Teória grafov - skúška

- 1. Mengerova teorema
  2. Chromaticky polynom
  3. Dokazte, ze kazdy sled neparnej dlzky obsahuje neparnu kruznicu. (robi sa to indukciou na dlzku sledu)
- 1. Parenie v bipartitnych grafoch
  2. Ford-Fulkerson aj algoritmus
  3. Ak G neobsahuje kruznicu parnej dlzky potom jeho bloku su tvaru $K1$, $K2$ alebo kruznica neparnej dlzky, teda $C(2k+1)$
- 1. 1-faktor 2-faktor
  2. farbenie planarnych grafov
  3. kubicky graf, existuje kostra T, ze $G - E(T)$ je acyklicky
- 1. Farbenie planarnych grafov
  2. toky na grupach a k-toky
  3. Dokazte, ze kazdy uzavrety neparny sled obashuje kruznicu neparnej dlzky
- 1. Toky v sietach.
  2. Petersenova veta (Kazdy kubicky graf bez mostov ma 1 faktor)
  3. Blokovy graf = B_G grafu G je strom.
- 1. Kuratowski
  2. Existencia 1-faktorov, 2-f. a faktorizacii v reg. grafoch
  3. chromaticky index v kompletnych grafoch (rada — zratajte K_{2k+1} a podla toho K_{2k})
- 1. Brooksova veta
  2. Eulerova veta o planarnych grafoch + dosledky
  3. Dokazat ze kazdy suvisly graf sa da rozdelit aspon na 2 dominantne podgrafy.
- 1. Menger + na konci sa ma este spytal na dosledok pre 2 vrcholy
  2. z planarnych grafov
     - stereograficka projekcia + pouzitie
     - dualne grafy + pouzitie
  3. Pre kazdy strom T plati, ze $Rad(T) =' Diam(G)/2' ('x' - \lceil x \rceil)$

- 1. tutt. o 1-faktore
  2. celocis. toky, toky na grupach, k-toky
  3. priklad z cvik: dokazte, ze lubov. (vrchol.) rez k-kritic. grafu neindukuje kompletny podgraf
- 1. Eulerov polyedralny vzorec
  2. Brooks
  3. Ak G je d-regularny graf neparneho radu (pocet vrcholov G je neparny), potom sa da hranovo zafarbit len $d + 1$ farbami ($\chi'(G) = d + 1$).
- 1. Hamiltonovske grafy
  2. Farbenia planarnych grafov + Heawood
  3. Ak je graf hamiltonovsky alebo eulerovsky, potom jeho hranovy graf je hamiltonovsky.
- 1. Vizing
  2. Toky v grupach
  3. jednoznacne hranovo 3 zafarbitelny graf je hamiltonovsky

     (hrany jednej farby tvoria 1-faktor, druhej farby tiez, ked tieto dva 1-faktory spojim, dostanem 2-faktor, t.j. vsetky stupne parne, bud je to kruznica (potom je hamiltonovska), alebo je to system disj.kruznic, tam jednu prefarbim a dalej z def. jednoznacnosti, ktoru dostanete, sa to dotiahne)
- 1. Farbenie hran - napisal som Koniga s dokazom a chcel este znenie Viziga
  2. Ford-Fulk. veta + dokaz
  3. Nech G je graf v ktorom je hamiltonovska kruznica a S ja vlastna neprazdna podmnozina $V(G)$, tak $c(G - S) <= |S| + 1$. Kde to c je pocet komponentov grafu. V poznamkach je jedna velmi podobna veta, dokaz sa robi rovnako az na to ze to $+1$ potrebujeme v baze indukcie.
- 1. Kuratowski (Graf je planarny $\Leftrightarrow$ ak neosahuje ako podgraf subdiviziu $K5$ ani $K33$)
  2. Knig o pareni (# hran v max pareni = # vrcholov v min pokryti)
  3. $rad(G) \leq diam(G \leq 2 * rad(G)$
- 1. chvatalova teorema o ham. grafoch
  2. priestory cyklov
  3. dokazte ze ziaden vrcholovy rez v k-kritickom grafe neindukuje kompletny podgraf. (k-kriticky graf je graf s chrom. cislom k pri ktorom pri odobrati lub. vrchola znizime chrom. cislo a vrcholovy rez je mnozina vrcholov po ktorej odobrati sa graf rozpadne na komponenty)
- 1. Mengerova veta

