Eulerovské grafy

Definícia. $G = (V, E)$ je obyčajný graf. Postupnosť $[v_0, e_1, v_1, e_1, \ldots, v_n, e_n]$ v grafe G, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$, $1 \leq i \leq n$ sa nazýva *sled* dĺžky n z v_0 do v_n. Ak $e_i \neq e_j$, pre $i \neq j$, hovoríme o *ťahu*. Ak $v_i \neq v_j$, hovoríme o *ceste*.

Ak $v_0 = v_n$, hovoríme o uzavretom ťahu. Cesta, pre ktorú $v_0 = v_n$ nazývame kružnicou.

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je graf. Hrana $e \in E$ sa nazýva *most*, ak grafy G a $G \setminus \{e\}$ majú rozdielny počet komponent súvislosti.

Zrejme v strome je každá hrana mostom.

Pomocné lemátko. *Nech $G = (V, E)$ je graf, v ktorom všetky stupne vrcholov sú párne. Potom graf G neobsahuje most.*

Dôkaz. Sporom. Ak by G obsahoval most e, potom by v grafe $G \setminus \{e\}$ existovala komponenta súvislosti s jediným vrcholom nepárneho stupňa, čo nie je možné.

♠

Definícia. Graf $G = (V, E)$ je eulerovský, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany a vrcholy grafu G.

Veta 1. *Obyčajný graf $G = (V, E)$ je eulerovský práve vtedy, keď je súvislý a stupeň každého vrcholu v G je párne číslo.*

Dôkaz. $\Rightarrow$ Zrejmé.
$\Leftarrow$ Uvažujme v G ťah $T := [v_0, e_1, \ldots, e_m, v_m]$, ktorý má maximálnu dĺžku. Dokážeme, že:
(i) $v_0 = v_m$,
(i) $\{e_i, i = 1, 2, \ldots, m\} = E$.

(i) Ak by $v_0 \neq v_m$, potom ťah môžme určite predĺžiť, lebo stupne vrcholov v_0 a v_m sú párne, ale v ťahu T nepárne.

(ii) Predpokladajme teda, že $v_0 = v_m$. Definujme pomocný graf $G' = (V', E')$, kde V' je množina všetkých ťahov T a E' množina jeho hrán.

Nech najskôr $V' \neq V$. Vďaka súvislosti grafu G existuje hrana tvaru $e = \{v_k, v'\} \in E$, kde $v_k \in V'$ a $v' \notin V'$. V tomto prípade ťah

$$[v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, v']$$

má dĺžku $m + 1$ a vedie teda k sporu.

Ak $V' = V$ a $E' \neq E$, uvažujme hranu $e \in E \setminus E'$, kde $e = \{v_k, v_l\}$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade vedie ťah

$$[v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, v_l]$$

k sporu.

♠

Ak budeme v grafe G hľadať otvorený ťah obsahujúci všetky vrcholy a hrany (t.j. bez podmienky skončiť v tom istom vrchole, ako sme začali), potom nasledujúca veta podáva úplnu charakterizáciu:

Veta 2. *V obyčajnom grafe G existuje otvorený ťah obsahujúci všetky vrcholy a hrany práve vtedy, keď je súvislý a má najviac dva vrcholy nepárneho stupňa.*

Dôkaz vety 1 dáva aj návod na (neefektívny) algoritmus na kreslenie grafov jedným ťahom. Neformálny popis: Začneme v ľubovoľnom vrchole v a obťahujeme v ľubovoľnom poradí „za sebou idúce hrany“. Ak skončíme opäť vo vrchole v a neobtiahli sme ešte všetky hrany, neobtiahnuté hrany tvoria graf s komponentami so všetkými vrcholmi párneho stupňa. Vyberme ľubovoľnú komponentu, ktorá nech je prilepená k prvému uzavretému ťahu v nejakom vrchole $\tilde{v}$. Prvý ťah teda rozšírime vo vrchole $\tilde{v}$ o nejaký uzavretý ťah. Rekurzívnym opakovaním uvedenej myšlienky nakoniec nakreslíme celý graf jedným ťahom.

Iný **algoritmus na kreslenie grafu jedným ťahom**:

Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf so všetkými párnymi stupňami vrcholov, $|E| = m$.

