Domáca úloha z grafov #1

Mišo Forišek

Použijem (bez dôkazu) tvrdenie z prednášky:
Lemma: Vrcholy každého grafu (rádu n) je možné usporiadať ako $v_1, \ldots, v_n$ tak, že pre každé i je graf $G_i = G[v_1, \ldots, v_i]$ súvislý.

Veta: Každý súvislý netriviálny graf obsahuje vrchol, ktorý nie je artikuláciou.
Dôkaz: Keďže náš graf je súvislý, z lemmy vieme, že existuje také poradie $v_1, \ldots, v_n$ jeho vrcholov, že pre každé i je graf $G_i = G[v_1, \ldots, v_i]$ súvislý. Špeciálne to bude platiť aj pre $i = n - 1$. $G[v_1, \ldots, v_{n-1}]$ je ale práve graf, ktorý dostaneme z G odstránením vrcholu v_n. To ale znamená, že vrchol v_n nie je artikulácia (po jeho odstránení nám zostal súvislý graf), q.e.d.

Domáca úloha z grafov #2

Mišo Forišek

Označme náš strom T, (jedinú) cestu medzi jeho vrcholmi u a v ako $T(u,v)$. Zoberme v T ľubovoľnú najdlhšiu cestu, označme ju P. Vrcholy tejto cesty budeme značiť $V(P)$. Jej koncové vrcholy označme x, y.

Lema 1: Pre ľub. vrchol $u \in V(P)$ je $d(u,x) \geq \mathrm{rad}(G)$ alebo $d(u,y) \geq \mathrm{rad}(G)$.
Dôkaz: Sporom. Určite $\exists$ vrchol z taký, že $d(u,z) \geq \mathrm{rad}(G)$. Potom zjavne $T(u,z)$ určite nemá spoločnú hranu aspoň s jednou z ciest $T(u,x)$ a $T(u,y)$ a spolu s touto cestou tvorí v grafe cestu dlhšiu ako $T(x,y) = P$, spor.

Lema 2: $C(G) \subseteq V(P)$
Dôkaz: Sporom. Nech $v \in C(G)$ a $v \notin V(P)$. Nech u je prvý vrchol $T(v,x)$, ktorý leží na P. Z lemy 1 vieme, že aspoň jedna zo vzdialeností $d(u,x)$, $d(u,y)$ je aspoň $\mathrm{rad}(G)$. BUNV nech $d(u,x) \geq \mathrm{rad}(G)$. Potom ale $d(v,x) = d(v,u) + d(u,x) > \mathrm{rad}(G)$, čo je spor s tým, že $v \in C(G)$.

Lema 3: Nech $u \in V(P)$. Potom $ex(u) = \max(d(u,x), d(u,y))$.
Dôkaz: Analogicky ako v dôkaze lemy 1 sporom – keby $ex(u) > \max(d(u,x), d(u,y))$, vezmime najvzdialenejší vrchol od u, označme ho v a potom by $T(v,u)$ spolu s niektorou z $T(u,x)$ a $T(u,y)$ tvorili dlhšiu cestu ako P, spor.

Veta: Centrum grafu obsahuje buď jeden vrchol, alebo dva vrcholy spojené hranou, pričom prvý prípad nastáva práve keď $\mathrm{diam}(G) = 2\mathrm{rad}(G)$.
Dôkaz: Z lemy 2 vieme, že všetky vrcholy centra ležia na P, z lemy 3 vieme excentricity všetkých vrchoov P. Centrum teda zjavne tvoria vrcholy P s minimálnou excentricitou. Ak má P párny počet hrán, je to zjavne stredný vrchol, ak má nepárny počet hrán, sú to dva stredné vrcholy. Ostáva si uvedomiť, že z lemy 1 vieme, že aj pre vrcholy z centra platí, že dlhšia z vzdialeností $d(u,x)$, $d(u,y)$ je aspoň $\mathrm{rad}(G)$. To ale znamená, že ak centrum T tvorí jeden vrchol u, tak $\mathrm{diam}(G) = d(x,y) = d(x,u) + d(u,v) \geq 2\mathrm{rad}(G)$, a teda $\mathrm{diam}(G) = 2\mathrm{rad}(G)$. Naopak ak centrum grafu tvoria dva vrcholy, tak je $\mathrm{diam}(G)$ nepárne a teda sa nerovná $2\mathrm{rad}(G)$, q.e.d.

