Hamiltonovské grafy

Definícia. Graf sa nazýva *hamiltonovský*, ak v ňom existuje kružnica prechádzajúca všetkými vrcholmi (hamiltonovská).

Názov pochádza od írskeho matematika a fyzika Williama Rovana Hamiltona (1805-1865). Bol autorom hlavolamu úlohou ktorého bolo obísť po hranách vrcholy pravidelného dvanásťstena.

Na prvý pohľad sa hamiltonovské grafy zdajú byť obdobou eulerovských, nie je to však zďaleka pravda. Nie je známa nijaká jednoduchá a postačujúca podmienka na to, aby bol graf hamiltonovský. Rozhodnúť, či graf je hamiltonovský je NP-úplny problém (to znamená treba prešetriť všetky možnosti). Je však známych mnoho postačujúcich podmienok na hamiltonovskosť.

Veta 1 (Dirac, 1952). *Nech G je graf, $|V(G)| = n$, $n \geq 3$. Ak má každý vrchol stupeň aspoň $\frac{n}{2}$, tak graf je hamiltonský.*

Veta 2 (Ore, 1960). *Nech G je graf, $|V(G)| = n$, $n \geq 3$. Ak pre každú dvojicu vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou súčet ich stupňov je aspoň n, tak G je hamiltonovský.*

Dôkaz. Dôkaz od Lajosa Pósa, keď mal asi 15 rokov ...

Ukážeme, že ak G nie je hamiltonovský, potom existuje dvojica vrcholov $u, v \in V(G)$ takých, že $\deg_G(u) + \deg_G(v) < n$.

Pridávajme ku grafu G hranu po hrane (ľubovoľne) kým nedostaneme hamiltonovský graf. (To sa nám určite raz podarí, lebo úplny graf je hamiltonovský.) Ak sme naposledy pridali hranu $\{u, v\}$, znovu ju odstránime. Dostaneme tak graf G', v ktorom síce nie je hamiltonovská kružnica, ale je v ňom (hamiltonovská) cesta, ktorá vychádza z vrcholu u, končí vo vrchole v a prechádza všetkými vrcholmi grafu G – každým práve raz. Ak je x ľubovoľný vrchol, ktorý je v grafe G' spojený hranou s vrcholom u, tak vrchol y, ktorý na spomenutej ceste bezprostredne predchádza vrcholu x, nemôže byť v grafe G' spojený hranou s vrcholom v. Potom by totiž v grafe G' bola hamiltonovská kružnica $u \to y \to v \to x \to u$. Ak je teda k stupeň vrcholu u, nemôže byť vrchol v v grafe G' spojený hranou prinajmenšom s k z $n-1$ ostatných vrcholov, teda stupeň vrcholu v je najviac $n-k-1$. Súčet stupňov vrcholov u, v v grafe G' je potom najviac $n-1$. Pritom graf G' vznikol z grafu G pridávaním hrán, takže v grafe G nie je stupeň nijakého vrcholu väčší ako v grafe G'.

♠

Veta 3 (Pósa). *Nech G je graf, $|V(G)| = n$ a predpokladajme, že $n \geq 3$. Ak pre každé prirodzené číslo $k < \frac{n}{2}$ je počet vrcholov, ktorých stupeň neprevyšuje k, menší ako k, tak je graf hamiltonovský.*

Diracova podmienka vylučuje vrcholy menšieho stupňa ako $\frac{n}{2}$ ($n = |V(G)|$), Pósova podmienka také vrcholy pripúšťa s tým, že obmedzuje ich počet. Ak si zoberie ako graf samotnú kružnicu s n vrcholmi, je zrejme hamiltonovská a pritom nespĺňa žiadnu podmienku.

Pósova veta udáva v istom zmysle najsilnejší možný výsledok. Ak je dané n, $n \geq 4$ a $p \in N$ ľubovoľné spĺňa nerovnosť $1 \leq p < \frac{n}{2}$, potom graf K_{p+1} spojený s K_{n-p} jedinou hranou je príkladom grafu, ktorý spĺňa podmienky Pósovej vety až na jediný prípad (existuje aspoň p vrcholov stupňa p) a pritom nie je hamiltonovský.

