Contents

0.1. zkratky

GR grafická reprezentace

0.2. opakovani

DEFINITION 0.2.1. **absolutni hodnota** GR - vzdalenost

$$|x| = \begin{matrix} x : x \geq 0 \\ -x : x < 0 \end{matrix}$$

vlastnosti: $|x - y| > 0$ kdyz $x \neq y$
$= 0$ kdyz $x = y$
trojuhelnikova nerovnost.
$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$
$|x + y| \leq |x| + |y|$
$|x - y| \geq ||x| - |y||$

CHAPTER 1

Uvod

1.1. výroková logika

-o platnosti a neplatnosti vyroku

vyrok. tvrzeni, o jehoz pravdivosti lze rozhodnout

pravda. Tarsky: Vyrok A je pravdivy, jestlize plati A

1.1.0.1. *predpoklady:*

cisla.

$N. Z$

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$

R

zakl. mnozinove operace. $\times$katrezsky soucin

binarni relace

$\cap$prunik

$\cup$sjednoceni

$\setminus$rozdil

$\div$symetricka diference

1.1.1. pravidla pro vytvareni novych vyroku.

&konjunkce. $A\&B$ A a B

$\vee$disjunkce. A nebo B (neni vylucujici)

$\neg$negace. neplati A

$\Rightarrow$ implikace. jestlize A, pak i B (A premisa, B tvrzeni)

pomoci negace a konjunkce

$\Leftrightarrow$ekvivalence. $(A \Rightarrow B)\&(B \Rightarrow A)$

a plati prave tehdy, jestlize plati B

1.1.1.1. *tabulka.* "law of Excluded Middle"

A	B	$A\&B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

terminologie.

implikace. $A \Rightarrow B$ A implikuje B

z A plyne B

A je postacujici pro B

B je nutne pro A

tautologie. vyrok, ktery je pravdivy nezavisle na PH (pravdivostni hodnote) jeho komponent

1.1.2. Vyrokova funkce $V(x_1, ...x_n....\infty)$ $x_i \in M$**.... promenna.** pravdivost $V(x)$ zavisi na x

1.1.3. Kvantifikatory. -nelze zamenovat poradi ruznych
$\forall$ vseobecny (all). $\forall x \in M : V(x)$
$\exists$ existencni (exists). $\exists x \in M : V(x)$
[1].

1.1.3.1. *Negace kvantifikovanych vyroku.*
$\neg\forall$. $\neg(\forall x \in M : V(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in M : \neg V(x))$ - protipříklad
$\neg\exists$. $\neg(\exists \in M : V(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in M : \neg V(x))$

1.2. zakladni metody dukazu

1.2.1. dukaz sporem. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \& \neg B)$
MA3

1.2.2. primy. $A \Rightarrow B <= (A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow B)$

THEOREM. *1 (Cauchyova nerovnost)*
MA5
(Nekdy taky Cauchyova-Schwarzova nerovnost)
*/*geometricky vyznam:* cos ≤ 1**/*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \tag{1.2.1}$$

PROOF. $x \in \mathbf{R} : f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)}_{\alpha} x^2 + \underbrace{2\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)}_{\beta} x + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}_{\gamma}$

$\alpha\beta,\gamma$
$f \geq 0 \Rightarrow D \leq 0$
$D = \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$, dosadime a vyjde to □

1.2.3. neprimo. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
$\forall x, y \in \mathbf{R} : x < y \Rightarrow 2x < 2y$
-zadny predpoklad pro A (rozdil od sporu)

1.2.4. indukci. chceme dokazat:$\forall n \in \mathbf{N} : V(n)$ nebo pro $n \geq k$
1.2.4.1. *dk, ze n=min ma vlastnost V.*
1.2.4.2. *dk implikaci* $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ *(ma-li* $n \in \mathbf{N}$ *vlastnost V,potom* $n + 1$*ma vlastnost V).* predpokladame platnost $V(n)$!
1.2.4.3. *V pro vsechna N.*

[1] $\forall\exists$ => $\exists\forall$

dukaz sporem - min.prvek.

EXAMPLE 1.2.1. Bermoulliova nerovnost
$\forall n \in \mathbf{N} \forall x \in \mathbf{R}, x \geq -1 : (1+x)^n \geq 1 + nx$
(1) $1 + x >= 1 + x$
(2) $V(n) \Rightarrow V(n+1)$
pred˙$(1+x)^n \geq 1 + nx$
$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x)$ (muzu, protoze 1+x neni zaporny)
$= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$
dokonce pro $\forall x \geq -2$

Bermoulliova nerovnost 2. $\Pi_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$ pro $x_1 ... x_n \geq -1$ tehoz znamenka

1.3. mnozina R

1.3.1. vlastnosti.

1.3.1.1. *algebraicke axiomy.* **R** tvori teleso vzhledem ke scitani a nasobeni
$\forall x, y, k, l \in \mathbf{R}$
scitani
scitani.
komutativita scitani. pro lib. a,b plati $x + y = y + x$ (protoze scitani R je)
asociativita. pro lib 3 vektory a,b,c $a + (b + c) = (a + b) + c$
nulovy prvek. $\exists 0 \in \mathbf{R} : \forall x \in \mathbf{R} : x + 0 = x = 0 + x$
opacny prvek. ke kazdemu x $\exists$ opacny $-x : x + (-x) = 0 = (-x) + x$
nasobeni.
asociativita nasobeni. $x(kl) = (xk)l$
komutativita nasobeni. pro k, l a x plati $xy = yx$
jednotka. lib. $x * 1 = x$
opacny prvek. $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} : \exists x^{-1} x = 1$
distributivita vzhedem k scitani. $k(x + y) = kx + ky$
1.3.1.2. *axiomy usporadani.* $(x \leq y)$
na mnozine **R** je dana binarni relace $\leq$takova¸ze:
zakon o trichotomii (slaba antisymetrie (usporadani)). $\forall x, y \in \mathbf{R} : x \leq y \& y \leq x \Rightarrow x = y$
transitivnost. $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : (x \leq y \& y \leq z) \Rightarrow x \leq z$
neexistence nesrovnatelnych prvku. $\forall x, y \in \mathbf{R} : x \leq y \vee y \leq x$
scitani. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
nasobeni. $\forall x, y \in \mathbf{R} : 0 \leq x \& 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$
1.3.1.3. *uplnost (axiom o supremu).* (dosud to byly axiomy platne i pro Q)

DEFINITION 1.3.1. Omezenost mnoziny

necht $M \subset \mathbf{R}$ ˙Rekneme, ze M je omezena shora (zdola), kdyz $\exists a \in \mathbf{R} : \forall x \in M : x \leq a$ $(x \geq a)$
horni (dolni) zavora - a mnoziny M. nemusi byt jenom jedna, muze i nemusi v mnozine lezet
omezena, kdyz je omezena shora i zdola.
konvence. $x \leq y$ totez co $y \geq x$
$x < y$ totez co $(x \leq y \& x \neq y)$

axiom o uplnosti. Necht $M \subset R$ je neprazdna a shora omezena˙Potom $\exists G \in \mathbf{R}$:
(i) $\forall x \in M : x \leq G$.
(ii) $\forall G' \in \mathbf{R}, G\prime < G : \exists x \in M : G\prime < x$ (jakykoliv mensi cislo uz neni horni zavora). (G je nejmensi horni zavora)

priklady.

(1) (a, b) $G = b$
(2) (a, b) $G = b$
(3) $[a, b]$ a, b
(4) $\mathbf{N}$ neni horni zavora
(5) $\left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\right\}$ $G = 1$

1.3.2. axiomy algebraicke¸o usporadani a o uplnost definuji jednoznacne mnozinu R. ($\mathbf{R}$ je jedine usporadane teleso)

$\mathbf{R} = \mathbf{R}\,(+, *, 0, 1, \leq, sup)$

1.3.2.1. *vsuvka: dokazat z axiomu telesa, ze* $0 < 1$.

Proof. (dle zakonem o trich.) bud (1) $0 = 1$ nebo (2) $0 > 1$ nebo $0 < 1$
1 - definice
2 - sporem:

$$\begin{aligned} 0 &> 1 \\ -1 &> 0 \\ (-1)(-1) &> 0\,(-1) \end{aligned}$$

/*dle predpokladu $-1 > 0$ a tedy neotacime nerovnost*/
musime dk. $\forall x : x0 = 0$
potom sporem $(-x)(-y) = xy$
xy je opacny prvek k $(-x)\,y$, protoze $xy + (-x)\,y = (x + (-x))\,y = 0y = 0$
$(-x)(-y)$ je take opacny prvek, z jednoznacnosti plyne $(-x)(-y) = xy$
tedy
$1 > 0$ □

1.3.3. supremum, infimum (klicovy pojem). (pozdeji rozsireno viz 2.3.2)

Definition 1.3.2. inf infimum
(i) $\forall x \in M : x \geq G$ (G je horni zavora)
(ii) $\forall G' > G \exists x \in M : x < G'$ (nejmensi dolni zavora)
G nazyvame **infimem** mnoziny M a znacime $G = \inf M$
sup **supremum** analogicky

G, ktere je nejmensi horni zavorou mnoziny $M \subseteq \mathbf{R}$, znacime $G = \sup M$ a nazyvame supremem M

Note 1.3.3. M je neprazdna mnozina
M je omezana shora (zdola)¸pak $\exists \sup M (\inf M)$
pokud $\exists$ supremum (nebo infimum)¸pak je urceno jednoznacne
necht existuje $\sup M$ a take $\inf M$¸potom $\inf M \leq \sup M$

Theorem. *2 (existence infima)*
Je-li $M \subset R$ neprazdna a zdola omezena, pak existuje $\inf M$.

PROOF. def $-M = \{-x; x \in M\}$
tato mnozina je neprazdna a shora omezena
tedy $\exists G = \sup(-M)$
vezmeme $-G$, coz je $\inf M$. Toto cislo ma obe vlastnosti $\inf M$
(i)$\forall x \in M : x \geq -G$
(ii) $\exists G\prime > -G \exists x \in M : x < G\prime$ □

1.3.4. R je uplne usporadane teleso.

DEFINITION 1.3.4. Rekneme¸ze $A \subset R$ je induktivni¸jestlize:
(i) $1 \in A$
(ii) $x \in A \Rightarrow (x+1) \in A$ (princip mat˙indukce)
Definujeme N jako prunik vsech induktivnich mnozin $= \bigcap \{A, A \subseteq R, A \text{ induktivni}\}$

THEOREM. *3 (Archimedova vlastnost)*
$\forall x \in \mathbf{R} \exists n \in \mathbf{N} : x < n$

PROOF. sporem: necht $\exists x \in \mathbf{R} \forall n \in \mathbf{N} : x \geq n$ potom x je horni zavorou N, navic $N \neq \emptyset$ $(1 \in \mathbf{N})$
tedy existuje $\sup N$ oznacme ho G
vime¸ze $\forall n \in \mathbf{N} : n \leq G$
pak take $\forall n \in \mathbf{N} : n + 1 \leq G$¸tedy $n \leq G - 1$¸pak take $G - 1$ je horni zavora - to je spor
takze G neexistuje □

1.3.5. poznamka. Z axiomu telesa lze odvodit vsechna obvykla pravidla pro pocitani s R cisly
odcitani: $a - b = a + (-b)$
oznaceni priroz. cisel. $2 = 1 + 1$
$3 = 1 + 2$
n-ta mocnina. $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, x \in \mathbf{R}$¸pak definuji $x^n = \begin{cases} 1 \text{ pro } n = 0 \& x \neq 0 \\ x \text{ pro } n = 1 \\ xx^{n-1} \end{cases}$

1.3.6. poznamka. Uplnost R je dvoji
1.3.6.1. *algebraicka.* v Q neexistuje x takove¸ze $x^2 = 2$
1.3.6.2. *geometricka.* (cara je plna)
ctverec: strana a uhlopricka v Q nejsou porovnatelne

THEOREM. *4 (o existenci n-te odmocniny)*
Necht $n \in \mathbf{N}$ *a* $x > 0, x \in \mathbf{R}$
Potom $\exists! x \in \mathbf{R}, x > 0 : y^n = x$

PROOF. definujeme $M_1 = \{k \in [0, \infty); k^n \leq x\}$
definujeme $M_1 = \{k \in [0, \infty); k^n \leq x\}$
dk. ¸ze $\exists \sup M_1 \& \exists \inf M_2 \& \sup M_1 = \inf M_2$
$M_1 \neq \emptyset$¸ nebot $0 \in M_1$
$M_2 \neq \emptyset$¸nebot $\max\{1, x\} \in M_2$ $(0 < x < 1$ potom $x.x < x$; $x > 1$ potom $x.x > x)$
M_1je shora omezena $\max\{1, x\}$
M_2 je zdola omezena 0
definuji $y_1 = \sup M_1, y_2 = \inf M$ tvrdim: $y_1^n \leq x \leq y_2^n$
$y_1^n \leq x$ sporem:

$\exists y_1^n > x$
pak $\frac{ny_1^{n-1}}{y_1^n - x} \in \mathbf{R}$ Podle vety 2 $\exists K \in \mathbf{R} : K > \frac{ny_1^{n-1}}{y_1^n - x}$
(ze strasne veliky nebo malinky quantity vyvodim)
$\exists z \in M_1 : y_1 - \frac{1}{K} < z$ tedy $z^n \leq x$ Potom
$y_1^n - x \leq y_1^n - z^n$ (nebot $z^n \leq x$ a tedy $-z^n \geq -x$)
$= (y_1 - z)\left(y_1^{n-1} + y_1^{n-2}z + ... + z^{n-1}\right)$ (znamy algebraicky vztah)
$< \frac{1}{K}\left(y_1^{n-1} + y_1^{n-2}z + ... + z^{n-1}\right)$ (nebot $y_1 - \frac{1}{K} < z$)
$\leq \frac{1}{K}y_1^{n-1}n$ (nebot $z \leq y_1, y_1 = \sup M_1$)
$< y_1^n - x$ (definice K) - spor dle zakonu o trichotomii
analogicky $x \leq y_2^n$
tvrdim: $y_1 = y_2$sporem
kdyby $y_1 < y_2$ pak $\exists s = \frac{y_1+y_2}{2} \in (y_1, y_2)$˙Tedy $s \notin M_1 \& s \notin M_2 \Rightarrow s^n$neni $\geq$ani $\leq$x - spor s trichotomii
jednoznacnost existence n-te mocniny plyne z jednoznacnosti suprema tedy $x = y_1^n = y_2^n$ □

Theorem. *5 (o hustote Q a $R \setminus Q$)*
necht $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ potom $\exists q \in Q, \exists r \in \mathbf{R} \setminus Q$¸ze $q \in (a,b)\,, r \in (a,b)$

Proof. $\frac{2}{b-a} \in \mathbf{R}$ $(b > a)$ a tedy (V3) $\exists n \in \mathbf{N} : \frac{2}{b-a} < n$, tedy $\frac{1}{n} < \frac{b-a}{2}$
MA7
$\exists m \in Z : \frac{m}{n} \in (a,b)\,, \frac{m+1}{n} \in (a,b)$ (?aspon 2 tam musej bejt)
polozime $q_1 = \frac{m}{n}, q_2 = \frac{m+1}{n}$pak $q_1 \in Q, q_1 \in (a,b)$
polozime $r = q_1 + \sqrt{2}$ a tvrdim: $r \in (a,b)\,, r \notin Q$ -TODO ¯to neplati
MA8
sporem¸ze r je iracionalni □

1.3.7. poznamka o cislech. R neni Q + odmocniny
R delime na
algebraicka (koreny polynomu s celoc˙koeficienty) $Q, \sqrt{2}\ldots$
transcendentni $e, \pi, 2^{\sqrt{2}}$(je jich vic nez alg.) neni znamo: $\pi^\pi, \pi e, e + \pi$

CHAPTER 2

Posloupnosti

DEFINITION 2.0.5. Jestlize je kazdemu $n \in \mathbf{N}$ prirazeno $a_n \in \mathbf{R}$ potom mnozinu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazyvame posloupnosti realnych cisel
Tedy posloupnost je zobrazeni definovane na N s hodnotami R
GR MA8

cislo a_n nazyvame n-tym clenem pasloupnosti.

EXAMPLE 2.0.6. **vyrazem** $a_n = n$
rekurentne $a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

DEFINITION 2.0.7. posloupnost $\{a_n\}$je omezena¸jestlize mnozina jejich clenu $\{a_n\}$je omezena˙Analogicky omezenost shora a zdola

df.