Domáca úloha z grafov #3

Mišo Forišek

Veta: $\mathrm{diam}(G) > 3 \ \Rightarrow \ \mathrm{diam}(\overline{G}) < 3$.
Dôkaz: Nech $\mathrm{diam}(G) > 3$. Chceme dokázať, že $\mathrm{diam}(\overline{G}) < 3$, t.j. že pre ľub. $u, v \in V(G)$ je $d_{\overline{G}}(u, v) \leq 2$. To znamená, že buď sú v $\overline{G}$ vrcholy u, v spojené hranou, alebo existuje vrchol, s ktorým sú oba spojené. Sporom. Nech to neplatí, potom $uv \in E(G)$ a $(\forall z \in V(G); z \neq u; z \neq v)\ uz \in E(G) \vee vz \in E(G)$. To ale znamená, že každý vrchol G susedí s aspoň jedným z vrcholov u, v. A keďže $uv \in E(G)$, vyplýva z toho, že $ex(u) \leq 2$ a $ex(v) \leq 2$.

Zoberme si ľubovoľné 2 vrcholy $x, y \in V(G)$. Ak je niektorý z nich u alebo v, zjavne je $d(x, y) \leq 2$. Ak nie, pokiaľ sú oba spojené s tým istým vrcholom z dvojice u, v, je $d(x, y) \leq 2$ (lebo existuje $x-y$ cesta dĺžky 2 cez tento vrchol) a pokiaľ sú spojené každý z iným z nich, je $d(x, y) \leq 3$ (lebo existuje $x - y$ cesta dĺžky 3 cez u a v). Tým sme pre ľubovoľné 2 vrcholy G ukázali, že ich vzdialenosť je najviac 3. To je ale spor s predpokladom, že $\mathrm{diam}(G) > 3$. Preto nutne $\mathrm{diam}(\overline{G}) < 3$, q.e.d.

Dôsledok: $\mathrm{diam}(H) \geq 3 \ \Rightarrow \ \mathrm{diam}(\overline{H}) \leq 3$.
Dôkaz: Obmenená implikácia k práve dokázanej vete hovorí, že $\mathrm{diam}(\overline{G}) \geq 3 \ \Rightarrow \ \mathrm{diam}(G) \leq 3$. Toto tvrdenie platí pre ľubovoľný graf, teda aj pre $\overline{H}$. Dosadením $\overline{H}$ za G dostávame dokazované tvrdenie.

Domáca úloha z grafov #4

Mišo Forišek

Veta: Nech G je kubický graf. Potom $\kappa(G) = \lambda(G)$.

Dôkaz: Pre K_4 tvrdenie zjavne platí. Žiadny iný kubický graf nie je kompletný, preto pre ne stupeň vrcholovej, resp. hranovej súvislosti je rovný veľkosti najmenšej množiny vrcholov, resp. hrán, ktorej odobraním znesúvislíme graf. Pre nesúvislé grafy je $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$. Preto nech G je súvislý.

Na prednáške sme mali dokázané, že pre ľubovoľný netriviálny graf G platí $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. Ostáva nám teda dokázať, že $\lambda(G) \leq \kappa(G)$. Zoberme si minimálnu množinu vrcholov V (bude $|V| = \kappa(G)$) takú, že jej odstránením graf znesúvislíme. Označme jeden z komponentov, ktoré nám vzniknú, A a zvyšné vrcholy B. Ďalej označme vrcholy množiny V v_1, v_2, $\dots$, v_k. Každý z nich musí byť spojený hranou s nejakým vrcholom z A a s nejakým vrcholom z B. Sporom – nech BUNV v_1 nie je spojený so žiadnym vrcholom z B. Potom každá $A - B$ cesta vedúca cez v_1 nutne vedie aj cez nejaký iný vrchol z V (lebo medzi A a B nevedú priame hrany a ani z v_1 sa do B priamo nedostaneme). To ale znamená, že už po odstránení vrcholov v_2, $\dots$,v_k nebude existovať žiadna $A - B$ cesta, čo je spor s minimalitou V.