2. Nikde nulove toky na grafoch (malo to nejaku suvislost s k-tokmi)
3. Dokazat, ze strom ma najviac jeden 1-faktor.

- 1. Eulerov Polyedralny vzorec a jeho dosledky
  2. Brooks
  3. G je K regularny graf a neparnym poctom vrcholov N. Potom $\chi'(G) = 1$.
- 1. Bipartitne parenia
  2. Veta o zafarbeni planarneho grafu 5 farbami
  3. Ak mame 2-suvisly graf, tak dokazte, ze bod a hrana, ktora neobsahuje dany bod, lezia na kruznici.
- 1. Toky v sietach
  2. Mengerova teorema
  3. Dokazte, ze strom ma najviac jeden 1-faktor.
- 1. Vizingova veta
  2. Toky na grupach
  3. Dokazte, ze ak graf ma ham. cestu potom pre kazdu neprazdnu podmnozinu $V(G)$ (oznacme si ju S) plati , ze pocet komponentov $(G - S) \leq kardinaliteS - 1$.
- 1. toky v sietiach + duokaz Ford-Fulkerson
  2. Turanova veta
  3. priklad dokazte ze, kazdy kubicky graf jednoznacne hranovo 3-zafarbitelny (triedy su dane zafarbenim v lubovolnom farbeni - ak su dve hrany zafarbene rovnako v jednom farbeni potom su zafarbene rovnako aj v lubovolnom inom farb.)

     duokaz - kazda trieda je parenie (garf je kubicky $\Rightarrow$ ma prave jednu hranu zafarbenu farbou i, i je z $\{1, 2, 3\}$) a teda aj 1-faktor. Spojime triedy 1 a 2 a dostaneme 2-faktor. Ak by sa v tomto 2 faktore vyskytovali 2 kruznice (alebo viac) tak by sme mohli jednu z nich spermutovat a dostali by sme iny rozklad. QED.
- 1. Eulerov vzorec pre planarne grafy a jeho dosledky.
  2. Brooksova veta o zafarbitelnosti.
  3. Samokomplementarny graf ma priemer 2 alebo 3.
- 1. Mengerova veta
  2. farbenia planarnych grafov
  3. graf s n vrcholmi ma aspon $\binom{n-1}{2} + 2$ hran, dokazte ze je Hamiltonovsky.

     pouzije sa Orova veta, lebo $deg\ x + deg\ y \geq n$
- 1. Ford-Fulkersonova teorema
  2. Turanova veta

3. Dokazte, ze kazdy n vrcholovy graf s $\binom{n-1}{2} + 2$ hranami ma hamiltonovsku kruznicu.

- 1. Kuratowski
  2. Priestory cyklov a rezov
  3. Ak G je samokomplementarny graf, potom jeho priemer je 2 alebo 3 a je suvisly.

- 1. Dokazte, ze suctom dvoch cyklov vznikne cyklus.
  2. Aka je baza priestoru cyklov a dimenzia tohto priestoru.

     To iste pre rezy.

     Odpovede: Bazov priestoru cyklov su kruznice, ktore vznikaju pridavanim jednotlivych hran ku kostre grafu, potom dimenzia je pocet kruznic a tych je m-n+1, kde m je pocet hran a n je pocet vrcholov.

     Baza priestoru rezov je $n-1$ vrcholov grafu, pretoze ten posledny sa da dostat ako linearna kombinacia predchadzajucich.

     Ten dokaz pre cykly nebol robeny na prednaske (aspon ja ho nemam), mozno je v skriptach, ale je lahky.

     Dokaz: Prvok priestoru cyklov je mnozina hran, ktore tvoria taky podgraf, ktory ma vsteky vrcholy parneho stupna. Takze, ten prvok je akoby Eulerovsky tah.

     Cely dokaz potom bol v tom, ze ak scitam dva cykly (symetrickou diferenciou) tak nevznikne graf, ktory by mal nejaky vrchol s neparnym stupnom. No a to je jasne z def. sym. direrencie.

- 1. Vsetko co viem o Hamiltonovskych grafoch a postupnostiach (teda vety aj dokazy!)
  2. Kubicky graf bez mostov ma 1-faktor. (dokaz)
  3. Vo vrcholovo farebne kritickom grafe ziadny indukovany rez nie je klika. (dokaz)

- 1. Eulerov polyedralny vzorec + vyuzitie (Dalsia veticka : Ak G je planarny, tak $m \leq 3(n-2)\ldots$, ukazat ze $K5$ ani $K3,3$ nie su planarne, $\ldots$)
  2. Brooksova teorema
  3. Aku hodnotu ma $\chi'(Kn)$? (Chromaticky index Kn)

     Nejaky ten hintik: max. stupen v Kn je $n-1$. Z vizingovaj vety vyplyva $n-1 \leq \chi'(Kn) \leq n$.