DEFINITION 2.0.8. monotonni posloupnost
rekneme, ze $\{a_n\}$je **neklesajici**, jestlize $\forall n \in \mathbf{N} : a_{n+1} \geq a_n$
rekneme, ze $\{a_n\}$je **ne**rostouci, jestlize $\forall n \in \mathbf{N} : a_{n+1} \leq a_n$
ryze monotonni
rostouci $>$
klesajici$<$

EXAMPLE 2.0.9. Fibocciho¨$a_1 = a_2 = 1$ $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

2.1. vlastni limita posloupnosti

(**klicovy pojem**)

DEFINITION 2.1.1. cislo $A \in \mathbf{R}$ je (vlastni) limitou posloupnosti $\{a_n\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$
jestlize $\exists$takove $A \in \mathbf{R}$ ¸pak rikame¸ze posloupnost $\{a_n\}$konverguje k A. $\lim_{n\to\infty} a_n = A$
pokud takove A neezistuje¸rikame¸ze posloupnost **diverguje**

FACT. *1 (jednoznacnost limity posloupnosti)*
Ma-li posloupnost$\{a_n\}$limitu¸ pak tato limita je urcena 1znacne˙

PROOF. (nelze jinak nez sporem)
Necht $\exists A_1 > A_2, \lim\{a_n\} = A_1, \lim\{a_n\} = A_2$ potom zvolim $\varepsilon \in \left(0; \frac{A_1 - A_2}{2}\right)$˙Pak $\exists n_0, n_1 : \forall n \geq n_0 : |a_n - A_1| < \varepsilon, \forall n \geq n_1 : |a_n - A_2| < \varepsilon$
vezmu $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ Pak:
$A_1 - A_2 = |A_1 - A_2| = |A_1 - a_n + a_n - A_2| \leq |A_1 - a_n| + |a_n - A_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < A_1 - A_2$ $\square$

2.2. zakladni vety o limitach

FACT. *2 (limita posloupnosti a omezenost posloupnosti)*
Jestlize je $\{a_n\}$ *konvergentni (t.j. ma vlastni limitu* $A \in \mathbf{R}$*), pak je* $\{a_n\}$ *omezena*

PROOF. primo: vime $\forall\varepsilon > 0 : \exists n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$
takze - zvolime $\varepsilon = 1$ potom $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < 1$ potom
$|a_n| = |a_n - A + A|$ (vim, ze $a_n - A$ je maly)
$\leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|$
polozim $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots |a_{n_0}|\}$
z tech 2 $\Rightarrow |a_n| \leq \max\{K, |A| + 1\} \forall n \in \mathbf{N}$ □

DEFINITION 2.2.1. Rekneme, ze posloupnost $\{b_k\}$ je **vybrana** z (**podposloupnost**) $\{a_n\}$, jestlize $\exists$ rostouci posloupnost prirozenych cisel $n_k, k \in \mathbf{N}$ takova, ze $b_k = a_{n_k}$
pozor - ma stejne prvku (∞)

hilbertuv hotel. nekonecne mnoho pokoju ocistovanych N, je plne obsazen, dalsi host - vsechny presune o 1, prijede nekonecnej autobus: kazdej host se presune z n do $2n$

EXAMPLE 2.2.2. $\{n^2\}$ je vybrana z $\{n\}$ (kde $n_k = k^2$)

FACT. *3. (limita vybrane posloupnosti)*
Necht $\{a_n\}$ *je konvergentni - ma vlastni limitu* A*. Necht* $\{b_k\}$ *je podposloupnost* $\{a_n\}$.
Potom $\exists \lim_{k\to\infty} \{b_k\} = A$

PROOF. Nejprve $n_k \geq k \forall k \in \mathbf{N}$ indukci
(i) $k = 1$ $n_k \in \mathbf{N} \Rightarrow n_1 \in \mathbf{N} \Rightarrow n_1 \geq 1$
(ii) $n_{k+1} > n_k$ (definice podposloupnosti) predp. $n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} \geq k + 1$
vime: $\forall\varepsilon\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$
zvolim $k_0 = n_0$ (vim, ze to nejde zpatky)
pro $k \geq k_0 : n_k \geq n_{k_0} \geq k_0 = n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - A| < \varepsilon \forall k \geq k_0$
jinymi slovy $|b_k - A| < \varepsilon \forall k \geq k_0$ □

THEOREM. *4. (aritmetika limit posloupnosti)*
Necht $\lim\{a_n\} = A$ *a* $\lim\{b_n\} = B$ $A, B \in \mathbf{R}$ *(jinak neplati !!!)*
potom (i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$ *(limita sosuctu = soucet limit)*
(ii) $\lim(a_n * b_n) = A * B$
(iii) $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}; \{b_n\} \neq 0; B \neq 0\right) = A/B$
*/*u takovejhle vet napisu (malo) co vim*/*

PROOF. (i) $\forall\varepsilon$ ... zvolim $\varepsilon > 0$ potom $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$ a $\exists n_1 \forall n \geq n_1 : |b_n - B| < \varepsilon$ to je vsechno a poak vime, ze mame pucivat a vracet
$|a_n + b_n - (A + B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < 2\varepsilon$ - konstanta $*\varepsilon$ staci
-kdyby melo bbejt uplne jasno
$\varepsilon > 0$ zvolim $e' = \varepsilon/2 : |a_n - A| < \varepsilon' \& |b_n - A| < \varepsilon'$
(ii) $|a_n b_n - (AB)| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - (AB)| \leq |a_n b_n - Ab_n| + |Ab_n - AB| = b_n |a_n - A| + |A| |b_n - B|$ $(b_n - B$) je dobry , ale o b_n nevim nic
V2 $\Rightarrow \exists K > 0 : |b_n| \leq K \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow \leq K |a_n - A| + |A| |b_n - B| < (K + |A|)\varepsilon$

(iii)$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right| = \frac{|a_nB-b_nA|}{|b_n||B|} = \frac{|a_nB-AB+AB-b_nA|}{|b_n||B|} \leq \frac{|B||a_n-A|}{|b_n||B|} + \frac{|A||B-b_n|}{|b_n||B|}$ |B| se mrda, B neni 0

$\exists n_3 \forall n \geq n_3 \forall\, |b_n| \geq \frac{|B|}{2} \Rightarrow \leq \frac{2\varepsilon}{|B|} + \frac{2|A|\varepsilon}{|B|^2} = \frac{2}{|B|}\left(1+\frac{|A|}{|B|}\right)\varepsilon$ □

FACT. *5 (o limita a usporadani) Mame 2 konvergentni posloupnosti* $\lim\{a_n\} = A$ *a* $\lim\{b_n\} = B$. *Necht* $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n$ *Potom* $A \leq B$

PROOF. neprimo: jestlize $B < A$ potom nutne $\exists n_1 \forall n \geq n_1\ a_n > b_n$ (to samy jenom dyz vim, ze sou konvergentni)
(i) kdyz $A > B$, potom $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n > b_n$
(ii) $\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n \Rightarrow A \leq B$
staci tedy dokazat (i)¸protoze (ii) potom z nej jiz plyne
$\exists n_2 \forall n \geq n_2 : |a_n - A| < \varepsilon$
$\exists n_3 \forall n \geq n_3 : |b_n - B| < \varepsilon$
zvolime $\varepsilon \in \left(0, \frac{A-B}{2}\right)$ potom
$b_n < B + \varepsilon < a_n$ □

THEOREM. *6 (dva policajti pro posloupnosti)*
*/*velmi prospesna*/*
Necht posloupnosti $\{a_n\}$ $\{b_n\}\{c_n\}$
splnuji: (a,b - policajti) - vobe limity musej bejt stejny
(i) $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$
(ii) $\lim\{a_n\} = \lim\{b_n\} = A$
potom $\lim\{c_n\} = A$

PROOF. Vime $\exists n_1 : \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$ (zvolime $\varepsilon > 0$)
$\exists n_2 : \forall n \geq n_2 : |b_n - A| < \varepsilon$
polozime $n_3 = max\{n_0, n_1, n_2\}\ \forall n \geq n_3$
$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n$ (def, (i), (i)) $< A + \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon \forall n \geq n_3$ - to staci
(to samy jako) $\Leftarrow |A - c_n| < \varepsilon$ takze $\lim c_n = A$ □

EXAMPLE 2.2.3. $\lim\{\sqrt[n]{a}\}, a > 0$
necht $a > 1$ (proc je to rozdeleni ??)
$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$ (libovolne $n_0 \geq a$)
$\lim \sqrt[n]{n} = 1$ ($\varepsilon_n = \sqrt[n]{n} - 1\ n > 1 + \frac{n(n-1)\varepsilon_n^2}{2}$...)
$\lim 1 = 1$
$\sqrt[n]{a} > 1 \forall n$
+ veta 2 dvou policajtech
$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$
necht $a = 1$ zrejme
necht $0 < a < 1$
$\lim \sqrt[n]{a} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$ (potreboval prevr. hodnotu) - $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim^n \sqrt{\frac{1}{a}} = 1$ akorat cleny ani limita nesmi bejt 0, pouziju VOAL(V3)$= \frac{1}{\lim^n \sqrt{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1$

.

EXAMPLE 2.2.4. $\left\{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right\}$ (blby - ma iracionalni periodu)
Tvrdim, ze $\lim\left\{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right\} = 0$

(i) $\frac{\sin n}{\sqrt{n}} \leq \frac{|\sin n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$
$\frac{\sin n}{\sqrt{n}} \geq \frac{-|\sin n|}{\sqrt{n}} \geq \frac{-1}{\sqrt{n}}$
$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim \frac{-1}{\sqrt{n}} = 0$
policajti $\Rightarrow \lim \left\{ \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right\} = 0$

LEMMA. *(konvergence absolutnich hodnot)* $\lim a_n = A \Rightarrow \lim |a_n| = |A|$*- neplati obracene*

PROOF. $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$ (vlastnost absolutni hodnoty) □

protipriklad - $\lim(|-1|) = |1|$.

THEOREM. *7 (limita soucinu omezene posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou)*
Necht $\lim \{a_n\} = 0$ *a posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezena potom* $\lim (a_n * b_n) = 0$
poznamka: dk. z definice - kratsi

PROOF. $0 \leq |a_n b_n| = |a_n b_n| \leq |a_n| K$
$\exists K \in \mathbf{R} \forall n \in \mathbf{N} : |b_n| \leq K$
$\lim \{a_n\} = 0 \Rightarrow \lim K |a_n| = 0$, protoze $\lim K |a_n| = K \lim |a_n| = K0 = 0$ (podle vety 7)
policajti $\Rightarrow \lim |a_n b_n| = 0$
vime $\lim |a_n b_n| = 0$
$-|a_n b_n| \leq a_n b_n \leq |a_n b_n|$
veta o aritmetice limit $\lim - |a_n b_n| = - \lim |a_n b_n| = -0 = 0$
policajti podruhe $\Rightarrow \lim (a_n * b_n) = 0$ □

2.3. nevlastni limita posloupnosti

DEFINITION 2.3.1. **nevlastni** limita rekneme, ze $\{a_n\}$ ma limitu $+\infty$, jestlize $\forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 \forall n \geq n_0, n, n_0 \in \mathbf{N} : a_n \geq K$
analogicky $\lim \{a_n\} = -\infty \Leftarrow \forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 \forall n \geq n_0, n, n_0 \in \mathbf{N} : a_n \leq K$

EXAMPLE 2.3.2. $\text{flim}_{n \to \infty} n^2 = \infty$

nebo

EXAMPLE 2.3.3. $\lim -n(n+1) = -\infty$

limita	jaka	tzn	nazev
existuje	vlastni	$\in \mathbf{R}$	konvergentni
	nevlastni	$\pm\infty$	divergentni
neexistuje			(negdy divergentni - literatura)

2.3.1. rozsirena realna osa R... realna cisla. oznacime $\mathbf{R}* = \mathbf{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
2.3.1.1. *usporadani.* $a \in \mathbf{R} \Rightarrow -\infty < a < +\infty$
2.3.1.2. *operace.*
scitani. $a \in \mathbf{R} * \setminus \{-\infty\} \Rightarrow a + (+\infty) = +\infty$
$a \in \mathbf{R} * \setminus \{+\infty\} \Rightarrow a + (-\infty) = -\infty$
$\infty + (-\infty)$ - neni definovano

nasobeni. rozhoduje znaminko
$a \in \mathbf{R}*, a > 0 \Rightarrow a \pm \infty = \pm\infty$
$a \in \mathbf{R}*, a < 0 \Rightarrow a \pm \infty = - + \infty$
$0\,(\pm\infty)$ neni definovano
deleni. $a \in \mathbf{R}, a > 0 \Rightarrow \frac{a}{\pm\infty} = 0$
neni definovano $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{cokoli}{0}$
absolutni hodnota. $|\pm\infty| = +\infty$
$\pm$

2.3.2. rekapitulace. vety pro NEVLASTNI LIMITY:

(1) (jednoznacnost limity) PLATI
(2) NEPLATI
(3) (limita vybrane posloupnosti) PLATI
(4) obecne - PLATI, ale je-li vyraz definovan
(5) (lim a usporadani) PLATI
(6) (policajti) PLATI
(7) (o absolutni hodnote) PLATI

LEMMA. *Rekapitulace - rozsirena aritmetika limit posloupnosti*
$\lim\{a_n\} = A, \lim\{b_n\} = B$
limita souctu
$\lim\{a_n + b_n\} = A + B$ *jestlize je vyraz definovan*
soucinu
$\lim\{a_n b_n\} = AB$ *jestlize je vyraz definovan (vylucuje* 0∞ *)*
podilu
$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{b_n, b_n \neq 0}\right\} = A/B$ *jestlize je vyraz definovan*

PROOF. 1 (ostatni analogicky) Necht $A = \infty, B \in \mathbf{R}$
zvolim $K \in \mathbf{R}$ libovolne Pak $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \geq K - B + 1$
(zvolim $\varepsilon = 1$) $\exists n_1 \forall n \geq n_1 : |b_n - B| < 1$
$n_2 = max\{n_0, n_1\}$ potom pro $n \geq n_2$
$a_n + b_n \geq K - B + 1 + B - 1$ $(a_n \geq K - B + 1,\ b_n \geq B - 1\ )$
$\Rightarrow \lim(a_n + b_n) = \infty = A + B$ □

THEOREM. *8 (limita posloupnosti typu "$\frac{A}{0}$")*
Necht $\lim a_n = A \in \mathbf{R}*, A > 0 \lim b_n = 0, \forall n : b_n \neq 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} : n \geq n_0 : b_n > 0$ *potom* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$
polozime $A' = \min\{1, A\} \in \mathbf{R}, A' > 0$
zvolime lib $K \in \mathbf{R}$ *Polozime* $K' = \max\{K, 1\} > 0 \& > K$
$\exists n_1 \in \mathbf{N} : \forall n \geq n_1 : a_n > \frac{1}{2}A'$
&
$\forall n \geq n_1 : b_n < \frac{1}{2}A'\frac{1}{K'}$
nyni pro $n \geq \max\{n_1, n_0\}$ *plati:*
(vyuzivame, ze pro $n \geq n_0 : b_n > 0$*)*
$\frac{a_n}{b_n} > \frac{\frac{1}{2}A'}{\frac{1}{2}A'\frac{1}{K'}} = K' \geq K$ - *def. nevlastni limity*

DEFINITION 2.3.4. Rozsireni definice suprema a infima

$A \subset \mathbf{R}$		$\sup A$	$\inf A$
$A \neq \emptyset$	shora neomezena	∞	
$A \neq \emptyset$	zdola neomezena		$-\infty$
$A = \emptyset$		$-\infty$	$+\infty$

2.4. monotoni posloupnosti

THEOREM. *9 (limita monotonni posloupnosti)*
Kazda monotonni posloupnost ma limitu
(Vhodna zejmena pro rekurentni posloupnosti)

PROOF. pro pripad **neklesajici** posloupnosti:
mame $a_n : \forall n \in \mathbf{N} : a_n \geq n_{n+1}$
polozme $A = \sup\{a_n, n \in \mathbf{N}\}$
(i) $A = \infty \Rightarrow \{a_n\}$ neni shora omezena. Zvolime $K \in \mathbf{R}$ - nemuze byt horni zavora. Pak $\exists n_0 : a_{n_0} > K \Rightarrow n \geq n_0 : a_n > K$ - to je def. nevlastni limity
(ii) $A \in \mathbf{R}$ Zvolme $\varepsilon > 0$
$A + \varepsilon$ - zadny, protoze A je horni zavora
$A - \varepsilon$ - je neklesajici $\Rightarrow \exists n_o : \forall n \geq n_0 : a_n > A - \varepsilon \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$
$A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq A \leq A + \varepsilon$ □

EXAMPLE 2.4.1. (i) $a_n : x_1 = 2 \; x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}$
$\lim a_n = ?$
$\{x_n\}$ je zdola omezena;
$x_n \geq x_{n+1}$
$x_n \geq \frac{x_n^2+2}{2x_n}$
$x_n^2 \geq 2 \; (x_1 = 2)$
$x_{n+1}^2 \geq 2$?
$x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2}\frac{1}{x_n} \geq \sqrt{2x_n^2} * \frac{1}{x_n} = \sqrt{2}$
$\Rightarrow \exists$ vlastni limita $\lim x_n = A \in \mathbf{R}$ a $A \neq 0$ - s tim $\sqrt{2}$ -todle se neda preskocit
$\lim x_n = A$ (vybrana posl.) $= \lim \frac{x_n^2+2}{2x_n} = \frac{A^2+2}{2A}$ $A > 0; a \in \mathbf{R}$
$\Rightarrow A^2 = 2 \Rightarrow \lim x_n = \sqrt{2}$

–

EXAMPLE 2.4.2. (ii) Dukaz existence limity v predchozim pripade je nutny

$a_1 = -1 \; a_{n+1} = -a_n$
$\lim a_n = A = \lim a_{n+1} = \lim(-a_n) = -A$
–

EXAMPLE 2.4.3. (Theorem) pocet prvocisel
$\pi(n)$ ..... pocet prvocisel$\leq n$
$\lim \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\log n}} = 1$ vedelo se, ze $\exists$-li by, byla by 1
)

–

EXAMPLE 2.4.4. $\lim q^n = \begin{cases} -\infty & q \in (1;\infty) \\ 1 & q = 1 \\ 0 & q \in (-1;1) \\ \text{neexistuje} & q \in (-\infty;-1) \end{cases}$

$q \in (0,1) \Rightarrow \lim q^n = 0$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{N} : q^n > q^{n+1} > 0 \Rightarrow \lim q^n &= A \in \mathbf{R}(\text{dukaz } \exists) \\ \lim q^{n+1} &= A \\ \lim qq^n &= qA \Rightarrow A = 0 \end{aligned}$$

–

EXAMPLE 2.4.5. Ale posoj!
$a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+1} = \frac{a_{n-1}+a_n}{2}$

2.4.1. Limes superior, inferior. posloupnost $\{a_n\}$
definuji $b_k = \sup\{a_n; n \geq k\}$
$c_k = \inf\{a_n; n \geq k\}$
MA10
jednoduche vlastnosti: (i) $\{b_k\}$ je nerostouci,$\{c_k\}$ je neklesajici
(ii) $\forall k \in \mathbf{N} : c_k \leq b_k$ (je to posloupnost - neny prazdna)

