triviálne, komplementy bipartitných grafov sú tiež perfektné — skutočnosť ekvivalentná s Königovou páriacou vetou 1.1.1 (cvičenie). Takzvané *komparabilitné grafy* sú perfektné a taktiež aj *intervalové grafy*; oba tieto turn up v početných aplikáciách.

Za účelom bližšieho študovania najmenej jedného takého príkladu dokážeme tu, že chordálne grafy sú perfektné: graf je *chordálny* (alebo *triangulovaný*), ak každý z jeho cyklov dĺžky ≥ 4 obsahuje tetivu, tzn. ak neobsahuje indukované kružnice iné ako trojuholníky.

Aby sme ukázali, že chordálne grafy sú perfektné, najrv charakerizujeme ich štruktpru. Ak G je graf s indukovanými podgrafmi G_1, G_2 a S takými, že $G = G_1 \cup G_2$ a $S = G_1 \cap G_2$, povieme, že G vznikol z G_1 a G_2 vložením týchto grafov spolu medzi S.

Lema 4.5.1: Graf je chordálny práve vtedy, keď môže byť skonštruovaný rekurzívne vkladaním medzi kompletné podgrafy, začnúc z kompletných grafov.

Dôkaz: Ak G je získaný z dvoch chordálnych grafov G_1, G_2 vložením medzi kompletný podgraf, potom G je iste opäť chordálny: ľubovoľný indukovaný cyklus v G leží buď v G_1 alebo v G_2 a teda podľa predpokladu je trojuholník. Pretože kompletné grafy sú chordálne, toto dokazuje, že všetky grafy skoštruované podľa zmieneného postupu sú chordálne.

Obrátene, nech G je chordálny graf. Ukážeme indukciou na $|G|$, že G môže byť skonštruovaný ako bolo popísané. Toto je triviálne, ak G je kompletný.

Preto predpokladajme, že G nie je kompletný, in particular $|G| > 1$ a že menšie chordálne grafy sú skonštruovateľné podľa postupu. Nech $a, b \in G$ sú dva nesusedné vrcholy a nech $X \subseteq V(G) - \{a, b\}$ je minimálna množina vrcholov oddeľujúca a od b. Nech C označuje komponent G obsahujúci a a položme $G_1 := G[V(C) \cup X]$ a $G_2 := G - C$. Potom G vnizkne z G_1 a G_2 vložením týchto grafov medzi $S := G[X]$.

Pretože G_1 aj G_2 sú oba chordálne (being indukované podgrafy G) a teda skoštruovateľné podľa indukcie, stačí ukázať, že S je kompletný. Predpokladajme teda, že $s, t \in S$ sú nesusedné. Podľa minimality $X = V(S)$ ako $a - b$ separátora, oba s a t najú suseda v C. Teda existuje X-cesta z s do t v G_1; nech P_1 je najkratšia taká cesta. Analogicky, G_2 obsahuje najkratšiu X-cestu P_2 z s do t. Ale potom $P_1 \cup P_2$ je kružnica dĺžky ≤ 4 bez tetivy, čo

[21] IN ENGLISH: At first glance, the structure of the class of perfect graphs appears somewhat contrived: although it is closed under induced subgraphs (if 'only just' — by explicit definition), it is not closed under taking general subgraphs or supergraphs, let alone minors (examples?).

[22] Trieda perfektných grafov má dualitné vlastnosti s hlbokými spojeniami s teóriou optimalizácie a komplexity, ktoré sú ďaleko od pochopenia. Veta 4.5.3 tu ukazuje hrot ľadového vrchu (???).

je spor s naším predpokladom, že G je chordálny. □

Lema 4.5.2: Každý chordálny graf je perfektný.

Dôkaz: Pretože kompletné grafy sú perfektné, stačí podľa lemy 4.5.1 ukázať, že ľubovoľný graf G získaný z perfektných grafov G_1, G_2 vložením medzi kompletný podgraf S je opäť perfektný. Takže nech $H \subseteq G$ je indukovaný podgraf; ukážeme, že $\chi(H) \leq \omega(H)$.

Nech $H_i := H \cap G_i$ pre $i = 1, 2$ a nech $T := H \cap S$. Potom T je opäť kompletný a H vznikne z H_1 a H_2 vložením medzi T. Ako indukovaný podgraf G_i, každý H_i môže byť ofarbený s $\omega(H_i)$ farbami. Pretože T je kompletný a teda ofarbený injektívne (injectively), dve také farbenia — jedno z H_1 a jedno z H_2 — môžu byť skombinované na farbenie H s $\max\{\omega(H_1), \omega(H_2)\} \leq \omega(H)$ farbami — ak je to potrebné, tak permutovaním farieb v jednom z H_i.□

Teraz prichádza hlavný výsledok teórie perfektných grafov … *veta o perfektných grafoch*:

Veta 4.5.3: (Lovász 1972)
Graf je perfektný práve vtedy, keď jeho komplement je tiež perfektný.

Pripravíme dôkaz tejto vety lemou. Nech G je graf a $x \in G$ je vrchol a nech G' je získaný z G pridaním vrchola x' a jeho spojením s x a všetkými susedmi x. Povieme, že G je získaný z G *zdvojením* vrchola x.

Lema 4.5.4: Ľubovoľný graf získaný z perfektného grafu zdvojením vrchola je opäť perfektný.

Dôkaz: Použijeme indukciu na rád uvažovaného perfektného grafu. Zdvojenie vrchola K_1 prinesie K_2, ktorý je perfektný. Pre indukčný krok nech G je netriviálny perfektný graf a nech G' je získaný z G zdvojením vrchola $x \in G$ do nového vrchola x'. Pre náš dôkaz, že G' je perfektný, stačí ukázať $\chi(G') \leq \omega(G)$: každý náležitý indukovaný podgraf H grafu G je buď izmorfný s indukovaným podgrafom grafu G, alebo získaný z náležitého indukovaného podgrafu G zdvojením x; v každom prípade, H je perfektný podľa predpokladu a indukčného predpokladu a môže byť teda ofarbený s $\omega(H)$ farbami.

Nech $\omega(G) =: \omega$; potom $\omega(G') \in \{\omega, \omega + 1\}$. Ak $\omega(G') = \omega + 1$, potom

$$\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = \omega + 1 = \omega(G')$$

a skončili sme.

Takže predpokladajme, že $\omega(G') = \omega$. Potom x neleží v žiadnom $K_\omega \subseteq G$: spoku s x' toto prinesie $K_{\omega+1}$ v G'. Ofarbime G s ω farbami. Pretože každý $K_\omega \subseteq G$ pretína farebnú triedu X vrchola x ale nie x samotný, graf $H := G - (X - \{x\})$ má stupeň kliky $\omega(H) < \omega$. Pretože G je perfektný, môžeme teda ofarbiť H s $\omega - 1$ farbami. Teraz X je nezávislá, takže množina $(X - \{x\}) \cup \{x'\} = V(G' - H)$ je tiež nezávislá. Preto môžeme rozšíriť naše $(\omega - 1)$-farbenie H na ω-farbenie G, ukazujúc, že $\chi(G') \leq \omega = \omega(G')$, ako sme požadovali. □

Dôkaz: (veta 4.5.3)

Použitím indukcie na $|G|$ ukážeme, že komplement $\overline{G}$ ľubovoľného perfektného grafu $G = (V, E)$ je opäť perfektný. Pre $|G| = 1$ je tvrdenie triviálne, takže nech $|G| \geq 2$ pre indukčný krok. Nech $\mathcal{K}$ označuje množinu všetkých vrcholových množín kompletných podgrafov G. Položíme $\alpha(G) =: \alpha$ a nech $\mathcal{A}$ je množina všetkých nezývislých vrcholových množín A v G s $|A| = \alpha$.

Každý vhodný indukovaný podgraf $\overline{G}$ je komplement vhodného indukovaného podgrafu G a teda je podľa indukcie perfektný. Pre perfektnosť $\overline{G}$ teda stačí dokázať $\chi(\overline{G}) \leq \omega(\overline{G})$ $(= \alpha)$. Na zakočenie nájdeme množinu $K \in \mathcal{K}$ takú, že $K \cap A \neq \emptyset$ pre všetky $A \in \mathcal{A}$; potom

$$\omega(\overline{G} - K) = \alpha(G - K) < \alpha = \omega(\overline{G}),$$

takže podľa indukčného predpokladu

$$\chi(\overline{G}) \leq \chi(\overline{G} - K) + 1 = \omega(\overline{G} - K) + 1 \leq \omega(\overline{G}),$$

čo sme požadovali.

Predpokladajme, že neexistuje žiadne také K; teda pre každé $K \in \mathcal{K}$ existuje množina $A_K \in \mathcal{A}$ s $K \cap A_K = \emptyset$. Zameňme v G každý vrchol x kompletnýcm grafom G_x rádu

$$k(x) := |\{K \in \mathcal{K} \mid x \in A_K\}|,$$

spájajúci všetky vrcholy G_x so všetkými vrcholmi G_y vždy, keď x a y sú susedné v G. Graf G' takto získaný obsahuje vrcholovú množinu $\bigcup_{x \in V} V(G_x)$ a dva vrcholy $v \in G_x$ a $w \in G_y$ sú susedné v G' práve vtedy, keď buď $x = y$, alebo $x \neq y$ a $xy \notin E$. Okrem toho, G' môže byť získaný opakovaným vrcholovým zdvojením z grafu $G[\{x \in V \mid k(x) > 0\}]$. Súc indukovaný podgraf G je tento novší graf perfektný podľa predpokladu, takže G' je perfektný podľa lemy 4.5.4. In particular,

$$\chi(G') \leq \omega(G'). \tag{1}$$

Na získanie sporu s (1) teraz vypočítame in turn aktuálne hodnoty $\omega(G')$ a $\chi(G')$. Podľa konštrukcie G', každý maximálny kompletný podgraf G' má tvar $G'\left[\bigcup_{x \in X} G_x\right]$ pre nejaké $X \in \mathcal{K}$. Takže exisuje množina $X \in \mathcal{K}$ taká, že

$$\begin{aligned} \omega(G') &= \sum_{x \in X} k(x) \\ &= |\{(x, K) \ : \ x \in X, K \in \mathcal{K}, x \in A_K\}| \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}} |X \cap A_K| \\ &\leq |\mathcal{K}| - 1; \end{aligned} \tag{2}$$

posledná nerovnosť vyplýva zo skutočnosti, že $|X \cap A_K| \leq 1$ pre všetky K (pretože A_K je nezávislá ale $G[X]$ je kompletný) a $|X \cap A_X| = 0$ (podľa voľby A_X). Na druhej strane dostaneme

$$\begin{aligned} \|G'\| &= \sum_{x \in V} k(x) \\ &= |\{(x, K) \ : \ x \in V, K \in \mathcal{K}, x \in A_K\}| \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}} |A_K| \\ &\leq |\mathcal{K}| \cdot \alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Keďže $\alpha(G') \leq \alpha$ podľa konštrukcie G', toto implikuje

$$\chi(G') \geq \frac{|G'|}{\alpha(G')} \geq \frac{|G'|}{\alpha} = |\mathcal{K}|. \tag{4}$$

Položením (2) a (3) dohromady dostaneme

$$\chi(G') \geq |\mathcal{K}| > |\mathcal{K}| - 1 \geq \omega(G'),$$

čo je spor s (1). □

Pretože podľa definície každý indukovaný podgraf perfektného grafu je opäť perfektný, vlastnosť perfektnosti môže byť charakterizovaná zakázanými indukovanými podgrafmi: existuje množina $\mathcal{H}$ neperfektných grafov taký, že daný graf je perfektný práve vtedy, keď neobsahuje indukovaný podgraf izomorfný s prvok z $\mathcal{H}$. (Napr. si môžeme vybrať ako $\mathcal{H}$ množinu všetkých neperfektných grafov s vrcholmi v $\mathbb{N}$.)

Je zrejmé, že by bolo žiadateľné zachovať $\mathcal{H}$ tak malú, ako je to možné. V skutočnosti, jedna z najznámejších hypotéz v teórii grafov hovorí, že $\mathcal{H}$ potrebuje len obsahovať dva typy grafu: nepárne kružnice dĺžky ≥ 5 a ich komplementy. (Žiadne z týchto nie sú perfektné — prečo ?) Alebo, jemne rephrased:

Hypotéza o perfektných grafoch: (Berge 1966)

Graf G je perfektný práve vtedy, keď ani G ani $\overline{G}$ neobsahujú kružnicu nepárnej dĺžky ≥ 5 ako indukovaný podgraf.

Je zrejmé, že táto hypotéza implikuje vetu o perfektných grafoch. V skutočnosti, tá veta bola tiež len hypotézou od Bergeho: až do jej dôkazu bola známa ako 'slabá' verzia hypotézy o perfektných grafoch a uvedená hypotéza ako 'silná' verzia.

5. Toky

Predstavme si graf ako sieť: jeho hrany prenášajú nejaký druh toku – vodu, elektrinu, dáta a pod. Ako by sme toto presne modelovali ?

Pre začiatok by sme mali vedieť, aký veľký tok tečie cez každú hranu $e = xy$ a v ktorom smere. V našom modeli môžeme priradiť číslo $k \in N$ dvojici (x, y) na vyjadrenie, že tok nejakých k jednotiek tečie cez hranu e z x do y, a dvojici (y, x) priradiť hodnotu $-k$ na vyjadrenie, že cez e tečie k jednotiek nejakého toku opačnou cestou, t.j. z y do x. Pre takéto priradenie $f : V^2 \to \mathbb{Z}$ teda môžeme položiť $f(x,y) = f(y,x)$ vždy, keď x a y sú susedné vrcholy v G.

