Farbenie grafov

Definícia. Obyčajný graf $G = (V, E)$ sa nazýva k-chromatický, ak existuje funkcia $f\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ taká, že pre každú dvojicu vrcholov u a v takú, že $\{u, v\} \in E$ platí $f(u) \neq f(v)$. Najmenšie prirodzené číslo k také, že graf je k-chromatický, nazývame farebnosťou grafu a značíme $\chi(G)$.

Chromatické číslo jedna majú len grafy bez hrán, farebnosť úplnych grafov K_n je n, farebnosť stromov (s aspoň jednou hranou), bipartitných grafov a kružníc s párnym počtom vrcholov je 2, farebnosť kružníc s nepárnym počtom vrcholov je 3.

Lemátko 1. $\chi(G) \leq 2 \iff$ *ak G neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

Dôkaz. $\Rightarrow$ Ak G obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, potom $\chi(G) > 2$.

$\Leftarrow$ BUNO môžme predpokladať, že G je súvislý. Ak by nebol, urobíme úvahu pre každú komponentu súvislosti zvlášť. Zvoľme $u \in V(G)$ ľubovoľný. Definujme:

$$G_0 = \{v;\ v \in V(G), \text{najkratšia cesta z } u \text{ do } v \text{ je párnej dĺžky, ofarbíme farbou } 1\}$$
$$G_1 = \{w;\ w \in V(G), \text{najkratšia cesta z } u \text{ do } w \text{ je nepárnej dĺžky, ofarbíme farbou } 0\}$$

Zrejme $G_0 \cap G_1 = \emptyset$, $G_0 \cup G_1 = V(G')$, takže definovali sme farbu každého vrcholu grafu G. Ak ľubovoľné vrcholy $\{x, y\} \in E(G)$, potom ak ich najkratšia vzdialenosť od u je rôznej parity, vrcholy zrejme majú rôznu farbu. Ak by ich vzdialenosť bola rovnakej parity, G by obsahoval kružnicu nepárnej dĺžky, čo však nie je možné. Definovaný rozklad vrcholov teda skutočne definuje ofarbenie.

♠

Lemátko 2. $\chi(G) \leq \max_{v \in V} \deg_G(v) + 1$.

Dôkaz. Matematickou indukciou podľa počtu vrcholov grafu G.

♠

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je obyčajný graf. Množina $M \subseteq V$ sa nazýva *nezávislá*, ak pre žiadnu dvojicu vrcholov z množiny M neexistuje v grafe G hrana, t.j. $\binom{M}{2} \cap E = \emptyset$. *Nezávislosť* grafu je veľkosť najväčšej nezávislej množiny, označujeme $\alpha(G)$, t.j.

$$\alpha(G) = \max\{|M|, M \subseteq V, M \text{ nezávislá množina}\}.$$

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je obyčajný graf. *Doplnok* grafu G budeme označovať $\overline{G}$ a je definovaný nasledovne:

$$V(\overline{G}) = V(G), \quad e \in E(\overline{G}) \iff e \notin E(G).$$

Lemátko 3. *Pre každý obyčajný graf $G = (V, E)$ platí: $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V|$.*

Dôkaz. Pre každé $i \in \{1, \ldots, \chi(G)\}$ označme $V_i \subseteq V$ takú, že vrcholy množiny V_i sú ofarbené farbou i. Zrejme $\alpha(G) \geq |V_i|$. Sčítaním poslednej nerovnosti pre $i = 1$ až $\chi(G)$ dostávame požadovanú nerovnosť.

♠

Veta (paradox). *Pre každé $n \in N$, $n > 1$ existuje graf G_n taký, že $\chi(G_n) \geq n$ a $\omega(G_n) = 2$.*

Farebnosť rovinných grafov

Jednou z prirodzených aplikácií farbenia rovinných grafov je napríklad farbenie štátov v mapách.

Ľahko sa dá ukázať, že chromatické číslo každého rovinného grafu je nanajvýš 6 a zjemnením úvah sa dokáže odhad nanajvýš 5.

Jedným z najznámejších problémov v matematike dlhú dobu bol problém štyroch farieb: t.j. či chromatické číslo každého rovinného grafu je nanajvýš 4?