DEFINITION 2.4.6. $\lim\{b_k\} \in \mathbf{R}*$ nazveme **limes superior** $\{a_n\} = \limsup_{n\to\infty} a_n = LIM$ (s carou nahore)
pokud a_n neni shora omezena, pak $b_k = \infty \forall k \in \mathbf{N}$, pak klademe $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$
$\lim\{c_k\} \in \mathbf{R}*$ nazveme **limes inferior** $\{a_n\} = \liminf_{n\to\infty} a_n = LIM$ (s carou dole)
pokud a_n neni zdola omezena, pak $c_k = -\infty \forall k \in \mathbf{N}$, pak klademe $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$

vlastnosti: posloupnost nemusi mit limitu, ale musi $\liminf$ a $\limsup$
poznamka: Vzdy plati $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

EXAMPLE 2.4.7. (i) $a_n = (-1)^n$

$$\begin{aligned} b_k &= \sup\{(-1)^n, n \geq k\} = 1 \Rightarrow \lim b_k = 1 \Rightarrow \limsup a_n = 1 \\ c_k &= \inf\{(-1)^n, n \geq k\} = 1 \Rightarrow \lim c_k = -1 \Rightarrow \liminf a_n = -1 \end{aligned}$$

(ii) $\lim\left(a_n = 2 - \frac{1}{n^2}\right)$

$$\begin{aligned} b_k &= \sup\left\{2 - \frac{1}{n^2}, n \geq k\right\} \Rightarrow \lim b_k = 2 \Rightarrow \limsup a_n = 2 \\ c_k &= 2 - \frac{1}{k^2} \Rightarrow \lim c_k = 2 \Rightarrow \liminf a_n = 2 \end{aligned}$$

THEOREM. *10 (vztah mezi* $\lim, \limsup, \liminf$*)*
$\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}* \Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = A \in \mathbf{R}*$

PROOF. (i) "$\Leftarrow$"
policajti
$\forall k \in \mathbf{N} : c_k \leq a_k \leq b_k$
$c_k \to A$
$b_k \to A$
Pro $A \in \mathbf{R}$ ok
$A = \infty : c_k \leq a_k, \lim_{k\to\infty} c_k = \infty \Rightarrow \lim a_k = \infty$ (veta o limite a usporadani)

$A = -\infty$ analogicky
(ii) "$\Rightarrow$"
$A \in \mathbf{R}$ pak vime $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$
zvolime ε . potom $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ potom $A - \varepsilon \leq c_{n_0} \leq b_{n_0} \leq A + \varepsilon$
dale vime, ze $c_{n_0} \leq c_n \leq b_n \leq b_{n_0} \forall n \geq n_0$ a take $A - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq A + \varepsilon$
tedy $0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n \leq A + \varepsilon - (A - \varepsilon) = 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow \liminf a_n = \limsup a_n = A$
∞ : vime $\lim a_n = \infty \ \Rightarrow \ \{a_n\}$ neni shora omezena $\Rightarrow \limsup = \infty$
vime vime $\forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \geq K \Rightarrow c_{n_0} \geq K$a jejich infimum taky, c_n neklesajici $\Rightarrow \lim c_k = \infty \Rightarrow \liminf a_n = \infty$
$-\infty$ - analogicky □

k zamysleni: superaditivita limes inferior a ... dokazat ze pro 2 posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$ plati (jenom ty krajni)
$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n + b_n) \leq \limsup (a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$ jsou-li vyrazy definovany
/*charNger: limita a usporadani*/

Definition 2.4.8. Necht $A \subset \mathbf{R}*$ Pak oznacim $\max A\,(\min A)$ takove cislo z $\mathbf{R}*$ pro ktere plati:
(i) $\max A \in A : (\min A \in A)$
(ii) $\forall x \in A : x \leq \max A\,(\forall x \in A : x \geq \max A)$
pokud takove cislo existuje
cili maximum (narozdil od suprema) musi v te mnozine lezet

Example 2.4.9. (i) $(a,b), a < b \in R$, potom $\min A, \max A$ neexistuji, ale $\sup A = b$ a ..
(ii) $A = (-\infty; 1) \cup \{3\}$ potom $\neg$min a $\max A = 3$
(ii) $A = (-\infty; 1) \cup \{3\} \cup \{-\infty\}$ (nebo dokonce $\langle -\infty; 1)$potom $\min A = -\infty$ a $\max A = 3$

poznamka: $\exists \max A \Rightarrow \exists \sup A$. $\exists \min A \Rightarrow \exists \inf A$

2.5. hromadny bod posloupnosti

Definition 2.5.1. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost realnych cisel. Potom $A \in \mathbf{R}*$ nazvu **hromadnou hodnotou** $\{a_n\}$, kdyz $\exists$ vybrana posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$
Mnozinu vsech hromadnych hodnot $\{a_n\}$ oznacime $H(\{a_n\})$
MA11

poznamky: (i) kazda posloupnost ma aspon jednu hromadnou hodnotu
(ii) posloupnost ma prave jednu hromadnou hodnotu $\Leftrightarrow \exists \lim a_n$ (takze dys neexistuje, $\exists$ aspon 2)
k zamysleni : Muze byt $H(\{a_n\})$ nekonecna ??? ano. $\sin n\pi x$

2.6. cauchyho nerovnost

Theorem. *11 (vztah mezi* $\limsup, \liminf$ *a mnozinou hromadnych hodnot)*
Necht $\{a_n\}$ *je posloupnost realnych cisel. Pak* $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ *a* $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$
(taky rika, ze H naky minmax ma)

k zamysleni: kazda neprazdna podmnozina $\mathbf{N}$ ma minimum. Dukaz: (i) kazda konecna podmnozina $\mathbf{R}$ ma minimum

PROOF. Staci pro $\limsup = A \in R^*$ musim dokazat¸ ze tam lezi a ostatni sou $\leq$

(i) $A = \infty$ Necht $\{a_n\}$ neni shora omezena. Pak $\exists \{a_{n_k}\}, \lim a_{n_k} = \infty$ a tedy $\infty \in H(\{a_n\}), a \in H(\{a_n\}) \Rightarrow a \leq \infty$

tedy $\infty = \max H(\{a_n\})$ take $\limsup = \infty$ ($\{a_n\}$ shora neomezena)

(ii) $A = -\infty$ potom take $\lim a_n = -\infty$ tedy $A \in H(\{a_n\})$

(iii)$A \in \mathbf{R}$ Necht $\{a_n\}$je shora omezena

Pak $b_k = \sup\{a_n, n \geq k\}$ je nerostouci.

Def. $M_1 = \{m \in \mathbf{N}; b_1 \geq a_m > b_1 - 1\}$ cili M_1 je neprazdna, (potrebuju dokazat¸ze k ?hornim zavoram? se da dokonvergovat

Def $n_1 = \min M_1, M_1 \neq \emptyset$

Def $M_2 = \left\{n \in \mathbf{N}, m > n_1, b_{n_1+1} \geq a_m > b_{n_1+1} - \frac{1}{2}\right\}$ MA12

Def $n_2 = \min M_2$

mame-li $M_1 \ldots. M_k; n_1 \ldots.. n_k$

Def $M_{k+1} = \left\{m \in \mathbf{N}, m > n_k, b_{n_k+1} \geq a_m > b_{n_k+1} - \frac{1}{k+1}\right\}$ - joo, furt se to zmencuje, ze.

Def $n_{k+1} = \min M_{k+1}$ (je neprazdna - z vlastnosti suprema - da se k nim libovolne priblizit)

vime: ze rostouci $\{n_k\}$

a taky: $\overbrace{b_{n_k+1}}^{\to A} \geq a_{n_{k+1}} > \overbrace{\overbrace{b_{n_k+1}}^{\to A} - \overbrace{\frac{1}{k+1}}^{\to 0}}^{\to A}$

policajti: $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_{k+1}} = A \Rightarrow A \in H(\{a_n\})$

zbyva dokazat: $\forall a \in H : a \leq A$

necht $a \in H(\{a_n\}) \Rightarrow \exists \{a_{n_j}\}$ z $\{a_n\} : \lim_{j\to\infty} a_{n_j} = a$

vime, ze $a_{n_j} \leq b_{n_j}$ (nevim, co je n_j, ale bcka sou dycky vetsi) $\Rightarrow a \leq A$

(plati i pro $-\infty$)

(((Tvrdim, ze $\lim a_{n_k} = \limsup a_n$ - priste)))

Dusledky $\square$

CONCLUSION 2.6.1. (i) $H(\{a_n\})$ je neprazdna

(ii) Posloupnost $\{a_n\}$ ma limitu (aj vlastni ci nevlastni) $\Leftrightarrow |H(\{a_n\})| = 1$ (max=min)

THEOREM. *12 (iii) !! (Bolzano-Weierstassova veta) Z kazde omezene posloupnosti lze vybrat konvergentni podposloupnost (ppsl. s vlastni limitou) (plyne z (i) - je potreba umet vetu i dukaz*

PROOF. Jiny dukaz B-W - naznak

$\{a_n\}$ je omezena $\Rightarrow \exists c_0, d_0 : c_0 \geq a_n \leq d_0 \forall n \in \mathbf{N}$ MA13

rozpulim -> aspon v jedny musi bejt ∞

Def $[c_1, d_1] = \left\{ \begin{array}{ll} \left[c_0, \frac{c_0+d_0}{2}\right] & \text{jestlize } \left[c_0, \frac{c_0+d_0}{2}\right] \\ \left[\frac{c_0+d_0}{2}, d_0\right] & \text{v opacnem pripade} \end{array} \text{obsahuje } \infty \text{ clenu } \{\mathrm{a_n}\} \right\}$

....

$[c_k, d_k]$

$\lim c_k = \lim d_k = A$

Vyberu n_0 tak, aby $n_k > n_{k-1}$ a aby $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$ potom $\lim a_{n_k} = A$ $\square$

Theorem. *13 (Bolzano-Cauchyova podminka)*
Posloupnost $\{a_n\}$ *ma vlastni limitu (je konvergentni)* $\Leftrightarrow$ *plati B-C podminka:*

$$\exists\varepsilon > 0\exists n_o \in \mathbf{N}\forall m, n \in \mathbf{N} : m \geq n_0, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Proof. "$\Rightarrow$"
Necht $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ Zvolme ε potom

$$\exists n_o \in \mathbf{N}\forall m, n \in \mathbf{N} : n \geq n_0 \geq : |a_n - A| < \varepsilon$$

Necht $m, n \geq n_0$ Potom $|a_m - a_n| = |a_m - A - a_n + A| \leq |a_m - A| + |A - a_n| < 2\varepsilon$ MA14

"$\Leftarrow$"

Zvolme $\varepsilon > 0$ necht plati $\exists\varepsilon > 0\exists n_o \in \mathbf{N}\forall m, n \in \mathbf{N} : m \geq n_0, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$

jeden zafixuju - tedy specialne $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon\forall n \geq n_0$ tj. $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$ $//n_0$ zavisi na ε

Tudiz take $a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$

potom $\overbrace{0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n}^{\text{dycky}} \leq a_{n_0} + \varepsilon - (a_{n_0} - \varepsilon) = 2\varepsilon$

tedy $\forall\varepsilon > 0 : 0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n \leq 2\varepsilon$

odtud plyne $\limsup a_n = \liminf a_n$ to, ze ta limita je vlastni plyne z $a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$ □

CHAPTER 3

Rady

3.1. uvod

DEFINITION 3.1.1. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom n-tym **castecnym souctem** rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazvu cislo $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ Souctem nekocecne rady nazvu $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ pokud tato limita $\exists$ Tuto limitu znacim taky $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
(urcit soucet nekonecny rady = spocitat limitu konecnych souctu)

3.1.1. soucet rady - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} A \in \mathbf{R} - \text{konvergentni} \\ \pm\infty \text{ div} \\ \text{neexistuje} - \text{div} \end{cases}$

EXAMPLE 3.1.2. (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ neexistuje $s_1 = -1$ $s_2 = 0$ $s_3 = -1$
(ii)$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ je konvergentni pro $|q| < 1$
$s_m = 1 + q + q^2 + ...q^{m-1} = \frac{q^m-1}{q-1}$
$\lim s_m = \lim \frac{q^m-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} s_m &= 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \\ s_{2m} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} \\ s_{2m} - s_m &= \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{2m} \geq \frac{1}{2m} m = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

/*amI right??
kazdy je $\geq \frac{1}{2m} \Rightarrow \{s_m\}$ nesplnuje B-C$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$*/

-

EXAMPLE 3.1.3. $\frac{1}{3} = \sum_1^{\infty} 3 * 10^n$

3.1.2. mylne predstavy.

(1) kazda rada (suma) ma soucet
(2) kazda konvergentni rada nabizi formulku pro s_n. e.g. $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, ale formule pro s_n neny
(3) jestlize rada konverguje, pak zname jeji soucet e.g. $\sum \frac{1}{n^3} = \eta(3), \eta(\alpha) = \sum \frac{1}{n^\alpha}$ pro nektere α :-)
(4) jestlize $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje e.g. harmonicka rada: $\sum \frac{1}{n}$ (=>je treba odhadnout, **jak rychle** de k 0)

3.1.3. harmonicka rada. $\sum \frac{1}{n}$ divergentni

PROOF. $s_{2m} - s_m = \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{2m} \geq \frac{1}{2m}m = \frac{1}{2} \forall m \in \mathbf{N}$ $\square$

B-C: kdyby $\exists \lim s_m$ potom by $\forall \varepsilon \exists n_0 \forall m, n : |s_n - s_m| < \varepsilon$
dokazali sme, ze $\exists \varepsilon (\varepsilon \text{je} 0.5) \forall n_0 (m = 2n_0, n = n_0)$
nebo. $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7}}_{>\frac{4}{8}} +$
nebo (puvodni). spor - $\exists$ limita
$1 = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + ...\ (\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$
$\frac{1}{2} = ...\frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + ...$
$\frac{1}{3} = ... + \frac{1}{3*4} + ...$
TOtO
kdyby $\sum \frac{1}{n} = A \Rightarrow A = A - 1$ - spor

THEOREM. *1 (nutna podminka konvergence rady)*
Jestlize rada $\sum a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
-vetsinou obracene - dys mam radu, podivam se na limitu, ze.

PROOF. Dyz ma posl. limitu tak je vybrana
vime $\lim s_n = s \in \mathbf{R}$ Pak taky $\lim s_{n-1} = s \in \mathbf{R}$
aritmetika- limit: $\lim (s_n - s_{n-1}) = 0$
Plati $s_n - s_{n-1} = a_n$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\square$

THEOREM. *2 (o linearite konvergentnich rad)*
(i) Necht $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ Potom $\sum a_n$konverguje $\Leftrightarrow \sum (\alpha a_n)$ konverguje
(ii) $\sum a_n, \sum b_n$ jsou konvergentni, potom $\sum (a_n + b_n)$ je konvergentni

PROOF. (i) Necht $\sum a_n$ pak $\exists \lim s_n = s$ a taky $\exists \lim \alpha s_n = \alpha s$
vezmeme $\sigma_n = \alpha a_1 + ... + \alpha a_n$ potom $\sigma_n = \alpha s_n$ Tedy $\exists \lim \sigma_n$ a tedy $\sum \alpha a_n$ konverguje
obracene $\exists \sum \alpha a_n$ oznacime $b_n = \alpha a_n$ tedy $\sum b_n$ konverguje
$\sum a_n = \sum \frac{1}{\alpha} b_n$ Podle prave dokazane implikace $\sum b_n$ konverguje$\Rightarrow$ $\sum \frac{1}{\alpha} b_n$ konverguje a tedy $\sum a_n$ konverguje
(ii) Vime, ze $\exists \lim s_n = s, \lim \sigma_n = \sigma$ kde $s_n = a_1 + ... + a_n, \sigma_n = ...$
Dale V(o aritmetice limit) $\exists \lim (s_n + \sigma_n) = \sigma + s$ $\square$

3.2. rady s nezapornymi cleny

klicovy pojem: konvergence a divargence rady.