Zvyčajne má sieť len zopár uzlov, kde tok vstupuje do siete, alebo ju opúšťa; pri všetkých ostatných uzloch bude celkové množstvo toku vchádzajúceho do toho uzla rovné celkovému množstvu toku z toho istého uzla vychádzajúcemu. Pre náš model to znamená, že v takmer všetkých uzloch x bude funkcia f spĺňať *Kirchhoffov zákon*:

$$\sum_{y \in N(x)} f(x,y) = 0.$$

V tejto kapitole budeme ľubovoľnú funkciu $f : V^2 \to \mathbb{Z}$ s vyššie menovanými vlastnosťami nazývať "tok" na grafe G. Niekedy zameníme $\mathbb{Z}$ za nejakú inú grupu a ako pravidlo budeme uvažovať multigrafy namiesto grafov.[23] As it turns out, teória týchto 'tokov' nie je užitočná iba ako model pre skutočné toky: tak dokonale sa mieša s inými časťami teórie grafov, že nejaké hlboké a prekvapujúce súvislosti sa stanú viditeľnými, súvislosti hlavne so súvislosťou a farbiacimi problémami.

5.1 Toky a cirkulácie

V kotexte tokov máme byť schopní hovoriť o 'smeroch' hrany. Pretože v multigrafe $G = (V, E)$ nie je hrana $e = xy$ identifikovaná jednoznačne dvojicou (x, y) alebo (y, x), definujeme hrany ako trojice:

$$\overrightarrow{E} := \{(e, x, y) \mid e \in E; x, y \in V; e = xy\}.$$

Teda hrana $e = xy$ s $x \neq y$ má dva *smery* (e, x, y) a (e, y, x); slučka $e = xx$ má len jeden smer, trojicu (e, x, x). Pre dané $\overrightarrow{e} = (e, x, y) \in \overrightarrow{E}$ nech $\overleftarrow{e} := (e, y, x)$ a pre $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{E}$ položíme

$$\overleftarrow{F} := \{\overleftarrow{e} \mid \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{F}\}.$$

Všimnime si, že $\overrightarrow{E}$ samotná je symetrická: $\overleftarrow{E} = \overrightarrow{E}$. Pre $X, Y \subseteq V$ a $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{E}$ nech

$$\overrightarrow{F}(X, Y) := \{(e, x, y) \in \overrightarrow{F} \mid x \in X; y \in Y; x \neq y\},$$

a píšeme $\overrightarrow{F}(x, Y) := \overrightarrow{F}(\{x\}, Y)$, atď. Ďalej zjednodušíme

$$\overrightarrow{F}(x) := \overrightarrow{F}(x, V) = \overrightarrow{F}(\{x\}, \overline{\{x\}}).$$

Tu, ako aj nižšie, $\overline{X}$ označuje komplement $V - X$ vrcholovej množiny $X \subseteq V$. Všimnime si, že akékoľvek slučky pri vrcholoch $x \in X \cap Y$ sú nepovšimnuté v definícii $\overrightarrow{F}(X, Y)$ a $\overrightarrow{F}(x)$.

Nech H je abelovská pologrupa[24], písaná aditívne (written additevely) s nulou 0. Sú dané množiny vrcholov $X, Y \subseteq V$ a funkcia $f : \overrightarrow{E} \to H$, nech

$$f(X, Y) := \sum_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(X,Y)} f(\overrightarrow{e}).$$

Namiesto $f(\{x\}, Y)$ opäť píšeme $f(x, Y)$ atď.

Od teraz budeme predpokladať, že H je grupa. Funkciu f nazveme *cirkulácia* na G (s hodnotami v H) alebo *H-cirkulácia*, ak f spĺňa nasledovné dve podmienky:

[23] Pre konzistenciu, budeme phrase niektoré z našich tvrdení iba pre grafy: tie, ktorých dôkazy sa spoliehajú na už dokázané tvrdenia (pre grafy) skôr v týchto skriptách. Avšak, všetky tieto výsledky ostávajú pravdivé aj pre multigrafy.

[24] Táto kapitola neobsahuje teóriu grúp. Jediné pologrupy, ktoré kedy budeme uvažovať pre H sú prirodzené, celé a reálne čísla, cyklické grupy $\mathbb{Z}_k$ celých čísel modulo k a (raz) Kleinovu 4-grupu.

(F1) $f(e,x,y) = -f(e,y,x)$ pre všetky $(e,x,y) \in \overrightarrow{E}$ s $x \neq y$;
(F2) $f(v,V) = 0$ pre všetky $v \in V$.

Ak f spĺňa (F1) ale nie nutne (F2), funkciu f nazveme *tok* na G. Vrcholy v, kde $f(v,V)$ je kladné (záporné) nazývame *zdroje* (*ústia*).

Ak $f : \overrightarrow{E} \to H$ je tok, potom podľa (F1)

$$f(X,X) = 0$$

pre všetky $X \subseteq V$. Ak naviac f je cirkulácia, potom

$$f(X,V) = \sum_{x \in X} f(x,V) = 0$$

podľa (F2). Spolu tieto dve základné postrehy implikujú, že v cirkulácii je tok cez ľubovoľný rez vždy nulový:

Lema 5.1.1: Ak f je cirkulácia, potom $f(X,\overline{X}) = 0$ pre každú množinu $X \subseteq V$.

Dôkaz: $f(X,\overline{X}) = f(X,V) - f(X,X) = 0 - 0 = 0$. □

Pretože mosty vytvárajú samotné rezy, lema 5.1.1 implikuje, že cirkulácie sú vždy nulové na mostoch:

Dôsledok 5.1.2: Ak f je cirkulácia a $e = xy$ je most v G, potom $f(e,x,y) = 0$.

5.2 Toky v sieťach

V tejto časti dáme stručný úvod k druhu teórie sieťových tokov, ktorá je teraz štandardnou dôkazovou technikou v oblastiach ako párenie a súvislosť. Spôsobom príkladu dokážeme klasický výsledok tejto teórie, Ford&Fulkersonovu tzv. *max-flow min-cut* vetu. Táto beta samotná implikuje Mengerovu vetu bez veľkých problémov (cvičenie), čo indikuje nejakú prirodzenú silu ležiacu v tomto priblížení[25].

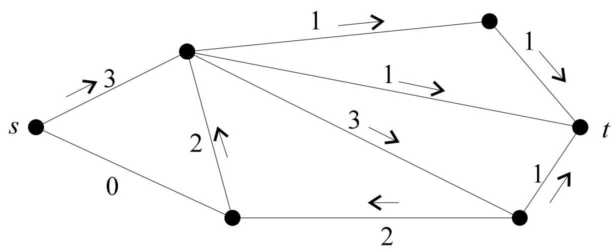
Uvažujme úlohu modelovania siete s jedným zdrojom s a jedným ústím t, v ktorej veľkosť toku cez danú linku medzi dvoma uzlami je subjektom určitej kapacity tejto linky. Naším cieľom je zistiť maximálnu sieťovéhú veľkosť toku cez sieť z s do t. Toto bude nejako závisiť aj od štruktúry siete aj od rôznych kapacít jej spojení — ako presne, je to, čo chceme rozlúštiť.

Nech $G = (V,E)$ je multigraf, $s,t \in V$ sú dva pevné vrcholy a $c : \overrightarrow{E} \to \mathbb{N}$ je zobrazenie; c nazveme *kapacitná funkcia* na G a štvoricu $N := (G,s,t,c)$ *sieť*. Všimnime si, že c je definované nezávisle pre dva smery hrany.

Tok $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}$ na G nazveme *tok v* N, ak $f(\overrightarrow{e}) \leq c(\overrightarrow{e})$ prevšetky $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$ a f spĺňa Kirchhoffov zákon na každom vrchole rôznom od s a t. Teda funkcia $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}$ je tokom v N práve vtedy, keď spĺňa nasledovné tri podmienky (obr.5.2.1):

(F1) $f(e,x,y) = -f(e,y,x)$ pre všetky $(e,x,y) \in \overrightarrow{E}$ s $x \neq y$;
(F2') $f(v,V) = 0$ pre všetky $v \in V - \{s,t\}$;
(F3) $f(\overrightarrow{e}) \leq c(\overrightarrow{e})$ pre všetky $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$.

Tok f nazveme *integrálny*, ak všetky jeho hodnoty ležia v $\mathbb{Z}$.



obr.5.2.1. Tok v sieti v krátkej notácii: všetky hodnoty zodpovedajú indikovaným smerom (kapacity nie sú zobrazené).

[25] In English: which indcates some of the natural power lying in this approach

Nech f je tok v N. Ak $S \subseteq V$ je taká, že $s \in S$ a $t \in \overline{S}$, nazveme dvojicu $(S, \overline{S})$ *rez v* N a $c(S, \overline{S})$ *kapacita* tohto rezu.

Pretože f teraz musí spĺňať iba (F2') namiesto (F2), už viac nemáme $f(X, \overline{X}) = 0$ pre všetky $X \subseteq V$ (ako v leme 5.1.1). A naviac, hodnota je rovnaká pre všetky rezy:

Lema 5.2.1: Pre každý rez $(S, \overline{S})$ v N platí $f(S, \overline{S}) = f(s, V)$.

Dôkaz: Ako v dôkaze lemy 5.1.1 máme

$$\begin{aligned} f(S, \overline{S}) &= f(S, V) - f(S, S) \\ &\underset{(F1)}{=} f(s, V) + \sum_{v \in S - \{s\}} f(v, V) - 0 \\ &\underset{(F2')}{=} f(s, V). \end{aligned}$$

□

Zvyčajná hodnota $f(S, \overline{S})$ v leme 5.2.1 bude nazývaná *veľkosť toku* f a označíme ju $|f|$. tok zobrazený na obr.5.2.1 má maximálny tok rovný 3.

Podľa (F3)

$$|f| = f(S, \overline{S}) \leq c(S, \overline{S})$$

pre každý rez $(S, \overline{S})$ v N. Teda veľkosť toku v N nie je nikdy väčšia ako najmenšia kapacita rezu. Nasledujúca *max-flow min-cut* hovorí, že táto horná hranica je vždy dosiahnutá nejakým tokom:

Veta 5.2.2: (Ford & Fulkerson 1956)

V každej sieti sa veľkosť maximálneho toku rovná kapacite minimálneho rezu.

Dôkaz: Nech $N = (G, s, t, c)$ je sieť a $G := (V, E)$. Zadefinujeme postupnosť $f_0, f_1, f_2, \ldots$ integrálnych tokov v N o presne sa zvyšujúcu celkovú hodnotu, napr. ako

$$|f_0| < |f_1| < |f_2| < \ldots$$

Je jasné, že celková hodnota inegrálneho toku je zase len celočíselná, takže $|f_{n+1}| \geq |f_n| + 1$ pre každé n. Pretože všetky tieto čísla smerujú nahor podľa kapacity ľubovoľného rezu v N, naša postupnosť bude končiť nejakým tokom f_n. V súlade s týmto tokom môžeme nájsť rez kapacity $c_n = |f_n|$. Pretože žiadny tok nemôže mať veľkosť vyššiu ako c_n a žiadny rez nemôže mať kapacitu menšiu ako $|f_n|$, toto číslo je súčasne maximum aj minimum spomínané v dokazovanej vete.

Pre f_0 položíme $f_0(\vec{e}) := 0$ pre každé $\vec{e} \in \vec{E}$. Majúc definovaný integrálny tok f_n v N pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, označíme S_n množinu všetkých vrcholov v takých, že G obsahuje $s - v$ sled $x_0 e_0 \ldots e_{\ell-1} x_\ell$ s

$$f_n(\vec{e_i}) < c(\vec{e_i})$$

pre všetky $i < \ell$; tu $\vec{e_i} := (e_i, x_i, x_{i+1})$ (a pravdaže $x_0 = s$ a $x_l = v$).

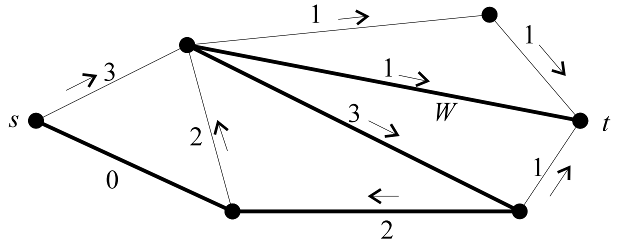
Ak $t \in S_n$, nech $W = x_0 e_0 \ldots e_\ell x_\ell$ je zodpovedajúci $s - t$ sled; bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že W neopakuje žiadne vrcholy. Nech

$$\epsilon := \min\{c(\vec{e_i}) - f_n(\vec{e}) \mid i < \ell\}.$$

Potom $\epsilon > 0$ a pretože f_n (ako c) je integrálny podľa predpokladu, ϵ je celé číslo. Nech

$$f_{n+1} : \vec{e} \mapsto \begin{cases} f_n(\vec{e}) + \epsilon & \text{pre } \vec{e} = \vec{e_i}, i = 0, \ldots, \ell - 1 \\ f_n(\vec{e}) - \epsilon & \text{pre } \vec{e} = \overleftarrow{e_i}, i = 0, \ldots, \ell - 1 \\ f_n(\vec{e}) & \text{pre } e \notin W. \end{cases}$$

Intuitívne, f_{n+1} sme dostali z f_n tým, že sme poslali prídavný tok hodnoty ϵ po W z s do t (obr.5.2.2).



obr.5.2.2. $s - t$ sled W s $\epsilon = 2$, pre konštantu $c = 3$.

