Kreslenie grafov a rovinné grafy

Definícia. *Oblúk* o je podmnožina roviny tvaru $o = \gamma([0,1]) = \{\gamma(x); x \in [0,1]\}$, kde $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je nejaké prosté spojité zobrazenie uzavretého intervalu $[0,1]$ do roviny. Pritom body $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ sa volajú *koncové body* oblúku o.

Nakreslením grafu $G = (V,E)$ rozumieme priradenie, ktoré každému vrcholu v v grafe G priraďuje bod $b(v)$ roviny, a každej hrane $e = \{v, v'\} \in E$ priraďuje oblúk $o(e)$ v rovine s koncovými bodmi $b(v)$ a $b(v')$. Pritom predpokladáme, že zobrazenie b je prosté (rôznym vrcholom odpovedajú rôzne body), a oblúk $o(e)$ neobsahuje žiadny z bodov odpovedajúcich množine V okrem koncových bodov $b(v)$ a $b(v')$. Graf spolu s nejakým nakreslením nazývame *topologický* graf.

Nakreslenie grafu $G = (V,E)$ v ktorom oblúky odpovedajúce rôznym hranám majú spoločné nanajvýš koncové body, sa nazýva rovinné nakreslenie. Graf G je rovinný, ak existuje aspoň jedno jeho rovinné nakreslenie.

Graf je možné nakresliť v rovine bez kríženia hrán, práve keď ho môžeme nakresliť na guľu bez kríženia hrán. To je zrejmé, keď použijeme stereografickú projekciu: guľu umiestnime v trojrozmernom priestore tak, aby sa dotýkala uvažovanej roviny ρ a označíme o bod gule najvzdialenejší od roviny ρ (tzv. severný pól). Potom stereografická projekcia priraďuje každému bodu $x \neq o$ na povrchu gule bod x' v rovine ρ, kde x' je priesečník priamky ox s rovinou ρ. Toto je bijekcia medzi povrchom gule bez bodu o a rovinou ρ. Ak máme nejaké nakreslenie grafu na G na povrch gule (bez kríženia hrán), pričom bod o neleží na žiadnom z oblúkov nakreslenia (čo môžme buno predpokladať), potom stereografickou projekciou dostaneme rovinné nakreslenie G. Obrátene, z každého rovinného nakreslenia dostaneme spätnou projekciou nakreslenie na guľu.

Definícia. Nech $G = (V,E)$ je topologický rovinný graf, t.j. rovinný graf s daným rovinným nakreslením. Uvažujme množinu všetkých bodov roviny, ktoré neležia v žiadnom z oblúkov nakreslenia. Táto množina sa rozpadne na konečný počet súvislých oblastí. Tieto oblasti budeme nazývať *steny* (oblasti) topologického rovinného grafu.

Oblasti sú definované pre dané rovinné nakreslenie. Je ich počet závislý od konkrétneho nakreslenia, alebo od grafu?

Veta (Eulerov vzorec). *Nech $G = (V,E)$ je súvislý rovinný graf a nech s je počet oblastí nejakého rovinného nakreslenia G. Potom platí:*

$$|V| - |E| + s = 2.$$

Špeciálne počet stien nezávisí na spôsobe nakreslenia rovinného grafu.

Dôkaz. Indukciou podľa počtu hrán grafu G. Ak je $E = \emptyset$, potom $|V| = 1$ a $s = 1$, a vzorec platí. Nech $|E| \geq 1$, rozlišujme dve možnosti:

1. Graf G neobsahuje kružnicu, potom G je strom a teda $|V| = |E| + 1$, pričom $s = 1$.
2. Nejaká hrana $e \in E$ je obsiahnutá v kružnici. Graf $G \setminus e$ je potom súvislý a podľa indukčného predpokladu preň platí Eulerov vzorec. Hrana e v nakreslení G susedí s dvoma rôznymi oblasťami S a S', ktoré sa v nakreslení $G \setminus e$ stanú oblasťou jedinou. Takže počet hrán i stien pre G stúpol v porovnaní s $G \setminus e$ o 1.

♠

Dôsledok 1. *Ak G je súvislý rovinný graf, v ktorom všetky oblasti sú ohraničené kružnicou C_n, tak*

$$|E| = \frac{n(|V|-2)}{n-2}.$$

Dôkaz. Každá hrana je obsiahnutá v dvoch oblastiach (kružniciach dĺžky n), teda $2|E| = sn \implies s = \frac{2|E|}{n}$. Dosadením do Eulerovho vzťahu a úpravami dostaneme požadovanú rovnosť.

♠

Dôsledok 2. *Ak G je súvislý rovinný graf s aspoň 3 vrcholmi a maximálnym počtom hrán, tak každá oblasť je C_3 a platí:*

$$|E| = 3|V| - 6.$$

Dôkaz. Ak by nejaká oblasť nebola C_3, pridaním hrany sa rovinnosť grafu neporuší a pôvodný graf teda nemal maximálny počet hrán. Počet hrán vyplýva z predchádzajúceho dôsledku.