DEFINITION 3.2.1. $\sum a_n$ je rada s nezapornymi (kladnymi) cleny, jestlize $\forall a_n \geq 0$ $(a_n > 0$)

poznamka: Necht $\sum a_n$ je rada s nezapornymi cleny. Potom
(s_n je shora omezena a pak $\sum a_n$je konvergentni)$\vee$(s_n neni shora omezena a pak $\sum a_n$ je divergentn i
(plyne z toho, ze s_n je neklesajici)

THEOREM. *3 (nelimitni srovnavaci kriterium)*
Necht $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou s nezapornymi cleny. Necht $\exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n$ Potom

(i) Jestlize $\sum b_n$ konverguje, pak take $\sum a_n$ konverguje
/(ii) jestlize $\sum a_n$ diverguje, pak take $\sum b_n$ diverguje (tvrdi totez)*/*
predpoklad nezapornosti: aby to nelezlo do zapornejch kytek

PROOF. Vime, ze $\sum b_n$ konverguje
$s_n = a_1 + ... + a_n$
$\sigma_n = b_1 + ... + b_n$
$\lim \sigma_n = \sigma$ a taky ze $\sigma_n \le \sigma \forall n \in \mathbf{N}$
dale, ze $\{s_n\}$ je neklesajici. Potrebujem dokazat, ze s_n ma vlastni limitu - staci, dk. ze je shora omezena
Necht $n \ge n_0$ pak tvrdim, ze $s_n = a_1 + ... + a_{n_0} + a_n \le a_1 + ... + a_{n_0} + \sigma_n \le a_1 + ... + a_{n_0} + \sigma \in \mathbf{R}$
Tedy $\{s_n\}$ je shora omezena □

THEOREM. *4 (limitni srovnavaci kriterium)*
Necht $\sum a_n$ je rada s nezapornymi cleny a $\sum b_n$ je rada s kladnymi cleny
Necht $\lim \frac{a_n}{b_n} = K \in [0, \infty]$
(i) $K \in (0, \infty)$ potom $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum b_n$ konverguje
(ii) $K = 0$ potom $\sum a_n$ konverguje $\Leftarrow \sum b_n$ konverguje
(iii) $K = \infty$ potom $\sum a_n$ konverguje $\Rightarrow \sum b_n$ konverguje

PROOF. (i) Zvolme $\varepsilon \in (0, K)$. Pak $\exists n_0 : \forall n \ge n_0$:

$$\begin{array}{rcl} K-\varepsilon & < \frac{a_n}{b_n} < & K+\varepsilon \\ (K-\varepsilon)\, b_n & < a_n < & (K+\varepsilon)\, b_n \end{array}$$

Necht $\sum a_n$ konverguje, pak taky $\Rightarrow$ (V3) $\sum ??b_n (K - \varepsilon)$ konverguje $\Rightarrow$ V2 $\sum b_n$konverguje ("$\Rightarrow$") ??
Necht $\sum a_n$ diverguje $\Rightarrow$ (V3) $\sum b_n (K + \varepsilon)$ diverguje $\Rightarrow$ V2 $\sum b_n$diverguje ("$\Leftarrow$" neprimo)
(ii) Staci: $\exists n_0 : \forall n \ge n_0 : a_n \le b_n$ pak tvrzeni plyne z V3
(iii) Staci: $\exists n_0 : \forall n \ge n_0 : a_n \ge b_n$ pak tvrzeni o5 plyne z V3 □

EXAMPLE 3.2.2. (i) $\sum \frac{2n+\sqrt{n}}{3n^2+^3\sqrt{n}}$ - rozhoduje rozdil nejvetsich mocnin
srovname s harmonickou radou
oznacime $a_n = \frac{2n+\sqrt{n}}{3n^2+^3\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{1}{n}$
pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{2n^2+\sqrt{n}}{3n^2+^3\sqrt{n}} = \frac{2}{3} \in (0, \infty)$
$\sum \frac{1}{n}$ diverguje $\Rightarrow \sum \frac{2n^2+\sqrt{n}}{3n^2+^3\sqrt{n}}$ diverguje too
(ii) $\sum \frac{n^5}{3^n}$ srovname s $\sum \frac{1}{2^n}$ (vime, ze konverguje)
$a_n = \frac{n^5}{3^n}, b_n = \frac{1}{2^n}$
pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^5}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0$
V4(ii) $\Rightarrow \sum \frac{n^5}{3^n}$konverguje
poznamka: $\sum \frac{P}{Q}$ P, Q -polynomy stupen $P =$ stupen $Q - 1$ pak $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ diverguje

3.2.1. testovaci rady. $\sum q^n$
$\sum \frac{1}{n}$ - div.
$\sum \frac{1}{n^2}, \sum \frac{1}{n^3}$ - konv.

THEOREM. *5 (Cauchyovo odmocninove kriterium)*
Necht $\sum a_n$ je rada s nezapornymi cleny.
(i) Jestlize $\exists q \in (0,1)\, \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N} > n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$, pak $\sum a_n$ konverguje - potrebuju 1 pevny cislo! - ucinnejsi
*(ii) Jestlize $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ **konverguje***
*(iii) Jestlize $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ **konverguje**- vyhodna pro pocitani*
*(iv) Jestlize $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ **diverguje***
*(v) Jestlize $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ **diverguje** - vyhodna pro pocitani*

PROOF. (i) def $b_n = q^n$ protoze $q \in (0,1) \Rightarrow \sum b_n$ konverguje
vime: $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$, tedy $a_n < q^n$
$\overset{\text{veta 3}}{\Rightarrow} \sum a_n$ konverguje
(ii) $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : b_n < 1$ kde $b_n = \sup\{a_k, k \geq n\}$ pak b_n je klesajici a navic $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \leq b_n$
zvolim $q = b_{n_0}$ pak $q < 1$ a navic $\forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n \leq b_{n_0} = q$
a tedy (i) $\Rightarrow$ (ii)
(ii)$\Rightarrow$(iii) ihned
(iv) $\exists$rostouci n_k takova, ze $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$
potom i $a_{n_k} > 1 \forall k$
tedy $\lim a_n \neq 0 \overset{\text{veta 1}}{\Rightarrow} \sum a_n$ diverguje
(iv)$\Rightarrow$(v) ihned ☐

EXAMPLE 3.2.3. (i) $\sum \frac{2^n}{n!}$ $\sqrt{a_n}^n = \frac{2}{\sqrt{n!}^n}$ $\lim \sqrt{n!}^n = 0 < 1 \Rightarrow$ konverguje
(ii) $\sum \frac{4^n n^n}{n!}$ treba znat $\lim \frac{n}{\sqrt{n!}^n} = \frac{1}{e}$ $a_n = \frac{4^n n^n}{n!}$ $\sqrt{a_n}^n = \frac{4n}{\sqrt{n!}^n} = \frac{4}{e} > 1$

poznamka: $\lim^n \sqrt{a_n} = 1 \Rightarrow$ nevime nic

EXAMPLE 3.2.4. $\sum \frac{1}{n}$diverguje ale $\sum \frac{1}{n^2}$konverguje

THEOREM. *6 (d'Alembertovo podilove kriterium)*
Necht $\sum a_n$ je rada s kladnymi cleny.
*(i) Necht $\exists q \in (0,1)\, \exists n_0 \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ potom rada **konverguje***
*(ii) Jestlize $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow$ rada **konverguje***
*(iii) Jestlize $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow$ rada **konverguje***
*(iv) Jestlize $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ rada **diverguje***

k zamysleni: plati $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$??? - s tim - oba priklady 1dussi

PROOF. (i) od nakeho indexu dal to nahradime geom. radou
$\exists n_0$

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &< q a_{n_0} \\ a_{n_0+k} &< q^k a_{n_0} \end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbf{N}$
definuji $b_n = \begin{cases} a_n & n \leq n_0 \\ a_{n_0} q^{n-n_0} & n > n_0 \end{cases}$
pak b_n konverguje
navic $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbf{N} \overset{\text{veta 3}}{\Rightarrow} \sum a_n$ konverguje

(ii) a (iii) plyne z (i)
(iv)
Vime $\exists n_0 : n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ Tedy $a_{n+1} > a_n$ je rostouci!

vime, ze $a_{n_0} > 0$ tedy $a_n \leq a_{n_0} \forall n \geq n_0$ - nemuze mit limitu 0 $\overset{\text{veta 1}}{\Rightarrow}$ $\sum a_n$ diverguje □

poznamky. (i) Podilove kriterium je obvykle lepsi pro pocitani
(ii) Odmocninove kriterium je ucinnejsi (silnejsi)
(iii) Kdyz selze odmocninove kriterium, nema cenu zkouset slabsi
cviceni: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = A$ pro $n \geq n_0$
TRICK:$\prod_{n_0}^{N-1}$ z nerovnosti ε

EXAMPLE 3.2.5. $\sum \frac{1}{2^n}$ je kvg. geom. rada
$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$ - Cauchy OK, d'.. KO

NOTE 3.2.6. Theorem (bez dukazu) (Raabeovo kriterium)
Necht $\sum a_n$ je rada s kladnymi cleny.
Jestlize $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$ pak $\sum a_n$ konverguje
Jestlize $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ pak $\sum a_n$ diverguje

EXAMPLE 3.2.7. Zjistete, zda konverguje rada $\sum a_n, a_n = \left(\frac{1*4*7*(3n-2)}{3*6*\ldots 3n}\right)^2$

3.2.2. $\sum \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$. Zatim vime $\sum \frac{1}{n}$ div. $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \forall \alpha \leq 1$
$\sum \frac{1}{n^2}$ konv. $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \forall \alpha \geq 2$

THEOREM. *8 (srovnavaci skala rad $\sum \frac{1}{n^\alpha}$)*
Necht $\alpha > 0$ potom $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$

PROOF. (pro zmenu) shora odhadnem geometrickou

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots \\
s_1 &= 1 \\
s_3 &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \\
s_7 &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots. + \frac{1}{7^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right. \\
S_{2^n-1} &< 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2(\alpha-1)} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n(\alpha-1)}
\end{aligned}$$

oznacme $\sigma_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2(\alpha-1)} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n(\alpha-1)}$
Pak $\lim \sigma_n = \sigma$
Posloupnost s_n je monotonni a $S_{2^n-1} \leq \sigma_n \leq \sigma$ Tedy $\exists$ vlastni $\lim s_n$
dokazali jsme, ze pro $\alpha > 1$ je $\sum \frac{1}{n^\alpha}$rada konvergentni
opacne
neprimo: Necht $\alpha \leq 1$ potom $\sum \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$diverguje □

EXAMPLE 3.2.8. $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}, Q(n) \neq 0, P(n)$ polynomy
rada kvg $\Leftrightarrow \deg Q > \deg P + 1$

3.3. neabsolutni rady (conditionally convergent)

THEOREM. *9 (Bolzano-Cauchyova podminka pro rady)*
Necht $\sum a_n$ je rada (NE s nezapornymi). Pak $\sum a_n$konverguje $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_o \in \mathbf{N} \forall m, n \in \mathbf{N} : m \geq n_0, n \geq n_0 : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

PROOF. Plyne okamzite z B-C pro posloupnisti □

3.3.1. Absolutni a neabsolutni konvergence.

DEFINITION 3.3.1. Rekneme, ze $\sum a_n$ je **absolutne konvergentni** jestlize $\sum |a_n|$ konverguje

THEOREM. *10 (vztah absolutni konvergence a konvergence)*
Absolutne konvergentni rada je konvergentni

PROOF. schema: ($\sum |a_n|$ konverguje $\Leftrightarrow$ plati BC pro $\sum |a_n|$) dokazu $\Rightarrow$ BC pro $\sum a_n \Leftrightarrow$ konverguje $\sum a_n$
Dukaz implikace:
Zvolim $\varepsilon . \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$ (vime)
dle $\triangle$nerovnosti $|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|$
tedy take pro $m, n \geq n_0, n > m : |\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$ □

poznamka: Vetu 10 nelze obratit!!

EXAMPLE 3.3.2. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje (napr. se da odhadnout shora radou $\sum \frac{1}{n(n+1)}$
ale$\sum \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$

THEOREM. *11 (Abelova parcialni sumace)*
$a_1, ...a_n; b_1...b_n \in \mathbf{R}$ potom
$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n$ kde $s_k = a_1 + ... + a_k$
jestlize navic $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \geq 0$ potom $(\min_{n=1...n} s_i) b_1 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\max_{i=1,...,n} s_i) b_1$

PROOF. (i)

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + ... + a_n b_n &= s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + (s_3 - s_2) b_3 + ... + (s_n - s_{n-1}) b_n \\ &= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + ... + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \end{aligned}$$

(ii)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = s_1 \overbrace{(b_1 - b_2)}^{\geq 0} + s_2 (b_2 - b_3) + ... + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \leq$$
$$\leq (\max_{n=1,...,n} s_i) [(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + ... + (b_{n-1} - b_n) + b_n] = (\max_{n=1,...,n} s_i) b_1$$

zavorky sou dycky nezaporny
analogicky pro min □

DEFINITION 3.3.3. Rada a_n ma **omezene castecne soucty¸** jestlize je s_n omezena, kde $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, t.j. $\exists K > 0 \forall n \in \mathbf{N} : |\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq K$

Poznamka. (i) $\sum$ konverguje $\Rightarrow$ ma omezene cast. soucty
(ii) nejde obratit:

EXAMPLE 3.3.4. (i) $\sum (-1)^n$ diverguje, ale ma omezene castecne soucty
(ii) $\sum \sin n$

(iii) Jestlize $\sum a_n$ ma omezene castecne soucty a navic $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \geq 0 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje

THEOREM. *11 (Abelovo a Dirichletovo kriterium)*
(pro neabsolutni cleny pro nas vzdycky ta spravna podminka)
Necht $\{a_n\} \in \mathbf{R}$ *a necht* $\{b_n\}$ *je nerostouci posloupnost nezapornych cisel.*
Potom $\sum a_n b_n$ *konverguje, pokud plati jedna z nasledujicich podminek:*
(A) $\sum a_n$ *je konvergentni*
(D) $\sum a_n$ *ma omezene castecne soucty a navic* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

PROOF. Pouzijeme B-C: $|\sum_{i=m}^{n} a_i b_i| \overset{\text{lemma}}{\leq} b_m \max_{j=m,\ldots,n} \left|\sum_{i=m}^{j} a_i\right|$

(APS: $\sum_{i=m}^{n} a_i b_i \overset{\text{lemma}}{\leq} (\max_{j=m,\ldots,n} s_j)\, b_n$

$|\sum_{i=m}^{n} a_i b_i| = \left|\sum_{i=m}^{n-1} t_i (b_{i+1} - b_i) + t_n b_n\right|$ ¸ kde $t_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_i$ $i = m, \ldots, n$
$\leq \sum_{i=m}^{n-1} |t_i| (b_i - b_{i-1}) + t_n b_n$
$\leq |\max_{i=m \ldots n} t_i| \, |b_m| = (\max_{i=m \ldots n} |s_i|)\, b_m$
myslenka: dk., ze vlevo je maly - staci, ze vpravo maly - soucin: jestlze a_n je kvg., pak je max. ze souctu strasne malinky a uz staci ze druhej jee omezenej
jinak mam maximum omezeny a b_m maly
(A)
necht $\sum a_n$ je konvergentni
Potom dle B-C: $\forall \varepsilon \exists n_0 \forall k, j \geq n_0 : \left|\sum_{i=k}^{j} a_i\right| < \varepsilon \forall j, k$
Tedy pro
$|\sum_{i=m}^{n} a_i b_i| \leq |\max_{i=m \ldots n} s_i| \, |b_m| = (\max_{i=m \ldots n} |s_i|)\, b_m \leq \varepsilon b_m \leq b_1 \varepsilon$
tedy $\sum a_n b_n$ splnuje B-C a tedy konverguje
(D)
necht plati.
Pak ke zvolenemu $\varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : b_m < \varepsilon$
a dale $\exists K : |\max_{i \in \mathbf{N}} s_i| \leq K, s_i = a_1 + \ldots + a_n$
potom tedy
$t_i = s_i - s_{m-1}$
$|t_i| = |s_i - s_{m-1}| \leq |s_i| + |s_{m-1}| \leq 2K$ (omez. cast. soucty)
$\Rightarrow |\sum_{i=m}^{n} a_i b_i| \leq 2K\varepsilon$
$//|\sum_{i=m}^{n} a_i b_i| \leq b_m \max_{j=m,\ldots,n} \left|\sum_{i=m}^{j} a_i\right| = b_m \max_{j=m,\ldots,n} |s_j - s_{m-1}| \leq b_m \max_{j=m,\ldots,n} (|s_j| + |s_{m-1}|) \leq 2K b_m < 2K\varepsilon \forall m \geq n_0$
tudiz opet plati B-C $\square$

THEOREM. *12 (Leibnizovo kriterium)*
(Dusledek, ale oblibene)

Necht $\{b_n\}$ je nerostouci posloupnost nezapornych cisel. Potom $\sum(-1)^n b_n$ *konverguje* $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

PROOF. "$\Rightarrow$" plyne okamzite z V1
"$\Leftarrow$" plyne z (D) Kriteria (V11) protoze $\sum(-1)^n$ ma omezene castecne soucty
$\square$

K zamysleni: rozmyslet, ze neplati pokud $\{b_n\}$ neni nerostouci: cela limita pak nemusi mit ani limitu 0 - $\sum(-1)^n n$

a nebo pokud neni nezaporna - **A** - pak muze jit do zapornejch kytek, ze. **D** - nerostouci avsak s nakymi cleny < 0 nemuze mit $\lim 0$

EXAMPLE 3.3.5. (i) $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \log 2$
(ii) $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ konverguje(L)
(iii) $\sum_{i=2}\frac{(-1)^{n+1}}{\log n}$ konverguje(L)
(iv) $\sum\frac{\sin n}{n^2}$ konverguje absolutne: $|\sin n| \le 1$
(v) $\sum\frac{\sin n}{n}$ konverguje neabsolutne (D) (indukci omezenost castecnych souctu $\sin n$)

3.4. prerovnavani rad

DEFINITION 3.4.1. Necht $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je bijekce. Necht $\sum a_n$ je rada. Potom radu $\sum a_{p(n)}$ nazvu **prerovnanim rady** $\sum a_n$
(takovy permutace s nekonecnou mnozinou)

–

DEFINITION 3.4.2. Necht $\sum a_n$ je rada. Definujeme
$a_n^+ = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ (**kladna cast rady**)
$a_n^- = \frac{|a_n|-a_n}{2}$ (**zaporna cast rady**)
plati:
(i) pokud $a_n > 0 \Rightarrow a_n^+ = a_n, a_n^- = 0$ a vice versa
(ii) $a_n^+, a_n^- \ge 0, a_n = a_n^+ - a_n^-$

THEOREM. *13 (absolutni konvergence a prerovnani rady)*
Necht $\sum a_n$ *je absolutne konvergrntni rada. Potom tvori libovolnou bijekci* $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *je* $\sum a_{p(n)}$ *absolutne konvergentni a navic* $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$

PROOF. **(i) Sprehazeni vyvola zase abs. konvergentni radu**
pouzijeme B-C
$\forall\varepsilon\exists n_0\forall m, n \ge n_0 : \sum_{i=m}^{n}|a_i| < \varepsilon$
def n_0' tak, ze $p(n) \ge n_0 \forall n \ge n_0'$ (musi tam bejt - de o $\subseteq N$)
/*potrebujeme bypassnout konecne clenu - od n_1 do n_0, coz jiste pude.*/
potom v$\sum_{i=m}^{n}\left|a_{p(i)}\right| \le \sum_{i=n_0}^{\infty}|a_i| < \varepsilon$ tedy $\sum\left|a_{p(i)}\right|$ splnuje B-C
/* */
k tomu staci : $n_0' > \max\left\{p^{-1}(j), j = 1, ..., n_0\right\}$
$a_{p(n)}, n \ge n_0' \Rightarrow p(n) \ge n_0 \Leftrightarrow p(n) \in [n_0, n_0+1, ...] \Leftrightarrow n \in \left[p^{-1}(n_0), p^{-1}(n_0+1), ...\right]$
(ii) $\sum a_n = \sum a_{p(n)}$

