Ondrej Vršanský

Materiál na štátnicu

Teória grafov

Verzia 1

07.04.03

Obsah.

5. Teória grafov.

5.1. Základy.

5.1.1. Základné pojmy.

Definícia.

Usporiadanú dvojicu (G, E), kde $E \subseteq V \times V$, nazývame *graf*. Množina V sa nazýva množina vrcholov grafu G a množina E množina hrán.

Definícia.

Počet vrcholov grafu G nazývame *rád* grafu G a označujeme $|G|$. Počet jeho hrán označujeme $||G||$. Grafy rádu 0 a 1 nazývame *triviálne*.

Definícia.

Vrchol v je *incidentný* s hranou e, ak v je jedným z *koncových vrcholov* (koncov) hrany e. Hovoríme, že hrana e *spája* vrcholy, ktoré sú s ňou incidentné. Fakt, že hrana e spája vrcholy v_1 a v_2, označujeme $e = (v_1, v_2)$.

Definícia.

Nech A, B sú podmnožiny množiny vrcholov grafu G. Množinu hrán $e = (v_A, v_B)$, kde $v_A \in A$ a $v_B \in B$ označujeme $E(A, B)$. Namiesto $E(\{v\}, B)$, respektíve $E(A, \{v\})$, píšeme jednoducho $E(v, B)$, respektíve $E(A, v)$. Množinu hrán incidentných s vrcholom v označujeme $E(v)$.

Definícia.

Hovoríme, že vrcholy v_1 a v_2 sú *susedné*, ak existuje hrana e taká, že $e = (v_1, v_2)$. Ak vrcholy v_1 a v_2 nie sú susedné, nazývame ich *nezávislé*. Číslo $\max\{k;\ \exists S \subseteq G$ nezávislá $: |S| = k\}$ označujeme $\alpha(G)$. Množinu vrcholov susedných s vrcholom v označujeme $N(v)$. Ak sú v grafe G všetky vrcholy susedné, potom je G *kompletný*. Kompletný graf rádu n označujeme K^n. Maximálny kompletný podgraf grafu G nazývame *klika* grafu G. Stupeň kliky grafu G označujeme $\omega(G)$.

Definícia.

Nech $G = (v, E)$. Graf $G' = (V', E')$, kde $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$, nazývame *podgraf* grafu G. Ak $\forall x,y \in V'$: $e = (x, y) \in E \Rightarrow e \in E'$, potom G' je *indukovaný* podgraf G a označujeme ho $G[V']$.

Definícia.

Nech G je graf rádu n. Graf $G' = K^n - G$ nazývame *komplement* grafu G.

Definícia.

Nech $G = (V, E)$. Graf $L(G) = (E, E')$, kde $(e_1, e_2) \in E' \Leftrightarrow \exists v \in V : v$ je incidentný s e_1 aj s e_2, nazývame *hranový graf* grafu G.

5.1.2. Stupeň vrchola.

Definícia.

Počet vrcholov susedných s vrcholom v nazývame *stupeň* vrchola v a označujeme $d(v)$. Vrchol stupňa 0 nazývame *izolovaný*. Číslo $\delta(g) = \min\{d(v);\ v \in V\}$ nazývame *minimálny stupeň* grafu G. Podobne číslo $\Delta(g) = \max\{d(v);\ v \in V\}$ nazývame *maximálny stupeň*. Ak všetky vrcholy G majú rovnaký stupeň, G je *regulárny*. Konkrétne 3-regulárny graf sa nazýva *kubický*. Číslo $d(G) = \sum_{v \in V} \frac{d(v)}{|V|}$ nazývame *priemerný stupeň* grafu G. Číslo $\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}$ nazývame *hustota* grafu G.

Poznámka.

Je zrejmé, že $d(G) = 2.\varepsilon(G)$.

Lema 5.1.2.1.

Počet vrcholov nepárneho stupňa je v každom grafe párny.

Dôkaz.

$d(G) = 2*\varepsilon(G) \Rightarrow d(G)$ je párne. Suma stupňov vrcholov s párnym stupňom je vždy párna a teda aj suma stupňov vrcholov s nepárnym stupňom musí byť párna. Preto týchto vrcholov musí byť párny počet.

Lema 5.1.2.2.

V každom grafe G rádu aspoň 1 existuje taký podgraf H, že $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Dôkaz.

Odobraním vrcholov stupňa $\leq \varepsilon$ hustotu grafu neznížime. Položme H ako indukovaný graf, ktorý vznikne po odobraní všetkých takýchto vrcholov. Zrejme $\delta(H) > \varepsilon(H)$ (všetky vrcholy stupňa $\leq \varepsilon$ sú preč) a rovnako $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$, pretože ε sme neznížili.

5.1.3. Cesty a cykly.

Definícia.

Postupnosť $\{(v_1, v_2), .., (v_{n-1}, v_n)\}$, kde $(v_k, v_{k+1}) \in E$ a $v_k \in V$, nazývame *sled* v grafe $G = (V, E)$. Ak $v_1..v_n$ sú rôzne, postupnosť nazývame *cesta*. Ak $v_1 = v_n$, sled je *uzavretý*. Uzavretú cestu nazývame *kružnica*. Počet hrán v slede nazývame *dĺžka* sledu. Cestu dĺžky n označujeme P^n. Kružnice zvyčajne označujeme písmenom C.

Definícia.

Nech $A,B \subseteq V$. Cestu P nazývame *A-B cesta*, ak $v_1 \in A$ a $v_n \in B$. A-A cestu značíme jednoducho A-cesta. Cesty P a Q nazývame *nezávislé*, ak nemajú spoločný vnútorný vrchol.

Definícia.

Dĺžku minimálnej kružnice v grafe G nazývame *obvod* grafu G a označujeme $g(G)$.

Definícia.

Hrana, spájajúca dva vrcholy cesty P, ktorá sama neleží na P, sa nazýva *tetiva* cesty P.

Lema 5.1.3.1.

Každý graf G s $\delta(G) \geq 2$ obsahuje cestu d´žky aspoň $\delta(G)$ a kružnicu dĺžky aspoň $\delta(G) + 1$.

Dôkaz.

Nech P je najdlhšia cesta v G. Potom všetci susedia jej koncového vrcholu v_n ležia na $P \Rightarrow n \geq d(v_n) \geq \delta(G)$. Pritom ak $i = \min\{k;\ (v_k, v_n) \in E\}$, tak $v_i..v_n v_i$ je kružnica dĺžky aspoň $\delta(G)$.

Definícia.

Dĺžku minimálnej x-y cesty nazvame *vzdialenosť* vrcholov x a y a označujeme $d(x, y)$. Ak takáto cesta neexistuje, $d(x, y)$ kladieme ∞. Číslo $diam(G) = \min\{n;\ \forall x,y \in V : d(x,y) \leq n\}$ nazývame *priemer* grafu G.

Lema 5.1.3.2.

Pre každý graf obsahujúci kružnicu platí $g(G) \leq 2 * diam(G) + 1$.

Dôkaz.

Nech C je najkratšia kružnica v G. Ak na C neexistujú dva vrcholy vzdialené $diam(G)$, potom $g(G) < 2 * diam(G)$. Ak takéto dva vrcholy x a y existujú, rozdeľujú C na dve x-y cesty. Ak $g(G)$ je párne, potom obe tieto cesty majú dĺžku $diam(G) \Rightarrow g(G) = 2 * diam(G)$. Ak je $g(G)$ nepárne, potom jedna cesta má dĺžku $diam(G)$ a druhá $diam(G) + 1$. Dĺžka C je v tomto prípade rovná $2 * diam(G) + 1$.

Definícia.

Vrchol v grafu G sa nazýva *centrálny*, ak $\forall x \in V : \max\ \{d(x,y);\ y \in V\} \geq \max\ \{d(v,y);\ y \in V\}$. Množina centrálnych vrcholov grafu G sa nazýva *centrum* grafu G. Vzdialenosť vrchola $x \in V$ od centra grafu sa nazýva *excentricita* vrchola x a označuje sa $ext(v)$. Číslo $rad(G) = \min\{ext(v);\ v \in V\}$ sa nazýva *polomer* grafu G.

Poznámka.

Zrejme platí $rad(G) \leq diam(G) \leq 2.rad(G)$.

Lema 5.1.3.3.

Každý graf má maximálne $1 + rad(G).\Delta(G)^{rad(G)}$ vrcholov.

Dôkaz.

Nech v je centrálny vrchol v G. Pre $i = 0..\ rad(G)$ položme $D_i = \{x\in V;\ d(v,x) = i\}$. Je zrejmé, že $|D_0| = 1$ a $|D_{i+1}| \leq rad(G).|D_i| \Rightarrow |D_i| \leq \Delta(G)^i$. Z toho vyplýva, že $|V| \leq \sum_{i=0}^{rad(G)}|D_i| = 1 + \sum_{i=1}^{rad(G)}\Delta(G)^i \leq 1 + rad(G).\Delta(G)^{rad(G)}$.

5.1.4. Súvislosť.

Definícia.