     Treba ukazat, ze pre n parne je to $n-1$, pre n neparne je to n.

     pre n neparne je to trivialne:

     stupen kazdeho vrchola je $n-1$, keby teda existovalo zafarbenie $n-1$ farbami, tak v kazdom vrchole su vsetky farby. Lenze potom hrany tej istej farby tvoria na G 1-faktor $\rightarrow$ pocet vrcholov je parny $\rightarrow$ spor.

     pre parne n je to podobne:

     Z G odstranim vrchol v. Ostal $K(n-1)$ neparneho radu, teda ofarbitelny $n-1$ farbami. Kedze stupen lub. vrchola v $k(n-1)$ je $n-2$, tak v kazdom vrchole jedna farba chyba. Kazda farba musi niekde chybat, lebo keby nie,tak existuje 1-faktor pozostavajuci z hran danej farby(spor, $n-1$ ja neparne). Kedze vrcholov je $n-1$ a farieb takisto, tak v kazdom vrchole chyba ina farba. Teraz do grafu pridam pov. vrchol v, a spojim s kazdym vrcholom hranou farby, ktora chyba v tomto vrchole $\rightarrow$ Zafarbim $Gn-1$ farbami.

- 1. Ford-Fulkersonova teorema
  2. Turanova veta
  3. Priklad, ktory mal Mato Lupic = hranove chrom. cislo pre Kn
- 1. Tutte-ova veta o 1-faktore.
  2. K-toky a toky z hodnotami v grupach.
  3. Dok. ak G ja jednoduchy planarny graf obvodu g, ktory ma m-hran a n-vrcholov potom plati

     $$m(g-2) \leq g(n-2)$$

     (Treba pouzit Eulerov vzorec pre planarne grafy.)
- 1. Mengerova teorema
  2. Vsetko co viem o existencii 1-faktoru a 2-faktoru (chcel odo mna Hallovu teoremu s dosledkami a este nejake dve vety, na ktore som si vsak nespomenula)
  3. Dok., ze v 2-suvislom grafe pre lub. vrchol a lub. hranu ex. kruznica, ktora obsahuje aj vrchol aj hranu. (Pri rieseni sa pouzije Mengerova veta)
- 1. Kuratowski theorema.
  2. Hamiltonovske grafy. Pytal sa aj na chvatalovu vetu a ci viem dokaz. Tak som mu povedal, ze ciastocne ano.
  3. Dokazte ze kazdy graf obsahuje cestu dlzky X a kruznicu dlzky aspon $X+1$. kde X je minimalny stupen vrchola v grafe.
  - 1.Turanova teorema 2.Toky v sietach (Ford-Fulkersonova teorema) 3.Graf G je jednoznacne hranovo k-zafarbitelny ak mozno jedno farbenie dostat z druheho permutaciou farieb. Dokazte, ze kazdy kubicky jednoznacne 3 zafarbitelny graf je hamiltonovsky.

    3. sporom. Kedze G je 3 hranovo zafarbitelny a kubicky, v kazdom vrchole sa nachadzaju vsetky farby. Vyberiem jednu farbu. Hrany zafarbene touto farbou tvoria nezavislu mnozinu hran (z def. hranoveho farbenia) takze tvoria parenie. Kedze kazdy vrchol obsahuje hranu takejto farby toto parenie je vlastne 1-faktor. Utvorime $G' := G - "1 - faktor"$. V tomto grafe ma kazdy vrchol stupen 2. Teda G' je bud kruznica alebo ak je nesuvisly tak komponenty su kruznice.
- 1. Eulerov vzorec pre planarne grafy.
  2. Brooksova teorema
  3. Dokazte ze kazdy k-regularny graf na $X' = \Delta + 1$.
- 1. Toky v sietach

    2. Konig o pareni
    3. Nech G je kriticky na chrom. cislo (t.j. pre kazde v, $G - v$ ma chrom. cislo o 1 mensie). Dokazte, ze vrcholovy rez v G neindukuje kliku

- 1. Char. stromov a bip. grafov; kolko bip. ma suvisly/nesuvisly graf
  2. Menger
  3. Dok.: kazdy gr. G obs. cestu dlzky $\delta(G) = min.stupen$ a kruznicu dlzky aspon $\delta + 1$

- 1. Vizingovu vetu
  2. k-toky
  3. v kazdom kubickom grafe existuje taka kostra, ze ked odstranime jej hrany, vznikne acyklicky graf (treba zobrat lub. kostru a rusit kruznice)

- 1. Turanova veta
  2. toky (Ford-Fulkerson, algoritmus)
  3. v kazdom grafe ex. cesta dlzky aspon ako min. stupen a kruznica min. stupen+1

Sadzba Milan Kubala <milku@pobox.sk> v LaTeXu.
Otázky sú z mailov. Neprešlo žiadnou úpravou.