Označme teraz ľubovoľnú hranu, vedúcu z v_i do A, ako $e_{i,1}$, ľubovoľnú z neho do B ako $e_{i,2}$ a zvyšnú ako $e_{i,3}$. Zostrojme teraz množinu hrán W nasledovne: pokiaľ $e_{i,3}$ vedie do A, dajme do W hranu $e_{i,2}$, pokiaľ vedie do B, hranu $e_{i,1}$. V každom z týchto prípadov po odstránení vybranej hrany už zjavne nebude existovať $A - B$ cesta, vedúca cez v_i. Ostáva doriešiť vrcholy, pre ktoré $e_{i,3}$ vedie do iného vrcholu V. Keďže V je kubický, dostaneme takto niekoľko dvojíc spojených vrcholov z V. Pre každú z nich (BUNV v_i a v_j) stačí dať do W hrany $e_{i,1}$ a $e_{v,1}$. Po odstránení týchto dvoch hrán zjavne nebude existovať žiadna $A - B$ cesta, vedúca cez v_i ani v_j.

Tým sme zostrojili množinu hrán W takú, že $|W| = |V|$ a po odstránení hrán z W z grafu G nebude existovať $A - B$ cesta cez žiaden vrchol z V. Avšak podľa výberu V každá $A - B$ cesta viedla cez niektorý vrchol z V. To ale znamená, že odstránenie hrán z W nám graf znesúvislí. Preto $\lambda(G) \leq |W| = |V| = \kappa(G)$, q.e.d.

Domáca úloha z grafov #5

Mišo Forišek

Veta: $\lambda(K_n) = n - 1$.

Dôkaz: Pre $n = 1$ platí. Nech teraz $n > 1$. Zoberme ľubovoľnú množinu hrán takú, že po jej odstránení dostaneme nesúvislý graf. BUNV nech jeden z komponentov výsledného grafu má k vrcholov. Potom medzi týmto komponentom a zvyškom grafu viedlo $k(n-k)$ hrán, ktoré sme všetky museli odstrániť. Tento výraz nadobúda pre $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ minimum pre $k = 1$ a $k = n - 1$. Toto minimum je rovné $n - 1$. Preto každá množina hrán, ktorej odobraním K_n znesúvislíme, má aspoň $n - 1$ hrán.

Na druhej strane, keď odstránime všetkých $n - 1$ hrán, vedúcich do ľubovoľného pevne zvoleného vrchola, dostaneme nesúvislý graf. Preto naozaj $\lambda(K_n) = n - 1$, q.e.d.

Veta: $\lambda(K_{m,n}) = \min(m, n)$.

Dôkaz: BUNV nech $m \geq n$, nech A je bipartícia $K_{m,n}$ s m vrcholmi a B nech sú zvyšné vrcholy ($|B| = n$). Ak odstránime menej ako n hrán (ľubovoľných), ostane nám určite v A vrchol a a v B vrchol B také, že sme z nich neodstránili hranu. Potom ale ľubovoľné dva vrcholy A sú spojené cez b, ľubovoľné dva vrcholy B sú spojené cez a a ľubovoľný vrchol z A je spojený s ľub. vrcholom z B cez b a a, čiže výsledný graf je súvislý.

Na druhej strane, keď odstránime všetky hrany, vedúce do pevne zvoleného vrcholu z A (týchto hrán je n), dostaneme nesúvislý graf. Preto naozaj $\lambda(K_{m,n}) = \min(m, n)$, q.e.d.