Vo vetách nechýba predpoklad súvislosti grafu, pretože každý hamiltonovský graf je zrejme súvislý.

Iný pohľad na definíciu hamiltonovského grafu: G je hamiltonovský, ak existuje poradie vrcholov $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ také, že $\mathrm{d}_G(v_i, v_{i+1}) = 1$ pre $i = 1, \ldots, n$ a $v_{n+1} = v_1$. To vedie k nasledujúcej definícii:

Definícia. Graf G je k-hamiltonovský, ak existuje $k \in N$ a poradie vrcholov grafu G spĺňajúce podmienku:

$$\mathrm{d}_G(v_i, v_{i+1}) \leq k,$$

pre $i = 1, \ldots, n$ a $v_{n+1} = v_1$.

Veta 4. *Každý súvislý graf G je 3-hamiltonovský.*

Dôkaz. Tvrdenie stačí dokázať pre stromy (viď lemu 5), lebo ak G je súvislý graf, T jeho kostra, potom zrejme platí, že ak T je 3-hamiltonovský, je aj G 3-hamiltonvský.

♠

Lema 5. *Nech $T = (V, E)$, $|V| = n$ je strom, $\{u, v\} \in E$. Potom existuje poradie vrcholov $u = v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} = v$ spĺňajúce rovnosť $d_T(v_i, v_{i+1}) \leq 3$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Dôkaz. Lemu dokážeme matematickou indukciou podľa počtu vrcholov. Pre $n \leq 3$ je lem zrejmá.

Strom $T \setminus \{u, v\}$ sa rozpadne na komponenty súvislosti, označme T_u a T_v jeho komponenty súvislosti (prípadne i jednovrcholové), $u \in T_u$ a $v \in T_v$.

Zvoľme $u' \in V(T_u)$ tak, že $\{u, u'\} \in V$. (Prípadne $u = u'$.) Analogicky zvoľme $v' \in V(T_v)$ tak, že $\{v, v'\} \in V$. (Prípadne $v = v'$.) Na T_u a T_v použijeme indukčný predpoklad a dostaneme usporiadania vrcholov:

$$u, x_1, \ldots, x_r, u' \qquad \text{pre } T_u$$
$$v', y_1, \ldots, y_s, v \qquad \text{pre } T_v.$$

Potom $u, x_1, \ldots, x_r, u', v', y_1, \ldots, y_s, v$ je poradie vrcholov stromu T, ktoré spĺňa podmienku $\mathrm{d}_T(x, y) \leq 3$ pre každé dva po sebe idúce členy.

♠

Súvislosť grafu

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. Množinu A:

- $A \subseteq V$ nazývame *vrcholovým* rezom grafu G, ak graf

$$(V \setminus A, \{e \in E, e \cap A = \emptyset\})$$

je nesúvislý.

- $A \subseteq E$ nazývame hranovým rezom grafu G, ak graf

$$(V, E \setminus A)$$

je nesúvislý.

Definícia. Minimálna veľkosť hranového rezu sa nazýva hranová súvislosť grafu G, označujem $k_E(G)$. Graf sa nazýva k-hranovo súvislý, ak $k \leq k_E(G)$.

Minimálna veľkosť vrcholového rezu sa nazýva vrcholová súvislosť grafu G, označujem $k_V(G)$. Graf sa nazýva k-hranovo súvislý, ak $k \leq k_V(G)$.

Zrejme $k_V(G) = k_E(G) = 0$ pre nesúvislé grafy. $k_E(G) = k_V(G) = 1$ pre stromy. $k_E(G) = 2$ pre kružnicu. $k_E(K_n) = k_V(K_n) = n - 1$.

Veta 6. *Pre každý graf $G = (V, E)$ platí:*

$$k_V(G) \leq k_E(G) \leq \min_{v \in V} \deg_G(v) \leq \frac{2|E|}{|V|}.$$

Dôkaz. Ak $G = K_2$, tak obidve nerovnosti zrejme platia a teda v ďalšom predpokladáme $G \neq K_2$.

Prvá nerovnosť: indukciou vzhľadom na $k_E(G)$. Ak $k_E(G) = 0$, potom zrejme aj $k_V(G) = 0$. Ak $k_E(G) = 1$, potom G obsahuje most $\{u, v\}$ a určite aspoň jeden z grafov $G \setminus u$ alebo $G \setminus v$ je nesúvislý, čo znamená, že $k_V(G) = 1$.