Graf G sa nazýva *súvislý*, ak $\forall x,y\in V\ \exists x\text{-}y$ cesta.

Lema 5.1.4.1.

ť $\{v_1\ ..\ v_n\}$ tak, aby $\forall i\in 1..n$ bol $G[v_1..v_i]$ (podgraf indukovaný $v_1\ ..\ v_i$) súvislý.

Dôkaz.

ľ ľ ľ v_1 $V_1 = \{v_1\}$ $G[v_1] = v_1$ je súvislý. Majme teraz vytvorenú $V_i\subset V$ takú, $G[v_1..v_i]$ je súvislý. ľ ľ ľ $v\in V\text{-}V_i$. ď G ň $v\text{-}V_i$ cesta P. Za v_{i+1} zvolíme ten vrchol na P, ktorý je susedný s V_i. Nech v_{i+1} je susedný s v_k. $\forall v\in V_i\ \exists v,v_k$ cesta P_v. Ale $P_v+(v_k,v_{i+1})$ je $v\text{-}v_{i+1}$ cesta $\Rightarrow G[v_1..v_{i+1}]$ je súvislý.

Definícia.

Maximálny súvislý a neprázdny podgraf grafu G sa nazýva *komponent* grafu G.

Definícia.

X *oddeľuje* A a B $A\text{-}B$ ceste existuje vrchol z X. Ak $X = v\in V$, tak v nazývame *artikulácia* ľ ň vrcholy, nazývame *most*. Ak $X\subseteq E$, tak X sa nazýva *rez*.

Poznámka.

Definícia.

G je *k-súvislý*, ak $\forall X\subseteq V$ je $G\text{-}X$ $\kappa(G) = \max\{k;\ G$ je k-súvislý$\}$ nazývame *stupeň súvislosti* grafu G. Podobne G je *k-hranovo súvislý*, ak $\forall X\subseteq E$ je $G\text{-}X$ $\lambda(G) = \max\{k;\ G$ je k-hranovo súvislý$\}$ nazývame *stupeň hranovej súvislosti* grafu G.

Veta 5.1.4.1 (Mader).

$d(G) \geq 4k$ obsahuje k-súvislý podgraf.

Dôkaz.

Pre $k\in 1..2$ je tvrdenie triviálne. Nech teraz $k >$ ť k-súvislý podgraf, ak

(i) $|V| \geq 2k - 1$

(ii) $|E| \geq (2k - 3)(|V| - k + 1) + 1$.

T ( )

$$k > |V| + 1 \text{ a } |E| = \frac{|V|.d(G)}{2} \geq 2k|V| > |V|(|V| \quad)$$ ( )

$$E| = \frac{|V|.d(G)}{2} \geq 2k|V| \geq (2k - 3)(|V| - k + 1) + 1.$$

T $V|$. Ak $|V| = 2k + 1$, potom $k = \frac{|V|+1}{2}$ a teda $|E| \geq \frac{|V|.(|V|-1)}{2} \Rightarrow G =$ $K^n\supset K^{k+1}$. N $V| \geq 2k$. Ak v G existuje v $d(v) \leq 2k - 3$, potom ť G-v. ť $\delta(G) \geq 2k - 2$. ň G je k- ť ť G má zrejme tvar $G_1 \cup G_2$, kde $|G_1 \cap G_2| = k - 1$ a $|G_1|,|G_2| < |V|$. A $v \in G_1 - G_2$ alebo $G_2 - G_1$ platí $d(v) \geq 2k - 2$ $G_1|,|G_2| \geq 2k - 1$. ň G_1, G_2 Íň ť . A Íň $G_i|| \leq (2k - 3)(|G_i| - k + 1)$ a teda $||G|| \leq ||G_1|| + ||G_2|| \leq (2k - 3)(|G_i| + |G_i| - 2k + 2) = (2k - 3)(|G| - k$ 1 .

5.1.5. Stromy a lesy.

Definícia.

Graf, ktorý n *acyklický* graf alebo *les*. Súvislý les sa nazýva *strom*. T.

Poznámka.

Les je graf, ktorého komponenty sú stromy.

Definícia.

ň 1 *list*.

Poznámka.

Ka ň . N .

Definícia.

Graf G je *minimálne súvislý*, ak je súvislý a $\forall e \in E$: G-e je nesúvislý.

Definícia.

Graf G je *maximálne acyklický*, ak je acyklický a $\forall x,y$ nesusedné : $G+(x,y)$ je cyklický.

Veta 5.1.5.1 (Ekvivalentné definície stromu).

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné :

a) T je strom.
b) $\forall x,y \in T\ \exists!\ x$-$y$ cesta.
c) T je minimálne súvislý.
d) T je maximálne acyklický.

Dôkaz.

a)⇒b): Ak T je strom, potom je jednak súvislý a teda $\forall x,y \in T\ \exists\ x$-$y$ cesta a jednak acyklický a teda táto cesta je jediná.

b)⇒c): Ak $\forall x,y \in T\ \exists!\ x$-$y$ cesta P, potom T je súvislý a navyše $\forall e \in P$ neexistuje v T-e medzi x a y ⇒ T-e je nesúvislý.

c)⇒d): Ak T . . $\forall x,y$ nesusedné $\exists x$-y cesta P. Ale $P+(x,y$ ⇒ $\forall x,y$ nesusedné : $T+(x,y)$ je cyklický.

d)⇒a): Ak T je maximálne acyklický, potom je acyklický. Navyše $\forall x,y$ nesusedné : $G+(x,y)$ obsahuje cyklus C. Ale C-(x,y) je x-y cesta ⇒ T je súvislý.

Dôsledok 5.1.5.1.

ť $\forall i \geq 2$: v_i má jediného suseda medzi $v_1..v_{i-1}$.

Dôkaz.

ť L 5.1.4.1.

Definícia.

Podgraf K grafu G, ktorý obsahuje všetky jeho vrcholy a je pritom stromom, nazývame *kostra* grafu G.

Dôsledok 5.1.5.2.

Súvislý graf T ď $T|| = |T| - 1$.

Dôkaz.

Odobratím listu zo stromu dostávame strom s o jedna menej vrcholmi. Opakovaním dostávame jediný . $\Rightarrow \|T\| = |T| - 1$. Nech teraz $\|T\| = |T| - 1$ a nech K je kostra T. $K\| = |K| - 1 = |T| - 1 \Rightarrow K=T$.

Dôsledok 5.1.5.3.

Nech T je strom a nech $\delta(G) \geq |T| - 1$. Potom $T \subseteq G$.

Dôkaz.

Kópiu T G ť L 5.1.4.1.

5.1.6. Bipartitné grafy.

Definícia.

G je r-partitný graf, ak V ť r n $\forall (x,y) \in E$: x,y . Š $r = 2$ sa namiesto 2- *bipartitný*.

Definícia.

G je *kompletne r-partitný* graf, ak všetky komponenty jeho komplementu sú kompletné grafy.

Lema 5.1.6.1.

G ď Í .

Dôkaz.

. A ľ nasledujú, potom ak je G ť Í .

Obrátene nech G Í . N T je kostra grafu G a v ľ ľ . U T ako $\Delta(G)$- ň v Í ax$\{d(v, x); x \in T\}$. $\forall x \in T$ existuje v T jediná v-x cesta $P_{x,v}$. Teraz $\forall x \in T$ zaradíme do partície A ď Í $P_{x,v}$ cesty je párna. Týmto je T sú A-B hrany. Ale $\forall x,y \in G\ \exists! z \in G$: z je „predok“ x a y v T x a y patria do rovnakej partície, tak $P_{x,z}$ a $P_{y,z}$ majú rovnakú paritu. Ak by v G existovala hrana medzi x a y, potom $P_{x,z}+P_{y,z}+(x,y$. G-T sú A-B hrany a G je bipartitný.

5.1.7. Kontrakcie a minory.

Definícia.

Pod *kontrakciou* hrany e grafu G rozumieme nahradenie jej koncových vrcholov jediným ň pôvodných vrcholov. Prípadné zdvojené hrany sa nahradia jednoduchými. Takto kontrahovaný G/e. Ak H vznikne z G H je *kontrakcia* G. Tento fakt zapisujeme $G = MH$. Ak navyše G je podgrafom F H je *minor* F a píšeme $H \pi F$.

Definícia.

V šepeciálnom prípade, ak H v ň ň 2 G je *subdivízia* H a píšeme $G = TH$. Ak navyše G je podgrafom F H je *topologický minor* F a píšeme $H\ \pi^T\ F$.

Poznámka.

Subdivízia vznikne nahradením hrán grafu nezávislými cestami.

Lema 5.1.7.1.

.

Dôkaz.

TX je špeciálny prípad *MX*.

Lema 5.1.7.2.

Ak $\Delta(G) \leq 3$ *MG* je aj *TG*.

Dôkaz.

Ak $deg(v) \in G \leq 3$ a v vznikol kontrakciou hrany $(x,y$ ň z vrcholov x,y ň 2.

Lema 5.1.7.3.

π aj π^T .

Dôkaz.

Triviálne.