Je jasné, že f_{n+1} je opäť integrálny tok v N. Vypočítajme jeho veľkosť $|f_{n+1}| = f_{n+1}(s, V)$. Pretože W obsahuje vrchol s iba raz, $\overrightarrow{e_0}$ je jediná trojica (e, x, y) s $x = s$ a $y \in V$, ktorej f-hodnota bola zmenená. Táto hodnota a teda tá z (this value, and hence that of) $f_{n+1}(s, V)$ bola zvýšená. Preto $|f_{n+1}| > |f_n|$, ako sme požadovali.

Ak $t \notin S_n$, potom $(S_n, \overline{S_n})$ je rez v N. Podľa (F3) pre f_n a definície S_n dostávame

$$f_n(\overrightarrow{e}) = c(\overrightarrow{e})$$

pre všetky $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(S_n, \overline{S_n})$, takže

$$|f_n| = f_n(S_n, \overline{S_n}) = c(S_n, \overline{S_n}),$$

ako sme požadovali. □

Pretože tok skonštruovaný v dôkaze vety 5.2.2 je integrálny, dokázali sme aj nesldovné:

Dôsledok 5.2.3: V každej sieti (s integrálnou kapacitnou funkciou) existuje integrálny tok maximálnej veľkosti.

Na záver mi[26] ešte nedá neuviesť dôkaz pochádzajúci od spomínaného Ondreja Vršanského. Najprv niekoľko úvodných definícií:

- Maximálny tok, t.j. tok s maximálnou veľkosťou $|f|$ označujeme f^*.
- Ak $f(e) < c(e)$, hovoríme, že *šíp e je rezervný.*
- Ak na ceste P sú všetky šípy rezervné, tak aj P je rezervná.
- Číslo $\min\{f(e) - c(e) \mid e \in P\}$ sa nazýva *rezerva* cesty P.

A teraz dotyčný dôkaz:

Dôkaz: (veta 5.2.2 – podľa Ondreja Vršanského)

Nech c je kapacita minimálneho rezu S v sieti N. Zostrojíme postupnosť tokov $\{f_i\}$ takú, že f_0 je nulový tok a $f_n = f^*$. Položíme $S_n = \{v \in V \mid \exists$ rezervná $s - v$ cesta v $f_n\}$ Ak $t \in S_n$, tak

$$f_{n+1} = \begin{cases} f_n + \text{rezerva na dopredných hranách } P \\ f_n - \text{rezerva na spätných hranách } P \\ f_n \text{ inde.} \end{cases}$$

Ak pre nejaké n $t \notin S_n$, tak f_n je nasýtený, a teda $|f| = c(S, \overline{S})$, z čoho vyplýva $f_n = f^*$. □

5.3 Toky s hodnotami v abelovských grupách

Nech $G = (V, E)$ je multigraf a H abelovská grupa. Ak f a g sú dve H-cirkulácie, potom iste $f + g : \overrightarrow{e} \mapsto f(\overrightarrow{e}) + g(\overrightarrow{e})$ a $-f : \overrightarrow{e} \mapsto -f(\overrightarrow{e})$ sú opäť H-cirkulácie. H-cirkulácie na G teda prirodzeným spôsobom tvoria grupu.

[26] mne = prekladateľovi

Tok f na G je *nikde-nulový*, ak $f(\vec{e}) \neq 0$ pre všetky $\vec{e} \in \vec{E}$. H-cirkulácia, ktorá je nikde-nulová sa nazýva *H-tok*.[27] Všimnime si, že množina H-tokov na G nie je uzavretá na sčítanie: ak dva H-toky add až na nulu na nejakej hrane $\vec{e}$, potom ich súčet viac nie je H-tokom. Podľa dôsledku 5.1.2 nemôže graf s H-tokom obsahovať most.

Pre konečné grupy H počet H-tokov na G — a in particular ich existencia — prekvapivo závisí iba na mohutnosti H, nie na H samotnom:

Veta 5.3.1: (Tutte 1954)

Pre každý multigraf G existuje polynóm P taký, že pre ľubovoľnú konečnú abelovskú grupu H je počet H-tokov na G rovný $P(|H|-1)$.

Dôkaz: Nech $G = (V, E)$; použijeme indukciu na $m := |E|$. Predpokladajme najprv, že všetky hrany G sú slučky. Potom keď je daná ľubovoľná konečná abelovská grupa H, každé zobrazenie $\vec{E} \to H - \{0\}$ je H-tok na G. Pretože $|\vec{E}| = |E|$, keď všetky hrany sú slučky, existuje $(|H|-1)^m$ takých zobrazení a $P := x^m$ je hľadaný polynóm.

Teraz predpokladajme, že existuje hrana $e_0 = xy \in E$, ktorá nie je slučka; nech $\vec{e_0} := (e_0, x, y)$ a $E' := E - \{e_0\}$. Uvažujeme multigrafy

$$G_1 := G - e_0 \qquad \text{a} \qquad G_2 := G/e_0.$$

Podľa indukčného predpokladu existujú polynómy P_i pre $i = 1, 2$ také, že pre ľubovoľnú konečnú abelovskú grupu H a $k := |H| - 1$ počet H-tokov na G_i je $P_i(k)$. Dokážeme, že počet H-tokov na G je rovný $P_2(k) - P_1(k)$; potom $P := P_2 - P_1$ je požadovaný polynóm.

Nech H je daná a označíme F množinu všetkých H-tokov na G. Pokúsime sa ukázať, že

$$|F| = P_2(k) - P_1(k). \tag{1}$$

H-toky na G_1 sú precisely the restrictions to $\vec{E'}$ tých cirkulácií na G, ktoré sú nulové na e_0, ale nikde inde. Označme F_1 množinu tých cirkulácií na G; potom

$$P_1(k) = |F_1|.$$

Naším cieľom je ukázať, že rovnako H-toky na G_2 zodpovedajú bijektívne tým H-cirkuláciám na G, ktoré sú nikde-nulové, možno okrem e_0. Množina F_2 týchto cirkulácií na G potom spĺňa

$$P_2(k) = |F_2|,$$

a F_2 je disjukntým sjednotením F_1 a F. Toto dokazuje (1) a teda aj vetu.

V G_2 nech $v_0 := v_{e_0}$ je vrchol kontrahovaný z e_0. Hľadáme bijekciu $f \mapsto g$ medzi F_2 a množinou H-tokov na G_2. Keď je dané f, nech g je restriction of f to $\vec{E'} - \vec{E'}(y, x)$. (Ako sa $x-y$ hrany $e \in E'$ stanú slučkami, majú iba jeden smer (e, v_0, v_0); ako jeho g-hodnotu vyberieme $f(e, x, y)$.) Potom g je iste H-tok na G_2; všimnime si, že (F2) platí na v_0 podľa lemy 5.1.1 pre G, s $X := \{x, y\}$.

Ostáva ukázať, že zobrazenie $f \mapsto g$ je bijekcia. Ak máme daný H-tok g na G_2 a pokúsime sa nájsť $f \in F_2$ s $f \mapsto g$, potom $f(\vec{e})$ je already determined as $f(\vec{e}) = -f(\overleftarrow{e})$ pre všetky $\vec{e} \in \vec{E'} - \vec{E'}(y, x)$; podľa (F1) ďalej máme $f(\vec{e}) = -f(\overleftarrow{e})$ pre všetky $\vec{e} \in \vec{E'}(y, x)$. Teda naše zobrazenie $f \mapsto g$ je bijektívne práve vtedy, keď pre dané g vždy existuje jedinečný spôsob definovania ostávajúcich hodnôt $f(\vec{e_0})$ a $f(\overleftarrow{e_0})$, takže f spĺňa (F1) v e_0 a (F2) v x a y.

This is indeed the case. Nech $V' := V - \{x, y\}$. f-hodnoty fixed už spĺňajú

$$f(x, V') + f(y, V') = g(v_0, V') = 0, \tag{2}$$

podľa (F2) pre g. S

$$h := \sum_{\vec{e} \in \vec{E'}(x,y)} f(\vec{e}) \qquad \left(= \sum_{e \in E'(x,y)} g(e, v_0, v_0) \right)$$

[27] Teda, kým cirkulácie sú špeciálne toky, H-toky sú špeciálne H-cirkulácie. Táto nešťastná terminológia má svoj pôvod v dvoch rozličných základoch teórie tokov: tej o tokoch v sieťach v časti 5.2 a tej o algebraických tokoch, uvažovanej tu.

dostaneme

$$f(x,V) = f(\overrightarrow{e_0}) + h + f(x,V')$$

a

$$f(y,V) = f(\overleftarrow{e_0}) - h + f(y,V').$$

A teda f bude spĺňať (F1) a (F2) práve vtedy, keď položíme

$$f(\overrightarrow{e_0}) := -f(x,V') - h \underset{(2)}{=} f(y,V') - h$$

a $f(\overleftarrow{e_0}) := -f(\overrightarrow{e_0})$. □

Polynóm P z vety 5.3.1 je známy ako *tokový polynóm* grafu G.

Dôsledok 5.3.2: Ak H a H' sú dve konečné abelovské grupy rovnakej mohutnosti, potom G má H-tok práve vtedy, keď G má H'-tok.

Dôsledok 5.3.2 má základné implikácie pre teóriu algebraických tokov: Indukuje, že rozhodujúce problémy v existencii dôkazov H-tokov are unlikely to be of a group-theoretic nature. Naopak, byť schopný vybrať vhodnú grupu môže byť celkom prospoešné; uvidíme pekný príklad pre toto v leme 5.4.5.

Nech $k \geq 1$ je celé číslo a $G = (V,E)$ je multigraf. $\mathbb{Z}$-tok f na G taký, že $0 < |f(\vec{e})| < k$ pre všetky $\vec{e} \in \vec{E}$ sa nazýva *k-tok*. Je jasné, že akýkoľvek k-tok je tiež ℓ-tok pre všetky $\ell > k$. Teda sa môžeme pýtať, aké je najmenšie celé číslo k také, že G umožňuje k-tok — predpokadajúc, že nejaké také k existuje. Toto minimálne k nazveme *tokové číslo* grafu G a označíme ho $\varphi(G)$; ak G nemá žiadny k-tok pre ľubovoľné k, položíme $\varphi(G) := \infty$.

Úloha zisťovania tokových čísel rýchlo vedie k jednému z najhlbších otvorených problémov v teórii grafov. Budeme uvažovať tieto neskôr v kapitole. Najprv však sa pozrime, ako k-toky súvisia so všeobecnejšou predstavou H-tokov.

Existuje blízka súvislosť medzi k-tokmi a $\mathbb{Z}_k$ tokmi. Nech σ_k označuje prirodzený homomorfizmus $i \mapsto \bar{i}$ zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}_k$. Podľa kompozície s σ_k, každý k-tok definuje $\mathbb{Z}_k$-tok. Ako ukazuje nasledujúca veta, opak platí tiež: z každého $\mathbb{Z}_k$-toku na G môžeme skonštruovať k-tok na G. V pohľade dôsledku 5.3.2 toto znamená, že všeobecná otázka existencie H-tokov pre ľubovoľné grupy H sa redukuje na existenciu problému k-tokov.

Veta 5.3.3: (Tutte 1950)
Multigraf umožňuje k-tok práve vtedy, keď umožňuje $\mathbb{Z}_k$-tok.

Dôkaz: Nech g je $\mathbb{Z}_k$-tok na multigrafe $G = (V,E)$; zostrojíme k-tok f na G. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že G nemá slučky. Nech F je množina všetkých tokov f s celočíselnými hodnotami na G takých, že $|f(\vec{e})| < k$ pre všetky $\vec{e} \in \vec{E}$ a $\sigma_k \circ f = g$; všimnime si, že ako g, každý $f \in F$ je nikde-nulový.

Ukážeme najprv, že $F \neq \emptyset$. Pretože môžeme vyjadriť každú hodnotu $g(\vec{e}) \in \mathbb{Z}_k$ ako $\bar{i}$, kde $|i| < k$ a potom položiť $f(\vec{e}) := i$, potom je jasné priradenie $f : \vec{E} \to \mathbb{Z}$ také, že $|f(\vec{e})| < k$ pre všetky $\vec{e} \in \vec{E}$ a $\sigma_k \circ f = g$. Pre každú hranu $e \in E$ vyberme jeden z jej dvoch smerov a označme ho ako $\vec{e}$. Potom môžeme zadefinovať $f' : \vec{E} \to \mathbb{Z}$ položením $f'(\vec{e}) := f(\vec{e})$ a $f'(\overleftarrow{e}) := -f(\vec{e})$ pre každé $e \in E$. Potom f' je tok s hodnotami v požadovanom rozsahu; ostáva ukázať, že $\sigma_k \circ f'$ a g súhlasia nielen na vybraných smeroch $\vec{e}$, ale aj na ich inverzných $\overleftarrow{e}$. Pretože σ_k je homomorfizmus, platí nasledovné:

$$(\sigma_k \circ f')(\overleftarrow{e}) = \sigma_k(-f(\vec{e})) = -(\sigma_k \circ f)(\vec{e}) = -g(\vec{e}) = g(\overleftarrow{e}).$$

Teda $f' \in F$, takže F je samozrejme neprázdny.