Nevie sa presne, kto vyslovil túto domnienku. V teórii grafov však zohrala významnú rolu. Už v roku 1840 sa problémom zaoberal Möbius, v roku 1850 sa o vyriešenie pokúšal de Morgan. Od tých čias sa vynaložilo veľa energie na vyriešenie tohto jednoducho formulovateľného problému. Prvý dôkaz uverejnil v roku 1879 Kempe, ale už v roku 1890 v ňom Heawood našiel chybu. Riešenie sa našlo až v roku 1976, keď Apple a Hacken dokázali správnosť hypotézy pomocou počítača. Vychádzali z Kempeho neúplneho dôkazu a jeho vylepšením sa zredukuje problém štyroch farieb na zafarbenie 1936 konkrétnych grafov. Túto úlohu už potom vyriešil počítač. Tu sa v histórii pravdepodobne prvýkrát použil počítač pri riešení závažného teoretického problému.

Veta 1. *Ak G je rovinný graf, potom $\chi(G) \leq 6$.*

Dôkaz. Matematickou indukciou podľa počtu vrcholov využijúc pritom fakt, že v rovinnom grafe existuje vrchol stupňa nanajvýš 5.

♠

Veta 2. *Ak G je rovinný graf, potom $\chi(G) \leq 5$.*

Dôkaz. Matematickou indukciou podľa počtu vrcholov využijúc pritom fakt, že v rovinnom grafe existuje vrchol v stupňa nanajvýš 5. Ak stupeň vrchola v je nanajvýš 4, resp. ak pri zafarbení grafu $G \setminus \{v\}$ 5 farbami existujú dvaja susedia v zafarbení rovnakou farbou, sme hotoví.

Ostáva vyšetriť prípad, ak v susedí s piatimi vrcholmi, z ktorých každý je zafarbený inou farbou c_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Označme G_{13} podgraf grafu $G \setminus \{v\}$ indukovaný tými vrcholmi, ktoré majú farbu c_1 a c_3. Podgraf G_{13} zrejme nemusí byť súvislý. Keď v_1 a v_3 patria do rôznych komponent grafu G_{13}, potom vzájomnou zámenou farieb c_1 a c_3 v tej komponente, do ktorej patrí vrchol v_1, dostaneme znova ofarbenie grafu $G \setminus \{v\}$ piatimi farbami. V tomto novom ofarbení môžme vrchol v zafarbiť farbou c_1.

Ak v_1 a v_3 patria do toho istého komponentu grafu G_{13}, tak existuje v $G \setminus v$ medzi nimi cesta ktorej všetky vrcholy sú zafarbené striedavo c_1 a c_3. Táto cesta spolu s cestou v_1, v, v_3 tvorí v G kružnicu, ktorá vďaka rovinnosti grafu oddeľuje vrchol v_2 od vrcholov v_4 a v_5. Inými slovami: medzi vrcholmi v_2 a v_4 neexistuje cesta, ktorej všetky vrcholy by boli zafarbené len farbami c_2 a c_4. Teda ak G_{24} označíme podgraf indukovanými tými vrcholmi, ktoré majú farbu c_2 a c_4, tak v_2 a v_4 patria do rôznych komponent grafu G_{24}. V tom komponente, ktorý obsahuje vrchol v_4 vymeňme navzájom zafarbenie vrcholov (tie, ktoré mali farbu c_2 budú mať c_4 a obrátene.) Takto dostaneme nové ofarbenie grafu $G \setminus \{v\}$ piatimi farbami, pričom vrchol v v grafe G môžme zafarbiť farbou c_4.

♠

Veta 3. *Ak G je rovinný graf, potom $\chi(G) \leq 4$.*

Predchádzajúca veta sa dá ešte zosilniť:

Veta 4. *Ak G je rovinný graf bez trojuholníkov, potom $\chi(G) \leq 3$.*

Dôkaz. Obtiažny.

♠

Ramseyho čísla

Vyjdime z hlavolamu: je pravda, že v spoločnosti, kde je aspoň 6 ľudí, existuje buď trojica ľudí, ktorí sa navzájom poznajú alebo trojica ľudí, ktorí sa navzájom nepoznajú? Vytvorme si graf takto: vrcholmi budú osoby, ktoré spojíme hranou ak sa navzájom poznajú. Potom hlavolam možno sformulovať nasledovne: platí pre každý obyčajný graf s počtom vrcholov aspoň 6, že buď graf G obsahuje K_3 alebo $\alpha(G) \geq 3$?