5.1.8. Eulerovské grafy.

Definícia.

U Í G|| nazývame *Eulerov ťah* v grafe G. G ň E ť *Eulerovský*.

Lema 5.1.8.1.

G E ň.

Dôkaz.

Ak je graf G E ň E ť . A ť ď ň ť. ď ň ť. ď ť ť ň.

Obrátene ak všetky vrcholy grafu G ň ť ľ ľ ť ť . . ť ď ť . ť 1 . ť. Š . ď ň ť . odchode to budú iba dve . ť ť E ť .

5.1.10. Trochu lineárnej algebry.

Definícia.

Nech $G = (V, E)$. Vektorový priestor $\boldsymbol{V}(G) = (V, \oplus, \varphi$ ľ $\boldsymbol{F}_2 = \{0, 1\}$, kde $\oplus$ je symetrická diferencia, nazývame *vrcholový priestor* grafu G. V G|-dimenzionálnym vektorom, ktorý má jednotky práve na tých súradniciach, vrcholy s . tohoto vektorového priestoru sú práve vrcholy grafu G.

Definícia.

Nech $G = (V, E)$. Vektorový priestor $\boldsymbol{E}(G) = (E, \oplus, \varphi$ ľ $\boldsymbol{F}_2 = \{0, 1\}$, kde $\oplus$ je symetrická diferencia, nazývame *hranový priestor* grafu G. E korešponduje s ||G||-dimenzionálnym vektorom, ktorý má jednotky práve na tých . vektorového priestoru sú práve hrany grafu G.

Definícia.

Skalárny súčin vektorov $X = (x_1, .. , x_n)$ a $Y = (y_1, .. , y_n)$ vektorového priestoru $\boldsymbol{V}(G)$ ($\boldsymbol{E}(G)$) definujeme ako $\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + .. + x_ny_n \in \boldsymbol{F}_2$.

Poznámka.

$\langle X, Y\rangle =$ ď .

Definícia.

Pre podpriestor $\boldsymbol{F}$ vektorového priestoru $\boldsymbol{V}(G)$ ($\boldsymbol{E}(G$ $\boldsymbol{F}^{\perp} = \{D \in \boldsymbol{V}(G)$ ($\boldsymbol{E}(G)$); $\langle \boldsymbol{F}, D\rangle = 0\}$. $\boldsymbol{F}^{\perp}$ sa nazýva *ortogonálny doplnok* podpriestoru $\boldsymbol{F}$ v priestore $\boldsymbol{V}(G)$ ($\boldsymbol{E}(G)$).

Definícia.

Priestor $\boldsymbol{C}(G) = (\boldsymbol{C}, \oplus, \varphi)$, kde $\boldsymbol{C}$ G, nazývame *cyklový priestor* grafu G. Dimenzia cyklového priestoru je *cyklomatické číslo* grafu.

Poznámka.

Cyklový priestor je podpriestorom hranového priestoru grafu.

Lema 5.1.10.1.

.

Dôkaz.

Nech C je cyklus v G s tetivou e. ľ C í . I í C ť G. Ale symetrická diferencia týchto dvoch cyklov je práve C.

Lema 5.1.10.2.

$F \subseteq E \in \boldsymbol{C}(G) \Leftrightarrow \forall v \in (V, F)$ má párny s ň.

Dôkaz.

ť

vygenerovanie F V, F).

Lema 5.1.10.3.

$\boldsymbol{C}^*(G)$ grafu G (spolu s prázdnym rezom) vytvárajú podpriestor $\boldsymbol{E}(G)$.

Dôkaz.

Nech $D_1, D_2 \in \boldsymbol{C}^*(G$. ď $\forall D \in \boldsymbol{E}(G) : D + D = \varnothing$ a $D + \varnothing = D$ ť D_1, D_2 sú disjunktné a neprázdne. Nech D_1 delí V na V_{11} a V_{12} a D_2 na V_{21} a V_{22}. Vo V - ($D_1 + D_2$) potom neexistujú hrany medzi $V_{11} \cap V_{21} \cup V_{12} \cap V_{22}$ a $V_{11} \cap V_{22} \cup V_{12} \cap V_{21}$ $D_1 + D_2$ je rez a $V_{11} \cap V_{21} \cup V_{12} \cap V_{22}$ a $V_{11} \cap V_{22} \cup V_{12} \cap V_{21}$. $\boldsymbol{C}^*(G)$ je podpriestor $\boldsymbol{E}(G)$.

Definícia.

$\boldsymbol{C}^*(G)$ nazývame *priestor rezov* grafu G.

Definícia.

Rez, ktorého obe partície sú súvislé, nazývame *minimálny*.

Lema 5.1.10.4.

Minimálne rezy súvislého grafu generujú jeho kompletný priestor rezov.

Dôkaz.

Nech rez $E(V_1, V_2$ ľ G na partície V_1 a V_2 a nech $\{C_i\}$ sú komponenty partície V_1. Potom všetky rezy $E(C_i, V_2)$ sú minimálne v G ň $E(V_1, V_2$ tvrdenie.

Veta 5.1.10.1.

Pre všetky grafy platí $\boldsymbol{C}^*(G) = \boldsymbol{C}^{\perp}(G)$.

Dôkaz.

ť .

5.2. Párenia.

5.2.1. Párenie v grafe.

Definícia.

M nezávislých hrán grafu G sa nazýva *párenie*. M U, ak U je incidentný s nejakou hranou z M. Vrcholy z U potom nazývame *spárené*, vrcholy G-U sa nzývajú *nespárené*.

Definícia.

Párenie M grafu G je *maximálne*, ak neexistuje pá ä ť .

Definícia.

k-regulárny podgraf F grafu G, ktorý obsahuje všetky vrcholy G, sa nazýva *k-faktor* grafu G.

Poznámka.

Podgraf H grafu G je 1- ď V.

5.2.2. Párenie v bipartitných grafoch.

Dočasné označenie.

V celom odstavci 5.2.2 budeme pod grafom G ť A, B. Vrcholy partície A (B ť a (b).

Definícia.

Majme párenie M grafu G. Cesta P A nespáreným vrcholom a obsahujúca striedavo spárené a nespárené vrcholy, sa nazýva *alternujúca cesta* ľ M). Ak P P je *zväčšujúca*.

Veta 5.2.2.1.

Párenie M grafu G ď ä .

Dôkaz.

Je zr M ä M nie je maximálne. Nech teraz k páreniu M ä . M . ň nepatria do $M \cup M'$. O zvyšnom grafe G $\Delta(G') \leq 2$. Jeho komponenty sú izolované hrany, cesty alebo ť ň ľ M ľ M. To ť M. A ť M'! T ä M . ť Í M, M' by nebolo maximálne, a naopak by to bola znovu ä M . Í párenia M ako M *toho vyplýva, že* $|M| = |M'$ M je maximálne.

Definícia.

$U \subseteq V$ nazývame *vrcholové pokrytie* grafu G G je incidentná s nejakým vrcholom z U. Vrcholové pokrytie U grafu G je *minimálne*, ak neexistuje pokrytie .

Veta 5.2.2.2 (König).

ť

pokrytia.

Dôkaz.

Nech U_{min} je minimálne vrcholové pokrytie grafu G. ť ä ť U ť U ľ . $U_{min}| \geq |M_{max}$. A ť $\exists U : |M_{max}| = |U|$, tvrdenie bude dokázané.

Nech M je maximálne párenie v grafe G. M vytvoríme U G. a, b) vyberieme vrchol b, ak ca v b. Inak vyberieme vrchol a.

$\forall e = (a, b) \in E : a \in U \vee b \in U$ U je vrcholové pokrytie grafu G. Ak $e \in M$, tvrdenie platí z definície U. Nech teda $e \notin M$. a alebo b je iste incidentný s nejakou hranou z M. Ak to nie je a (a teda je to b), potom e b a teda $b \in U$.

Nech teda a je pokrytý hranou $(a, b')\in M$. Ak $a \in U$ ť. A $a \notin U$, potom $b' \in U \Rightarrow \exists$ alternujúca cesta P b'. Ak $b \in P$, potom P-(a, b')-$(a, b$ $b \Rightarrow b \in U$. Nech teda $b \notin P$. Potom ale aj P+(a, b')+$(a, b$ b. A ď M je maximálne, P ť ä $\Rightarrow b$ je pokrytý nejakou hranou z $M \Rightarrow b \in U$ ľ U.

Veta 5.2.2.3 (Hall).

G má párenie, pokrývajúce partíciu A ď $\forall S \subseteq A : |N(S)| \geq |S|$.

Dôkaz.

Dopredná implikácia je triviálna. Nech teraz $U = A' \cup B'$ je minimálne vrcholové pokrytie grafu G. Ak G nemá párenie, pokrývajúce A ľ önigovej vety (veta 5.2.2.2) $|A'| + |B'| = |U| < |A|$ a teda $|B'| < |A|$ - $|A'| = |A - A'| \Rightarrow |B - B'| > |A$. A ď U je vrcholové pokrytie G, tak G neobsahuje hrany medzi $A - A'$ a B - B $A' = N(B - B$ „ " $B - B'$ neplatí.