Domáca úloha z grafov #6

Mišo Forišek

Lema 1: Graf G je eulerovský práve vtedy, ak je súvislý a všetky jeho vrcholy majú párny stupeň.
Dôkaz: Bol uvedený na prednáške.

Lema 2: Ak je G súvislý, tak aj $L(G)$ je súvislý.
Dôkaz: Priamo. Nech G je súvislý. Označme vrcholy G $v_1, \dots, v_n$, hrany $e_1, \dots, e_m$. Následne označme vrcholy $L(G)$ $u_1, \dots, u_m$, pričom vrchol u_i bude zodpovedať hrane e_i grafu G.

Potrebovali by sme ukázať, že v $L(G)$ existuje cesta medzi ľubovoľnými 2 vrcholmi u_i, u_j. Nech v_a je ľubovoľný koncový vrchol e_i a v_b ľubovoľný koncový vrchol e_j. Keďže G je súvislý, tieto vrcholy sú v G spojené cestou C. Pokiaľ cesta C nezačína hranou e_i, resp. nekončí hranou e_j, tieto hrany do nej pridajme. Dostaneme sled v G, začínajúci hranou e_i a končiaci hranou e_j. Vrcholy $L(G)$ zodpovedajúce dvom susedným hranám tohoto sledu v $L(G)$ susedia. Postupnosť vrcholov $L(G)$ zodpovedajúcich hranám tohoto sledu teda určuje sled, spájajúci vrcholy u_i a u_j. To ale znamená, že pre ľubovoľné dva vrcholy $L(G)$ existuje sled, ktorý ich spája, a teda je $L(G)$ súvislý, q.e.d.

Lema 3: Ak majú v G všetky vrcholy párny stupeň, tak aj v $L(G)$ majú všetky vrcholy párny stupeň.
Dôkaz: Priamo. Nech majú v G všetky vrcholy párny stupeň. Použijeme značenie z predchádzajúceho dôkazu. Označme koncové vrcholy hrany e_i v_{i1} a v_{i2}. Vo vrchole v_{i1} hrana e_i susedí s $\deg(v_{i1}) - 1$ inými hranami, vo vrchole v_{i2} hrana e_i susedí s $\deg(v_{i2}) - 1$ inými hranami. Zjavne sme žiadnu hranu medzi susedov nemohli zarátať dvakrát, lebo by musela spájať v_{i1} a v_{i2}, ale takáto hrana je v G len jedna, a to e_i. Preto $\deg(u_i) = \deg(v_{i1}) + \deg(v_{i2}) - 2$ a keďže $\deg(v_{i1})$ a $\deg(v_{i2})$ sú párne, je párny aj $\deg(u_i)$. Preto majú v $L(G)$ všetky vrcholy párny stupeň, q.e.d.

Veta: Ak je G eulerovský, tak aj $L(G)$ je eulerovský.
Dôkaz: Vyplýva z uvedených liem.

Poznámka: Obrátená implikácia neplatí. Protipríklad je napr. graf $G = S_3$, teda trojcípa (štvorvrcholová) hviezda, ktorej hranový graf $L(G) = K_3$ eulerovský je, ale samotný G eulerovský nie je.

Domáca úloha z grafov #7

Mišo Forišek

Nech G je 3-súvislý graf. Nech x, y sú ľubovoľné 2 jeho vrcholy, ktoré sú spojené hranou. Túto hranu označme xy. Označme ďalej G/xy graf, ktorý dostaneme z G kontrakciou hrany xy a $G - \{x, y\}$ graf, ktorý dostaneme z G vynechaním vrcholov x a y. Vrchol, ktorý vznikne v G/xy z vrcholov x a y označme z.

Veta: Ak je G/xy 3-súvislý, tak $G - \{x, y\}$ je 2-súvislý.
Dôkaz: Sporom. Nech je G/xy 3-súvislý a $G-\{x, y\}$ nie je 2-súvislý. Zjavne $G-\{x, y\}$ dostaneme z G/xy odstránením vrcholu z. Keďže $G-\{x, y\}$ nie je 2-súvislý, dá sa znesúvisliť odobratím najviac 1 vrcholu (alebo má max. 2 vrcholy). To ale znamená, že G/xy vieme znesúvisliť odobratím najviac 2 nejakých vrcholov, (resp. má max. 3 vrcholy) čo je spor s tým, že je 3-súvislý. Preto $G - \{x, y\}$ je 2-súvislý, q.e.d.