Náš cieľ je nájsť $f \in F$, ktoré spĺňa Kirchhoffov zákon (F2), a je teda k-tok. Ako kandidáta uvažujme $f \in F$ pre ktorý suma

$$K(f) := \sum_{x \in V} |f(x,V)|$$

všetkých odchýliek z Kirchhoffovho zákona je minimálna. Dokážeme, že $K(f) = 0$; potom jasne $f(x,V) = 0$ pre každé x, ako sme požadovali.

Predpokladajme $K(f) \neq 0$. Pretože f spĺňa (F1) a pretože $\sum_{x \in V} f(x,V) = f(V,V) = 0$, existuje vrchol x, pre ktorý platí

$$f(x,V) > 0. \tag{1}$$

Nech $X \subseteq V$ je množina všetých vrcholov x', pre ktoré G obsahuje sled $x_0 e_0 \dots e_{\ell-1} x_\ell$ z x do x' taký, že $f(e_i, x_i, x_{i+1}) > 0$ pre každé $i < \ell$; ďalej ešte nech $X' := X - \{x\}$.

Najprv musíme ukázať, že X' obsahuje vrchol x' s $f(x',V) < 0$. Podľa definície X máme $f(e,x',y) \leq 0$ pre všetky hrany $e = x'y$ také, že $x' \in X$ a $y \in \overline{X}$. In particular, toto platí pre $x' = x$. Teda z (1) vyplýva $f(x,X') > 0$. Potom $f(X',x) < 0$ podľa (1), rovnako ako $f(X',X') = 0$. Teda ak $f(x',V) \geq 0$ pre každé $x' \in X'$, potom

$$0 \leq \sum_{x' \in X'} f(x',V) = f(X',V) = f(X',\overline{X}) + f(X',x) + f(X',X') < 0,$$

čo je spor.

Takže existuje $x' \in X'$ také, že

$$f(x',V) < 0; \tag{2}$$

nech $W = x_0 e_0 \dots e_{\ell-1} x_\ell$ je zodpovedajúci $x - x'$ sled z definície X. Modifikujme f tým, že pošleme nejaký tok späť po W: definujeme $f' : \overrightarrow{E} \to \mathbb{Z}$ takto:

$$f' : \overrightarrow{e} \mapsto \begin{cases} f(\overrightarrow{e}) - k & \text{pre } \overrightarrow{e} = (e_i, x_i, x_{i+1}), i = 0, \dots, \ell - 1 \\ f(\overrightarrow{e}) + k & \text{pre } \overrightarrow{e} = (e_i, x_{i+1}, x_i), i = 0, \dots, \ell - 1 \\ f(\overrightarrow{e}) & \text{pre } e \notin W. \end{cases}$$

Podľa definície W dostaneme $|f'(\overrightarrow{e})| < k$ pre všetky $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$. Preto f' ako f, leží v F.

Ako modifikácia f ovplyvnila K ? Na všetkých vnútorných vrcholoch v z W, rovnako ako mimo W, odchýlka z Kirchhoffovho zákona ostáva nezmenená:

$$f'(v,V) = f(v,V) \qquad \text{pre všetky } v \in V - \{x, x'\}. \tag{3}$$

Na druhej strane, pre x a x' máme

$$f'(x,V) = f(x,V) \quad \text{a} \quad f'(x',V) = f(x',V) + k. \tag{4}$$

Pretože g je $\mathbb{Z}_k$-tok a odtiaľ

$$\sigma_k(f(x,V)) = g(x,V) = \overline{0} \in \mathbb{Z}_k$$

a

$$\sigma_k(f(x',V)) = g(x',V) = \overline{0} \in \mathbb{Z}_k,$$

$f(x,V)$ a $f(x',V)$ sú oba násobkami k. Preto podľa (1) a (2) $f(x,V) \geq k$ a $f(x',V) \leq -k$. Ale potom (4) implikuje, že

$$|f'(x,V)| < |f(x,V)| \quad \text{a} \quad |f'(x',V)| < |f(x',V)|.$$

Spolu s (3), z tohto dostaneme $K(f') < K(f)$, čo je v spore s voľbou f.

Z toho dôvodu $K(f) = 0$ ako bolo požadované a f je naozaj k-tok. □

Pretože súčet dvoch $\mathbb{Z}_k$-tokov je vždy ďalší $\mathbb{Z}_k$-tok, $\mathbb{Z}_k$-toky sú často skonštruovateľné (sčítaním nad vhodnými čiastkovými tokmi) ľahšie ako k-toky. Týmto spôsobom môže byť veta 5.3.3 značnou pomocou v zisťovaní, či nejaký graf obsahuje alebo neobsahuje k-tok. V nasledujúcich častiach sa streteme s niekoľko príkladmi pre toto.

5.4 k-toky pre malé k

Triviálne, graf má 1-tok (prázdnu množinu) práve vtedy, keď nemá hrany. V tejto časti zozbierame zopár príkladov postačujúcich podmienok, pod ktorými graf bude obsahovať 2-, 3- alebo 4-tok. Viac príkladov môže byť nájdených v cvičeniach.

Lema 5.4.1: Graf má 2-tok práve vtedy, keď všetky jeho stupne sú párne.

Dôkaz: Podľa vety 5.3.3 graf $G = (V, E)$ má 2-tok práve vtedy, keď má $\mathbb{Z}_2$ tok, tzn. práve vtedy, keď konštantné zobrazenie $\vec{E} \to \mathbb{Z}_2$ s hodnotou $\overline{1}$ spĺňa (F2). Toto je the case práve vtedy, keď všetky stupne sú párne. $\square$

Pre ostatok tejto kapitoly nazveme graf *párnym*, ak stupne všetkých jeho vrcholov sú párne.

Lema 5.4.2: Kubický graf má 3-tok práve vtedy, keď bipartitný.

Dôkaz: Nech $G = (V, E)$ je kubický graf. Predpokladajme najprv, že G má 3-tok a teda aj $\mathbb{Z}_3$-tok f. Ukážeme, že ľubovoľná kružnica $C = x_0 \dots x_\ell x_0$ v G má párnu dĺžku (viď lema 0.6.1). Uvažujme dve po sebe idúce hrany na C, povedzme $e_{i-1} := x_{i-1}x_i$ a $e_i := x_i x_{i+1}$. Ak f priradil rovnakú hodnotu obom týmto hranám v smere doprednej orientácie C, tzn. ak $f(e_{i-1}, x_{i-1}, x_i) = f(e_i, x_i, x_{i+1}$, potom f by nemohla spĺňať (F2) na x_i pre ľubvoľnú nenulovú hodnotu tretej hrany na x_i. Preto f priradí hodnoty $\overline{1}$ a $\overline{2}$ hranám na C striedavo a in particular C má párnu dĺžku.

Obrátene, nech G je bipartitný, s vrcholovou bipartíciou $\{X, Y\}$. Pretože G je kubický, zobrazenie $\vec{E} \to \mathbb{Z}_3$ definované $f(e, x, y) := \overline{1}$ a $f(e, y, x) := \overline{2}$ pre všetky hrany $e = xy$ s $x \in X$ a $y \in Y$ je $\mathbb{Z}_3$-tok na G. Podľa vety 5.3.3 potom G má 3-tok. $\square$

Aké sú tokové čísla na kompletných grafoch K_n ? Pre nepárne $n > 1$ máme $\varphi(K_n) = 2$ podľa lemy 5.4.1. Okrem toho, $\varphi(K_2) = \infty$ a $\varphi(K_4) = 4$; toto ľahko možno vidieť (a vyplýva to z liem 5.4.2 a 5.4.5). Je zaujímavé, že K_4 je jediný kompletný graf s tokovým číslom 4:

Lema 5.4.3: Pre všetky párne $n > 4$ platí $\varphi(K_n) = 3$.

Dôkaz: Lema 5.4.1 implikuje, že $\varphi(K_n) \geq 3$ pre párne n. Ukážeme indukciou na n, že každý $G = K_n$ s párnym $n > 4$ má 3-tok.

Pre bázu indukcie, nech $n = 6$. Potom G je hranovo-disjunktné zjednotenie troch grafov G_1, G_2, G_3 s $G_1, G_2 = K_3$ a $G_3 = K_{3,3}$. Podľa lemy 5.4.1, G_1 aj G_2 majú 2-tok, kým G_3 má 3-tok podľa lemy 5.4.2. Zjednotenie všetkých týchto tokov je 3-tok na G.

Teraz nech $n > 6$ a predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n-2$. Je jasné, že G je hranovo-disjunktné zjednotenie K_{n-2} a grafu $G' = (V', E')$ s $G' = \overline{K_{n-2}} * K_2$. K_{n-2} má podľa indukcie 3-tok. Podľa vety 5.3.3 teda stačí nájsť $\mathbb{Z}_3$-tok na G'. Pre každý vrchol z z $\overline{K_{n-2}} \subseteq G'$, nech f_z je $\mathbb{Z}_3$-tok na trojuholníku $zxyz \subseteq G'$, kde $e = xy$ je hrana z K_2 v G'. Nech $f : \vec{E'} \to \mathbb{Z}_3$ je súčet týchto tokov. Je jasné, že f je nikde-nulový, možno okrem hrany (e, x, y) a (e, y, x). Ak $f(e, x, y) \neq \overline{0}$, potom f je požadovaný $\mathbb{Z}_3$-tok na G'. Ak $f(e, x, y) = \overline{0}$, potom $f + f_z$ (pre ľubovoľné z) je $\mathbb{Z}_3$-tok na G'. $\square$

Lema 5.4.4: Každý hranovo 4-súvislý graf má 4-tok.

Dôkaz: Nech G je hranovo 4-súvislý graf. Podľa dôsledku 2.5.2 G má dve hranovo-disjunktné kostry T_i, $i = 1, 2$. Pre každú hranu $e \notin T_i$ nech $C_{i,e}$ je jedinečný cyklus v $T_i + e$ a nech $f_{i,e}$ je $\mathbb{Z}_4$-tok hodnoty $\overline{i}$ okolo $C_{i,e}$ — presnejšie: $\mathbb{Z}_4$-tok na G s hodnotami $\overline{i}$ a $-\overline{i}$ na hranách z $C_{i,e}$ a nulou inde.

Nech $f_1 := \sum_{e \notin T_1} f1, e$. Pretože každá $e \notin T_1$ leží iba na jednej kružnici $C_{1,e'}$ (namely, pre $e = e'$), f_1 berie iba hodnoty $\overline{1}$ a $-\overline{1}$ $(= \overline{3})$ mimo T_1. Nech

$$F := \{e \in E(T_1) \mid f_1(e) = \overline{0}\}$$

a $f_2 := \sum_{e \in F} f_{2,e}$. Ako vyššie, $f_2(e) = \overline{2} = -\overline{2}$ pre všetky $e \in E$. Teraz $f := f_1 + f_2$ je súčet $\mathbb{Z}_4$-cirkulácií a teda aj samotný je $\mathbb{Z}_4$-cirkulácia. Okrem toho, f je nikde-nulový: na hranách v E dostane hodnotu $\overline{2}$, na hranách $T_1 - F$ súhlasí s f_1 (a teda je nenulová podľa voľby F)a na všetkých hranách mimo T_1 dostane jednu z hodnôt $\overline{1}$

a $\overline{3}$. Teda f je $\mathbb{Z}_4$-tok na G a tvrdenie platí podľa vety 5.3.3. □

Nasledujúca lema popisuje grafy s 4-tokmi v pojmoch tých s 2-tokmi:

Lema 5.4.5:

1. Graf má 4-tok práve vtedy, keď je zjednotením dvoch párnych podgrafov.

2. Kubický graf má 4-tok práve vtedy, keď je hranovo 3-súvislý.

Dôkaz: Nech $\mathbb{Z}_2^2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ je Kleinova štvorgrupa. (Teda prvky $\mathbb{Z}_2^2$ sú dvojice (a, b) s $a, b \in \mathbb{Z}_2$ a $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$.) Podľa dôsledku 5.3.2 a vety 5.3.3 graf má 4-tok práve vtedy, keď má $\mathbb{Z}_2^2$-tok.

(i) Žiadaná ekvivalencia teraz vyplýva priamo z lemy 5.4.1.

(ii) Nech $G = (V, E)$ je kubický graf. Predpokladajme najprv, že G má $\mathbb{Z}_2^2$-tok f a definujeme hranové farbenie $E \to \mathbb{Z}_2^2 - \{0\}$. Keďže $a = -a$ pre všetky $a \in \mathbb{Z}_2^2$, dostaneme $f(\overrightarrow{e}) = f(\overleftarrow{e})$ pre každé $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$; zafarbime hranu e touto farbou $f(\overrightarrow{e})$. Teraz ak dve hrany so spoločným koncom v majú rovnakú farbu, potom tieto dve hodnoty f by sa sčítali na nulu; podľa (F2) by potom f priradila nulu tretej hrane na v. Keďže toto je v spore s definíciou f, naše hranové farbenie je správne.