Krok 1. Zvoľ $v_0 \in V$ ľubovoľne. Položme $T_0 = v_0$.

Krok 2. Opakuj nasledujúci krok 3 pre $i = 0, 1, 2, \ldots$, pokiaľ je to možné. Pokiaľ už krok 3 nie je možné previesť, potom $i = m$ a T_m je hľadaný ťah.

Krok 3. (Predĺženie ťahu.) Nech $T_i = [v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i]$ je už definovaný ťah. Zvoľ hranu $e_{i+1} \in E \setminus \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ obsahujúcu vrchol v_i. Pokiaľ je to možné, zvoľ e_{i+1} naviac tak, aby grafy $(V, E \setminus \{e_1, \ldots, e_i\})$ a $(V, E \setminus \{e_1, \ldots, e_i, e_{i+1}\})$ mali rovnaký počet komponent súvislosti.

Dôkaz správnosti algoritmu.. Nech $T_k = [v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k]$ je výsledok uvedeného algoritmu.

Pre $i = 1, \ldots, k$ nech $G_i = (E(G_i), V(G_i)) = G \setminus \{e_1, \ldots, e_i\}$. Zrejme $\deg_{G_k}(v_k) = 0$ (ináč by sme mohli ťah v kroku 3 predĺžiť) a teda $v_0 = v_k$.

Predpokladajme pre spor, že ťah T_k neprejde všetky hrany grafu G, t.j. $E(G_k) \neq \emptyset$ a definujme množinu $W = \{v \in V; \deg_{G_k}(v) > 0\} \neq \emptyset$.

Pretože G je súvislý graf, ťah T_k množinu W aspoň raz navštívi, t.j. $W \neq \emptyset$. Nech t je maximálny index taký, že $v_t \in W$, zrejme $v_{t+1} \notin W$. Nakoľko $v_k \notin W$, W je neprázdna, index t je definovaný korektne. Pretože G_k má hrany len na množine W a e_{t+1} je posledná hrana ťahu T_k, ktorá do W zasahuje, je e_{t+1} jediná hrana v grafe G_t spájajúca vrchol z W s vrcholom mimo W - inými slovami e_{t+1} je most v grafe G_t a G_{t+1} má viac komponent súvislosti.

Nech e je nejaká hrana grafu G_t obsahujúca vrchol v_t a rôzna od e_{t+1} (taká existuje, pretožeňbreak $\deg_{G_{t+1}}(v_t) \leq \deg_{G_k(v_t)} > 0$.) Podľa pravidla v kroku 3 musí byť hrana e tiež mostom v grafe G_t, ináč by sme ju vybrali miesto e_{t+1}. Graf G_t má práve dva vrcholy nepárneho stupňa a obsahuje aspoň dva mosty e, e_{t+1}. Toto však vzhľadom k pomocnému lemátku nie je možné.

♠

Prechody bludiskom

Úloha na prechod bludiskom znamená prejsť každou chodbou bludiska aspoň raz a skončiť na mieste, kde sme začali. Každému bludisku odpovedá graf L: na križovatky a konce slepých ulíc dáme vrcholy, dva vrcholy spojíme hranou, ak existuje medzi nimi v labyrinte priama cesta.

Ak každú hranu v grafe L zdvojíme, dostaneme eulerovský graf. Podľa predchádzajúcej teórie (jednoducho zobecnenej aj na grafy s viacnásobnými hranami) existuje v L uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany. T.j. musí existovať prechod bludiskom, pričom po každej hrane prejdeme dvakrát (v rôznych smeroch).

Ak máme k dispozícii plánik bludiska, ľahko bludiskom na základe predchádzajúceho algoritmu pre eulerovské grafy prejdeme. Realita je však horšia. Máme k dispozícii len niť! Pochodujme teda podľa nasledovného algoritmu a ťaháme stále za sebou niť:

Algoritmus ťažkopádny, ale určite správny:

(1) Ak prídeme na križovatku, z ktorej vedie chodba, cez ktorú ešte nie je pretiahnutá niť, pustíme sa ľubovoľnou takou chodbou.