Teraz predpokladajme platnosť pre všetky $k_E(G) < m$ ($m \geq 1$). Zoberme nejaký graf G_0, pre ktorý je $k_E(G_0) = m$. Nech $h_1, \ldots, h_m$ tvorí hranový rez. Nech G_1 je graf, ktorý vznikne z G_0 vynechaním hrany h_1, platí $k_E(G_1) = m - 1$. Nech teraz množina $M = \{v_1, \ldots, v_k\}$ predstavuje nejaký minimálny vrcholový rez grafu G_1. Podľa IP $k \leq m - 1$. Ak obidva koncové vrcholy hrany h_1 patria do množiny M, tak M je vrcholovým rezom aj grafu G_0, teda $k_V(G_0) = k \leq m - 1 < k_E(G_0)$. Ak aspoň jeden koncový vrchol hrany

h_1 nepatrí do M, tak ho označíme v_{k+1} a zrejme množina $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ bude vrcholovým rezom grafu G_0; pritom platí $k + 1 \leq m = k_E(G_0)$.

Druhá a tretia nerovnosť sú zrejmé.

♠

Veta 7 (Mengerova). *Graf $G = (V, E)$ je vrcholovo k-súvislý práve vtedy, keď medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi $u, v \in V$ existuje aspoň k vrcholovo disjunktných ciest.*

Platí analógia aj pre hranovú súvislosť.

Lema. *Graf $G = (V, E)$ je vrcholovo 2-súvislý práve vtedy, keď pre každé dva vrcholy $u, v \in V$ existuje kružnica v G, ktorá ich obsahuje.*

Dôkaz. $\Leftarrow$ Vynechaním ľubovoľného vrchola bude ešte vždy existovať aspoň jedna cesta medzi vrcholmi u a v, G je teda 2-súvislý.

$\Rightarrow$ Existenciu spoločnej kružnice pre vrcholy u a v dokážeme indukciou podľa $\mathrm{d}_G(u, v)$.

Ak $\mathrm{d}_G(u, v) = 1$, to znamená, že $\{u, v\} = e \in E(G)$. Vďaka 2-súvislosti G je $G \setminus e$ tiež súvislý. Preto existuje v grafe $G \setminus e$ cesta z u do v a tá spolu s hranou e tvorí kružnicu obsahujúcu u a v.

Predpokladajme teraz pre nejaké $k \geq 2$, že každá dvojica vrcholov so vzdialenosťou menšou ako k ležia na spoločnej kružnici a uvážme dva vrcholy $u, v \in V$ vo vzdialenosti k. Nech $P = (u = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = v)$ je cesta najkratšej dĺžky z u do v. Nakoľko $\mathrm{d}_G(u, v_{k-1}) = k - 1$, existuje kružnica obsahujúca u a v_{k-1}. Táto kružnica je tvorená dvoma cestami P_1 a P_2 z u do v_{k-1}. Uvážme teraz graf $G \setminus v_{k-1}$. Ten je súvislý, a teda v ňom existuje cesta $\tilde{P}$ z vrcholu u do vrcholu v. Táto cesta teda neobsahuje vrchol v_{k-1}. Uvážme posledný vrchol na ceste $\tilde{P}$ (smerom od vrcholu v) náležajúci niektorej z ciest P_1, P_2 a označme ho w. Predpokladajme (buno), že w je vrcholom cesty P_1. Potom hľadaná kružnica obsahujúca vrcholy v a u bude tvorená cestou P_2, úsekom cesty P_1 medzi u a w, a úsekom cesty $\tilde{P}$ medzi w a v.

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je graf. Pre $e \in E$, $e = \{u, v\}$ je definovaná operácia *delenia hrany* nasledovne:

$$G\%e = (V', E'), \text{kde } V' = V \cup \{w\}, w \notin V$$
$$E' = (E \setminus \{e\}) \cup (\{w, v\}, \{u, w\}).$$

Veta 8 (ušatá). *Graf G je 2-súvislý (vrcholovo) práve vtedy, ak G je možné vytvoriť z K_3 postupným prevádzaním operácie delenia a pridania hrany.*