Dôsledok 5.2.2.1.

Ak $\forall S \subseteq A : |N(S)| \geq |S| - d$, tak G obsahuje párenie mohutnosti $|A| - d$.

Dôkaz.

B pridáme d A. ľ vety (veta 5.2.2.3) obsahuje takto upravený graf párenie, pokrývajúce A ň $A| - d$ hrán z neho musí ť B pôvodného grafu.

Dôsledok 5.2.2.2.

Ak G je k-regulárny, kde $k \geq 1$, tak G má 1-faktor.

Dôkaz.

ď G je regulárny, tak $|A| = |B|$. Ak navyše G má párenie, pokrývajúce A, tak má aj 1-faktor. Ale $\forall S \subseteq A : E(S, N(S)) \subseteq E(N(S), N(N(S))) \Rightarrow k|S| \leq k|N(S)| \Rightarrow |S| \leq |N(S$ G má 1-faktor.

Dôsledok 5.2.2.3 (Petersen).

ň 2-faktor.

Dôkaz.

Nech G je $2k$- . ľ 5.1.8.1. E ť . e ľ ň E ť v rozdelíme na dva v^+ a v^-; v^+ ostane incidentný s hranami, ktoré do v vchádzali, a v^- s hranami, ktoré z v vychádzali. Takto upravený graf je k- ľ 5.2.2.2 má 1-faktor. Spojením v^+ *a* v^- do v získame 2-faktor.

5.2.3. Párenia vo všeobecných grafoch.

Označenie.

C_G G, $c(G$ ť $q(G$ ň .

Poznámka.

Ak G má 1-faktor, tak zrejme $\forall S \subseteq V : q(G - S) \leq |S$ S. Toto je Tuttova podmienka 1-faktora.

Definícia.

G je *faktorovo kritický*, ak $\forall e \in E$ má G-e 1-faktor.

Definícia.

$S \subseteq V$ je *spáriteľná* s G-S, ak graf, ktorý vznikne odstránením všetkých hrán S a kontrakciou všetkých komponentov G-S, obsahuje párenie, pokrývajúce S.

Veta 5.2.3.1.

G S

(i) S ľ G-S

(ii) *G-S* je faktorovo kritický.

Navyše *G* má 1-faktor práve vted ď $S| = c(G - S)$.

Dôkaz.

N . ľ *G* má 1-faktor, tak $\forall S \subseteq V$: $q(G - S) \leq |S$. A ň $q(G - S) \geq |S$ *G-S* . $q(G - S) = |S|$. Obrátene ak $q(G - S) = |S|$, tak po spárení *S* s *G-S* vznikne zákonite 1-faktor.

Teraz skonštruujeme *S* . *G*|.

1° Pre $|G| = 0$ zjavne vyhovuje $S = \emptyset$.

2° $d = \min\{k; \forall T \subseteq V : q(G - T) \leq |T| = k\}$ a *S* $q(G - S) = |S| + d$. Ak v *G-S* ť ť *S* maximalitou *S*. $q(G - S) = c(G - S)$. Ak niektorý komponent $C \in G\text{-}S$ nie je faktorovo kritický, tak existuje jeho hrana $e \in C$ *C-e* nemá 1-faktor. Ale $|G\text{-}e| < |G| \Rightarrow$ ľ $\exists T' \subseteq V$ s ť . ň ľ $q(G - T') > |T'|$ (lebo *C-e* nemá 1- ď *C-e* je párny, $q(G - T') \geq |T'$ 2 ť . $T = |S \cup T' + e|$ potom platí $q(G - T) = q(G - S) - 1 + q(G - T') = |S| + d - 1 + |T'| + 2 = |T| + d$ äť ď *d*, alebo s maximalitou *S*. *G-S* je faktorovo kritický.

Ak S=∅, tak je triviálne spárit ľ G- . ≠∅. A A = *C*(G-S), ľ 5.2.2.1 $\forall C' \subseteq C(G\text{-}S) : |N(C')| \geq |C'| - d$, tak existuje párenie, mohutnosti $|C(G\text{-}S)| - d$. Ale z vlastností *S* $q(G\text{-}N(C')) \leq |N(C')| + d \Rightarrow |N(C')| \geq q(G\text{-}N(C')) - d \geq |C'| - d \Rightarrow$ existuje párenie mohutnosti $|C(G\text{-}S)| - d = |S|$.

Veta 5.2.3.2 (Tutte)

G má 1- ď $\forall S \subseteq V : q(G\text{-}S) \leq |S|$.

Dôkaz.

Dopredná implikácia je triviálna. Obrátene z vlastností (i) a (ii) vety 5.2.3.1 vyplýva $q(G\text{-}S) \geq |S|$ a ak navyše $c(G\text{-}S) = q(G\text{-}S) \leq |S|$, tak $c(G\text{-}S) = q(G\text{-}S) = |S|$, tak *G* má 1- ľ .

Dôsledok 5.2.2.4 (Petersen).

1-faktor.

Dôkaz.

Nech *S* 5.2.3.1. $S| \leq c(G\text{-}S) = q(G\text{-}S)$. Pre $C \subseteq C(G\text{-}S$ $k_C = |E(S, C$. ď *G* je kubický, tak *C* má práve $\dfrac{3|C| - k_C}{2}$. A ď k_C je nepárne a *G* je bez mostov, $k_C \geq 3$. $3\ C| \leq k_C \leq 3|S| \Rightarrow |C| \leq |S|$. Ale $|C| \leq c(G\text{-}S$ $C| = |S|$ a *G* má 1- ľ 5.2.3.1.

5.3. Súvislosť.

5.3.1. Súvislé grafy a podgrafy.

Definícia.

Maximálny neprázdny podgraf bez artikulácií sa nazýva *blok*.

Definícia.

Nech *A* *G* a *B* blokov. Kompletný bipartitný graf s partíciami *A* a *B* nazývame *blokový graf* grafu *G*.

Lema 5.3.1.1.

B .

Dôkaz.

B ť ň ť *A* musela ť ť .

Lema 5.3.1.2.

Graf *G* je 2- ľ *G*-hrán.

Dôkaz.

Spätná implikácia je triviálna. Nech je teraz G 2-súvislý a nech H je maximálny podgraf, skonštruovaný uvedeným spôsobom. H je indukovaný podgraf (inak by existovala jeho vnútorná hrana e, ktorá tvorí H-cestu, ť A $G \neq H$, tak existuje hrana vw, kde $v \in H$ a $w \in G-H$. A ď G je 2-súvislý, tak aj v G-v existuje w-H cesta $P \Rightarrow$ existuje H-cesta $P+vw$ äť H. $G=H$ a G je 2-súvislý.

5.3.2. 3-súvislé grafy.

Lema 5.3.2.1.

$\forall G$ 3-súvislý, $|G|>4$ $\exists e \in E$: $G|_e$ je 3-súvislý.

Dôkaz.

Sporom. Nech $\forall xy \in E$ je $G|_{xy}$. S ľ $G|_{xy}$. ď G je 3-súvislý, S obsahuje kontrahovanú xy ako vrchol v_{xy} a ešte vrchol z. $G|_{xy}$ S, sú v G $T = \{x, y, z\}$ T om komponente C z G-T. ľ T a C tak, aby $|C$ v nejaký vrchol z C susedný so z. ď $G|_{vz}$ nie je 3-súvislý, existuje vrchol w $\{z, v, w\}$ ľ G $\{z, v, w\}$ komponente G-$\{z, v, w\}$. ď x a y sú incidentné, v G-$\{z, v, w\}$ existuje komponent D disjunktný s $\{x, y\}$. Z v v D C v C) $\Rightarrow C \cap D \neq \emptyset$ a teda $D \subseteq C$, lebo $\{x, y\} \subseteq C$ C.

Veta 5.3.2.1 (Tutte).

G je 3-súvi ď ľ K^4 dilatáciou vrcholov do hrán s koncovými ň ň 3.

Dôkaz.

Kontrakciou hrany 3- 5.3.2.1 . Jediný 3-súvislý graf rádu 4 je K^4 ľ ľ 3-súvislého grafu G. „ “ G z K^4 skonštruujeme. Pritom proces ň ň ň 3.

Veta 5.3.2.2.

Cyklový priestor 3- .

Dôkaz.

Nedokazujeme.

5.3.3. Mengerova veta.

Veta 5.3.3.1 (Menger).

Nech $A, B \subseteq V(G)$. $\min\{k;\ \exists S \subseteq V$ ľ A a $B\} = \max\{l;\ \exists l$ disjunktných A-B ciest$\}$.

Dôkaz.

Nech k ľ A a B v G. ť k disjunktných A-B ciest. Indukciou na $|G| + ||G$ k takýchto ciest existuje.

1° Pre $k \leq 1$ (a teda $|G| + ||G||$.

2° Nech $k \geq 2$ a nech tvrdenie platí pre všetky menšie grafy. Nech X k ľ A od B. Ak $\exists x \in A \cap B$, tak X-x ľ A-x od B-x v G-x ľ e v G-x k-1 disjunktných A-x - B- . G triviálnou cestou x existuje k disjunktných A-B ciest.