(2) Ak prídeme na križovatku, z ktorej vedú len chodby s pretiahnutou niťou, vrátime sa späť rovnakou cestou, ako sme prišli (to nám umožní niť), až na najbližšiu križovatku, z ktorej vedie chodba bez nite a tam pokračujeme. (Pri návrate samozrejme niť nezmotávame, ale stále ju za sebou rozvíjame.)

(3) Ak sa vrátime na začiatok nite k vchodu a zistíme, že všetkými chodbami, ktoré odtiaľ vychádzajú, je niť už pretiahnutá, znamená to, že sme už prešli celým bludiskom a skončíme.

Tento algoritmus predovšetkým zaručuje, že nás dovedie naspäť k vchodu do bludiska. Bludisko má totiž len konečný počet hrán a tak nemôžeme donekonečna nachádzať hrany, ktorými sme ešte neprešli. Od poslednej takej hrany, na ktorú narazíme, sa potom podľa pravidla (2) už len vraciame naspäť k vchodu, kde sme začali.

Ďalej je zrejmé, že sme prešli všetky hrany bludiska. Keby zostali hrany, ktorými sme neprešli, vzhľadom na súvislosť bludiska by z niektorého vrcholu, ktorým sme prechádzali vychádzala hrana, ktoru sme neprešli. Týmto vrcholom by sme však prechádzali pri spomenutom návrate a porušili by sme tak pravidlo (1), ktorá dáva prednosť takejto hrane.

Všimnime si ešte, že ak prechádzame nejakou hranou druhýkrát, tak sa vraciame a nezanechávame nijaké odbočky, ktoré by sme neprešli. To je bezprostredný dôsledok (1) a (2) a potvrdzuje správnosť pravidla (3).

Skúsme vylepšiť predchádzajúci algoritmus a odstrániť zbytočné návraty. Sú to práve tie, na začiatku ktorých vstupujeme do hrany, ktorú sme už dvakrát prešli. Ak nás vedie niť naspäť do takejto hrany, tak tam nevstúpime, ale prehmatneme na druhú niť, ktorá odtiaľ vychádza a ďalej sa vraciame podľa nej.

Efektívnejší algoritmus na prechod bludiskom:

(1) Z vrcholu, z ktorého vychádza chodba bez nite, ideme takouto chodbou.

(2) Z vrcholu, z ktorého vedú len chodby s pretiahnutou niťou, vrátime sa späť k najbližšiemu vrcholu, z ktorého vychádza chodba bez nite, a tou sa pustíme. Pri návrate vynechávame chodby s dvoma niťami - namiesto prechodu cez ne zmeníme niť, ktorá nás vedie.

(3) Vo vrchole, z ktorého vychádzajú iba chodby s dvoma niťami, skončíme. Je to východ z bludiska, ktorého každou chodbou sme prešli práve dvakraát a to v opačných smeroch.

Niť zabezpečuje v každom vrchole aby sme z neho odišli práve po tej hrane, ktorou sme do neho prvýkrát prišli. Ak sa vyzbrojíme namiesto nite kriedou, môžeme prejsť bludiskom podľa inej verzie predchádzajúceho algoritmu:

Kriedový algoritmus na prechod bludiskom:

Na začiatku každej chodby, ktorou prechádzame, napíšeme na podlahu písmeno Z, a na koniec písmeno K. Ak sa ocitneme na nejakej križovatke prvýkrát (okrem práve napísaného K tam určite nijaké písmená nie sú), dáme práve napísané K do štvorca. Na križovatkách volíme chodbu, ktorou budeme pokračovať, podľa nasledujúcej priority:

1. neoznačenú,
2. označenú K,
3. označenú $\boxed{K}$.

Do chodieb označených Z alebo ZK nevstupujeme. Ak sa ocitneme na križovatke, z ktorej nevedie chodba nijakého z týchto troch typov, sú všetky chodby, ktoré sem ústia, označené ZK, sme pri vchode a prešli sme všetkými chodbami bludiska práve dvakrát, a to v každom smere raz.

Literatúra

J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétnej matematiky. Matfyzpress 1996, Praha.

Š. Znám: Kombinatorika a teória grafov. Skriptá MFF UK, 1989.