Staci dokazat pro priklad, kdy $\sum a_n$ ma nezaporne cleny. (Plyne z toho, ze pro absolutne konvergentni radu plati: $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ konverguji a navic $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$)

$|\sum a_n| = \sum a_n^+ + \sum a_n^-$
dokazat pro + i -, pak aritmetika limit
Necht tedy $a_n \geq 0 \forall n$
pak $s = \sum a_n$ splnuje $s = \sup_{n \in \mathbf{N}} s_n$ kde $s_n = a_1 + ... + a_n$, $s_n \nearrow s$
Oznacme $t_n = a_{p(1)} + ... + a_{p(n)}$.
nejprve dokazeme, ze $t_n \leq s \forall n$
-najdu n_0: $t_n \leq s_{n_0} \leq s$
$t_n = a_{p(1)} + ... + a_{p(n)}$
$s_{n_0} = a_1 + ... + a_{n_0}$ - def. $n_0 = \max \{p(j), j = 1...n_0\}$ (aspon fsechny tam sou)
-nyni $\forall \varepsilon \exists n_0 : s - \varepsilon < t_{n_0} \leq s$ vime:$\exists n : s - \varepsilon < s_n \leq s$
-najdu n_0: $t_n \geq s_{n_0}$
$s_{n_0} = a_1 + ... + a_{n_0}$
$t_n = a_{p(1)} + ... + a_{p(n)}$
- def. $n_0 = \max \{p^{-1}(j), j = 1...n\}$ (aspon fsechny tam sou)
e.g. $1 \in [p(1), ...p(n)]$
to samy $p^{-1}(1) \in [1, ..., n]$
//////////////
Chceme dokazat, ze $\lim t_n = s$
Necht $n \in \mathbf{N}$ k nemu $\exists n_0 : \max \{p(1), ..., p(n)\} \leq n_0$ potom ale $t_n \leq s_{n_0} \leq s$
MA13
takze posloupnost castecnych souctu je shora omezena souctem puvodni
tedy $t_n \leq s \forall n$, t.j. $\sum a_{p(n)} \leq s$
zbyva dokazat, ze $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_o : s - \varepsilon < t_n \leq s$
vime $\exists n_0 : s - \varepsilon < s_{n_0} \leq s$
najdeme n'_0 tak, aby $n \leq n_0 \Rightarrow p(n) \leq n'_0$
potom $s_{n_0} \leq t_{n'_0}$ MA14
$s - \varepsilon \leq s_{n_0} \leq t_{n'_o} \leq s$ □

THEOREM. *14 (Riemann - bez dukazu)*
Neabsolutne konvergentni radu lze prerovnat k libovolnemu souctu $s \in R*$
jinymy slovy:
necht $\sum a_n = A \in \mathbf{R} \& \sum |a_n| = \infty$
potom $\exists$bijekce $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tak, ze $\sum a_{p(n)} = s$
Naznak dukazu:
***1. krok:** $\sum a_n^+ = \infty, \sum a_n^- = \infty$ (sporem)*
Necht napr. $\sum a_n^+$konverguje. Vime $a_n = a_n^+ - a_n^-$, $\sum a_n$ konverguje, $\sum a_n^+$ konverguje
$$a_n^- = a_n^+ - a_n \overset{V \text{ o aritmetice limit}}{\Rightarrow} \sum a_n^- = \sum a_n^+ - \sum a_n \Rightarrow \sum a_n^- \text{ konverguje}$$
$$\text{vime: } |a_n| = a_n^+ + a_n^- \overset{V \text{ o aritmetice limit}}{\Rightarrow} \sum |a_n| = \sum a_n^+ + \sum a_n^- \Rightarrow \sum |a_n|$$
konverguje - spor predpokladu
2.krok
Necht $s \in \mathbf{R} > 0$ (bez ujmy na obecnosti)
$a_n \neq 0$ (taky bez ujmy)
def.
$f : \mathbf{N} \to \mathbf{N} : a_{f(j)}$ j-ty kladny clen $\sum a_n$
$g : \mathbf{N} \to \mathbf{N} : a_{g(j)}$ j-ty zaporny clen $\sum a_n$
MA14

$a_{f(1)} + a_{f(2)} + ...a_{f(n_1)} + a_{g(?)} + ... + a_{g(n_1)} + a_{f(n_1+1)} + ... + a_{f(n_3)}$
def n_1 *je nejmensi cislo takove, ze* $a_{f(1)} + ... + a_{f(n_1)} > s$
def n_2 *je nejmensi cislo takove, ze* $a_{g(1)} + ... + a_{g(n_1)} < s$
n_3 *.. atd.*

$$Def\, p: \quad \begin{array}{l} p(j) = f(j), j = 1, ..., n_1 \\ p(j + n_1) = g(j), j = 1, ..., n_2 \\ p(n_2 + j) = f(j), j = n_1 + 1, ..., n_3 \end{array}$$

je treba si uvedomit, ze p je bijekce a ze $\lim a_{p(n)} = s$ *(plyne z toho, ze* $\sum a_n$ *konverguje* $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$*)*

k zamysleni 1) dokoncit detaily dukazu (a pro $\pm\infty$). 2) urcete, zda lze neabsolutne konvergentni radu prerovnat tak, aby soucet prerovnane rady neexistoval

3.5. soucin rad

DEFINITION 3.5.1. Necht $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou 2 rady. Pak **Cauchyovym soucinem** techto rad nazvu radu
$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i\right)$
$k = 1 : a_1 b_1$
$k = 2 : a_2 b_1 + a_1 b_2$

	b_1	b_2		
a_1	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$		
a_2	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$		

THEOREM. *15 (Cauchyuv soucin rad)*
Necht $\sum a_n$ *a* $\sum b_n$ *konverguji absolutne. Potom*
$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$

PROOF. Oznaceni $s_n = a_1 + ... + a_n$
$t_n = a_1 + ... + a_n$
$s = \sum a_n$
$t = \sum b_n$
$\rho_n = c_1 + ... + c_n$, kde $c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i$
Vime: $s_n \to s, t_n \to t$
zvolime $\varepsilon > 0$
vime, ze $\exists n_0 \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon \& \sum_{n=n_0}^{\infty} |b_n| < \varepsilon$
(V o aritmetice limit) $\Rightarrow |s_{n_0} t_{n_0} - st| < \varepsilon$
pouziju $\triangle$
Zvolme $n > n_0$ Pak $|\rho_n - st| \le |\rho_n - s_{n_0} t_{n_0}| + \underbrace{|s_{n_0} t_{n_0} - st|}_{<\varepsilon}$

$s_{n_0} t_{n_0} = (a_1 + ... + a_{n_0})(b_1 + ... + b_{n_0})$ □

	b_1	...	b_n	
a_1	$a_1 b_1$			
...				
a_n				

$$|\rho_n - s_{n_0} t_{n_0}| \leq \overbrace{\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n_0} |a_j|\right)}_{\leq K} \underbrace{\left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |b_j|\right)}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |a_j|\right)}_{<\varepsilon} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty_0} |b_j|\right)}_{\leq K}}^{\text{nezavisly na } n} \leq 2K\varepsilon$$

CHAPTER 4

Funkce jedne realne promenne

4.1. zakladni definice

DEFINITION 4.1.1. zakladni
(i) Funkci jedne realne promenne rozumime zobrazeni $f : M \to \mathbf{R}, M \subseteq R$
(ii) Rekneme, ze f je **monotonni**
rostouci $\forall x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ ryze
klesajici $\forall x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ ryze
nerostouci $\forall x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
neklesajici $\forall x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
(iii) **suda** $\forall x \in M : -x \in M \& f(-x) = f(x)$
licha $\forall x \in M : -x \in M \& f(-x) = -f(x)$
periodicka s periodou $p \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall x \in M : x+p \in M, x-p \in M \& f(x+p) = f(x) = f(x-p)$
(iv) **omezena** jestlize $\exists K \in \mathbf{R} \forall x \in M : |f(x)| \leq K$
zdola jestlize $\exists K \in \mathbf{R} \forall x \in M : f(x) \geq K$
shora jestlize $\exists K \in \mathbf{R} \forall x \in M : f(x) \leq K$

-

DEFINITION 4.1.2. **definicni obor**

-

DEFINITION 4.1.3. **obor hodnot**

-

4.1.1. okoli.

DEFINITION 4.1.4. Necht $\delta > 0, a \in \mathbf{R}$. Pak znacime (psaci P)
$P(a, \delta)$ prstencove okoli bodu a s "polomerem δ". $P(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$
$P(+\infty, \delta) = \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right)$ - cim mensi δ, tim mensi okoli
$P(-\infty, \delta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right)$ - cim mensi δ, tim mensi okoli
$P^{+}(a, \delta)$ jednostranne prstencove okoli (prave) $= (a, a + \delta)$
$P^{-}(a, \delta)$ jednostranne prstencove okoli (leve) $= (a, a - \delta)$

-

DEFINITION 4.1.5. Necht $\delta > 0, a \in \mathbf{R}$. Pak znacime (psaci U)
$U(a, \delta)$ **okoli** bodu a s "polomerem δ". $U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$
$U(+\infty, \delta) = P(+\infty, \delta) = \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right)$ - cim mensi δ, tim mensi okoli
$U(-\infty, \delta) = P(-\infty, \delta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right)$ - cim mensi δ, tim mensi okoli
$U^{+}(a, \delta)$ jednostranne okoli (prave) $= [a, a + \delta)$
$U^{-}(a, \delta)$ jednostranne okoli (leve) $= [a, a - \delta)$

-

DEFINITION 4.1.6. obraz mnoziny
$f(M) = \{y; \exists x \in M : f(x) = y\}$

4.1.2. limita.
(klicovy pojem).

DEFINITION 4.1.7. (limita funkce)
Necht f je funkce, $f : M \to \mathbf{R}, M \subset \mathbf{R}$. Necht $a \in \mathbf{R}*$. Rekneme, ze f ma v bode a **limitu** rovnou $A \in \mathbf{R}*$ jestlize
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in U(A, \varepsilon)$
MA16

poznamky: (i) Jestlize ma funkce limitu v bode a, potom funkce je definovana na nejakem prstencovem okoli bodu a. (V bode a nemusi byt definovana)
$(f(x) = 0$ kdyz $x \neq 0$, $f(0) = 1)$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$!!!
(ii) limita nemusi $\exists$
existuje-li muze byt vlastni a nevlastni
(iii) limita je ve vlastnich $(a = \mathbf{R})$ nebo v nevlastnich bodech $(a = \pm\infty)$
(iv) znaceni: $\lim_{x\to a} f(x) = A$
(v) $a, A \in \mathbf{R} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists \delta > 0 : x \in (a - \delta, a + \delta), x \neq a \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta, a \neq x \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
$a = \infty, A \in \mathbf{R} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists K > 0 : x > K \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)$

DEFINITION 4.1.8. (jednostranna limita funkce)
Necht f je funkce, $f : M \to \mathbf{R}, M \subset \mathbf{R}$. Necht $a \in \mathbf{R}*$. Rekneme, ze f ma v bode a **jednostranou limitu** (zprava (zleva)) rovnou $A \in \mathbf{R}*$ jestlize
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P^+(a, \delta) : f(x) \in U(A, \varepsilon)$ (prava)
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P^-(a, \delta) : f(x) \in U(A, \varepsilon)$ (leva)
znaceni: $\lim_{x\to a+} f(x)$ limita zprava

pozorovani: $\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = A$ (dukaz jednoduchy).

4.1.3. spojitost.
klicovy pojem #4.

DEFINITION 4.1.9. (spojitost funkce)
Necht $f : M \to \mathbf{R}, M \subset \mathbf{R}$. Necht $a \in M$. Rekneme, ze f je **spojita** (spojita zleva (zprava)) v bode a, jestlize
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{P}(a, \delta) : f(x) \in U(f(a), \varepsilon)$ $(\mathcal{P}(a)$ se da nahradit $U(a))$
$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

EXAMPLE 4.1.10. (i) f konstantni def. na $\mathbf{R}$ $\forall x : f(x) = A \in \mathbf{R}$
potom f ma v kazdem bode $a \in \mathbf{R}*$ $\lim_{x\to a} f(x) = A$
$\forall \varepsilon \exists \delta$ (δ libovolne) $x \in \mathcal{P}(a, \delta) \Rightarrow f(x) = A$ $|A - A| < \varepsilon \forall 0 < \varepsilon$
(ii) $f(x) = x \forall x \in \mathbf{R}$
$\forall a \in R : \lim_{x\to a} f(x) = a$ (f je spojita v kazdem bode)
$\forall \varepsilon \exists \delta$ staci volit $\delta = \varepsilon$
$|x - a| < \delta \Rightarrow ? |f(x) - f(a)| < e$ plati pro $\delta \leq \varepsilon$
(iii) $f(x) = x^2 \forall x \in \mathbf{R}$

$\lim_{x\to 3} f(x) = A$ (f je spojita v kazdem bode) MA17
hypoteza: $A = 9$
chci dokazat:
$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in P(a,\delta) : f(x) \in U(A,\varepsilon)$
$|x-3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 9| < \varepsilon$
$|x-3| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - 9\right| < \varepsilon$
$|x-3| < \delta \Rightarrow |x-3|\,|x+3| < \varepsilon$
$|x-3| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - 9\right| < \delta\,|x+3|$
$\delta < 1 : |x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < 1 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow |x+3| \le |x| + 3 \le 4 + 3 = 7$
$\Rightarrow |x-3| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - 9\right| \le \delta 7$
$\Rightarrow$ staci volit $\delta < 1 \& \delta < \frac{\varepsilon}{7}$
(iv) $\exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0 : \exists x \in P(a,\delta) \& f(x) \notin U(A,\varepsilon)$
$\frac{1}{x}$ def na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$
$\lim_{x\to 0} =$? Tato limita neexistuje
$\forall A \in \mathbf{R} * \exists\varepsilon > 0$ (staci treba $\varepsilon = 1$): $\forall\delta > 0 \exists x \in P(0,\delta) \& f\left(\frac{1}{x}\right) \notin U(A,\varepsilon)$
staci $\frac{1}{x} > A + 1, x \in (-\delta,\delta) \setminus \{0\}$
$x < \frac{1}{a+1}, x$ napr. $\in (0,\delta) \Rightarrow$ staci volit $x = \min\left\{\delta; \frac{1}{A+1}\right\}$
(v) jednostranna limita nemusi $\exists$
$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ Potom v bode 0 nexistuje ani $\lim_{x\to 0+} f(x)$ ni $\lim_{x\to 0-} f(x)$
MA18
(vi) Dirichletova funkce $D(x) = \left\{\begin{array}{c} 1 : x \in Q \\ 0 : x \notin Q \end{array}\right.$ $x \in \mathbf{R}$ nema ani jednostrannou limitu v zadnem bode - z vety o hustote racionalnich a irocionalnich
(vii) Riemannova funkce $R(x) = \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{q}\text{pokud } x \in Q, x = \frac{p}{q}(\text{nesoudelne}) \\ 0 : x \notin Q \end{array}\right.$
k zamysleni: dokazte, ze lim=0 v kazdem bode a ze je periodicka, najdete periodu

4.2. vety o limitach

THEOREM. *1 (Heine)*
(dost dulezita)
Necht $f : M \to R, M \subseteq R$ je definovana na nejakem $P(a,\delta)$ bodu $a \in \mathbf{R}^*, \delta > 0$ pak nasledujici 2 vyroky jsou ekvivalentni:
(i) $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$
(ii) pro kazdou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, ze $\lim_{n\to\infty} x_n = a, x_n \in D(f) \forall n \in \mathbf{N}, x_n \neq a \forall n \in \mathbf{N}$ plati $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

PROOF. **(i)⇒(ii)** MA19
Zvolime $\varepsilon > 0$ Tedy $\exists\delta\prime$ takove, ze $f(P(a,\delta\prime)) \subseteq U(A,\varepsilon), \delta\prime \le \delta$
k tomuto $\delta\prime \exists n_0 \in \mathbf{N}$ tak, ze $\forall n \ge n_0 : x_n \in U(a,\delta\prime)$ (z $\lim_{n\to\infty} x_n = a$)
Protoze $x_n \neq a \forall n \Rightarrow x_n \in P(a,\delta\prime)$
Tedy $f(x_n) \in U(A,\varepsilon) \forall n \ge n_0$ Tedy $\lim_{x\to a} f(x) = A$
(ii)⇒(i) sporem
$\exists\varepsilon\forall\delta\prime < 0 \exists x \in P(a,\delta\prime) \notin U(A,\varepsilon)$
misto $\delta\prime$ si predstavim interval o naky delce zavisly na n, ktera pude k 0
Zvolme $\delta' > \frac{1}{n}$ Pak $\exists x_n \in P\left(a, \frac{1}{n}\right)$ tak, ze $f(x_n) \notin U(A,\varepsilon)$ (BUNO: $\frac{1}{n} < \delta$, n lze zvolit dost velke)

Potom $x_n \neq a$ protoze $\forall n : x_n \in P\left(a, \frac{1}{n}\right)$
navic $\lim x_n = a$ nebot napr. $a \in \mathbf{R} : |a - x_n| < \frac{1}{n}$
pro $a = \pm\infty$ k zamysleni
Dle (ii) potom ale plati $\lim f(x_n) = A$ - spor - ma padnout mimo ϵove okoli
(1') - pro spojitost f je spojita v $a \Leftrightarrow \forall x_n \to a : f(x_n) \to f(x)$ $\square$