Nech teraz $A \cap B = \emptyset$. Ak existuje k-prvková $X \neq A,B$ ľ A od B C_A všetkých komponentov G-X, ktoré majú s A nepráz . ď $A| \geq |X| \wedge A \neq X$, tak $C_A \neq \emptyset$. C_B. $G_A = [V(C_A) \cup X]$ a $G_B = [V(C_B) \cup X]$. ď A-B cesta v G obsahuje A-X podcestu, v G_A A od X ť k vrcholmi. Ale $|G_A| + ||G_A|| < |G| + ||G$ ľ G_A k disjunktných A-X ciest. Podobne v v G_B existuje k disjunktných B-X ciest. Pospájaním dostávame k disjunktných A-B ciest v G.

Nech teraz okrem A a B neexistuje iná k- ľ A od B. Nech P ľ ľ A-B cesta. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists ab \in P : a \notin A \wedge b \notin B$. G-ab G; nech Y ľ A od B v G-ab. $Y_A = Y \cup \{a\}$ a $Y_B = Y \cup \{b\}$. ľ $Y_A| \geq k$ a takisto $|Y_B| \geq k$. Ak $|Y_A| = |Y_B| = k$, tak $Y_A = A$ a $Y_B = B$ $A \cap B = \emptyset$. povedzme $|Y_A| > k \Rightarrow |Y| \geq k$ ľ k disjunktných ciest, ľ G-ab (a teda aj v G) A od B.

Definícia.

a-B ciest sa nazýva *a-B vejár* a.

Dôsledok 5.3.3.1.

$\forall B \subseteq V(G)$ $\forall a \in G$-B : a ľ a od B, je rovný a-B vejári.

Dôkaz.

A $A = N(a)$, tak tvrdenie vyplýva priamo z Mengerovej vety (veta 5.3.3.1).

Dôsledok 5.3.3.2.

$\forall ab \notin E(G)$: 1) min. # ľ a od b = max. # nezávislých a-b ciest.
2) min. # ľ a od b = max. # hranovo nezávislých a-b ciest.

Dôkaz.

Tvrdenie 1) vyplýva priamo z Mengerovej vety (veta 5.3.3.1), tvrdenie 2) z nej dostaneme pre hranový graf grafu G.

Veta 5.3.3.2.

(1) G je k- ď $\forall x,y \in V\ \exists\ k$ nezávislých x-y ciest.
(2) G je k- ď $\forall x,y \in V\ \exists\ k$ hranovo nezávislých x-y ciest.

Dôkaz.

Spätná implikácia oboch tvrdení je triviálna. (i) - predpokla k-súvislý graf G obsahuje dva vrcholy x,y, ktoré nie sú spojené k nezávislými x-y cestami. Potom $\exists$ hrana $xy \in E$ (z dôsledku 5.3.3.2) a G-xy obsahuje najviac k-2 nezávislých xy . äť 5.3.3.2 $\exists k$-2 X, ľujúca x od y. ň ď $G| > k$ ň $v \notin X \cup \{a, b\}$. v X ď x alebo od y. a. Ale potom $X \cup \{b\}$ je k-1 ľ a od v k- ť G. ť .

5.3.4. Hranovo disjunktné kostry.

Definícia.

Hrana e sa nazýva *krížová hrana* rozdelenia R rozdelenia R.

Veta 5.3.4.1 (Tutte, Nash Williams).

G má k ď om rozdelení V na r ň $k(r$ - 1 .

Dôkaz.

. ä ť.

Dôsledok 5.3.4.1.

2k-súvislý graf obsahuje k hranovo disjunktných kostier.

Dôkaz.

klad na r ň kr .

Veta 5.3.4.2.

G ť k ď $\forall U \subseteq V$: $\|G[U]\| \leq k(|U|$ - 1).

Dôkaz.

Nedokazujeme.

5.4. Planárne grafy.

5.4.1. Planárne grafy.

Definícia.

Rovinnou reprezentáciou grafu G rozumieme také jeho zakreslenie na dvojrozmernú plochu, pri ktorom vrcholy nahradíme bodmi a hrany jednoduchými krivkami. Hrany grafu sa ť. G zentácia, sa nazýva *planárny*.

Veta 5.4.1.1 (Eulerov polyhedrálny vzorec).

n vrcholmi a m hranami má práve $l = 2 + m - n$ oblastí. Teda $n + m - l = 2$.

Dôkaz.

Pri fixovanom n m. Keď G je súvislý, tak $m \geq n - 1$. Pre $m = n - 1$ je G strom a ť $1 = 2$ $n - 1 + n$. ľ ľ ť $n + (m + 1) - (l - 1) = n + m - l = 2$.

Definícia.

Graf G^* nazývame *duálny* kugrafu G : ť G je reprezentovaná jedným vrcholom G^*. G vedie práve jedna hrana G^*, spájajúca vrcholy reprezentujúce oblasti po oboch stranách tejto hrany.

Dôsledok 5.4.1.1.

n vrcholmi a m hranami platí $m \leq 3n - 6$ $m = 3n - 6$ ď existuje rovinná reprezentácia G, ktorej všetky oblasti sú trojuholníky. Ak existuje rovinná reprezentácia G bez trojuholníkov, $m \leq 2n - 4$.

Dôkaz.

Vytvorme G^*. $2m = 2\|G\| = 2\|G^*\| = \Sigma d(v)$; $v \in G^* \geq 3r = 3r^*$, kde r (r^* G (G^* . ň ľ E 5.4.1.1 $\Rightarrow n + m - r = 2 \Rightarrow$ spolu $m \leq 3n - 6$. Ak G nemá trojuholníkové oblasti, namiesto $2m \geq 3r$ platí $2m \geq 5r \Rightarrow m \leq 2n - 4$.

Veta 5.4.1.2 (Whitney).

3- ť .

Dôkaz.

Nedokazujeme.

5.4.2. Kuratowského veta.

Lema 5.4.2.1.

V 2- ť .

Dôkaz.

ľ L my 5.3.1.2 je 2-súvislý graf G ľ G-ciest. Obe oblasti G- ť .

Veta 5.4.2.2 (Kuratowski).

G je ď K^5 ani $K^{3,3}$.

Dôkaz.

3- . matematickú indukciu na $|G|$.

1° Pre K^4 tvrdenie platí.

2° ľ 5.3.2.1 3-súvislý g ľ K^4 . ľ 5.3.2.1 G existuje hrana e, dilatáciou ktorej bude $G|_e$ stále súvislý. Tvrdenie

$G|_e$ je planárny a G G ť $S(K^5)$ alebo $S(K^{3,3})$ a

b) ak $G|_e$ nie je planárny, tak ani G nie je planárny.

Nech teda $G|_e$. ť e ? ť G nebude planárny. V prvom prípade má dilatovaný vrchol v ľ 1 4. Ak po dilatovaní pripadne vrcholu v_1 sused 1 a 3 a v_2 2 4 . A ť $K^{3,3}$. V druhom prípade má dilatovaný vrchol troch susedov, ktorých si oba vrcholy v_1 a v_2 äť . Ľ ť v_1 a v_2 tvoria spolu s ich tromi susedmi K_5.

ť $G|_e$ nie je planárny, tak ani G nie je planárny. To platí, ak planárny graf ostane po kontrakcii e planárny. A ť „poškodenia“ rovinného zobrazenia grafu.

5.5. Farbenia.

5.5.1. Farbenie na grafe.

Definícia.

Ak S $c: V \to S$ nazývame *farbenie* vrcholov grafu G, ak $\forall xy \in E : c(x) \neq c(y)$. Farbenie $c: V \to \{1 .. k\}$ nazývame *k-farbenie*. $\min\{k;\ \exists k\text{-farbenie } G\}$ nazývame *chromatické číslo* $\chi(G$ G je *k-zafarbiteľný*.

Poznámka.

Farbenie grafu je iba rozklad jeho vrcholov na disjunktné partície. Netriviálne 2- ľ grafy sú práve bipartitné grafy.

Definícia.

Ak S $c: E \to S$ nazývame *farbenie hrán* grafu G, ak $\forall v,x,y \in V : vx \in E \wedge vy \in E \Rightarrow c(vx) \neq c(vy)$. Farbenie $c: E \to \{1 .. k\}$ nazývame *k-farbenie hrán*. $\min\{k;\ \exists k\text{-farbenie hrán } G\}$ nazývame *chromatický index* $\chi'(G$ G je *k-hranovo zafarbiteľný*.

Poznámka.

$\chi'(G) = \chi(G^*$. ť ť.

Veta 5.5.1.1 (Problém štyroch farieb).

4- ľ .

Dôkaz.

Nedokazujeme. Najjednoduchší dôkaz má vyše sto strán.

Veta 5.5.1.2 (Heawood).

5- ľ .

Dôkaz.