Obrátene, pretože sa tri nenulové prvky $\mathbb{Z}_2^2$ sčítajú na nulu, každé hranové 3-farbenie $c : E \to \mathbb{Z}_2^2 - \{0\}$ definuje $\mathbb{Z}_2^2$-tok na G položením $f(\overrightarrow{e}) = f(\overleftarrow{e}) = c(e)$ pre všetky $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$. □

Dôsledok 5.4.6: Každý kubický hranovo 3-zafarbiteľný graf neobsahuje most.

5.5 Tokovo-farbiaca dualita

V tejto časti uvidíme prekvapujúcu súvislosť medzi tokmi a farbením: každý k-tok na planárnom multigrafe dáva vznik na vrcholové k-farbenie ako duálny efekt a naopak. Týmto spôsobom sa skúmanie k-tokov objavuje ako prirodzené zovšeobecňovanie známeho problému farbenia mapy v rovine.

Nech $G = (V, E)$ a $G^* = (V^*, E^*)$ sú duálne planárne multigrafy. Pre jednoduchosť predpokladajme, že G a G^* nemajú ani mosty ani slučky[28] a sú netriviálne. Pre hranové množiny $F \subseteq E$ píšeme

$$F^* := \{e^* \in E^* \mid e \in F\}.$$

Obrátene, ak je daná podmnožina množiny E^*, zvyčajne ju budeme ihneď písať v tvare F^* a teda nech $F \subseteq F$ je definovaná implicitne cez zobrazenie $e \mapsto e^*$.

Uvažujme danú cirkuláciu g na G^*: ako môžeme uplatniť dualitu medzi G a G^* na odvodenie nejakej informácie o G z g ? Najvšeobecnejšia vlastnosť všetkých cirkulácií je lema 5.1.1, ktorá hovorí, že $g(X, \overline{X}) =$ pre všetky $X \subseteq V^*$. Podľa lemy 3.6.1 minimálne rezy $E^*(X, \overline{X})$ v G^* presne korešpondujú s kružnicami v G. Teda ak vezmeme kompozíciu f zobrazení $e \mapsto e^*$ a g a sčítame ich hodnoty nad hranami kružnice v G, potom tento súčet by mal byť opäť nulový.

Samozrejme, stále je tu technický problém: pretože g neberie svoje argumenty v E^* ale v $\overrightarrow{E^*}$, nemôžeme jednoducho definovať f ako vyššie: najprv musíme zjemniť bijekciu $e \mapsto e^*$ na bijekciu z $\overrightarrow{E}$ do $\overrightarrow{E^*}$, tzn. priradiť každej $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$ zovšeobecnene jeden z dvoch smerov e^*. Toto bude zámerom našej prvej lemy. Po tom ukážeme, že f predsa len sumuje na nulu po (does indeed sum to zero along) ľubovoľnej kružnici v G.

Ak $C = v_0 \dots v_{\ell-1} v_0$ je kružnica s hranami $e_i = v_i v_{i+1}$ (a $v_\ell := v_0$), budeme nazývať

$$\overrightarrow{C} := \{(e_i, v_i, v_{i+1}) \mid i < \ell\}$$

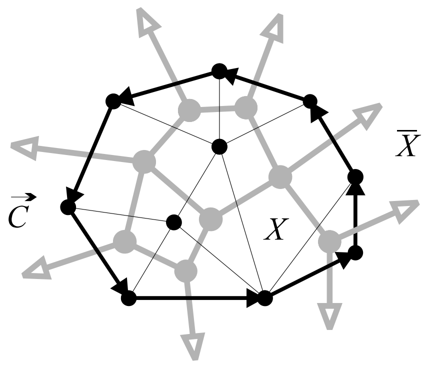
kružnicou s orientáciou. Všimnime si, že táto definícia $\overrightarrow{C}$ závisí na vrcholovom očíslovaní vybratom na označenie C: každá kružnica má dve orientácie. Obrátene, samozrejme, C môže byť znovuzostrojená z množiny $\overrightarrow{C}$. V praxi, budeme voľne hovoriť o C, dokonca aj keď, formálne, iba $\overrightarrow{C}$ bola definovaná.

[28] Ak by sme ich chceli povoliť, museli by sme najprv dať slučkám dva smery ako iným hranám. V rovine môže byť toto urobené pravdaže bez potiaží, ale seems hardly worth the trouble: náš hlavný výsledok, veta 5.5.3 je ľahko redukovateľná na prípad bez mostov a slučiek.

Lema 5.5.1: Existuje bijekcia $^* : \vec{e} \mapsto \vec{e}^*$ z $\vec{E}$ do $\vec{E^*}$ s nasledovnými vlastnosťami:

1. Základná hrana k $\vec{e}^*$ je vždy e^*, tzn. $\vec{e}^*$ je jedným z dvoch smerov $\vec{e}^*$, $\overleftarrow{e}^*$ hrany e^*.
2. Ak $C \subseteq G$ je kružnica, $F := E(C)$ a ak $X \subseteq V^*$ je taká, že $F^* = E^*(X, \overline{X})$, potom existuje orientácia $\vec{C}$ kružnice C s $\{\vec{e}^* \mid \vec{e} \in \vec{C}\} = \vec{E^*}(X, \overline{X})$.

Dôkaz lemy 5.5.1 nie je úplne triviálny: je založený na tzv. *orientovateľnosti* roviny a nemôžeme ho tu podať. Stále je tvrdenie lemy intuitívne prijateľné. Iste, pre $e = vw$ a $e^* = xy$ definujeme priradenie $(e, v, w) \mapsto (e, v, w)^* \in \{(e^*, x, y), (e^*, y, x)\}$ jednoducho otočením e a jej koncov v smere hodinových ručičiek na e^* (obr.5.5.1), potom výsledné zobrazenie $\vec{e} \mapsto \vec{e}^*$ spĺňa dve tvrdenia lemy.



obr.5.5.1. Dualita medzi orientovanými kružnicami a rezmi.

Je daná abelovská grupa H, nech $f : \vec{E} \to H$ a $g : \vec{E^*} \to H$ sú dve zobrazenia také, že

$$f(\vec{e}) = g(\vec{e}^*)$$

pre všetky $\vec{e} \in \vec{E}$. pre $\vec{F} \subseteq \vec{E}$ položíme

$$f(\vec{F}) := \sum_{\vec{e} \in \vec{F}} f(\vec{e}).$$

Lema 5.5.2:

1. Zobrazenie g je tok na G^* práve vtedy, keď f je tok na G.
2. Zobrazenie g je cirkulácia na G^* práve vtedy, keď f je tok na G taký, že $f(\vec{C}) = 0$ pre každú kružnicu $\vec{C}$ s orientáciou.

Dôkaz: Tvrdenie (i) vyplýva z lemy 5.5.1 (i) a skutočnosti, že $\vec{e} \mapsto \vec{e}^*$ je bijektívne.

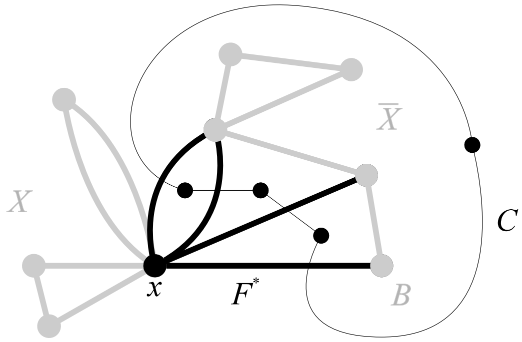
Pre doprednú implikáciu (ii) predpokladajme, že g je cirkulácia na G^* a uvaťujme kružnicu $C \subseteq G$ s nejakou danou orientáciou. Nech $F := E(C)$. Podľa lemy 3.6.1 je F^* minimálny rez v G^*, tzn. $F^* = E^*(X, \overline{X})$ pre nejakú vhodnú $X \subseteq V^*$. Podľa definície f a g, lemy 5.5.1 (ii) a lemy 5.1.1 dostávame

$$f(\vec{C}) = \sum_{\vec{e} \in \vec{C}} f(\vec{e}) = \sum_{\vec{d} \in \vec{E}^*(X, \overline{X})} g(\vec{d}) = g(X, \overline{X}) = 0$$

pre jednu z dvoch orientácií $\vec{C}$ kružnice C. Potom podľa $f(\overleftarrow{C}) = -f(\vec{C})$ a aj odpovedajúca hodnota pre našu danú orientáciu musí byť nulová.

Pre spätnú implikáciu stačí podľa (1) ukázať, že g spĺňa (F2), tzn. $g(x, V^*) = 0$ pre každé $x \in V^*$. Dokážeme, že $g(x, V(B)) = 0$ pre každý blok B grafu G^* obsahujúci x; pretože každá hrana G^* na x leží presne v jednom takom bloku, toto bude implikovať $g(x, V^*) = 0$.

Takže nech $x \in V^*$ je daný a nech B je ľubovoľný blok G^* obsahujúci x. Ako netriviálny planárny a duálny, G^* nemá izolované vrcholy, takže $B - x \neq \emptyset$. Nech F^* je množina všetkých hrán z



obr.5.5.2. Rez F^* v G^*.

B pri x (obr.5.5.2) a nech X je vrcholová množina komponentu $G^* - F^*$ obsahujúca/obsahujúceho x. Potom $\emptyset \neq V(B - x) \subseteq \overline{X}$ podľa maximality B ako podgraf bez artikulácií. Odtiaľ

$$F^* = E^*(X, \overline{X}) \tag{1}$$

podľa definície X, tzn. F^* je rez v G^*. Ako duálny, G^* je súvislý, takže $G^*[\overline{X}]$ je tiež súvislý. Iste, každý vrchol $\overline{X}$ je spojený s x cestou $P \subseteq G^*$, ktorej posledná hrana leží v F^*. Potom $P - x$ je cesta v $G^*[\overline{X}]$ pretínajúca B. Pretože x nerozdeľuje B, toto ukazuje, že $G^*[\overline{X}]$ je súvislý.

Teda X aj $\overline{X}$ sú oba súvislé v G^*, takže F^* je dokonca minimálny rez v G^*. Nech $C \subseteq G$ je kružnica s $E(C) = F$, ktorá existuje podľa lemy 3.6.1. Podľa lemy 5.5.1 (ii), C má orientáciu $\overrightarrow{C}$ takú, že $\{\overrightarrow{e}^* \mid \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{C}\} = \overrightarrow{E^*}(X, \overline{X})$. Podľa (1) však $\overrightarrow{E^*}(X, \overline{X}) = \overrightarrow{E^*}(x, V(B))$, takže

$$g(x, V(B)) = g(X, \overline{X}) = f(\overrightarrow{C}) = 0$$

podľa definície f a g. $\square$

S pomocou lemy 5.5.2 môžeme teraz dokázať našu vetu o dualite medzi farbením a tokmi pre planárne multigrafy. Ak $P = v_0 \dots v_\ell$ je cesta s hranami $e_i = v_i v_{i+1}$ ($i < \ell$), položíme množinu (závislú na našom očislovaní vrcholov P)

$$\overrightarrow{P} := \{(e_i, v_i, v_{i+1}) \mid i < \ell\}$$

a nazveme $\overrightarrow{P}$ $v_0 \to v_\ell$ *cestou.* Opäť, P môže byť implicitne určená s $\overrightarrow{P}$.

Veta 5.5.3: (Tutte 1954)

Pre každú duálnu dvojicu G, G^* planárnych multigrafov platí

$$\chi(G) = \varphi(G^*).$$

Dôkaz: Nech $G := (V, E)$ a $G^* := (V^*, E^*)$. Pre $|G| \in \{1, 2\}$ možno tvrdenie jednoducho overiť; budeme teda predpokladať, že $|G| \geq 3$ a použijeme indukciu na počet mostov v F. Ak $e \in G$ je most, potom e^* je slučka a $G^* - e^*$ je plane dual of G/e (prečo?). Odtiaľ, podľa indukčného prepokladu

$$\chi(G) = \chi(G/e) = \varphi(G^* - e^*) = \varphi(G^*);$$

pre prvú a poslednú rovnosť použijeme, že podľa $|G| \geq 3$ hrana e nie je jedinou hranou v G.

Takže všetko, čo ostáva overiť, je báza indukcie; predpokladajme, že G nemá most. Ak G má slučku, potom G^* má most a $\chi(G) = \infty = \varphi(G^*)$ podľa konvencie. Takže tiež môžeme predpokladať, že G nemá slučku. Potom $\chi(G)$ je konečné; dokážeme pre dané $k \geq 2$, že G je k-zafarbiteľný práve vtedy, keď G^* má k-tok. Keďže G — a teda aj G^* — nemá ani slučky ani mosty, môžeme použiť lemu 5.5.1 a 5.5.2 na G a G^*. Nech $\overrightarrow{e} \mapsto \overrightarrow{e}^*$ je bijekcia medzi $\overrightarrow{E}$ a $\overrightarrow{E^*}$ z lemy 5.5.1.

Najprv predpokladajme, že G^* má k-tok. Potom G^* tiež má $\mathbb{Z}_k$-tok g. Ako predtým, nech $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{Z}_k$ je definované ako $f(\overrightarrow{e}) := g(\overrightarrow{e}^*$. Použijeme f na definovanie vrcholového farbenia $c : V \to \mathbb{Z}_k$ grafu G.