Veta: Ak je $G - \{x, y\}$ 2-súvislý, tak G/xy je 3-súvislý.
Dôkaz: Pokiaľ $G = K_4$, $G - \{x, y\}$ určite nie je 2-súvislý, a teda tvrdenie platí. Ináč má G aspoň 5 vrcholov, teda G/xy má aspoň 4 vrcholy. To ale znamená, že G/xy je 3-súvislý práve vtedy, ak neexistuje taká množina vrcholov s 2 prvkami, po ktorej odobratí bude nesúvislý. Ukážme teraz, že za našich predpokladov taká množina skutočne neexistuje. Sporom. Nech existuje.

Pokiaľ by jeden z jej dvoch vrcholov bol z, druhý označme w. Ale graf, ktorý dostaneme z G/xy odstránením z je zjavne $G - \{x, y\}$. A $G - \{x, y\}$ je podľa predpokladu 2-súvislý, a teda sa odstránením vrcholu w nerozpadne, čo je spor.

Nech teraz žiaden z tých dvoch vrcholov nie je z. Označme ich a a b. Zjavne oba tieto vrcholy patria aj do G. Z toho, že G je podľa predpokladov 3-súvislý, dostávame, že $G - \{a, b\}$ je súvislý. Žiaden z vrcholov a, b nemohol byť x ani y (tie v G/xy nie sú), preto oba tieto vrcholy v $G-\{a, b\}$ máme. Skontrahovaním hrany xy dostávame opäť súvislý graf (kontrakcia zjavne zachováva súvislosť). To je ale spor, lebo graf, ktorý sme práve dostali, je práve graf, ktorý dostaneme, keď z G/xy odstránime vrcholy a, b.

Preto naozaj G/xy je 3-súvislý, q.e.d.

Domáca úloha z grafov #8

Mišo Forišek

Lema 1: Nech $T = (V, E)$ je strom s aspoň 2 vrcholmi. Potom obsahuje vrchol stupňa 1.
Dôkaz: Súčet stupňov jeho vrcholov je $2|V| - 2$. Keby mal každý vrchol stupeň aspoň 2, bol by súčet stupňov jeho vrcholov aspoň $2|V|$. Preto má vrchol stupňa najviac 1. Ale keďže je súvislý, nemá vrcholy stupňa 0, a teda je tento vrchol stupňa 1, q.e.d.

Lema 2: Nech G je graf, $f(t)$ jeho chromatický polynóm. Potom $t|f(t)$.
Dôkaz: Nech M je množina všetkých prípustných ofarbení grafu G t farbami. Bez ujmy na všeobecnosti očíslujme farby od 0 po $t - 1$. Nazvime dve ofarbenia M_1, M_2 podobné, ak existuje k také, že pre všetky vrcholy $v \in G$ platí: ak mal v v M_1 farbu x, má v M_2 farbu $(x + k) \bmod t$. (T.j. "zrotujeme" farby o nejaké k.) Zjavne podobnosť je relácia ekvivalencie na ofarbeniach. A taktiež zjavne každá trieda rozkladu určeného touto reláciou má práve t prvkov, preto je celkový počet rôznych ofarbení deliteľný t, q.e.d.

Lema 3: Nech G je graf, ktorý je zjednotením dvoch disjunktných grafov G_1, G_2. Nech $f_G(t)$ je chromatický polynóm grafu G, $f_{G_1}(t)$ a $f_{G_2}(t)$ chrom. polynómy G_1 a G_2. Potom $f_G(t) = f_{G_1}(t) \cdot f_{G_2}(t)$.
Dôkaz: Každé korektné ofarbenie G t farbami určuje korektné ofarbenia G_1 a G_2 t farbami a naopak. Toto zobrazenie je zjavne bijekcia. Preto korektných ofarbení G t farbami je toľko isto, ako usporiadaných dvojíc, ktorých prvým prvkom je ofarbenie G_1 t farbami a druhým je ofarbenie G_2 t farbami. To je ale presne dokazované tvrdenie, q.e.d.