B ť G . N G je planárny graf s n vrcholmi a m . ď ľ dôsledku 5.4.1.1 $m \leq 3n - 6$, $d(G) = 2m/n \leq 6(n - 2)/n < 6$, musí v G ť v ň 5. ľ 5-farbenie c grafu G-v. Ak existujú dvaja susedia v s rovnakou farbou, potom v susedstve v nejaká farba chýba a v ň ť. v majú rôzne . v_1 .. v_5. $G_{13} = G - G[v_1, v_3]$. Ak neexistuje v_1-v_3 cesta P v G_{13} komponente G_{13} v_1 ť 1 3 5-farbenie G, v ktorom majú v_1 a v_3 rovnakú farbu 3 a v ť 1. A v_1-v_3 cesta P v G_{13}, potom neexistuje v_2-v_4 cesta P v G_{24} ť G_{24} v_2 a v ť 2.

Veta 5.5.1.3 (Grötsch).

3- ľ .

Dôkaz.

Nedokazujeme.

5.5.2. Chromatické čísla.

Lema 5.5.2.1.

m hranami platí $\chi(G) \le \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

Dôkaz.

dve farebné triedy k-farbenia G existuje hrana, ktorá ich spája. Preto $m \ge \frac{k(k-1)}{2} \Rightarrow k \le \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$. Pre $k = \chi(G)$ to dokazuje naše tvrdenie.

Lema 5.5.2.2.

G platí $\chi(G) \le 1 + \max\{\delta(H); H \subseteq G)$.

Dôkaz.

Ak farbíme greedy algoritmom, pre H $\delta(H) + 1$ farieb.

Veta 5.5.2.1 (Brooks).

Nech G je súvislý, planárny a rôzny od K^n a C^n. Potom $\chi(G) \le \Delta(G)$.

Dôkaz.

Indukciou na $|G$. $\Delta = \Delta(G)$. Nech v ň Δ. ľ Δ-farbenie grafu G-v. Ak neexistuje Δ-farbenie grafu G G farbí všetkých susedov v . v_1 .. v_Δ a ich farby 1 .. Δ. Ď H_{ij} faktor G, obsahujúci hrany ofarbené farbami i a j. Musí platiť $\forall i,j$ v_i a v_j v rovnakom komponente $C_{ij} \subseteq H_{ij}$. (Ak existuje i a j v_i a v_j H_{ij} ť i a j dostaneme farbenie G, ktoré na susedoch v $d(v$ . . Ď $\forall i,j : C_{ij}$ je v_i-v_j . H_{ij} ť ň ≤ 2 ň ≥ 3 ť farbou, ktorá iste chýba v jeho susedstve a v tomto novom zafarbení by v_i a v_j boli v rôznych komponentoch H_{ij}, . ť $\forall i \ne j \ne k$ $H_{ij} \cap H_{jk} = v_j$. (Nech $x \ne v_j \in H_{ij} \cap H_{jk}$. x má dvoch susedov rovnakej farby z H_{ij} a dvoch z $H_{jk} \Rightarrow$ v jeho susedstve jedna farba chýba $\Rightarrow$ ...).

Zostrojme $G[v_1$ .. $v_\Delta]$. Ak $G[v_1$ .. $v_\Delta]$ je kompletný, tak $G = K^{\Delta+1}$ ť. A $\exists i,j : v_i v_j \notin E$, (bunv. nech i=1 a j=2 u prvý vrchol na C_{12}. Zámenou farieb 1 a 3 v C_{13} dostávam farbenie c', ď $C_{12} \cap C_{13} = v_1$, tak C_{12}-$v \subseteq C_{12}'$. Ale $u \in C_{23}$, lebo $u \in N(v_3) \Rightarrow u \in C_{12}' \cap C_{23}$ e $C_{12}' \cap C_{23}' = v_1$. Δ-farbenie G, nie je správny.

Definícia.

G je k- ľ ť :

1) K^k je k- ľ .
2) Ak G je k- ľ $xy \notin E$, potom aj $(G + xy)|_{xy}$ je k- ľ .
3) Ak G_1, G_2 sú k- ľ $\exists x, y_1, y_2$ $G_1 \cap G_2 = x$, $xy_1 \in E_1$ a $xy_2 \in E_2$, tak aj $G_1 \cup G_2 - xy_1 - xy_2 + y_1 y_2$ je k- ľ .

Veta 5.5.2.2 (Hajós).

$\chi(G) \ge k \Leftrightarrow \exists H \subseteq G : H$ je k- ľ .

Dôkaz.

Spätná implikácia je zrejm $\chi(K^k) \ge k$ k- ľ . .

5.5.3. Farbenia hrán.

Veta 5.5.3.1 (König).

G platí $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Dôkaz.

Indukciou na $\|G\|$. Pre $\|G\| = 0$ tvrdenie platí. Nech teraz $\|G\| = m \geq 1$. $\Delta = \Delta(G$ ľ ľ ľ $xy \in E$ c Δ-farbenie grafu G-xy . N hrany, ofarbené farbou α ť α-hrany.

V G-xy platí $d(x)$, $d(y) \leq \Delta$-1 . N $N(x)$ chýba α a v $N(y)$ β. Ak $\alpha = \beta$. A $H_{\alpha\beta} = G$-xy - $\forall e \in E : c(e) \neq \alpha,\beta$. $H_{\alpha\beta}$ sú striedavé α-β cesty a x a y C, tak C í . A C+xy í je spor s bipartitou G . ť α a β susedstve x a y ť xy.

Veta 5.5.3.2 (Vizing).

$\forall G : \Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Dôkaz.

$\Delta(G) \leq \chi'(G$ ň $\Delta = \Delta(G$ ť Δ farieb. Druhú ner ť $G\|$. Pre $\|G\| = 0$ je tvrdenie triviálne. Nech teraz $\|G\| = m$. Pod farbením G ť Δ + 1)-farbenie G. ľ $\forall e \in E\ \exists\ c$: farbenie G-e. nie nanjvýš Δ farieb $\Rightarrow$ v nejaká farba β . α pritom existuje maximálny striedavý α-β sled. Z vlastností farbenia ; ť α/β cesta z v. Nech neexistuje (Δ + 1)-farbenie G. Potom **Tvrdenie :** Ak c je také zafarbenie G-xy x chýba α a v y β, tak α/β cesta z x y.

Dôkaz : Ak nie, tak vymením farby na α/β ceste a xy zafarbím farbou β.

ľ ľ ľ $xy_0 \in E$. Nech c_0 je farbenie G-xy_0 a nech v x chýba farba α. N ď y_1 .. y_k je ť x $c_0(y_i)$ chýba v y_{i-1}. G-xy_i definujeme farbenie c_i $c_i(e) = \begin{cases} c_0(xy_{j+1}) \Leftarrow e \in xy_j \wedge j < i \\ c_0(e) \text{ inak.} \end{cases}$. Nech β chýba v y_k v c_0. Prirodzene, β chýba v y_k aj v c_k. Ak by β chýbala aj v x . β v x nechýba a teda $\exists i$ $c_0(xy_i) = \beta$. P α/β cestu z y_k v c_k. ľ P x ť xy_{i-1} (farbu β má v c_0 hrana xy_i, ale v c_k hrana xy_{i-1}). Ale potom β chýba v y_{i-1} v c_0 a teda aj v c_{i-1}. P' α/β cestu z y_{i-1} v c_{i-1}. ď P y_{i-1} ť P a do y_k ť α-hranu, lebo P v y_k α- . ď y_k β chýba, P' v y_k x .

5.5.4. Výberové farbenia.

Definícia.

Nech $G=(V, E)$ a $S = \{S_v\}_{v \in V}$. c grafu G, pre ktoré $c(v) \in S_v$, voláme *výberové farbenie* grafu G ľ S. Ak $|S| = k$ G je *k-výberovo zafarbiteľný*, alebo *k-voliteľný*. $\{k;$ G je k- ľ $\}$ nazývame *výberové číslo* G $ch(G$. ť *výberové farbenie hrán* a *hranové výberové číslo* $ch'(G)$ grafu G.

Veta 5.5.4.1 (Thomassen).

5-v ľ .

Dôkaz.

Nedokazujeme.

Hypotéza.

$\forall G : ch'(G) = \chi'(G)$.

Veta 5.5.4.2 (Galvin).

$\forall G$ bipartitné : $ch'(G) = \chi'(G)$.

Dôkaz.

Nedokazujeme.

Poznámka.

$ch(G) = \chi(G)$ pre skoro všetky grafy.

5.5.5. Perfektné grafy.

Definícia.

Graf G nazývame *perfektný*, ak pre ka H platí $\chi(H) = \omega(G)$.

Definícia.

G je *triangulovaný*, ak $\forall C_{n\geq 4}\subseteq G$ má tetivu.

Poznámka.

Triangulované grafy sú perfektné.

Definícia.

G je *intervalový*, ak existuje reprezentácia jeho vrcholov v podobe podintervalov $\langle 0, 1\rangle$ $e=xy\in E \Leftrightarrow I_x\cap I_y\neq\emptyset$.

Poznámka.

Intervalové grafy sú perfektné.

Veta 5.5.5.1.

G je perfektný $\Leftrightarrow$ G' je perfektný.