♠

Dôsledok 3. *Ak G je rovinný graf s aspoň 3 vrcholmi, potom platí:*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Dôsledok 4. *A G je rovinný graf s aspoň 2 vrcholmi, potom G nutne obsahuje aspoň dva vrcholy stupňa nanajvýš 5.*

Dôkaz. Z predchádzajúceho dôsledku:

$$2|E| \leq 6|V| - 12$$

a zároveň vieme, že $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$.

Ak by všetky vrcholy boli stupňa aspoň 6, dostávame: $6|V| \leq 6|V| - 12$, čo nie je možné. Obdobne, keby existoval iba jeden vrchol stupňa nanajvýš 5, platilo by: $6(|V| - 1) \leq 6|V| - 12$, čo taktiež nie je možné.

♠

Platónske telesá

Antická škola venovala veľkú pozornosť pravidelným geometrickým útvarom, takzvaným *pravidelným mnohostenom.* Pravidelný mnohosten je trojrozmerné konvexné teleso, ohraničené konečným počtom oblastí – zhodných pravidelných mnohouholníkov, ktorých sa v každom vrchole stretáva rovnaký počet. Záujem o ich štúdiom bol podnietený zrejme ich ohraničeným počtom. Už v staroveku sa vedelo, že ich je len päť: pravidelný štvorsten, kocka, pravidelný osemsten, dvanásťsten a dvadsaťsten. Ale prečo?

Prevedieme mnohosten na graf pomocou streografickej projekcie – umiestnime skúmaný mnohosten do vnútra gule tak, aby jej stred ležal vo vnútri nej. Premietneme ho zo stredu na povrch gule a tým dostaneme nejaké nakreslenie rovinného grafu na guľu. O tom už vieme, že je možné ďalej stereografickou projekciou premeniť na rovinné nakreslenie grafu. Steny mnohostenu budú odpovedať oblastiam grafu.

Pre každý pravidelný mnohosten má vzniknutý topologický rovinný graf zrejme každý vrchol stupeň d ($d \geq 3$) a každá oblasť má na hranici rovnaký počet vrcholov k, $k \geq 3$. Neexistencia ďalších pravidelných mnohostenov vyplýva z nasledujúcej vety:

Veta. *Nech G je topologický rovinný graf, ktorého každý vrchol má stupeň d, $d \geq 3$ a ktorého každá stena má k vrcholov, $k \geq 3$. Potom G je izomorfný s rovinným nakreslením pravidelný štvorstena, kocky, pravidelný osemstena, dvanásťstena alebo dvadsaťstena.*

Dôkaz. Označme n počet vrcholov, m počet hrán a s počet oblastí rovinného grafu $G = (V, E)$. Z vlastností o počte hrán platia vzťahy:

$$dn = 2m,$$
$$ks = 2m$$

Dosadením do Eulerovho vzorca dostávame:

$$2 = n - m + s = \frac{2m}{d} - m + \frac{2m}{k},$$

a odtiaľ po úprave:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\,.$$

Ak $d = 3$, potom máme $\frac{1}{k} - \frac{1}{6} = \frac{1}{m} > 0$, takže $k \in \{3, 4, 5\}$. Podobne pre $k = 3$ dostaneme $d \in \{3, 4, 5\}$. Potom už v oboch prípadoch vieme jednoznačne dopočítať m, n a s.

Teda nastáva jedna z možností:

d	k	n	m	s
3	3	4	6	4 (pravidelný štvorsten)
3	4	8	12	6 (kocka)
3	5	20	30	12 (pravidelný dvanásťsten)
4	3	6	12	8 (pravidelný osemsten)
5	3	12	30	20 (pravidelný dvadsaťsten)

♠

Charakterizácia rovinných grafov

Veta (Kuratowského). *Graf G je rovinný, práve vtedy keď žiadny jeho podgraf nie je izomorfný s delením grafu $K_{3,3}$ alebo K_5.*

K_5 nie je zrejme rovinný podľa dôsledku 3, pre $K_{3,3}$ to skúste dokázať ako cvičeníčko.

Kreslenie na iné plochy

Graf G môžeme nakresliť i na iných plochách než je rovina, napr. na guľu, anuloid (torus, pneumatika), Möbiov list, Kleinovu fľašu, či guľu „s ušami“.

Grafy môžeme rozlišovať podľa plochy, na ktorú je možné ich nakresliť (samozrejme bez kríženia hrán). Napríklad nerovinný graf K_5 je možné nakresliť na torus, $K_{3,3}$ na Möbiov list.

Veta. *Každý graf je možné nakresliť na guľu s dostatočným počtom „uší“.*

Definícia. Minimálny počet „uší“, ktoré je treba pridať ku guli tak, aby na vzniknutú plochu bolo možné nakresliť graf G bez kríženia hrán, sa nazýva *rod* grafu.

Podľa spomínanej stereografickej projekcie medzi kreslením na guľu a rovinu sú rovinné grafy práve grafy rodu 0.