Začnime s pomocnou obhliadkou (auxiliary observation) pre ľubovoľné vrcholy $v, w \in G$:

(1) Pre ľubovoľné dve $v-w$ cesty $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{P'}$ v G platí $f(\overrightarrow{P}) = f(\overrightarrow{P'})$

Toto jednoducho vyplýva podľa indukcie na $|P|+|P'|$. Samozrejme, ak P a P' nemajú spoločné vnútorné vrcholy, potom buď $P = P' \simeq K_1$ alebo $\overrightarrow{P} \cup \overleftarrow{P'}$ je kružnica s orientáciou a

$$\overline{0} = f(\overrightarrow{P} \cup \overleftarrow{P'}) = f(\overrightarrow{P} - f(\overrightarrow{P'})$$

podľa lemy 5.5.2 (ii); v oboch prípadoch tvrdenie platí. Na druhej strane, ak u je vrchol v $\dot{P} \cap \dot{P'}$, potom podľa indukčného predpokladu

$$f(\overrightarrow{P}) = f(\overrightarrow{Pu}) + f(\overrightarrow{uP}) = f(\overrightarrow{P'u}) + f(\overrightarrow{uP'}) = f(\overrightarrow{P'}).$$

Toto dokončuje dôkaz (1).

Zafixujme (Let us fix) vrchol $v_0 \in G$. Pre každý vrchol $w \in V$ vyberieme $v_0 \to w$ cestu $\overrightarrow{P}$ v G a položíme $c(w) := f(\overrightarrow{P})$; podľa (1) toto spraví c dobre definovaným na všetkých prvkoch V.[29]

Ostáva ukázať, že c je správne farbenie, tzn. že $c(w) \neq c(w')$ pre susedné vrcholy w, w'. Ak $w, w' \in V$ sú susedné, potom bez újmy na všeobecnosti G obsahuje $v_0 \to w'$ cestu $\overrightarrow{P}$ končiacu hranou $e := ww'$; ak nie, iba zameníme úlohu w a w'. Pretože g je nikde-nulový, dostávame $f(e, w, w') \neq \overline{0}$ podľa definície f. Potom podľa (1)

$$c(w') - c(w) = f(\overrightarrow{P}) - f(\overrightarrow{Pw}) = f(e, w, w') \neq \overline{0},$$

takže $c(w) \neq c(w')$, ako sme požadovali.

Obrátene, teraz predpokladajme, že G má k-farbeni c. Definujme $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{Z}$ ako

$$f(e, v, w) := c(w) - c(v),$$

a $g : \overrightarrow{E^*} \to \mathbb{Z}$ ako

$$g(\overrightarrow{e}^*) := f(\overrightarrow{e}).$$

Je jasné, že f je tok s hodnotami v $\{\pm 1, \ldots, \pm(k-1)\}$, takže podľa lemy 5.5.2 (i) platí to isté pre g. Podľa definície f ďalej dostaneme $f(\overrightarrow{C}) = 0$ pre každú kružnicu $\overrightarrow{C}$ s orientáciou. Podľa lemy 5.5.2 (ii) preto g je k-tok. □

5.6 Tutteho tokové hypotézy

Ako môžeme zistiť tokové číslo grafu ? Iste má každý graf (bez mostov) tokové číslo, čiže k-tok pre nejaké k ? Môžu sa tokové čísla, ako chromatické čísla, stať ľubovoľne veľkými ? Môžeme charakterizovať grafy umožňujúce k-tok pre dané k ?

Z týchto otázok v tejto časti zodpovedáme druhú a tretiu: dokážeme, že každý graf bez mostov má 6-tok. In particular, graf má tokové číslo práve vtedy, keď nemá most. Otázka charakterizácie grafov s k-tokom ostáva zaujímavou pre $k \in \{3, 4, 5\}$. Čiastočné odpovede sú odporúčané nasledujúcimi tromi Tutteho hypotézami, ktorý inicioval algebraickú teóriu tokov.

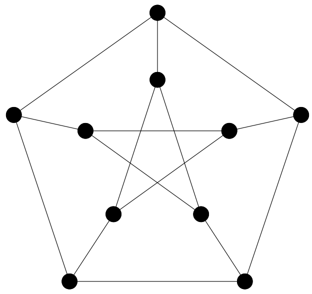
Najstaršia a najznámejšia z Tutteho hypotéz je jeho *5-toková hypotéza*:

Hypotéza o 5-toku: (Tutte 1954)

Každý multigraf bez mostov má 5-tok.

Ktoré grafy majú 4-tok ? Podľa lemy 5.4.4, hranovo 4-súvislé grafy sú medzi nimi. Petersenov graf (obr.5.6.1) na druhej strane je príkladom grafu bez mostov, ktorý neobsahuje 4-tok: pretože je kubický, ale nie je hranovo 3-zafarbiteľný (cvičenie v kapitole 4), nemôže mať 4-tok podľa lemy 5.4.5 (ii).

[29] this makes c well defined on all of V.



obr.5.6.1. Petersenov graf.

Tutteho *4-toková hypotéza* hovorí, že Petersenov graf musí byť prítomný v každom grafe bez 4-toku:

Hypotéza o 4-toku: (Tutte 1954)
Každý multigraf bez mostov neobsahujúci Petersenov graf ako minor, má 4-tok.

Aj keby bola pravdivá, 4-toková hypotéza nebude najlepšia možná: K_{11} napr. obsahuje Petersenov graf ako minor ale má 4-tok, dokonca aj 2-tok. Hypotéza sa stane viac prirodzenou pre riedke grafy a samozrejme, kubické grafy tvoria špeciálny prípad.

Kubický graf bez mostov alebo multigraf bez 4-toku (ekvivalentne, bez hranového 3-farbenia) sa nazýva *snark*. 4-toková hypotéza pre kubické grafy hovorí, že každý snark obsahuje Petersenov graaf ako minor; v tomto zmysle by Petersenov graf bol najmenším snarkom. Snarky tvoria tvrdé jadro aj 5-tokovej aj 4-tokovej hypotézy: 4CT je ekvivalentná s tvrdením, že žiadny snark nie je planárny a nie je ťažké redukovať 5-tokovú hypotézu na prípad snarkov.[30] Avšak hoci snarky tvoria veľmi špeciálnu triedu grafov, žiadny z menovaných problémov nevyzerá stať sa touto redukciou omnoho ľahším.[31]

Hypotéza o 3-toku: (Tutte 1972)
Každý multigraf bez rezu pozostávajúceho z práve jednej alebo práve troch hrán má 3-tok.

Opäť, 3-toková hypotéza nebude najlepšia možná: je ľahké skonštruovať grafy s trojhrannými rezmi, ktoré majú 3-tok (cvičenie):

Podľa našej duliatnej vety 5.5.3, všetky tri tokové hypotézy sú pravdivé pre planárne grafy a teda motivated: 3-toková hypotéza sa prevádza na Grötzschovu vetu (4.1.3), 4-toková hypotéza na 4CT (pretože petersenov graf nie je planárny, nie je minorom planárneho grafu), 5-toková hypotéza na 5CT.

Ukončíme túto časť jej hlavným výsledkom:

Veta 5.6.1: (Seymour 1981)
Každý graf bez mostov má 6-tok.

Dôkaz:

Ďalej neprekladám … slabá slovná zásoba.

[30] To isté sa aplikuje na ďalšiu dobre známu hypotézu, a to na *hypotézu o dvojitej prikrývke kružnice* (cycle double cover conjecture).
[31] Že snarky sú veľmi vyhýbavé bolo nejaký čas známe matematikom, viď Lewis Carroll: *Lov na Snark*, Macmillan 1876

6. Podštruktúry v hustých grafoch

V tejto kapitole a tej nasledujúcej budeme študovať, ako globálne parametre grafu, ako napr. jeho hranová hustota alebo chromatické číslo, majú vplyv na existenciu určitých lokálnych podštruktúr. Koľko hrán napríklad máme dať grafu o n vrcholoch na zaručenie, že, jedno-ako, sú tieto hrany poukladané, graf bude obsahovať K_r podgraf pre nejaké dané r ? Alebo aspoň K_r minor ? Alebo topologický K_r minor ? Alternatívne, bude nejaké dostatočne vysoké chromatické číslo zaručovať, že sa jedna z týchto podštruktúr zjaví ?

Otázky tohto typu sú medzi tými najprirodzenjšími v teórii grafov a there is a host of deep and interesting results. Spoločne sú známe ako *teória extremálnych grafov.*

Problémy extremálnych grafov v tomto zmysle neatly spadajú do dvoch kategórií nasledovne. Ak hľadáme spôsoby zaručenia globálnych predpokladov, že graf G obsahuje nejaký daný graf H ako minor (alebo topologický minor), stačí zvýšiť $\|G\|$ nad hodnotu nejakej lineárnej funkcie $|G|$ (závislej na H), tzn. spraviť $\varepsilon(G)$ dostatočne veľkým. Existencia takej funkcie už bola stanovená vo vete 2.6.1. Presná potrebná rýchlosť rastu bude vyšetrovaná v kapitole 7, kde budeme študovať podštruktúry takých riedkych grafov. Pretože dostatočne veľká hodnota ε dáva vznik H minoru pre ľubovoľný daný graf H, jeho výskyt by mohol byť alternatívne forced zvýšením nejakých globálnych invariantov (ako $\varkappa$ alebo χ), ktoré, in turn, force up hodnotu ε, aspoň v nejakých podgrafoch. Toto bude tiež predmetom kapitoly 7.

Na druhej strane, ak sa pýtame, ktoré globálne predpoklady by mohli implikovať existenciu nejakého daného grafu H ako podgrafu, nepomôže zvýšiť ktorýkoľvek z invariantov ε, $\varkappa$ alebo χ, let alone ľubovoľný z ostatných doteraz pojednávaných invariantov. Samozrejme, ako sme už povedali v časti 4.2, keď je daný ľubovoľný graf H, ktorý obsahuje aspoň jednu kružnicu, existujú grafy ľubovoľne veľkého chromatického čísla neobsahujúce H ako podgraf (veta 10.2.2). Podľa dôzledku 4.2.3 a vety 0.4.2 také grafy obsahujú podgrafy ľubovoľne veľkého primerného stupňa a súvislosti, takže tieto invarianty tiež môžu byť veľké bez prítomnosti H podgrafu.

Teda, pokiaľ H nie je les, jediný spôsob to force prítomnosti H podgrafu v ľubovoľnom grafe G globálnymi predpokladmi na G je zvýšenie $\|G\|$ substantially nad nejakú hodnotu implikovanú veľkými hodnotami menovaných invariantov. A teraz that we are down to just raising počet hrán (namiesto dúfania v nejaký záhadný štrukturálny spôsob, ktorým by H podgraf mohol vzniknúť z globálnych predpokladov), môžeme naraz vidieť, že ľubovoľný funkcia f taká, že $f(n)$ hrán na n vrcholoch vynucuje, že H podgraf musí rásť kvadraticky s n (ktoré je najepšie možné; viď $\|K_n\|$): pretože kompletné bipartitné grafy môžu mať $\frac{1}{4}n^2$ hrán, $f(n)$ musí prevyšovať $\frac{1}{4}n^2$, pokiaľ H samotný nebude bipartitný.

Grafy s počtom hrán zhruba[32] kvadratickým pri svojom počte vrcholov sa nazývajú *husté*; číslo $\frac{\|G\|}{\binom{|G|}{2}}$ — pomer jeho potenciálnych hrán, ktoré G práve má — je *hranová hustota* grafu G. Otázka, ktorá hranová hustota je presne potrebná pre zaručenie, že daný podgraf je archetypal extremal problem v jeho pôvodnom (bližšom) zmysle; to je predmetom tejto kapitoly. Namiesto pokúšania sa pozorovať široké pole teórie (hustých) extremálnych grafov, sa však budeme koncentrovať na jej dva najdôležitejšie výsledky a vyobrazíme jednu silnú a veľmi všeobecnú dôkazovú techniku.

Dva výsledky sú klasická Turánova veta pre $H = K_r$, ktorá slúžila ako model pre nespočitateľné podobné výsledky pre individuálne grafy H a základná Erdös-Stoneova veta, ktorá nám dáva presnú asymptotickú informáciu pre všetky H naraz (časť 6.1). Dôkazová technika, so stúpajúcou dôležitosťou v extremálnej teórii hustých grafov as elsewhere, je použitie Szmerédiho regularitnej lemy. Táto lema je uvedená a dokázaná v časti 6.2. V časti 6.3 načrtneme všeobecný spôsob, ako aplikovať regularitnú lemu a ilustrujeme to v dôkaze Erdös-Stoneovej vety odloženej (postponed) z časti 6.1. Ďalšia aplikácia regularitnej lemy bude uvedená v časti 8.2.

6.1 Podgrafy

Nech H je graf a $n \geq |H|$. Koľko hrán bude stačiť na vynútenie H podgrafu v ľubovoľnom grafe na n vrcholoch, tzn. nezáleží ako sú tieto hrany uložené ? Alebo, na rephrase problému, aký je najväčší možný počet hrán ktorý môže graf na n vrcholoch mať bez toho, aby obsahoval kópiu H ako podgrafu ? Ako bude taký graf vyzerať ?

[32] Všimnime si, že, formálne, pojmy riedkych a hustých grafov majú zmysel pre rodiny grafov, ktorých rád ide do nekonečna, nie pre jednotlivé grafy.