Lema 4: Nech G je graf s k komponentmi, $f(t)$ jeho chromatický polynóm. Potom $t^k|f(t)$.
Dôkaz: Z Lemy 2 vieme, že chromatický polynóm každého komponentu je deliteľný t. Z Lemy 3 vieme, že chromatický polynóm grafu je súčinom chrom. polynómov jeho komponentov, a teda je deliteľný t^k, q.e.d.

Lema 5: Nech G je graf, $f(t)$ jeho chromatický polynóm a u, v dva jeho nesusedné vrcholy. Potom $f(t) = f_{G\cup(uv)}(t) + f_{G/uv}(t)$ (kde $G \cup (uv)$ je graf, ktorý dostaneme z G pridaním hrany uv a G/uv graf, ktorý dostaneme z predchádzajúceho kontrakciou hrany uv).
Dôkaz: Ofarbenia grafu $G \cup (uv)$ zodpovedajú práve tým ofarbeniam G, v ktorých majú vrcholy u a v rôznu farbu. Analogicky ofarbenia grafu G/uv zodpovedajú práve tým ofarbeniam G, v ktorých majú u a v rovnakú farbu, q.e.d.

Veta: Nech T je strom s n vrcholmi. Potom jeho chromatický polynóm je $f(t) = t(t - 1)^{n-1}$.
Dôkaz: Indukciou podľa n. Keď máme t farieb, vieme ofarbiť 1-vrcholový strom t spôsobmi – sedí. Nech teraz tvrdenie platí pre všetky stromy s n vrcholmi, ukážme, že platí pre všetky s $n + 1$ vrcholmi. Zoberme ľubovoľný strom s $n + 1$ vrcholmi. Podľa Lemy 1 obsahuje nejaký vrchol stupňa 1. Keď tento zo stromu odstránime, dostaneme strom s n vrcholmi. Ten podľa indukčného predpokladu vieme ofarbiť $t(t-1)^{n-1}$ spôsobmi. Zostáva nám ofarbiť odstránený vrchol, čo vieme urobiť $t - 1$ spôsobmi (nemôžeme použiť farbu, ktorou je ofarbený jeho jediný sused). Takto sme zostrojili $t(t-1)^n$ ofarbení nášho stromu. Zjavne sú všetky navzájom rôzne a žiadne iné neexistujú (lebo keď odstránime z korektne ofarbeného grafu vrchol, dostaneme opäť korektne ofarbený graf), čím sme dokázali, čo bolo treba.

Veta: Nech G je graf s chromatickým polynómom $f(t) = t(t - 1)^{n-1}$. Potom G je strom.
Dôkaz: Sporom. Nech G nie je strom. Je $f(2) = 2.1^{n-1}$. Z Lemy 4 vieme, že keby G mal aspoň 2 komponenty, bolo by $f(2)$ deliteľné 4. Preto G je súvislý. T nech je jeho ľubovoľná kostra. Keďže G nie je strom, obsahuje nejakú hranu, ktorá nie je v T. Podľa predchádzajúcej vety je chromatický polynóm T $f_T(t) = t(t - 1)^{n-1}$. Ukážme teraz, že chromatický polynóm G je iný ako chromatický polynóm T, čím dostaneme hľadaný spor. Stačí ukázať, že chromatické polynómy G a T sa líšia

v nejakom konkrétnom bode. Všimnime si hodnoty ich chromatických polynómov pre n farieb. Zjavne G vieme zostrojiť z T postupným pridávaním hrán. Podľa Lemy 5 pridaním hrany do grafu sa počet prípustných ofarbení nezvýši. A zároveň pri pridaní prvej hrany do T sa počet prípustných ofarbení určite zníži (lebo graf so skontrahovanou práve pridanou hranou má $n-1$ vrcholov, a teda ho určite vieme ofarbiť n farbami). Preto hodnota chromatického polynómu G v n je menšia, ako hodnota chromatického polynómu T v n. To ale znamená, že sa tieto dva polynómy nerovnajú, a teda G nemôže mať chromatický polynóm $f(t) = t(t-1)^{n-1}$, čo je spor. Preto naozaj G je strom, q.e.d.