EXAMPLE 4.2.1. Neexistence limity
$f(x) = \sin \frac{1}{x}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ - to je ta praseci funkce
tvrdim, ze $\lim_{x \to 0+} f(x)$ neexistuje
podle V1 staci najit 1 posloupnost x_n tz: $x_n \to 0, x_n > 0, f(x_n)$ nema limitu
Zvolme $x_n = \frac{2}{n\pi}$ potom $> 0, x_n \to 0$
$f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin \frac{n\pi}{2} \in \{1, 0, -1\}$
$\{f(x_n)\} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...\} \Rightarrow$ podle V1 nema limitu

THEOREM. *2 (o jednoznacnosti limity)*
Funkce ma v kazdem bode nejvyse 1 limitu

PROOF. Necht ma aspon 2
$\lim_{x \to a} f(x) = A \& \lim_{x \to a} f(x) = B, A \neq B$
zvolme $x_n \to a, x_n \neq 0$ Podle V1 pak $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$ a $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = B, A \neq B$ - spor s vetou o jednoznacnosti limity posloupnosti $\square$

pripomenuti: konvergentni posloupnost je omezena. (u funkci to neplati)
muzeme dokazat lokalni verzi

THEOREM. *3 (limita funkce a omezenost)*
*Necht f ma v bode $a \in \mathbf{R}^*$ **vlastni** limitu $A \in \mathbf{R}$ potom $\exists \delta > 0$ takove, ze f je omezena na $P(a, \delta)$*

PROOF. $A = \lim_{x \to a} f(x), A \in \mathbf{R}$
Vime: $\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : f(P(a, \delta)) \in U(A, \varepsilon)$. Zvolme treba $\varepsilon = 1$ k nemu $\exists \delta > 0 : f(P(a, \delta)) \subset (A - 1, A + 1)$
tedy $\forall x \in P(a, \delta)$ je $A - 1 < f(x) < A + 1$, tudiz:$|f(x)| \leq \max\{|A - 1|, |A + 1|\}$ $\square$

THEOREM. *4 (aritmetika limit funkci)*
Necht $a \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} g(x) = B$ potom
*(i) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B$ **Pokud je $A + B$ definovano***
*(ii) $\lim_{x \to a}(f(x) * g(x)) = A * B$ **Pokud je $A * B$ definovano***
*(iii) $\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}$ **Pokud je $\frac{A}{B}$ definovano***

PROOF. (i) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B \overset{\text{V1 - Heine}}{\Leftrightarrow} \forall x_n \to a, x_n \neq a : \lim_{n \to \infty}(f(x_n) + g(x_n)) \overset{\text{VOAL pro posl.}}{\Leftrightarrow}$
$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A \& \lim_{n \to \infty} g(x_n) = B$
(Heine podruhe) $\Leftrightarrow \lim f_{x \to a}(x_n) = A \& \lim_{x \to a} g(x_n) = B$ (predpoklad)
(ii),(iii) analogicky $\square$

THEOREM. *5 (limita funkce a usporadani)*
Mejme $a \in R^*$

(i) Necht $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$ *potom* $\exists\delta > 0 : f(x) > g(x)\,\forall x \in P(a,\delta)$ *MA21*

(ii) Necht $\exists\delta : f(x) \leq g(x)\,\forall x \in P(a,\delta)$ *Necht* $\exists$ *limity* $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$ *potom* $A \leq B$

(iii) (o policajtech) Necht $\exists\delta < 0 : f(x) \leq h(x) \leq g(x)\,\forall x \in P(a,\delta)$. *Necht* $\lim_{x\to a} f(x) = A = \lim_{x\to a} g(x)$ *potom* $\exists \lim_{x\to a} h_x = A$

k zamysleni: plati (i) pro $\geq\geq$ *ne.*

PROOF. (i) musim zvolit ε tak, aby se mi pasky neprotinaly. Oznacme $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$ tedy $A > B$

$\exists\varepsilon < 0 : U(A,\varepsilon) \cap U(B,\varepsilon) = \emptyset$ (pokud $A, B \in \mathbf{R}$, staci $\varepsilon < \frac{A-B}{2}$)

$+\infty$ - cviceni

k $\varepsilon\exists\delta : f(P(a,\delta)) \subseteq U(A,\varepsilon)$

$g(P(a,\delta)) \subseteq U(B,\varepsilon)$

tedy $\forall x \in P(a,\delta)$ plati $g(x) \in U(B,\varepsilon), f(x) \in U(A,\varepsilon) \Rightarrow f(x) > g(x)$

Tim je dokazano (i)

Tim je take dokazano (ii), protoze (i)$\Leftrightarrow$(ii)

(iii) Zvolime $\varepsilon > 0\exists\delta' > 0 : f(P(a,\delta')) \subseteq U(A,\varepsilon)$

(kde $\lim_{x\to a} f(x) = A = \lim_{x\to a} g(x)$)

Tvrdim, ze $h(P(a,\delta')) \subseteq U(A,\varepsilon)$

pro $A \in R$: (nekonecna k zamysleni)

Vime: $x \in \underbrace{P(a,d') \cap P(a,d)}_{x\in P(a,\min(\delta,\delta'))}$ plati: $A - \varepsilon \leq f(x) \leq h(x) \leq g(x) \leq A + \varepsilon$ tedy $h(P(a,\min(\delta',\delta))) \subseteq U(A,\varepsilon)$ □

EXAMPLE 4.2.2. $D(x) = \begin{cases} 1 : x \in Q \\ 0 : x \notin Q \end{cases}$ $x \in \mathbf{R}$ nema limitu v zadnem bode

Vezmeme $f = x(D(x))$ (MA22) pak $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, takze je tam i spojita

Podle V5.3

$g(x) = \begin{cases} x : x \in [0,\infty] \\ 0 : x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ $x \in \mathbf{R}$

Dusledek o spojitosti: Necht f, g jsou spojite v bode $a \in \mathbf{R}$ potom $(f+g)$, (fg) jsou take spojite v a Je-li $g(a) \neq 0$ pak take $\frac{f}{g}$ je spojita v a

EXAMPLE 4.2.3. Vime, $f(x) = x$ je spojita v kazdem bode $a \in R$

Z dusledku plyne, ze kazdy polynom $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ je spojity v kazdem bode $a \in \mathbf{R}$

4.2.1. skladani funkci. $(fg)(x) = f(g(x))$

(1) $(fg)h = f(gh)$

limita slozene funkce. $\begin{matrix} \lim_{x\to a} g(x) = A \\ \lim_{y\to A} g(y) = B \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to a} fg(x) = B$

odstrasujici pripad. $g(x) = 0$

$f(x) = \begin{cases} 0 \\ 1\text{pro } x \neq 0 \end{cases}$

$f(g(x)) = 1$

jestlize budto vnejsi funkce je spojita v A nebo se vnejsi funkce "vyhyba" sve limite

THEOREM. *6 (limita slozene funkce)*

(dost slozita - blbost, staci znat predpoklady)
Necht f a g splnuji:
$a, A, B \in \mathbf{R}^*$
$\lim_{x \to a} g(x) = A$
$\lim_{y \to A} f(y) = B$
Necht plati alespon jeden z predpokladu:
(P1) f je spojita v bode A
(P2) $\exists \gamma > 0 : g(x) \neq A \forall x \in P(a, \gamma)$
potom plati
$\lim_{x \to a} fg(x) = B$

Proof. **(P1)**
Zvolme ε pak k nemu $\exists \psi > 0$ tak, ze $f(U(A, \psi)) \subseteq U(f((a), \varepsilon)) = U(B, \varepsilon)$
k tomuto $\psi \exists \delta > 0$ tak, ze $g(P(a, \delta)) \subseteq U(A, \psi)$ - tady okoli MUSI bejt prstencovy - neni spojita
tedy $fg(P(a, \delta)) \subseteq \overbrace{f(U(A, \psi)) \subseteq U(f(A(\varepsilon)))}^{\text{mohu protoze je spojita}} = U(B, \varepsilon)$ - k zadanymu ϵ jsem nasel δ tedy $\lim_{x \to a} fg(x) = B$
(P2)
Zvolme $\varepsilon > 0$ - $\exists \psi > 0 : f(P(A, \psi)) \subseteq U(B, \varepsilon)$
dale vime: k tomuto $\psi \exists \Delta > 0$ tak, ze $g(P(a, \Delta)) \subseteq U(A, \psi)$
a ted vyuzijem predpoklad - $\delta = \min(\Delta, \psi)$ plati $g(x) \neq A, x \in P(a, \delta)$
tedy $g(P(a, \delta)) \subseteq P(A, \psi)$
tedy $f(g(P(a, \delta))) \subseteq f(P(A, \psi)) \subseteq U(B, \varepsilon)$
/* aha, definice P a U umoznujou pracovat i s nekonecnem */ □

Definition 4.2.4. $I \subseteq R$ je **interval**, jestlize $\exists a, b \in \mathbf{R}^*, a < b$
(i) $x \in I \Rightarrow a \leq x \leq b$
(ii) $a < x < b \Rightarrow x \in I$
a,b mohou a nemusi lezet v I
kdyz $a, b \in I$ pak $I = [a, b]$ je **uzavreny interval** $a, b \in \mathbf{R}$
krajni body a, b
vnitrni body $x \in I, x \neq a, x \neq b$

Theorem. *7 (limita monotonni funkce)*
(poznamka: kazda monotonni posloupnost ma limitu) MA23
Necht f je monotonni n a otevrenem intervalu (a, b).
Potom $\exists$ limity:$\lim_{x \to a+} f(x)$,$\lim_{x \to b-} f(x)$
[1]

Proof. Staci pro napr. f neklesajici, $\lim_{x \to a+} f(x)$
def $A = \inf\{f(x), x \in (a, b)\}$
Zvolim ε Podle 2. vlastnosti infima $\exists y \in (a, b)$ tak, ze $f(y) \in (A, \varepsilon)$
monotonie: $\forall z \in (a, y) : A \leq f(z) \leq f(y)$, a tedy $f(z) \in U(A, \varepsilon)$ //pokud neny monotonni, A nemusi bejt ta limita
nyni staci zvolit δ tak, aby $P^+(a, \delta) = (a, y)$
pro $a \in R$: $\delta = y$
i $a = \pm\infty$: $\delta = \frac{1}{y}$?
pak $f(P^+(a, \delta)) \subseteq U(A, \varepsilon)$ tedy $\lim_{x \to a+} f(x) = A$ □

[1] pro uzavreny interval to platit nemusi, neco jinyho

4.3. spojite funkce na intervalu

! jina vec nez spojitost v bode

DEFINITION 4.3.1. Funkce f je **spojita na intervalu** I jestlize f je spojita zprava v kazdem bode $x \in I$, ktery neni koncovym bodem I a zaroven f spojita zleva v kazdem bode $x \in I$, ktery neni pocatecnim bodem I

- cili jestlize je otevreny, zadne krajni body me nezajimaji
- nemuze se stat: MA24 - spojita na (a,b], ale ne na $[a,b]$

poznamka: jestlize f je v bode x spojita zleva i zprava, pak je $f(x)$ spojita a naopak

4.3.1. vlastnosti spojitych funkci. MA25

THEOREM. *8 (Darbouxova vlastnost a spojitost)*
Necht f je definovana a spojita na $[a,b]$ a necht $f(a) < f(b)$.
Necht $y \in$. Potom $\forall y \in (f(a), f(b)) \exists x \in (a,b) : f(x) = y$
"Spojita funkce nabyva vsech mezihodnot"

PROOF. def $A = \{x \in [a,b] : f(x) < y\}$
$A \neq \emptyset$, necht $a \in A$ (proto []), A omezena, nebot $\subseteq [a,b]$
$\Rightarrow \exists z = \sup A$
Tvrdim, ze $f(z) = y$ $(z \in [a,b])$ - spory
(zatim sem nevyuzil spojitost)
1.spor
Necht $f(z) < y$ Pak $\exists \varepsilon > 0 : y \notin U(f(x), \varepsilon)$ - je tam dira - ostra //?U->I
pak ale $\exists \delta \forall x \in U(z,\delta) : f(x) < y$
tedy $\exists x > z, f(x) < y$, tedy $z \neq \sup A$
2.spor
Necht $f(z) > y$
Potom (ze spojitosti) $\exists \varepsilon > 0 : y \notin U(f(z), \varepsilon)$. Pak ale $\exists \delta \forall x \in U(z,\delta)$
Tedy pro $x \in U(z,\delta)$ plati $x \notin A$
spor s druhou def. suprema □

poznamka: vetu nelze obratit - MA26. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

x je def na $\mathbf{R}$, nabyva vsech mezihodnot $[-1,1]$ na intervalu $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$ ale neni spojita v bode 0

THEOREM. *9 (omezenost a spojitost na intervalu)*
Necht $I \subset \mathbf{R}$ je interval a necht f je na I spojita.
Potom $f(I)$ je interval v $\mathbf{R}$ nebo je $f(I)$ jednobodova.
*/*spojity obraz intervalu*/*

PROOF. Necht $f(I)$ neni jednobodova. Musime dokazat, ze $f(I)$ je interval.
Necht $y_1, y_2 \in f(I), y_1 < y_2$, a necht $y \in (y_1, y_2)$
pak $\exists x_1, x_2 \in I.$ $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ Z V8 : $\exists x \in I : f(x) = y$
def $a = \inf\{f(x), x \in I\}, b = \sup\{f(x), x \in I\}$ Potom $a < b$ (nebot $a \leq y_1 < y_2 \leq b$)
dale $a \leq f(x) \leq b \forall x \in I$
Necht z splnuje $a < z < b$
Potom z def sup a inf $\exists z_1, z_2 : z_1, z_2 \in f(I)$ a plati $a \leq z_1 < z < z_2 \leq b$. Tedy $\exists x \in I : f(x) = z$ □

poznamky: (i) Typ intervalu nemusi byt zachovan - e.g. $f(x) = \sin(x)$: $f(-\infty, \infty) \to [-1, 1]$

(ii) Spojity obrazem **uzavreneho** intervalu je opet uzavreny interval

DEFINITION 4.3.2. (extremy funkce) Rekneme, ze funkce f definovana na $M \subseteq R$ nabyva v bode $a \in M$ sveho

globalniho

maxima $\forall x \in M : f(a) \geq f(x)$

minima $\forall x \in M : f(a) \leq f(x)$

ostreho maxima $\forall x \in M \setminus \{a\} : f(a) > f(x)$ - jenom jedno

ostreho minima $\forall x \in M \setminus \{a\} : f(a) < f(x)$ - jenom jedno

lokalniho maxima, (minima, (ostreho))

jeslize $\exists \delta > 0$ takove, ze f nabyva na mnozine $M \cap U(a, \delta)$ v bode a sveho maxima(, ...)

THEOREM. *10 (spojitost funkce a nabyvani extremu)*

(velmi dulezita, dost tezky ***vymyslet*** *dukaz)*

Spojita funkce f na uzavrenem intervalu $[a, b]$ nabyva sveho maxima i minima

PROOF. staci pro maximum

def $A = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$

Chci dokazat, ze $\exists x \in [a, b] : f(x) = A$

Z vlastnosti suprema: $\exists$posl $\{x_n\} \in [a, b] : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ - dycky se k nemu muzu priblizit

($\{x_n\}$ ale konvergovat nemusi)

Posl. $\{x_n\}$ je omezena (e.g. $|x_n| \leq \max\{|a|, |b|\} \forall x \in \mathbf{N}$

Bolzano-Weierstrassova V:

$\exists \{x_{n_k}\}$ takova, ze $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in [a, b]$

Tvrdim: $f(x) = a$

V Heine: $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$ (protoze je spojita)

V o vybrane posloupnosti $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A$

$\Rightarrow$ (V o jednoznacnosti limity) $f(x) = A$ $\square$

poznamka: (podstatnosti predpokladu). $f(x) = \frac{1}{|x|}, x \neq 0$, na $[-1, 1]$ -nenabyva maxima MA26

$f(x) = x$ na $(0, 1)$ nenabyva max ni min

THEOREM. *11 (limita funkce a omezenost)*

(trivialni dusledek V10)

spojita funkce f na uzavrenem intervalu $[a, b]$ je omezena

PROOF. dle V 10: $\exists x_{min}, x_{max} : x_{min} \leq f(x) \leq x_{max} \forall x \in [a, b]$ tedy $f([a, b]) \subseteq [f(x_{min}), f(x_{max})]$. (Dokonce $f([a, b]) = [f(x_{min}), f(x_{max})]$) $\square$

4.3.2. inverzni funkce.