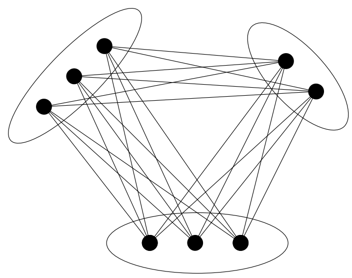
Bude jedinečný ?

Graf $G \not\supseteq H$ na n vrcholoch s maximálnym možným počtom hrán sa nazýva *extremálny* pre n a H; jeho počet hrán je označený $\mathrm{ex}(n, H)$. Je jasné, že ľubovoľný graf G, ktorý je extremálny pre nejaké n a H bude tiež hranovo-maximálny s $H \not\subseteq G$. Obrátene však hranová-maximalita neimplikuje extremalitu: G môže byť hranovo-maximálny s $H \not\subseteq G$, kým bude mať menej ako $\mathrm{ex}(n, H)$ hrán (obr.6.1.1).

obr.6.1.1. Dva grafy, ktoré sú hranovo-maximálne s $P_3 \not\subseteq G$; je ten vpravo extremálny ?

As a case in point, uvažujme problém pre $H = K_r$ (s $r > 1$). Myšlienka momentu (A moment's thought) tu ponúka nejakých zrejmých kandidátov pre extremalitu: všetky kompletné $(r-1)$-partitné grafy sú hranovo-maximálne bez obsahovania K_r. Ale ktoré spomedzi týchto majú najväčší počet hrán ? Iste tie, ktorých partície sú tak rovnaké, ako je to možné, t.j. líšia sa navzájom najviac o 1 prvok: ak V_1, V_2 sú dve partície s $|V_1| - |V_2| \geq 2$, môžeme zvýšiť počet hrán v našom kompletnom $(r-1)$-partitnom grafe presunutím vrcholu z V_1 naprieč do V_2.

Jediné kompletné $(r-1)$-partitné grafy na $n \geq r-1$ vrcholoch, ktorých partície sa veľkosťou navzájom líšia najviac o 1, sa nazývajú *Turánove grafy*; označíme ich $T_{r-1}(n)$ a ich počet hrán $t_{r-1}(n)$ (obr.6.1.2). Pre $n < r-1$ môžeme formálne pokračovať s používaním tejto definície s výhradou, že — v spore s našou zvyčajnou terminológiou — partície môžu teraz byť prázdne; potom, jasne $T_{r-1}(n) = K_n$ pre všetky $n \geq r-1$.



obr.6.1.2. Turánov graf $T_3(8)$.

Nasledujúca veta nám hovorí, že $T_{r-1}(n)$ je určite extremálny pre n a K_r a as such technique; in patricular, $\mathrm{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n)$.

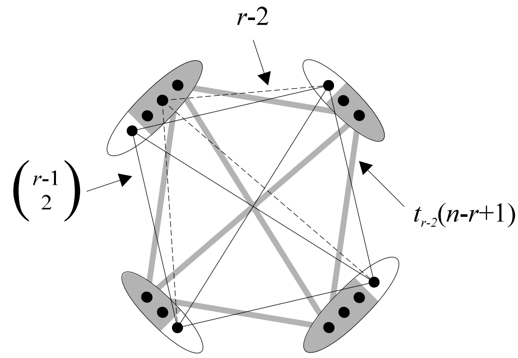
Veta 6.1.1: (Turán 1941)
Pre všetky $r, n \in \mathbb{N}$ s $r > 1$ každý graf $G \not\supseteq K_r$ s n vrcholmi a $\mathrm{ex}(n, K_r)$ hranami je $T_{r-1}(n)$.

Dôkaz: Použijeme indukciu na n. Pre $n \leq r-1$ máme $G = K_n = T_{r-1}(n)$, ako je požadované. Pre indukčný krok nech teraz $n \geq r$.

Pretože G je hranovo-maximálny bez K_r podgrafu, G obsahuje podgraf $K = K_{r-1}$ s vrcholmi povedzme $x_1, \ldots, x_{r-1}$. Podľa indukčného kroku $G - K$ má najviac $t_{r-1}(n-r+1)$ hrán a každý vrchol $G - K$ má najviac $r-2$ susedov v K. Odtiaľ

$$\|G\| \leq t_{r-1}(n-r+1) + (n-r+1)(r-2) + \binom{r-1}{2} = t_{r-1}(n); \tag{1}$$

rovnosť na pravej strane vyplýva z pohľadu na Turánov graf $T_{r-1}(n)$ (obr.6.1.3).



obr.6.1.3. Rovnosť z (1) pre $r = 5$ a $n = 14$.

Pretože G je extremálny pre K_r (a $T_{r-1}(n) \not\supseteq K_r$), dostaneme rovnosť v (1). Teda každý vrchol $G - K$ má presne $r - 2$ susedov v K — presne ako vrcholov K samotných. Pre $i = 1, \dots, r-1$ nech

$$V_i := \{v \in G \mid vx_i \notin E(G)\}$$

je množina všetkých vrcholov G, ktorých $r-2$ susedov v K sú práve vrcholy rôzne od x_i. Pretože $K_r \not\subseteq G$, každá z týchto množín V_i je nezávislá a rozkladajú $V(G)$. Odtiaľ, G je $(r-1)$-partitný. Keďže $T_{r-1}(n)$ má najviac hrán medzi $(r-1)$-partitnými grafmi s n vrcholmi, naša požiadavka, aby $G = T_{r-1}(n)$ vyplýva z predpokladanej extremality G. □

Turánove grafy $T_{r-1}(n)$ sú husté: podľa rádu rozmeru (magnitude) majú okolo n^2 hrán. Presnejšie, pre každé n a r máme

$$t_{r-1}(n) \leq \frac{1}{2}n^2\frac{r-2}{r-1},$$

s rovnosťou vždy, keď $r-1$ delí n (cvičenie). Je preto viditeľné, že práve o ϵn^2 viac hrán (pre nejaké pevné $\epsilon > 0$ a n veľké) nám dáva nielen K_r podgraf (ako hovorí Turánova veta), ale K_r^s pre nejaké dané celé s — graf samotný oplývajúci K_r podgrafmi:

Veta 6.1.2: (Erdös & Stone 1946)

Pre všetky celé $r \geq 2$ a $s \geq 1$ a každé $\epsilon > 0$ existuje celé n_0 také, že každý graf s $n \geq n_0$ vrcholmi a aspoň

$$t_{r-1}(n) + \epsilon n^2$$

hranami obsahuje K_r^s ako podgraf.

Túto vetu dokážeme v časti 6.3.

— [33]

Nech je daný graf H a celé n, uvažujme číslo $h := \frac{\mathrm{ex}(n,H)}{\binom{n}{2}}$: maximálna hranová hustota, ktorú G môže mať bez obsahovania kópie H. Mohlo by to byť, že táto kritická hustota je v podstate iba funkciou H, že h konverguje, keď n ide do nekonečna ? Veta 6.1.2 implikuje toto a viac: limita h je určená veľmi jednoduchou funkciou prirodzeného invariantu H — jeho chromatickým číslom !

Dôsledok 6.1.3: Pre každý graf H

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(n,H)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}.$$

Pre dôkaz dôsledku 6.1.3 potrebujeme ako lemu, aby sa $t_{r-1}(n)$ nikdy priveľmi neodchýlila od hodnoty, ktorú dostane, keď $r-1$ delí n (viď vyššie), a že $\frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}}$ adekvátne konverguje. Dôkaz lemy je ponechaný ako cvičenie (pozri hint).

[33]The Erdös-Stone theorem is interesting not only in its own right; in fact, it was left to a completely unexpected corollary to establish the theorem as a kind of meta-theorem for the extremal theory of dense graphs, and thus to make it famous.

Lema 6.1.4:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} = \frac{r-2}{r-1}.$$

Dôkaz: (dôsledku 6.1.3)

Nech $r := \chi(H)$. Pretože H nemôže byť ofarbený $r-1$ farbami, dostaneme $H \not\subseteq T_{r-1}(n)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a teda

$$t_{r-1}(n) \leq \mathrm{ex}(n, H).$$

Na druhej strane, $H \subseteq K_r^s$ pre dostatočne veľké s, takže

$$\mathrm{ex}(n, H) \leq \mathrm{ex}(n, K_r^s)$$

pre všetky tie s. Stanovme také s. Pre každé $\epsilon > 0$ veta 6.1.2 implikuje, že eventuálne (t.j. pre dostatočne veľké n)

$$\mathrm{ex}(n, K_r^s) < t_{r-1}(n) + \epsilon n^2.$$

A teda pre veľké n

$$\begin{aligned}
\frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} &\leq \frac{\mathrm{ex}(n,H)}{\binom{n}{2}} \\
&\leq \frac{\mathrm{ex}(n,K_r^s)}{\binom{n}{2}} \\
&< \frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} + \frac{\epsilon n^2}{\binom{n}{2}} \\
&= \frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} + \frac{2\epsilon}{1-\frac{1}{n}} \\
&\leq \frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} + 4\epsilon \qquad \text{(predpokladajme } n \geq 2).
\end{aligned}$$

Preto, pretože $\frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}}$ konverguje do $\frac{r-2}{r-1}$ (lema 6.1.4), so does $\frac{\mathrm{ex}(n,H)}{\binom{n}{2}}$. Teda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(n,H)}{\binom{n}{2}} = \frac{r-2}{r-1}$$

ako sme požadovali. □

6.2 Szemerédiho lema o regularite

TU SA TÁTO KAPITOLA PREFOTENEJ KNIŽKY KONČÍ.

9. Hamiltonovské kružnice

V časti 0.8 sme zľahka nadhodili problém, kedy graf obsahuje Eulerovský ťah, uzavretý sled prechádzajúci každú hranu práve raz. Jednoduchá veta 0.8.1 riešila tento problém celkom uspokojivo. Teraz sa spýtajme analogickú otázku pre vrcholy: kedy graf G obsahuje uzavretý sled, ktorý obsahuje každý vrchol G práve raz ? Ak $|G| \geq 3$, potom ľubovoľný taký sled je kružnica: *hamiltonovská kružnica* grafu G. Ak G má Hamiltonovskú kružnicu, nazýva sa *hamiltonovský*. Podobne, cesta v G obsahujúca každý vrchol G sa nazýva *hamiltonovská cesta*.

Zistiť, či graf má alebo nemá hamiltonovskú kružnicu, je omnoho ťažšie, než zistiť, či je eulerovský a nie je známa dobrá charakterizácia grafov[34], ktoré majú hamiltonovskú kružnicu. Začneme túto kapitolu uvedením klasických postačujúcich podmienok pre existenciu hamiltonovskej kružnice (časť 9.1 a 9.2). Potom ostatok kapitoly venujeme krásnemu Fleischnerovmu výsledku, že 'štvorec' každého 2-súvislého grafu má hamiltonovskú kružnicu. Tento výsledok je jedným z najväčších na poli hamiltonovských kružníc. Jednoduchý dôkaz, ktorý uvedieme (kvôli Řihovej vete), je stále trochu dlhší ako ostatné dôkazy v tejto knihe, ale vôbec nie zložitý.

9.1 Jednoduché postačujúce podmienky

Aký druh podmienky by mohol byť postačujúci pre existenciu hamiltonovskej kružnice v grafe G ? Čisto globálne predpoklady, ako vysoká hranová hustota, nebudú dostatočné: nemôžeme predpokladať bez lokálnej vlastnosti, že každý vrchol má aspoň dvoch susedov. Ale ani ľubovoľne veľký (ale konštantný) minimálny stupeň nie je postačujúci: je jednoduché nájsť grafy bez hamiltonovskej kružnice, ktorých minimálny stupeň presahuje akúkoľvek danú konštantnú hranicu.

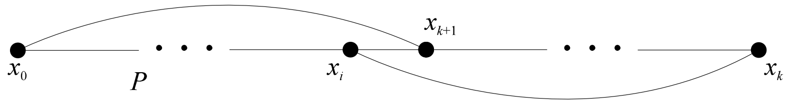
Nasledujúci klasický výsledok odvodzuje svoju dôležitosť z tohto pozadia:

Veta 9.1.1: (Dirac 1952)

Každý graf s $n \geq 3$ vrcholmi a minimálnym stupňom aspoň $\frac{n}{2}$ má hamiltonovskú kružnicu.

Dôkaz: Nech $G = (V, E)$ je graf s $|G| = n \geq 3$ a $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Potom G je súvislý: inak by stupeň ľubovoľného vrchola v najmenšom komponente C grafu G bol menší ako $|C| \leq \frac{n}{2}$.

Nech $P = x_0 \dots x_k$ je najdlhšia cesta v G. Podľa maximality P ležia všetci susedia x_0 a všetci susedia x_k na P. Teda aspoň $\frac{n}{2}$ z vrcholov $x_0, \dots, x_{k-1}$ je susedných s x_k a aspoň $\frac{n}{2}$ z tých istých $k < n$ vrcholov x_i je takých, že $x_0 x_{i+1} \in E$. Podľa Dirichletovho princípu existuje vrchol x_i, ktorý má obe vlastnosti, takže dostaneme $x_0 x_{i+1} \in E$ a $x_i x_k \in E$ pre nejaké $i < k$ (obr.9.1.1).



obr.9.1.1. Dôkaz vety 9.1.1.