Dôkaz.

Nedokazujeme.

Hypotéza.

G je perfektný $\Leftrightarrow$ G ani G' neobsahuje indukovaný podgraf tvaru $C_{2n+1\geq 5}$.

5.6. Toky.

5.6.1. Toky a cirkulácie.

Definícia.

Nech je daný orientovaný graf $G = (V, \vec{E})$, Abelovská gupa H a funkcia $f : \vec{E}\to H$. Funkciu f nazývame *tok* v grafe G, ak (F1) $f(e, x, y) = - f(e, y, x)$. Ak navyše (F2) $\forall x\in V$: $\Sigma f(e, x, y) = 0$, tak f nazývame *cirkulácia* na G. ť 2 *Kirhoffov zákon*. Vrcholy, v ktorých je tok kladný (záporný), nazývame *zdroje* (*ústia*).

Poznámka.

Ak f je tok, tak $f(X, X) = 0$ $\forall X\subseteq V$. Ak f je navyše cirkulácia, potom aj $f(X, V) = 0$.

Lema 5.6.1.1.

Ak f je cirkulácia, tak $\forall X\subseteq V : f(X, X$ = .

Dôkaz.

$f(X, X') = f(X, V) - f(X, X) = 0 - 0 = 0.$

Dôsledok 5.6.1.1.

Ak f je cirkulácia a $e=xy$ most, tak $f(e, x, y) = 0$.

Dôkaz.

Tvrdenie vyplýva priamo z predchádzajúcej lemy.

5.6.2. Toky v sieťach.

Definícia.

Nech $G=(V, E)$ je graf, $c : V\to N_0$ a $s,t\in V$. Štvoricu $N=(G, c, s, t)$ nazývame *sieť* a c jej *kapacitná funkcia*, alebo *kapacita*. Funkciu f nazývame *tok v sieti* N, ak $\forall e=xy\in E : f(e, x, y) \leq c(e)$ a pre všetky vrcholy okrem s a t platí Kirhoffov zákon. Tok nazývame *integrálny*, ak .

Definícia.

$S \subseteq V$ nazývame *rez* v sieti N, ak $s \in S$ a $t \notin S$. Funkciu $c(S, S')$ nazývame *kapacita rezu* S.

Lema 5.6.2.1.

$f(S, S') = f(s, V)$.

Dôkaz.

$f(S, S') = f(S, V) - f(S, S) = \sum_{v \in V} f(v\ V\ = f(s, V)$.

Definícia.

$f(s, t)$ nazývame *veľkosť toku f* f. f^*.

Definícia.

Ak $f(e) < c(e$ e je *rezervný*. Ak na ceste P sú všetky šípy rezervné, tak aj P je rezerv . $\{ f(e) - c(e);\ e \in P\}$ sa nazýva *rezerva* cesty P.

Veta 5.6.2.1 (Folk, Fulkerson).

ľ ť .

Dôkaz.

Nech c je kapacita minimálneho rezu S v sieti N. ť $\{f_i\}$ f_0 je nulový tok a $f_n = f^*$. $S_n = \{v \in V;\ \exists$ rezervná s-v cesta v $f_n\}$ Ak $t \in S_n$, tak

$$f_{n+1} = \begin{cases} f_n + \text{rezerva na d predných hranách } P \\ f_n - \text{rezerva na spätných hranách } P \\ f_n \text{ inde} \end{cases}$$

. Ak pre nejaké n $t \notin S_n$, tak f_n je nasýtený $\Rightarrow |f| = c(S, S') \Rightarrow f_n = f^*$.

Dôsledok 5.6.2.1.

álny tok.

Dôkaz.

.

5.6.3. Toky s hodnotami v abelovských grupách.

Definícia.

nikde-nulová. Nikde-nulová cirkulácia s hodnotami v abelovskej grupe H sa nazýva *H-tok*.

Poznámka.

ď 3- ľ $Z_2 \times Z_2$-tok.

Veta 5.6.3.1 (Tutte).

G existuje polynóm P H H-tokov na G rovný $P(|H| - 1)$.

Dôkaz.

Nedokazujeme.

Definícia.

Integrálnu nikde-nulovú cirkuláciu f na G voláme *k-tok*, ak $\forall e \in E : |f(e)| < k$. $\varphi(G) = \min\{k;\ G$ má k-tok$\}$ voláme *tokové číslo* grafu G.

Veta 5.6.3.2

G má Z_k- ď k-tok.

Dôkaz.

Spätná implikácia je triviálna. Nech teda G má Z_k- . A ť $\{f_i\}$ podobne ako v dôkaze Folk- 5.6.2.1 $\forall v \in V : f(v, V)$ síce $\neq 0$, ale $f(v, V) \bmod k = 0$. Ale suma odchýlok = 0 (lebo f ť

. A ť „ “
ť k-toku.

Hypotéza.
5-tok.

5.6.4. k-toky pre malé k.

Lema 5.6.4.1.
G má 2- ď ň .

Dôkaz.
Ak G má 2-tok $\Rightarrow \forall e \in E : f(e = 1$ ť ň v párny. Obrátene ak G má ň ľ 5.1.8.1 E ť . A ľ ť dostávam 2-tok.

Lema 5.6.4.2.
Kubický graf má 3- ď .

Dôkaz.
Ak má kubický graf 3- 1 2 1 -1. Kirhoffov ť ď ň „ “ „ “ . A = vrcholov, z ktorých jednotky vychádzajú, a B tie, do ktorých vchádzajú. Toto je zjavne rozklad G a G je bipartitný, lebo hrany idú výhradne medzi partíciami.

Obrátene ak G je bipartitný, tak jednoducho zorientujem hrany smerom od A do b a v tomto smere pustím . .

Lema 5.6.4.3.
$n > 4$ platí $\varphi(K^{2n}) = 3$.

Dôkaz.
Indukciou na n. $K^6 = K^3 \cup K^{3,3} \cup K^3$ a oba tieto typy majú 3-tok. $K^n = K^{n-2} \cup K^{2,n-2} \cup K^2$. nech pridané vrcholy sú v_1 a v_2. v existuje 3-tok na K^3 nad $\{v_1, v_2, v\}$ akurát ak $n - 2$ nie ľ 6 $f(v_1v_2) \neq$. ť ľ ľ v. Výsledkom je 3-tok na K^n.

Lema 5.6.4.4.
4-súvislý graf má 4-tok.

Dôkaz.
ľ 5.3.4.1 4-súvislý graf 2 disjunktné kostry. T_1 a T_2. $\forall e \notin T_i : T_i + e$ vytvára jediný cyklus $C_{e,i}$. Hrany tohoto cyklu orientujem v smere e a priradím im hodnotu i. Ostatné hrany ohodnotím 0. Dostávam $f_{e,i}$. Sumou $f_{e,1}$ cez všetky $e \notin T_1$ dostávam f_1. ď $e \notin T_1$ jednom cykle $C_{e,1}$, tak f_1 ď T_1 ba hodnoty 1 a -1 (=3 v Z_4 . $A = \{e \in T_1; f_1(e) = 0\}$ a $f_2 = \sum_{e \in A} f_{e,2}$. Z definície f_2 $\forall e \in A : f_2(e = 2$. A $f = f_1 + f_2$, tak dostávame Z_4-tok (mimo T_1 hodnoty 1, v T_1 mimo A hodnoty $\neq 0$ a v A hodnoty 2) a teda G ľ 5.6.3.2 4-tok.

Lema 5.6.4.5.
(i) G má 4- ď .
(ii) Kubický G má 4- ď $\chi'(G) \leq 3$.

Dôkaz.
ľ 5.6.3.2 G 4-tok práve vtedy, ď Z_4- . A 5.6.3.1 G ď . A ď $|Z_4| = |Z_2 \times Z_2|$, tak G má aj $Z_2 \times Z_2$-tok.

(i) Ak G má $Z_2 \times Z_2$- ť ktory H_1 a H_2, kde H_1 obsahuje hrany ohodnotené $(0,i)$ a H_2 $(i$. H_1 a H_2 ľ 5.6.4.1 2- ľ 5.6.3.2 Z_2-tok a ich zjednotením dostávam $Z_2 \times Z_2$-tok.

(ii) Nech kubický G má 4- . U $Z_2 \times Z_2$- .
1 1 1 1 k-toky sú nikde-nulové. Avšak v $Z_2 \times Z_2$
e sú ohodnotené rovnako jednou z troch
enulových hodnôt $Z_2 \times Z_2$. Pritom ak nejaké dve hrany, incidentné s vrcholom v majú rovnakú hodnotu
ť
spor s nikde- ť k- . $Z_2 \times Z_2$-tok je 3-farbenie G. 3-farbenie
G z vyššieuvedených dôvodov $Z_2 \times Z_2$-tok na G.

Dôsledok 5.6.4.1.
3- ľ .

Dôkaz.
Hodnota mostu v $Z_2 \times Z_2$- ť .

5.6.5. Toky a farbenia.

Veta 5.6.5.1 (Tutte).
$\forall G : \chi(G) = \varphi(G^*)$.