Domáca úloha z grafov #9

Mišo Forišek

Označme vrcholy daného grafu G $v_1, \ldots, v_n$, hrany $e_1, \ldots, e_m$. Následne označme vrcholy príslušného hranového grafu $L(G)$ $u_1, \ldots, u_m$, pričom vrchol u_i bude zodpovedať hrane e_i grafu G.

Veta 1: Ak je graf G eulerovský, tak jeho hranový graf $L(G)$ je hamiltonovský.
Dôkaz: Keďže G je eulerovský, existuje v ňom uzavretý ťah, prechádzajúci práve raz každou hranou. Zoberme ľubovoľný takýto ťah. Nech prechádza hranami v poradí $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}$. Zjavne každé dve po sebe idúce hrany v tomto poradí (a aj posledná s prvou) majú spoločný vrchol. Potom ale v $L(G)$ sú každé dva vrcholy $u_{i_k}, u_{i_{k+1}}$ zodpovedajúce po sebe idúcim hranám z ťahu spojené hranou. No a keďže ťah prechádzal každou hranou práve raz, obsahuje postupnosť $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$ každý vrchol $L(G)$ práve raz. Každé dva po sebe idúce vrcholy tejto postupnosti (a aj posledný s prvým) sú však, ako sme práve dokázali, spojené hranou. Tým sme ale v $L(G)$ našli kružnicu prechádzajúcu cez všetky vrcholy, q.e.d.

Veta 2: Ak je graf G hamiltonovský, tak jeho hranový graf $L(G)$ je hamiltonovský.
Dôkaz: Keďže G je hamiltonovský, obsahuje kružnicu, prechádzajúcu cez všetky vrcholy. Zoberme ľubovoľnú z nich. Nech prechádza vrcholmi a hranami v poradí v_{j_1}, e_{i_1}, v_{j_2}, e_{i_2}, $\ldots$, v_{j_n}, e_{i_n}, $v_{j_{n+1}} = v_{j_1}$. Zvyšné hrany spájajú dvojice (nesusedných) vrcholov tejto kružnice. Ľubovoľným spôsobom ich orientujme a rozdeľme do n množín – do množiny V_k dáme tie, ktorých počiatočný vrchol je v_{j_k}. Zostrojme teraz novú postupnosť hrán nasledovne: Postupne pre všetky k od 1 po n zaradíme do postupnosti v ľubovoľnom poradí hrany z V_k a následne hranu e_{i_k} z hamiltonovskej kružnice.

Ľubovoľné dve hrany z V_k majú spoločný vrchol v_{j_k}. Tento vrchol majú spoločný aj s hranami e_{i_k} a $e_{i_{k-1}}$ (pre $k = 1$ s e_{i_1} a e_{i_n}). Takisto ľubovoľné dve po sebe idúce hrany hamiltonovskej kružnice (aj prvá s poslednou) majú zjavne spoločný vrchol. Z toho je už ale zjavné, že každé dve po sebe idúce hrany v našej postupnosti (opäť aj prvá s poslednou) majú spoločný vrchol, čiže im prislúchajúce vrcholy $L(G)$ sú spojené hranou. Zároveň každú hranu G sme do našej postupnosti zaradili práve raz. To ale znamená, že zodpovedajúca postupnosť vrcholov $L(G)$ určuje uzavretý ťah, prechádzajúci práve raz každým vrcholom. To je ale práve hamiltonovská kružnica. Tým sme opäť v $L(G)$ našli hamiltonovskú kružnicu, q.e.d.