DEFINITION 4.3.3. (inverzni funkce) Necht f je $f : M \to \mathbf{R}$; $M \subseteq R$, f je prosta. Potom funkci f^{-1} definovanou na $f(M)$ predpisem $f^{-1} : f(x) \to x$ nazyvam **inverzni funkci k funkci f**

poznamka: Je-li f rostouci (klesajici) na M, pak f^{-1} je definovana a rostouci (klesajici) na $f(M)$

//proc? rostouci: $\forall x > y \in M : f(x) > f(y)$, prosta: $\forall x \in M \exists$prave $1 y : f(x) = y$

EXAMPLE 4.3.4. $f(x) = x^2$ na $[0, \infty)$ pak $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ na $[0, \infty)$

THEOREM. *12 (spojitost inverzni funkce)*
Necht f je spojita a rostouci (klesajici) na intervalu I. Potom f^{-1} je spojita a rostouci (klesajici) na $f(I)$

PROOF. Vime, ze f^{-1} je definovana a rostouci (klesajici na $f(I)$) (V9)
Dokazujeme spojitost f^{-1} Necht napr (BUNO) f je rostouci
(i) vnitrni body
Necht $y_0 = f(x_0)$ je vnitrnim bodem intervalu $f(I)$
Potom take x_o je vnitrnim bodem I (plyne okamzite z monotonie)
Zvolim $\varepsilon > 0$.
Potom $\exists x_1, x_2 \in I \cap U(x_0, \varepsilon), x_1 < x_0 < x_2$ MA27
tedy (monotonie) $f(x_1) < f(x_0) = y_0 < f(x_2)$
Zvolime $\delta > 0$ aby $U(y_0, \delta) \subseteq (f(x_1), f(x_2))$.
Potom $f^{-1}(U(y_0, \delta)) \subseteq f^{-1}(f(x_1), f(x_2)) = (x_1, x_2) \subseteq U(x_0, \varepsilon) = U(f^{-1}(y_0), \varepsilon)$
Tedy f^{-1} je spojita v y_0 tedy f^{-1} je spojita ve vsech vnitrnich bodech.
(ii) krajni body
Necht $y_0 = f(x_0)$ je levym krajnim bodem intervalu $f(I)$. Potom x_0 $(f(x_0) = y_0)$ je levym krajnim bodem I (z monotonie)
proste to samy s jednostranejma
Zvolime $\varepsilon > 0$
Potom $\exists x_1 \in I \cap U^+(x_0, \varepsilon)$, takovy, ze $x_0 < x_1$
tedy (monotonie) $f(x_0) < f(x_1)$
Zvolime $\delta > 0$ aby $U^+(y_0, \delta) \subseteq [f(x_0), f(x_1))$.
Potom $f^{-1}(U^+(y_0, \delta)) \subseteq f^{-1}[f(x_0) = y_0, f(x_1)) = [x_0, x_1) \subseteq U^+(x_0, \varepsilon) = U^+(f^{-1}(y_0), \varepsilon)$
Tedy f^{-1} je spojita v y_0 tedy f^{-1} je spojita ve vsech vnitrnich bodech □

EXAMPLE 4.3.5. n-ta odmocnina je spojita funkce na $[0, \infty)$ - plyne z V12

4.4. elementarni funkce

4.4.1. exponenciala.

THEOREM. *13 (zavedeni exponencialy) - zatim BEZ DUKAZU*
*Existuje prave jedna realna funkce "*exp*" definovana na* $\mathbf{R}$ *splnujici* $\forall x, y \in \mathbf{R}$:
(i) $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$
(ii) $\exp x \geq 1 + x$

PROOF. pozdeji □

NOTE 4.4.1. zakladni vlastnosti exp (je jako veta)

$\exp(nx) = (\exp x)^n \, \forall x \in \mathbf{R}$.
(indukci z (i))

$\exp(0) = 1$. $\exp(0) = \exp(0 + 0) =^{(i)} \exp(0)\exp(0) = 0, 1$ podle (ii) $\exp(0) \geq 1 + 0 = 1$

$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$. $1 = \exp(0) = \exp(x - x) =^{(i)}= \frac{\exp x}{\exp(-x)} \Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$

(!!)$\lim_{x\to 0}\frac{\exp x-1}{x}=1$. (MA28)$\exp x\geq 1+x\Rightarrow \exp(-x)\geq 1-x\Rightarrow \exp x\leq \frac{1}{1-x}$ (predchozi puntiq

$\Rightarrow 1+x\leq \exp x\leq \frac{1}{1-x}/-1,/x$

$\underbrace{1}_{\to 1}\leq \frac{\exp x-1}{x}\leq \frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\frac{1}{\underbrace{1-x}_{\to 1}}\Rightarrow$ *policajti*

$\lim_{x\to\infty}\exp x=\infty$ (plyne z (ii)).

$\lim_{x\to -\infty}\exp x=0$ (plyne z $\exp(-x)=\exp(x)^{-1}$ a predch)). $\forall x>0:\exp x>1$ (ii)

$\exp x$ je rostouci na $\mathbf{R}$

$x<y\ \frac{\exp y}{\exp x}=^{(i)}\exp(y-x)>^{\text{predch.}}1$

$\exp y>\exp x$ pokud $\exp x>0$:

$\exp 0=1$

$\exp x>1\forall x>0$

??proc to tu je$\exp(-x)=\frac{1}{\exp x}\forall x\in\mathbf{R}$

exp je spojita na $\mathbf{R}$. posunu se do 0: dostanu limitu, co znam

$\lim_{x\to a}(\exp x-\exp a)=(\exp a)\lim_{x\to a}(\exp(x-a)-1)=$ tady nemuzu pouzit $\lim\exp 0=1$, protoze nevim, ze je spojita a takze neznam limitu v 0

$=(\exp a)\lim_{x\to a}\left(\frac{\exp(x-a)-1}{x-a}(x-a)\right)$

$\overset{\text{VOAL+!!}+1.VOLslozF}{=}(\exp a)*1*0$

(!)$\exp x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\forall x\in\mathbf{R}$: z (ii)

neni dokazano!$\exp\left(\frac{x}{n}\right)\geq 1+\frac{x}{n}\Rightarrow \exp(x)\geq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\forall x\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}$

$\exp\left(-\frac{x}{n}\right)\geq 1-\frac{x}{n}\Rightarrow\exp(-x)\geq\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\forall x\in\mathbf{R},n>x\Rightarrow\exp(x)\geq\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$

$\exp(x)\geq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leq\exp x\leq\exp(x)\geq\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}\forall x\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}\ /*(1+x)^{-n}$

$1\leq\exp(x)(1+x)^{-n}\leq\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-n}$

Tvrdim $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-n}=1$

$\underbrace{1-\frac{x^2}{n}}_{\to 1}\overset{\text{Bernoulli}}{\leq}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\overset{\text{evident}}{\leq}1$, double policajti $\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)}^n=\frac{1}{1}$

este dokazat, ze ta lim. $\exists$, dys $\exists$ z obou stran

cviceni (tezky) $\exp x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

graph MA29

Definition 4.4.2. $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\overset{\text{Bermoulli}}{\Rightarrow}e\geq 2$

cvic.:$<3;<4$

4.4.2. logaritmus.

Definition 4.4.3. inverzni funkci k funkci exp nazyvame **logaritmem** a znacime log

(tedy $\log=\exp^{-1}$)

Note 4.4.4. (vlastnosti logaritmu)

(plyne)

$D(\log) = (0, \infty)$
$H(\log) = \mathbf{R}$
log je spojita, rostouci funkce na D
$\lim_{x \to 0+} \log x = -\infty$
$\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$
$\log(xy) = \log x + \log y$ (specialne $\log(x^n) = n \log x \forall x, y \in (0, \infty) \forall n \in \mathbf{N}$
vynasobim $\exp xy$
$\exp x * \exp y = \exp(x + y)$
$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$

PROOF. vime $\lim_{y \to 0} \frac{\exp y - 1}{y} = 1, \lim_{y \to 0} \frac{y}{\exp y - 1} = 1, \log 1 = 0$, spojita
Dosadime $g(x) = \log x, f(y) = \frac{y}{\exp y - 1} \overset{\text{VOL slozene fce}}{\Rightarrow} \lim_{x \to 1} \frac{\log x}{\underbrace{\exp(\log x)}_{x} - 1} =$

1

g prosta $\Rightarrow$ vyhyba se limite □

4.4.3. obecna mocnina. umime $a > 0 : a^{\frac{m}{n}}$

DEFINITION 4.4.5. (obecna mocnina) $a > 0, b \in \mathbf{R}$ def. $a^b = \exp(b \log a)$
specialne $\exp x = e^x$ (anzto $\log e = 1$)

4.4.4. objekty $\sin, \pi$**.**

THEOREM. *14 (zavedeni sinu) - BEZ DUKAZU*
$\exists$ *prave 1 realna funkce* sin *a prave jedno* $\pi \in \mathbf{R}$ *tak, ze:*
(i) $D(\sin) = \mathbf{R}$
(ii) $\sin(0) = 0$
(iii) $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \forall x, y \in \mathbf{R}$
(iv) sin *je rostouci na* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
(v) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

PROOF. (slibuji) □

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$. polozme $x = \frac{\pi}{2}, y = 0$
(iii)$\Rightarrow 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \overset{\text{(iv)}}{\Rightarrow}$ 0 nemuze protoze sin je roustouci a v $0 = 0$
1
$\sin(-x) = -\sin x \forall x \in \mathbf{R}$ (lichost). polozme $x = 0$
(iii)$\Rightarrow \sin y + \sin(-y) = 2 \sin 0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 0$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$. polozme $x = \frac{\pi}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$
periodicke vlastnosti. $\sin(x + \pi) = -\sin x \forall x \in \mathbf{R}$ (sin je π-antiperiodicka)
$z \in \mathbf{R}, x = z + \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow \sin(z + \pi) + \sin z = 2 \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \sin 0 = 0 \Rightarrow \sin(z + \pi) = -\sin z$
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x + \pi + \pi) = -\sin(x + \pi) = \sin x$
omezenost $|\sin x| \leq 1 \forall x \in \mathbf{R}$. plyne z (ii),(iv), z lichosti a π-antiperiodicity
MA30
(cviceni:) (iii)$\Rightarrow \sin a + \sin x = 2 \sin \frac{a+x}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a-x}{2}\right)$. $\sin a - \sin x = 2 \sin \frac{a-x}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a+x}{2}\right)$
sin spojity v 0. $\lim_{x \to 0} \sin x - \sin 0 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} x = 1 * 0$

sin spojity na $\mathbf{R}$. $\lim_{x\to a}(\sin x - \sin a) = \lim_{x\to a} 2\,\sin\underbrace{\left(\underbrace{\frac{x-a}{2}}_{\to 0}\right)}_{\text{slozena funkce}\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x+a}{2}\right)$

V: neco omezenyho * neco co de k 0

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$. (plyne z predchoziho - lichost, monotonie, π-antiper.)

$\lim_{x\to\pm\infty}\sin x$ neex (napr. Heine poloz $x_n = n\frac{\pi}{2}$ atd.)

DEFINITION 4.4.6. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ nazyvame **cosinus**
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ nazyvame **tangens**
$\cot x = \frac{\cos}{\cos}x, x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ nazyvame **cotangens**
TODO - prejmenovat zbytek jmen vet

THEOREM. *15*
Funkce $\cos, \tan, \cot$ *jsou spojite ve vsech bodech svych def. oboru*

PROOF. Pro cos plyne z VOLSlozFce a $\frac{\pi}{2} - x$ je prosta (P2) (nebo ze spojitosti sin(P1))
Pro $\tan, \cot$ plyne z VOAL □

4.4.5. cyklometricke funkce.

DEFINITION 4.4.7. (cyklometricke funkce)
$\sin^* x = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^* x = \cos x, x \in [0, \pi]$
$\tan^* x = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^* x = \cot x, x \in (0, \pi)$
definuji
$\arcsin x = (\sin^*)^{-1}$pro $x \in [-1, 1]$
$\arccos x = (\cos^*)^{-1}$pro $x \in [-1, 1]$
$\arctan x = (\tan^*)^{-1}$pro $x \in \mathbf{R}$
$arccotg\,(x) = (\cot^*)^{-1}$pro $x \in \mathbf{R}$

NOTE 4.4.8. (i) cyklometricke funkce jsou spojite na svych D
(ii) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\forall x \in [-1, 1]$
(iii) $\arctan x + arccotg\,(x) = \frac{\pi}{2}\forall x \in \mathbf{R}$
MA31
poznamka: $\arcsin(\sin x)$ def. na $x \in \mathbf{R}$
MA32
$\sin(\arcsin x)$ def. na $x \in [-1, 0]$

4.5. derivace funkce

(5. klicovy pojem)

DEFINITION 4.5.1. Necht f je realna funkce, $a \in \mathbf{R}$. **Derivaci f v bode a budeme rozumet** $f\prime(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **tedy smernice tecny (pokud je!) MA33**

Derivace f v bode a zprava(zleva) rozumime $f\prime_+(a) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h})$
jestlize tyto limity $\exists$, rikame, ze funkce ma derivaci (zprava (zleva))

NOTE 4.5.2. (i) $f\prime(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ analogicky pro 1stranne

(ii) $f\prime(a) = \begin{cases} \exists \begin{cases} \text{vlastni} \in \mathbf{R} \\ \text{nevlastni} \pm \infty \end{cases} \\ \text{neex} \end{cases}$

(iii) $f\prime(a) \in \mathbf{R}^*\exists \Leftrightarrow \exists f\prime_+(a) = f\prime_-(a)$

EXAMPLE 4.5.3. (i) $f(x) = x^n, n \in \mathbf{N}$

$f\prime(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n}{h}$

$\overset{\text{VOAL}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h}{h} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}}_{0} = nx^{n-1}$

$\Rightarrow (x^n)\prime = nx^{n-1}\forall n \in \mathbf{N}$

(ii) $f(x) == a\forall x \in \mathbf{R}$

$f\prime(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$

(iii) $\exp\prime\ f(x) = e^x$

$f\prime(a) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x$

(iv) $\sin\prime\ f(x) = \cos x$

$f\prime(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2x+h}{2}\right)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\to 1 \text{ (axiom (v) a VOLSlozFce}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{h}{2}\right)\right) = \lim_{h\to 0}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \overset{\text{spojitost}\ \cos(0)}{=} \cos x$

(v)

$f(x) = signx = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$ MA34 - v 0 nespojita, ale ma tam derivaci

$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{sign(h) - sign0}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h} = +\infty$

$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-}\frac{sign(h) - sign0}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{-1}{h} = +\infty$

$\Rightarrow f\prime(0) = \infty$

(vi)

$f(x) = |x|$ existuje $f\prime(0)$?

$f\prime_+(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{h}{h} = 1$

$f\prime_-(0) = \lim_{h\to 0-}\frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h} = -1$

$\Rightarrow \neg\exists f\prime(0)$

spojita v bode 0, ale nema tam derivaci

4.5.1. derivace a spojitost.

THEOREM. *16*
Ma-li funkce f v bode a ***vlastni*** *derivaci, pak je f v bode a spojita*

PROOF. $\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right) \overset{\text{VOAL}}{=} f\prime(a) * 0 = a \in \mathbf{R} * 0 = 0$ □

THEOREM. *17 (o aritmetice derivaci) /*easy*/*
Necht $\exists f'(a), g'(a)$ *Potom*
(i) $(f+g)\prime(a) = f\prime(a) + g\prime(a)$ *je-li vyraz vpravo definovan*
(ii) je-li aspon jedna (g) v a spojita $(fg)'(a) = f'(a)g(a) * f(a)g'(a)$ *je-li vyraz vpravo definovan*

protipriklad - hratky se signem
(iii) je-li navic g spojita v a, $g(a) \neq 0$, potom
$\left(\frac{f}{g}\right)\prime(a) = \frac{f\prime(a)g(a) - g\prime(a)f(a)}{g(a)^2}$

Proof. (i)
$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-(f(a)+g(a))}{h} \overset{\text{VOAL, komut.}}{=}$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)+g(a+h)-(f(x)+g(x))}{h} + \lim_{h\to 0} \ldots$
(ii)
$(fg)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}$
$= \lim \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}$
$\overset{\text{VOAL}}{\Rightarrow} = \lim_{h\to 0} g(a+h)\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$
$\overset{\text{VOAL}}{\Rightarrow} = g(a) f'(a) + f(a) g'(a)$
(iii)
$g(a) \neq 0$, g je spojita v $a \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall h \in U(0,\delta) : g(a+h) \neq 0$
$\left(\frac{f}{g}\right)\prime(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{hg(a+h)g(a)}$
$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a)-f(a)g(a)}{hg(a+h)g(a)} =^{\text{VOAL}}$
$\ldots$
$= \frac{g(a)}{g(a)g(a)} f\prime(a) + \frac{f(a)}{g(a)g(a)}(-g\prime(a)) = \frac{f\prime(a)g(a)-g\prime(a)f(a)}{g(a)^2}$ □

Theorem. *18 (o derivaci slozene funkce) - try it alone*
("znacne potize")
$f(g(x))$
f *- vnejsi funkce*
g *- vnitrni funkce*
Necht g ma v x_0 derivaci a necht f ma derivaci v bode $y_0 = g(x_0)$ ((takze g ma v x_0 ***vlastni*** *derivaci))*
Necht g je v x_0 spojita. ((!! to ale prece vyplyva z toho, ze tam ma ***vlastni*** *derivaci!))*
Potom $(fg)\prime(x_0) = f\prime(y_0)g\prime(x_0) = f\prime(g(x_0))g\prime(x_0)$ je-li vyraz vpravo definovany.