Požadujeme, aby kružnica $C := x_0 x_{i+1} P x_k x_i P x_0$ bola hamiltonovská v G. Samozrejme, pretože G je súvislý, C by inak mala suseda v $G - C$, ktorý by mohol byť skombinovaný s cestou v C obsahujúcou všetky vrcholy do cesty dlhšej ako P. $\square$

Veta 9.1.1 je najlepšia možná v tom, že nemôžeme zameniť hranicu $\frac{n}{2}$ hranicou $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: ak n je nepárne a G je zjednotením dvoch kópií $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ pretínajúcich sa v jednom vrchole, potom $\delta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ale $\varkappa(G) = 1$, takže G nemôže obsahovať hamiltonovskú kružnicu. Inými slovami, vysoká úroveň hranice $\delta \geq \frac{n}{2}$ je potrebná na zaručenie, ak ničoho iného, tak že, G je 2-súvislý: podmienka práve tak triviálne nutná pre hamiltonovskosť ako minimálny stupeň aspoň 2. Vyzeralo by to preto, že predpísanie nejakej vysokej (konštantnej) hodnoty pre $\varkappa$ namieso pre δ stavia lepšiu možnosť implikovania hamiltonovskosti. Avšak, nie je to tak; iste je jednoduché pre akékoľvek k modifikovať uvedenú sadu príkladov do ľubovoľne veľkých grafov, ktoré sú k-súvislé (a teda obsahujú dlhé kružnice v zmysle k), ale ktorých circumference je ohraničená zhora funkciou k.

[34]Pojem 'dobrej charakterizácie' môže byť definovaný presne; pozri úvod do časti 11.5.

Existuje ďalší invariant s podobnou vlastnosťou: nízke číslo nezávislosti $\alpha(G)$ zaručuje, že G má dlhú kružnicu, hoci nie nutne hamiltonovskú kružnicu. Položené dohromady však tie dva predpoklady vysokej súvislosti a nízkeho čísla nezávislosti prekvapujúco tvoria vzájomný komplement na vytvorenie postačujúcej podmienky pre hamiltonovskosť:

Lema 9.1.2: Každý graf G s $|G| \geq 3$ a $\varkappa(G) \geq \alpha(G)$ obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

Dôkaz: Položme $\varkappa(G) =: k$ a nech C je najdlhšia kružnica v G. Očíslujeme vrcholy C cyklicky, povedzme $V(C) = \{v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ s $v_i v_{i+1} \in E(C)$ pre všetky $i \in \mathbb{Z}_n$. Ak C nie je hamiltonovská kružnica, vyberieme vrchol $v \in G - C$ a $v - C$ vejár $\mathcal{F} = \{P_i \mid i \in I\}$, kde $I \subseteq \mathbb{Z}_n$ a každý P_i končí vo v_i. Nech $\mathcal{F}$ je vybraté s maximálnou mohutnosťou; potom $vv_j \notin E(G)$ pre ľubovoľné $j \notin I$ a

$$|\mathcal{F}| \geq \min\{k, |C|\} \tag{1}$$

podľa Mengerovej vety (2.3.3).

Pre každé $i \in I$ máme $i + 1 \notin I$: inak $(C \cup P_i \cup P_{i+1}) - v_i v_{i+1}$ by bola kružnica dlhšia ako C. Teda $|\mathcal{F}| < |C|$ a teda $|I| = |\mathcal{F}| \geq k$ podľa (1). Ďalej ešte $v_{i+1} v_{j+1} \notin E(G)$ pre všetky $i, j \in I$, keďže inak by $(C \cup P_i \cup P_j) + v_{i+1} v_{j+1} - v_i v_{i+1} - v_j v_{j+1}$ bola kružnica dlhšia ako C. Teda $\{v_{i+1} \mid i \in I\} \cup \{v\}$ je množina $k+1$ alebo viac nezávislých vrcholov v G, čo je v spore s $\alpha(G) \leq k$. □

Môže pripadať ako prekvapenie zistiť, že hamiltonovskosť pre planárne grafy sa vzťahuje na problém 4 farieb. Ako sme povedali v časti 5.6, problém 4CT je ekvivalentný s neexistenciou planárneho snarku, tzn. s tvrdením, že každý planárny kubický graf bez mostov má 4-tok. Je ľahko overiteľné, že 'bez mostov' môže byť zamenené za '3-súvislý' v tomto tvrdení, a že každý hamiltonovský graf má 4-tok. Pre dôkaz 4CT preto stačí ukázať, že každý 3-súvislý planárny kubický graf má hamiltonovskú kružnicu !

Nanešťastie, toto nie je the case: prvý protipríklad našiel Tutte roku 1946. Desať rokov neskôr Tutte dokázal nasledujúcu vetu ako najlepšie možné zoslabenie:

Veta 9.1.3: (Tutte 1956)
Každý 4-súvislý planárny graf obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

9.2 Hamiltonovské kružnice a postupnosti stupňov vrcholov

Historicky, Diracova veta tvorila východisko pre objavenie série slabších a slabších stupňových podmienok, všetkých postačujúcich pre hamiltonovskosť. Vývoj kulminoval v jedinej vete, ktorá obsahovala všetky skoršie výsledky: veta, ktorú dokážeme v tejto časti.

Ak G je graf s n vrcholmi a stupňami $d_1 \leq \ldots \leq d_n$, potom n-tica $(d_1, \ldots, d_n)$ sa nazýva ***postupnosť stupňov*** grafu G. Všimnime si, že táto posupnosť je jedinečná, dokonca aj keď G, ako zvyčajne, má vrcholy rovnakého stupňa a teda má niekoľko vrcholových očíslovaní, ktoré dávajú vznik jeho postupnosti stupňov. Nazvime ľubovoľnú celočíselnú postupnosť $(a_1, \ldots, a_n)$ *hamiltonovskou*, ak každý graf s n vrcholmi a postupnosťou stupňov po zložkách väčšou ako $(a_1, \ldots, a_n)$ je hamiltonovský. (Postupnosť $(d_1, \ldots, d_n)$ je *po zložkách väčšia*, ako $(a_1, \ldots, a_n)$, ak $d_i \geq q_i$ pre všetky i.)

Nasledujúca veta charakterizuje všetky hamiltonovské postupnosti:

Veta 9.2.1: (Chvátal 1972)
Celočíselná posupnosť $(a_1, \ldots, a_n)$ taká, že $0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n < n$ a $n \geq 3$ je hamiltonovská práve vtedy, keď pre každé $i < \frac{n}{2}$ platí

$$a_i \leq i \Rightarrow a_{n-i} \geq n - i.$$

Dôkaz: Nech $(a_1, \ldots, a_n)$ je ľubovoľná celočíselná postupnosť taká, že $0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n < n$ a $n \geq 3$. Najprv predpokladajme, že táto postupnosť spĺňa podmienku vety a dokážeme, že je hamiltonovská.

Predpokladajme, že nespĺňa podmienku vety; potom existuje graf $G = (V, E)$ s postupnosťou stupňov $(d_1, \ldots, d_n)$ takou, že

$$d_i \geq a_i \qquad \text{pre všetky } i \tag{1}$$

ale G neobsahuje hamiltonovskú kružnicu. Nech G je vybratý s maximálnym počtom hrán a nech $(v_1, \ldots, v_n)$ je očíslovanie V s $d(v_i) = d_i$ pre všetky i. Podľa (1) sa naše predpoklady preložia do (transfer to) $(d_1, \ldots, d_n)$, tzn.

$$d_i \leq i \Rightarrow d_{n-i} \geq n - i \qquad \text{pre všetky } i < \frac{n}{2}. \tag{2}$$

Nech $x, y \in V$ sú nesusedné s $d(x) \leq d(y)$ a $d(x) + d(y)$ maximálnym. Ľahko možno vidieť, že postupnosť stupňov grafu $G + xy$ je po zložkách väčšia ako $(d_1, \ldots, d_n)$ a teda aj ako $(a_1, \ldots, a_n)$. Odtiaľ, podľa maximality G, nová hrana xy leží na hamiltonovskej kružnici H grafu $G + xy$. Potom $H - xy$ je hamiltonovská cesta $x_1 \ldots x_n$ v G, kde povedzme $x_1 = x$ a $x_n = y$.

Ako v dôkaze Diracovej vety, teraz uvažujme množiny indexov

$$I := \{i \mid xx_{i+1} \in E\} \quad \text{a} \quad J := \{j \mid x_j y \in E\}.$$

Potom $I \cup J \subseteq \{1, \ldots, n-1\}$ a $I \cap J = \emptyset$, pretože G neobsahuje hamiltonovskú kružnicu. Teda

$$d(x) + d(y) = |I| + |J| < n, \tag{3}$$

takže $h := d(x) < \frac{n}{2}$ podľa voľby x.

Pretože $x_i y \notin E$ pre všetky $i \in I$, všetky tieto x_i boli kandidátmi pre voľbu x (spolu s y). Naša voľba $\{x, y\}$ s $d(x) + d(y)$ maximálnym teda implikuje, že $d(x_i) \leq d(x)$ pre všetky $i \in I$. Teda G má aspoň $|I| = h$ vrcholov stupňa $\leq h$, takže $d_h \leq h$. Podľa (2) toto implikuje, že $d_{n-h} \geq n - h$, tzn. $h + 1$ vrcholov $v_{n-h}, \ldots, v_n$ majú všetky stupeň $\geq n - h$. Pretože $d(x) = h$, jeden z týchto vrcholov, povedzme z, nie je susedný s x. Pretože

$$d(x) + d(z) \geq h + (n - h) = n,$$

toto je v spore s voľbou x a y podľa (3).

Pre spätnú implikáciu teraz predpokladajme, že naša postupnosť $(a_1, \ldots, a_n)$ nespĺňa podmienku z vety, takže existuje $h < \frac{n}{2}$ s

$$a_h \leq h \qquad \text{a} \qquad a_{n-h} < n - h. \tag{4}$$

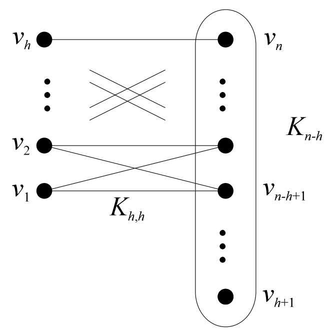
Postavíme graf G s vrcholmi $v_1, \ldots, v_n$ a postupnosťou stupňov $(d_1, \ldots, d_n)$ takou, že

$$d(v_i) = d_i \geq a_i \qquad \text{pre všetky } i, \tag{5}$$

ale G neobsahuje hamiltonovskú kružnicu. Položíme

$$E(G) := \{v_i v_j \mid i, j > h\} \cup \{v_i v_j \mid i \leq h; j > n - h\}.$$

Inými slovami, G je zjednotením K_{n-h} na vrcholoch $v_{h+1}, \ldots, v_n$ a $K_{h,h}$ s partíciami $\{v_1, \ldots, v_h\}$ a $\{v_{n-h+1}, \ldots, v_n\}$ (obr.9.2.1).



obr.9.2.1. Graf G z vety 9.2.1.

Teraz overme (5). Iste, G má postupnosť stupňov

$$(\underbrace{h,\ldots,h}_{h-\text{krát}}, \underbrace{n-h-1,\ldots,n-h-1}_{(n-2h)-\text{krát}}, \underbrace{n-1,\ldots,n-1}_{h-\text{krát}}).$$

A teda podľa (4)

$$\begin{array}{rcr} a_i \le a_h \le h = d_i & & (i = 1,\ldots,h) \\ a_i \le a_{n-h} \le n-h-1 = d_i & & (i = h+1,\ldots,n-h) \\ a_i \le n-1 = d_i & & (i = n-h+1,\ldots,n) \end{array}$$

ako sme požadovali. □

Aplikovaním vety 9.2.1 na $G * K_1$ ľahko možno dokázať nasledujúcu úpravu vety na hamiltonovské cesty. Celočíselnú postupnosť nazveme *cestno-hamiltonovská*[35], ak každý graf s po zložkách väčšou postupnosťou stupňov má hamiltonovskú cestu.

Dôsledok 9.2.2: Celočíselná postupnosť $(a_1,\ldots,a_n$ taká, že $n \ge 3$ a $0 \le a_1 \le \ldots \le a_n < n$ je cestno-hamiltonovská práve vtedy, keď každé $i \le \frac{n}{2}$ je také, že $a_i < i \Rightarrow a_{n-i+1} \ge n-i$.

9.3 Hamiltonovské kružnice vo štvorci grafu

Je daný graf G a kladné celé d. Označíme G^d graf na $V(G)$, v ktorom dva vrcholy sú susedné práve vtedy, keď majú vzdialenosť najviac d v G. Špeciálne, G^2 nazývame *štvorec* grafu G. Iste, $G = G^1 \subseteq G^2 \subseteq \ldots$ Náš cieľ v tejto časti je dokázať[36] nasledujúci základný výsledok:

Veta 9.3.1: (Fleischner 1974)
Ak G je 2-súvislý graf, potom G^d obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

Dôsledok 9.3.2: Štvorec každého 2-súvislého grafu je hamiltonovský.

Hypotéza: (Seymour 1974)
Každý graf G s n vrcholmi a

$$\delta(G) \ge \frac{k}{k+1}n$$

obsahuje hamiltonovskú kružnicu H takú, že $H^k \subseteq G$.

[35] v origináli *path-hamiltonian* ... no povedzte, ako by ste to preložili ?
[36] Dokazovať už nebudem. Uvedením nasledujúcich viet preklad skončím.