Iná formulácia hlavolamu: ak ofarbíme všetky hrany K_6 dvoma farbami Č a M je potom pravda, že tam bude existovať jednofarebný trojuholník? Ak $v \in K_6$ ľubovoľný, potom z neho vychádzajú buď aspoň 3 červené hrany, alebo aspoň 3 modré hrany s koncovými vrcholmi u_1, u_2, u_3. Ak sú hrany medzi týmito vrcholmi rovnakej farby, máme hľadaný trojuholník. Ak nie, potom vždy existuje medzi nimi hrana $\{u_x, u_y\}$, $(x, y \in \{1,2,3\})$ ktorá spolu s hranami $\{v, u_x\}$ a $\{v, u_y\}$ tvorí jednofarebný trojuholník. (Nakresliť!)

Zobecnime si (ako obvykle) predchádzajúci hlavolam:

Existuje vôbec a keď áno tak aké je najmenšie prirodzené číslo k také, že každý obyčajný graf G na k vrcholoch buď obsahuje K_m alebo $\alpha(G) \geq n$? Čísla s takouto vlastnosťou sa volajú Ramseyho čísla a označujú sa $r(m,n)$.

Rekurentný vzťah medzi Ramseyho číslami našli Erdös a Szekeres.

Veta 5. *Pre $m, n \geq 2$ platí*

$$r(m,n) \leq r(m,n-1) + r(m-1,n). \tag{1}$$

Dôkaz. Nech $G = (V,E)$ má $r(m,n-1) + r(m-1,n)$ a zvoľme $v \in V$ ľubovoľný. Budeme rozlišovať 2 prípady:

a) $\deg_G(v) \geq r(m-1,n)$,

b) $\deg_G(v) < r(m-1,n)$.

V prípade a) označme $v_1, \ldots, v_k$ vrcholy patriace do okolia v a nech G_1 je podgraf indukovaný vrcholmi $v_1, \ldots, v_k$. Pretože $k \geq r(m-1,n)$ buď G_1 obsahuje K_{m-1} alebo $\alpha(G_1) \geq n$ (vyplýva priamo z definície Ramseyových čísel. Ak G_1 obsahuje K_{m-1}, tak pridaním vrcholu v (ktorý susedí so všetkými vrcholmi v G_1) dostaneme K_m; ak $\alpha(G_1) \geq n$, potom zrejme aj $\alpha(G) \geq n$. Teda tvrdenie vety platí.

V prípade b) v doplnku $\overline{G}$ grafu G platí $\deg_{\overline{G}}(v) \geq r(m,n-1)$. Dôkaz beží analogicky ako v časti a) ak si uvedomíme, že $r(m,n) = r(n,m)$.

♠

Ľahko sa dá ukázať, že pre ľubovoľné prirodzené $m, n \geq 2$ platí $r(m,2) = m$, $r(2,n) = n$. Z predchádzajúcej vety dostaneme

$$r(3,3) \leq r(3,2) + r(2,3) = 3 + 3 = 6.$$

To znamená, že pre 6-vrcholové grafy už platí, že obsahujú K_3 alebo nezávislú množinu veľkosti 3, čo je odpoveďou na našu hádanku.

Veta 6. *Pre $m, n \geq 2$ platí*

$$r(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}. \tag{2}$$

Dôkaz. Dokazovaný vzťah platí akonáhle aspoň jedno z čísel m a n sa rovná dvom. Potom: $r(m,2) = m \leq \binom{m}{m-1}$, $r(2,n) = n \leq \binom{n}{1}$. Predpokladajme, že (2) platí pre všetky čísla m_1 a n_1, ktorých súčet je menší ako $m+n$ a dokážeme, že potom platí aj pre m a n.

Podľa IP platí

$$r(m,n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-1}, \quad r(m-1,n) \leq \binom{m+n-3}{m-2}.$$

Z toho na základe (1) dostávame:

$$r(m,n) \leq r(m-1,n) + r(m,n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1}.$$

♠

Uvedený odhad je veľmi nepresný, ale má dôležitý teoretický význam: vieme, že $r(m,n)$ je vždy konečné číslo. Nájsť presné hodnoty Ramseyho čísel je veľmi ťažká úloha a poznáme doteraz len niekoľko málo hodnôt, najväčšie $r(4,4) = 18$, $r(3,7) = 23$. Na určenie ďalších hodnôt dnes ešte nestačia počítače.