Dôkaz.
k-farbenie duálneho grafu G^* identifikuje k-tok G, v ktorom hodnota hrany je rozdiel hodnôt farieb koncov jej duálnej hrany.

Dôsledok 5.6.5.1.
4-tok.

Dôkaz.
ľ 5.5.1.1 4- ľ ľ 5.6.5.1 4-tok.

Hypotéza.
4-tok.

Hypotéza.
5-tok.

Veta 5.6.5.2.
6-tok.

Dôkaz.
Nedokazujeme.

5.7. Hamiltonovské grafy.

5.7.1. Hamiltonovská kružnica.

Definícia.
$C_n \subseteq G$ alebo cesta P_n sa nazýva *hamiltonovská*, ak $n = |G|$. Graf, obsahujúci
.

Lema 5.7.1.1.
Nech G je hamiltonovský. $\forall S \subseteq V : c(G-S) \le |S|$.

Dôkaz.
1 G G súvislý a
ď 1.

Dôsledok.
2-súvislý.

5.7.2. Jednoduché postačujúce podmienky.

Veta 5.7.2.1 (Bondy, Chvátal).
Nech $|G| = n$ a pre $x,y \notin E : d(x) + d(y) \ge n$. Potom G ď $G+xy$ je hamiltonovský.

Dôkaz.

Dopredná implikácia je triviálna. Obrátene nech $G + xy$ je hamiltonovský. Potom v G existuje hamiltonovská cesta P. Nech G . P x_i (x=x_1 a y=x_n $X = N(x)$ a $Y = N(y)$. Platí $|X| + |Y| \geq n \wedge xy \notin E \Rightarrow x,y \notin X \cup Y \Rightarrow |X \cup Y| < n \Rightarrow |X \cap Y| \neq \emptyset$. Nech $x_i \in X \cap Y$. Ale potom x_1 .. $x_{i-1}x_n$ .. x_ix_1 .

Veta 5.7.2.2 (Ore).

$\forall G$: ($|G| \geq 3 \wedge \forall x,y \notin E : d(x) + d(y) \geq |G|$) $\Rightarrow G$ je hamiltonovský.

Dôkaz.

Zoradím hrany G 5.7.2.1 G je ď $K^{|G|}$ je hamiltonovský.

Veta 5.7.2.3 (Dirac).

Ak v grafe G ň ň $n/2$, tak G je hamiltonovský.

Dôkaz.

V G je splnená podmienka vety 5.7.2.2.

Lema 5.7.2.1.

$\forall G : |G| \geq 3 \wedge \kappa(G) \geq \alpha(G) \Rightarrow G$ je hamiltonovský.

Dôkaz.

Nech C_n G. x_1 .. x_n. G nie je hamiltonovský, tak $n < |G|$ a $\exists x \notin C$. U x-C vejár F $I = \{i;\ \exists x$-x_i cesta $P_i \subseteq F\}$. $\forall i \in I : xx_i \notin E$ a $|F| \geq \min\{\kappa(G), |C|\}$. Ď $\forall i \in I : i+1 \notin I$ (inak by C-x_ix_{i+1}+P_i+P_{i+1} bol $\Rightarrow |F| < |C|$ a teda $|I| \geq \kappa(G)$. Naviac $\forall i,j \in I : x_{i+1}x_{j+1} \notin E$ (inak by äť . A $\{x_{i+1};\ i \in I\} \cup \{x\}$ I a teda $\kappa(G$.

Veta 5.7.2.4 (Tutte).

Ka 4-súvislý graf je hamiltonovský.

Dôkaz.

Nedokazujeme.

5.7.3. Hamiltonovské postupnosti.

Definícia.

ť $\{a_n\}$ je *hamiltonovská* ť ň $\geq \{a_n\}$, je hamiltonovský.

Poznámka.

Postupno ť $\{n/2, n/2, ...\}$ je hamiltonovská z Diracovej podmienky.

Veta 5.7.3.1 (Chvátal).

N ť $\{a_n\}$ ň ď * $\forall i < n/2 : a_i \leq i \Rightarrow a_{n-i} \geq n - i$.

Dôkaz.

N ä . N ť $\{a_n\}$ platí (*) a nech $\{a_n\}$ napriek tomu nie je . ň $\geq \{a_n\}$ G taký, $G\| = \max\{\|H\|;\ H$ nie je hamiltonovský$\}$. ľ x a y tak, aby $d(x) + d(y)$ bolo maximálne medzi všetkými nesusednými x,y. Z maximality G $\forall e$=$x,y \notin E$ je G+e hamiltonovský $\Rightarrow$ v G existuje hamiltonovská x-y cesta P. ľ G x_i ľ P ($x = x_1$ a $y = x_n$. $I = \{x_i;\ xx_{i+1} \in E\}$ a $J = \{x_j;\ yx_j \in E\}$. Ak $I \cap J \neq \emptyset$, tak $\exists x_i \in I \cap J$ a $x_1..x_ix_n..x_{i+1}x_1$. $I \cap J = \emptyset$. $d(x) + d(y) = |I| + |J| < n \Rightarrow d(x)$ alebo $d(y) < n/2$. Nech $h = d(x) < n/2$. Z maximality $d(x) + d(y$ $\forall x_i \in I$: $d(x_i) \leq h < n/2 \Rightarrow$ ň h vrcholov G ň $h \Rightarrow a_h \leq h$ a z vlastnosti (*) postupnosti $\{a_n\}$ vyplýva, $a_{n-h} \geq n$-$h \Rightarrow$ ň h+1 vrcholov G ň ň n-$h \Rightarrow$ ň $y´$) nie je susedný s x. ň $d(x) + d(y´) = h + n$-$h = n$ $d(x) + d(y)$.

Teraz obmena dopred . N ť $\{a_n\}$ Íň * $\Rightarrow \exists h : a_h \leq h \wedge a_{n-h} < n-h$. Potom ale graf $G = K^{n-h} \cup K^{h,h}$ o n vrcholoch ($K^{n-h} \cap K^{h,h} \subseteq$ partície A), nie je hamiltonovský.

Definícia.

G je *pancyklický* Í 3 .. n a *bipancyklický*, ak je Í 4 .. $n(n-1)$.

Veta 5.7.3.2 (Vylepšená Chvátalova veta).

A ť ň G Íň * G je (bi)pancyklický.

Dôkaz.

Nedokazujeme.

5.7.4. Hamiltonovské kružnice v štvorci grafu.

Definícia.

Graf G^2 nazývame *štvorec* grafu G, ak $G^2 = G + \forall xy : d_G(x,y) = 2$.

Veta 5.7.4.1 (Fleischner).

Š 2-súvislého grafu je hamiltonovský.

Dôkaz.

Nedokazujeme.

5.8. Extremálne problémy.

5.8.1. Podštruktúry v hustých grafoch.

Definícia.

Nech $ex(n, H) = \max\{k \in N;\ \forall G : \|G\| \leq k \Rightarrow H$ nie je podgraf $G\}$ Graf G nazývame *extremálny* ľ H.

Definícia.

Kompletný r-1-partitný graf s n ľ ť o jedna, nazývame *Turánov graf* pre $(r,n$ $T^{r-1}(n)$. $\|T^{r-1}(n$ $t_{r-1}(n)$.

Veta 5.8.1.1 (Turán).

$T^{r-1}(n)$ je jediný extremálny graf pre (K^r, n).

Dôkaz.

Indukciou na n. Pre $n \leq r$-1 je $T^{r-1}(n)$ rovný K^n . G je extremálny graf pre K^r, n. Potom G iste obsahuje podgraf K = K^{r-1}. ľ G - $K\| \leq t_{r-1}(n-r+1$. ň $\forall v \in G - K : \|v, K\| \leq r\text{-}2$ $G\| \leq \binom{r-1}{} + t_{r-1}(n-r+1) + (r-2)(n-r+1)$. Ale $t_{r-1}(n)$ - ($K = \{$ $\}) = t_{r-1}(n-r+1) \Rightarrow t_{r-1}(n) = \|K\| + t_{r-1}(n-r+1) + (r-2)(n-r+1) \geq \|G\|$. A ď G je extremálny, $\|G\| = t_{r-1}(n$ K v_1 .. v_{r-1} G má najviac r-2 susedov v K. Pre $i = 1..r\text{-}1$ definujme $V_i = \{v \in G;\ (v, v_i) \notin G\}$. Všetky V_i sú nezá G existovala r- G je r-1-partitný. Ale jediný r-1-partitný extremálny graf je $T^{r-1}(n$ tvrdenie.

5.8.2. Erdösova-Stoneova teoréma.

Veta 5.8.2.1 (Erdös, Stone).

$\forall n \geq 2\ \forall H : \lim_{n\to\infty} \dfrac{ex(n,H)}{\binom{n}{}} = \dfrac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$.

Dôkaz.

Nedokazujeme.

Poznámka.

$$t_{r\text{-}1}(n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{r-2}{r-1}\; n^2 - h^2 \;\; + \binom{h}{2} \cong \frac{r-2}{r-1}.$$