Teória grafov

Definícia. *Obyčajný graf* G je dvojica (V, E), kde V je množina vrcholov grafu G, E množina hrán grafu G je podmnožinou množiny $\binom{V}{2}$.

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{e, e \subseteq V, |e| = 2\}.$$

Grafy, ktoré budeme uvažovať budú konečné, t.j. $|V|$, $|E| < \infty$. Pre $n \in N$ označujeme K_n *úplny* graf na n vrcholoch (t.j. n vrcholov a všetky možné hrany).

Definícia. Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú *izomorfné* $G \cong G'$, ak existuje vzájomne jednoznačné priradenie (izomorfizmus) $f : V \to V'$ tak, že platí:

$$\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je obyčajný graf. Stupeň vrcholu v v grafe G je definovaný:

$$\deg_G v = |\{e, v \in e \in E\}|.$$

(Niekedy budeme dolný index G vynechávať, ak bude z kontextu jasné, v ktorom grafe stupeň definujeme.)

Lema. *V konečnom grafe G s n vrcholmi $v_1, \ldots, v_n$ platí:*

$$\sum_{i=1}^{n} \deg_G(v_i) = 2|E|.$$

Dôkaz. Dôkaz Zrejme každá hrana prispieva k dvom vrcholom.

♠

Dôsledok. *V konečnom obyčajnom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa párne číslo. Nemôže existovať graf, ktorý by obsahoval jediný vrchol nepárneho stupňa.*

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je obyčajný graf. Súbor $(\deg_G(v), v \in V)$, sa nazýva *skóre* grafu G.

Dve skóre považujeme za rovnaké, ak jedno môžeme dostať z druhého prerovnávaním čísiel, t.j. skóre nezávisí na zvolenom poradí vrcholov. Je vidieť, že dva izomorfné grafy majú rovnaké skóre. Na druhej strane, grafy s rovnakým skóre ešte nemusia byť nutne izomorfné.

Veta (V. Havla). *Nech $D = (d_1, \ldots, d_n)$ je postupnosť prirodzených čísel, $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$. Označme D' postupnosť $(d'_1, d'_2, \ldots, d'_n)$, kde:*

$$d'_i = \begin{cases} d_i, & \textit{pre } i < n - d_n, \\ d_i - 1, & \textit{pre } i \ge n - d_n. \end{cases}$$

Potom D je skóre grafu práve keď D' je skóre grafu.

Dôkaz. $\Leftarrow$ Predpokladajme, že D' je skóre grafu $G' = (V', E')$, kde $V' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\deg_G(v_i) = d'_i$. Zvoľme nový vrchol v_n rôzny od $v_1, \ldots, v_{n-1}$ a definujme nový graf $G = (V, E)$, kde

$$V = V' \cup \{v_n\},$$
$$E = E' \cup \{\{v_i, v_n\}; i \in \{n - d_n, n - d_n + 1, \ldots, n - 1\}\}.$$

Zrejme skóre grafu G je práve D.

$\Rightarrow$ Predpokladajme, že D je skóre nejakého grafu. Uvažujme množinu $\mathcal{G}$ všetkých grafov na množine vrcholov $\{v_1, \ldots, v_n\}$ so skóre D v ktorých je stupeň každého vrcholu v_i rovný d_i. Predpokladajme, že máme dokázané nasledujúce lemátko:

Lemátko. V množine $\mathcal{G}$ existuje graf G_0, v ktorom je vrchol v_n spojený práve s poslednými d_n vrcholmi, t.j. $v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \ldots, v_{n-1}$.

Potom je už vec jednoduchá. Zoberieme graf $G' = (\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, E')$, kde $E' = \{e \in E(G_0); v_n \notin e\}$, ktorý má zrejme skóre D', čím je dôkaz hotový.

♠

Dôkaz lemátka. Ak $d_n = n-1$, t.j. vrchol v_n je spojený so všetkými vrcholmi $v_1, \ldots, v_{n-1}$, vyhovuje lemátku ľubovoľný graf z $\mathcal{G}$ a sme hotoví. Ináč, t.j. pokiaľ v_n nie je spojený so všetkými ostatnými vrcholmi, definujme pre každý graf $G \in \mathcal{G}$ číslo $j(G)$, 4o bude najväčší index $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ taký, že $\{v_j, v_n\} \notin E(G)$. Buď G_0 graf, pre ktorý je $j(G)$ najmenšie možné; dokážeme, že $j(G_0) = n - d_n - 1$, z čoho je už zrejmé, že G_0 vyhovuje pomocnému tvrdeniu.

Predpokladajme teda pre spor, že $j = j(G_0) > n - d_n - 1$. Vrchol v_n musí byť spojený s d_n vrcholmi, a z nich najviac $d_n - 1$ môže nasledovať po vrchole v_j. Preto existuje nejaké $i < j$ také, že v_i je spojený s vrcholom v_n. Máme teda $\{v_j, v_n\} \notin E(G_0)$, $\{v_i, v_n\} \in E(G_0)$. Vzhľadom k tomu, že $\deg_{G_0}(v_i) \leq \deg_{G_0}(v_j)$, existuje nejaký vrchol v_k, ktorý je spojený hranou s v_j, ale nie s v_i. V takomto prípade uvážime nový graf $G' = (V(G_0), E')$, kde

$$E' = (E(G_0) \setminus \{\{v_i, v_n\}, \{v_j, v_k\}\}) \cup \{\{v_j, v_n\}, \{v_i, v_k\}\}.$$

Je zrejmé, že graf G' má tiež skóre D a pritom $j(G') \leq j(G_0) - 1$, čo je spor s voľbou grafu G_0. Tým je lemátko dokázané.

♠

Príklad. Ak máme o nejakej postupnosti $(1,1,1,2,2,3,4,5,5)$ rozhodnúť, či je skóre grafu, podľa predchádzajúcej vety táto postupnosť je skóre $\Leftrightarrow$ keď $(1,1,1,1,1,2,3,4)$ je skóre nejakého grafu $\Leftrightarrow$ $(1,1,1,0,0,1,2)$ $\Leftrightarrow$ $(0,0,1,1,1,1,2)$ (prerovanie čísel) $\Leftrightarrow$ $(0,0,1,1,0,0)$ $\Leftrightarrow$ $(0,0,0,0,1,1)$ (prerovanie čísel) $\Leftrightarrow$ $(0,0,0,0,0)$.

O poslednej postupnosti už vieme určite prehlásiť, že je skóre nejakého grafu (izolovaných 5 vrcholov). Iným problémom je konštrukcia grafu so zadaným skóre. Táto sa dá realizovať postupným pridávaním vrcholu a hrán podľa predchádzajúcej vety.

Literatúra

J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétnej matematiky. Matfyzpress 1996. Praha (odtiaľ prevzatý dôkaz Havlovej vety)