Proof. /*myslenka: $F = (fg)$
$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \underbrace{\frac{F(x+h)-F(x)}{g(x+h)-g(x)}}_{\to f\prime(g(x))} \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g\prime(x)}$$
*/
$\exists \varepsilon > 0, \delta > 0.$
f je definovana na $U(y_0,\varepsilon)$
g je definovana na $U(x_0,\delta)$
(i)
Necht $f\prime(y_0)$ je vlastni.
Potom $\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}$

Def funkci $F : F(y) = \left\{ \begin{array}{c} f(y) - f(y_0) \text{ pro } y \neq y_0 \\ f\prime(y_0) \text{ pro } y = y_0 \text{ (protoze je vlastni)} \end{array} \right. \to F$ je spojita v bode y_0
horni lim $=$

$$\begin{array}{ccc} \lim x \to x_0 \dfrac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} & \overset{(g(x)=y)}{=} & \\ \lim x \to x_0 F(g(x)) \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} & \overset{**}{=} & f\prime(y_0)\, g\prime(x_0) \end{array}$$

$**$ vztahy, z nichz plyne posledni rovnost:
VOAL,
F je spojita v y_0
$F(y_0) = f\prime(y_0)$
g je spojita v x_0
$g(x_0) = y_0$
(ii)
Necht $f\prime(y_0) = \pm\infty$.
Potom ale $g\prime(x_0) \neq 0$ (predpoklad definovanosti vyrazu)
BUNO $g\prime(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\delta : \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} > 0$ na $U(x_0, \delta)$
tim p
adem se $g(x) \overset{\text{vyhyba}}{\neq} g(x_0)$ na $P(x_0, \delta)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0\prime))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \overset{**}{=} f\prime(y_0)\, g\prime(x_0)$$

$**$ vztahy, z nichz plyne posledni rovnost:
VOAL,
$\exists f\prime(x_0)$ //snad y_0, ne?
$g(x_0) = y_0$
g je spojita v x_0
g se vyhyba sve limite ($g(x) \neq g(x_0)$ na okoli)
VOLslFce P2 □

THEOREM. *19 (o derivaci inverzni funkce)*
MA35
Necht f je spojita[2]
a ryze monotonni (->prosta) na I.
Necht a je vnitrnim bodem I. Necht dale $f(a) = b$.
(i) Necht $\exists f\prime(a) \in \mathbf{R}^* \setminus \{0\}$. Potom $\left(f^{-1}\right)\prime(b) = \frac{1}{f\prime(a)}$
(ii) Necht $f\prime(a) = 0 \& f$ rostouci. Potom $\left(f^{-1}\right)\prime(b) = \infty$
Necht $f\prime(a) = 0 \& f$ klesajici. Potom $\left(f^{-1}\right)\prime(b) = -\infty$

PROOF. (neni tak jenom na radek - technicky)[3]
Vime: $f(I)$ je interval, b je vnitrnim bodem I (obrazy z obou stran)
Dale f^{-1} je definovana, ryze monotonni a spojita na $f(I)$
(i)

[2] nespojita se nezobrazi($^{-1}$) na interval
[3] pro to¸aby se tam mohlo pouzit $(f\prime)$ se musej proste slozit 2 funkce

$\left(f^{-1}\right)\prime(b)=\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}$ chceme $=\frac{1}{f\prime(a)}$
Vim: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f\prime(a)$
$\lim_{y\to b}f^{-1}(y)\overset{\text{spojitost } f^{-1}}{=}f^{-1}(b)=a$
Poloz $F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ potom $\lim_{x\to a}F(x)=f\prime(a)$
$G(y)=f\prime(y)$ potom $\lim_{y\to b}G(y)=a$ (P1 neni splnen)
ryzi monotonie $f^{-1}:\exists\delta:f^{-1}(y)\neq a\forall y\in\mathcal{P}(a,\delta)\overset{\text{VOLsl(P2)}}{\Rightarrow}\lim_{y\to b}F(G(y))=$
$f\prime(a)$
$f\prime(a)=\lim_{y\to b}F(G(y))=\lim_{y\to b}\frac{f\left(f^{-1}(y)\right)-f(a)}{f^{-1}(y)-a}=\lim_{y\to b}\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(a)}\overset{\text{VOAL}}{\Rightarrow}$
$\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(a)}{y-b}=\frac{1}{f\prime(a)}$
(ii)
pro f rostouci $f'(a)=0$
pak: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ pro $x>a$
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ pro $x<a$
$\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x)-f(a)}=\infty\overset{\text{VOLslF}}{\Rightarrow}\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\infty$ □

EXAMPLE 4.5.4. $\arcsin y$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\sin x\in(-1,1)$
$y=\sin x,x=\arcsin y$
$(\arcsin y)\prime=\frac{1}{(\sin x)}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
MA36
$\arccos y=\frac{\pi}{2}-\arcsin y$
–
$\arctan y\in\mathbf{R}$
MA37
$y=\tan x$
$(\arctan y)\prime=\frac{1}{(\tan x)\prime}=\cos^2 x$
$\cos^2 x=\text{vyraz}(\tan x)$
$\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+y^2}$
–
$(\log y)\prime=\frac{1}{(\exp x)\prime}=\frac{1}{\exp x}=\frac{1}{y}$ (ale da se to i bez V19)
(primo:) $\log\prime(b)=\lim_{y\to b}\frac{\log y-\log b}{y-b}=\frac{1}{b}\lim_{y\to b}\frac{\log\frac{y}{b}}{\frac{y}{b}-1}\overset{\text{VOLslF}}{=}\frac{1}{b}1=\frac{1}{b}$ (P2 - $\frac{y}{b}$prosta)
nebo taky vopacne

THEOREM. *20 (nutna podminka $\exists$ extremu)*
Necht $f:M\to\mathbf{R},M\subset\mathbf{R}$ Necht f ma v nakem bode $a\in M$ lokalni extrem.
Potom budto $f\prime(a)$ neexistuje, nebo $f\prime(a)=0$
MA38

PROOF. sporem.
Necht $\exists f\prime(a)\neq 0$ BUNO $f\prime(a)>0$
$f\prime(a)=\lim_{x\to a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ potom $\exists\delta>0:\forall x\in\mathcal{P}(a,\delta):\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$

$$\begin{matrix} x \in \mathcal{P}(a,\delta), x < a : f(x) < f(a) \\ x \in \mathcal{P}(a,\delta), x > a : f(x) > f(a) \end{matrix} \Rightarrow f \text{ nema v } a \text{ lokalni extrem}$$

MA39 □

EXAMPLE 4.5.5. (typicka uloha)
Mame funkci f (dejme tomu) spojitou na $[a, b]$
Najdete jeji maximum (minimum)
Postup -
1) f je spojita na $[a, b] \Rightarrow f$ ma v $[a, b]$ maximum
2) toto maximum se muze nachazet pouze v mnozine
$\{x \in (a, b) : f\prime(x) = 0\} \cup \{x \in (a, b) : f\prime(x) \text{ neex}\} \cup \{a, b\}$ - pozor na kraje!

4.5.2. Rolleova veta a jeji dusledky. [4]

THEOREM. *21 (Rolleova)OK*
Necht f je spojita funkce na $[a, b]$. Necht $f(a) = f(b)$ MA40
Necht $\exists f\prime(x)\, \forall x \in (a, b)$
Potom $\exists$ bod $\xi \in (a, b)$ tak, ze $f\prime(\xi) = 0$

PROOF. (i) Necht $f(x) = f(a)\, \forall x \in [a, b]$ OK
(ii) Necht $\exists x \in (a, b) : f(x) \neq f(a)$
Pak f ma lokalni extrem v $\xi \in (a, b)$
Podle predpokladu $\exists f\prime(\xi)$ Podle V20 $f\prime(\xi) = 0$ □

THEOREM. *22 (Lagrangeova o stredni hodnote)OK*
Necht f je spojita na $[a, b]$ a necht $\exists$ derivace $f\prime(x)\, \forall x \in (a, b)$
Potom $\exists \xi \in (a, b)$ takovy, ze $f\prime(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ MA41

PROOF. def $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (polozim to, ze)
Potom $F(a) = 0, F(b) = 0$
F je spojita
$F\prime(x) = f\prime(x) - 0 - 1\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \overset{\text{V21}}{\Rightarrow} \exists \xi : F\prime(\xi) = 0$ □

THEOREM. *23 (Cauchyova o stredni hodnote)*
Necht f, g jsou spojite na $[a, b]$
Necht $\exists f\prime(x)\, \forall x \in (a, b)$
Necht $\exists g\prime(x) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\, \forall x \in (a, b)$
Potom $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f\prime(\xi)}{g\prime(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ (podle Rolleovy se $g(b) - g(a) \neq 0$)

PROOF. *ftip: funkce H + V21*
def $H(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(b))(f(b) - f(a))$
Potom $H(a) = H(b) = 0$
$H\prime(x) = \underbrace{f\prime(x)(g(b) - g(a))}_{\in \mathbf{R}^*} - \underbrace{g\prime(x)(f(b) - f(a))}_{\in \mathbf{R}}$
$g(b) \neq g(a)$
kdyby $g(b) = g(a) \overset{\text{V21}}{\Rightarrow} \exists \xi : g\prime(\xi) = 0$ ($\neg$predpoklad)
V21 podruhe:
$\overset{\text{V21 podruhe}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (a, b) : H\prime(\xi) = 0$

[4] 21-23 vyzaduji spojitost na $[a, b]$

a tedy $f\prime(\xi)(g(b)-g(a))-g'(\xi)(f(b)-f(a))=0$
deleni $\frac{f\prime(\xi)}{g\prime(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
$\Rightarrow$
$\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}$ □

4.5.3. rychlost konvergence. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\exp\prime(0)$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\sin\prime(0)$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^x -x}{x^a}=$ samozrejme 0 jak rychle?
Tvrdim $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^x -x}{x^3}=-\frac{1}{6}$ a tvrdim, ze to nejde dokazat, aniz umim derivovat ci rozvojovat fci do mocninne rady

THEOREM. *24 (l'Hospitallovo pravidlo)*
(dukaz - "pomerne dost narocny")
(i) (verze "$\frac{0}{0}$") Necht $a\in\mathbf{R}^*$ *a necht* $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=0$.
Necht $\exists\lim_{x\to a+}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$.
Potom $\exists\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$
(ii) (verze "$\frac{cokoliv}{\pm\infty}$") Necht $a\in\mathbf{R}^*$ *a necht* $\lim_{x\to a+}|g(x)|=\infty$.
Necht $\exists\lim_{x\to a+}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$.
Potom $\exists\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$

PROOF. **(i) "$\frac{0}{0}$", Necht $a\in\mathbf{R}$.**
- vyhoda - muzu to dodefinovat.
Necht $\lim_{x\to a+}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}=A\in\mathbf{R}^*$ - jenom jedno δ
zvolime ε
- $\exists$ limita z podilu derivaci: na nakym okoli je tam funkce definovana a pojem podilu tech derivaci dava smysl:
$\exists\delta>0\forall x\in\mathcal{P}^+(a,\delta)\,\exists f\prime(x)\in\mathbf{R},\exists g\prime(x)\in\mathbf{R}\neq 0$, obe jsou vlastni
Potom f,g spojite na $\mathcal{P}^+(a,\delta)$
(Plati $\forall y\in\mathcal{P}^+(a,\delta):\frac{f\prime(y)}{g\prime(y)}\in\mathcal{U}(A,\varepsilon)$)
MA43
Dodefinujeme funkce: $f(a)=g(a)=0$ (muzu protoze $a\in\mathbf{R}$). Pak f,g spojite na $[a,x]$ a tedy jsou splneny predpoklady V23 (Cauchyova)
-pro kazdy x jiny ξ - proto $\xi(x)$
Necht $x\in\mathcal{P}^+(a,\delta)\overset{V23}{\Rightarrow}\exists\xi=\xi(x)\in(a,x)$ tak, ze $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f\prime(\xi(x))}{g\prime(\xi(x))}*$
/*prinutit ξ*/
Takze $x\in\mathcal{P}^+(a,\delta)\Rightarrow\xi(x)\in(a,x)\subset\mathcal{P}^+(a,\delta)\Rightarrow\frac{f\prime(\xi(x))}{g\prime(\xi(x))}\in\mathcal{U}(A,\varepsilon)**$
$\Rightarrow\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$
(i) Necht $a=-\infty$.
muzu ε nahradit K a nebo:
[5]

5

PROOF. Plati (primy dusledek VolSLF) : jestlize $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=A$, pak take $\lim_{y\to 0+}\varphi\left(-\frac{1}{y}\right)=A$

def $F(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right)$
def $G(y) = g\left(-\frac{1}{y}\right)$
potom $F\prime(y) = f\prime\left(-\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}$
$G\prime(y) = g\prime\left(-\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}$
$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to0+}\frac{F(y)}{G(y)} \overset{(i)\in\mathbf{R}}{=} = \lim_{y\to0+}\frac{F\prime(y)}{G\prime(y)} = \lim_{y\to0+}\frac{F\prime\left(-\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}}{G\prime\left(-\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}} =$
$\lim_{x\to-\infty}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$
/*(verze "$\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}$") Necht $a\in\mathbf{R}^*$a necht $\lim_{x\to a+}|g(x)| = \infty$.
Necht $\exists\lim_{x\to a+}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$.
Potom $\exists\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$
*/

(ii) "$\frac{\textbf{cokoliv}}{\pm\infty}$"

- parametru se musi volit vic, anzto se vzajemne ovlivnuji
/* proste zase potrebujem najit uzavrenej interval, ne kterym by platila Cauchyho veta*/

Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom $\exists\delta_1 > 0$ tak, ze $\forall x\in\mathcal{P}^+(a,\delta_1) : \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}\in\mathcal{U}(A,\varepsilon)$
/*jasne, takze ten podil ma smysl na nakym P*/
MA44
kde $A = \lim_{x\to a+}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$. Zafixujeme $y\in\mathcal{P}^+(a,\delta_1)$
/*jak se vi, ze $|f(y)|, |g(y)|\in\mathbf{R}$? a mohlo by to bejt ∞ ?*/
/*pro y plati $\frac{f\prime(y)}{g\prime(y)}\in(A,\varepsilon)$*/
potom $\exists\delta_2\in(0,\delta_1)$ tak, ze $\forall x\in\mathcal{P}^+(a,\delta_2) : \frac{|f(y)|+|g(y)|}{|g(x)|} < \varepsilon$ ($\frac{\text{pevny cislo}}{\infty}$ je malinky)
/*$\varepsilon\to\delta_1$(umerne male) $\to$ libovolne $y\to\delta_2$(strasne mrnave)*/
Zvolim $x\in\mathcal{P}^+(a,\delta_2)$ potom tvrdim, ze na $[x,y]$ jsou splneny predpoklady V23 ($\exists$ vlastni derivace $\Rightarrow$ spojity, $g\prime(x)\neq0$)

Tedy $\exists\xi\in(x,y) : \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f\prime(\xi)}{g\prime(\xi)} \Rightarrow f(y)-f(x) = \frac{f\prime(\xi)}{g\prime(\xi)}(g(y)-g(x)) \overset{ZZ}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{g(x)} =$

$$\underbrace{\frac{f(y)}{g(x)}}_{\to0} + \frac{f\prime(\xi)}{g\prime(\xi)}\underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{g(y)}{g(x)}}_{\infty}\right)}_{1}$$

$$A\in\mathbf{R} : \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \le \underbrace{\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|\frac{f\prime(\xi)}{g\prime(\xi)} - A\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|\frac{f\prime(\xi)}{g\prime(\xi)}\right|\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|}_{<(a+\varepsilon)\varepsilon} < \varepsilon(A+3)$$

$A = \pm\infty$ - k zamysleni □

EXAMPLE 4.5.6. (i) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}$ (uz se da bez) $= \lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}$
(ii)

nebot (P2) $\lim_{y\to0+} -\frac{1}{y} = -\infty$ a je prosta. □

(iii) nekdo chce vedet rad (s jakou mocninou lze srovnat, abysme dostali vlastni limitu)

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{x^2}{2}}{x^\alpha}$ pro jake α je tato limita vlastni a nenulova?

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}}\Rightarrow$ musime volit $\alpha=4\Rightarrow\lim=-\frac{1}{24}$

POZNAMKY:. (i) analogicky pro $-$ a oboustrannou

uskali V24: (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=0$ (zrejme) L$\prime$Hosp: $\ldots\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ neexistuje

!!! predpoklad - $\exists\lim\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$

(iii) POZOR- toto je spatne: $\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{3x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ - neoverenej predpoklad $\frac{0}{0}$- aby se setkali v 0

(iv) muze ZHORSIT SITUACI: $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\overset{LH}{=}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$

THEOREM. *25 (o limite derivaci)OK*

Necht f je spojita zprava v bode a. Necht $\lim_{x\to a+}f\prime(x)=A\in\mathbf{R}^*$ *Potom* $f\prime_+(a)=A$.

- dobry pro neprijemny D

PROOF. $f\prime_+(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\overset{V24(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to a+}\frac{(f(x)-f(a))\prime}{(x-a)\prime}=\lim_{x\to a+}\frac{f\prime(x)}{1}$ □

DEFINITION 4.5.7. Necht I je interval. Pak mnozinu vnitrnich bodu I znacime $int(I)$

$I=int(I)\Leftrightarrow I$ je otevreny

THEOREM. *26 (o vztahu derivace a monotonie)*

Necht I je interval, f je spojita na I a $\exists f\prime(x)\,\forall x\in int(I)$

Potom

*(i) je-li $f\prime(x)>0\forall x\in int(I)\Rightarrow f$ je **rosouci** na I*

*(ii) je-li $f\prime(x)\geq 0\forall x\in int(I)\Rightarrow f$ je **neklesajici** na I*

*(iii) je-li $f\prime(x)<0\forall x\in int(I)\Rightarrow f$ je **klesajici** na I*

*(iv) je-li $f\prime(x)\leq 0\forall x\in int(I)\Rightarrow f$ je **nerostouci** na I*

PROOF. (i), ostatni analogicky

Vyberu $a,b\in I,a<b$

Chci dokazat $f(a)<f(b)$

Vime: f je spojita na $[a,b]$, $\exists f\prime(x)$ na (a,b)

Dle V22 $\exists\xi\in(a,b):\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f\prime(\xi)>0$ (tecna je rovnobezna)

$\Rightarrow f(b)-f(a)>0$ (protoze $b>a$) □

EXAMPLE 4.5.8. *arccotan* (x), $f\prime(x)=\frac{1}{1+x^2}$

(ii) !! POZOR $f(x)=\tan x, f\prime(x)=\frac{1}{\cos^2 x}>0$, ale $\tan x$ neni rostouci na svem D. je vsak roustouci napr. na $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$f\prime>0$ na $I_1\cup I_2$ -

4.6. konvexni a konkavni funkce

DEFINITION 4.6.1. **Druhou derivaci** funkce f nazyvame funkci $f\prime\prime$ definovanou $f\prime\prime(x)=\lim_{a\to 0}\frac{f\prime(x+a)-f\prime(x)}{a}$ pokud ma limita smysl

n-tou derivaci funkce $f^{(n)} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}$

.

DEFINITION 4.6.2. Necht f ma v bode a $f\prime(a)$. Potom oznacime $T_a = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2; x \in \mathbf{R}, y = f(a) + f\prime($
(tecna ke grafu)

Rekneme, ze bod $[x, f(x)], x \in D(f)$ lezi $\begin{matrix}\text{nad}\\ \text{pod}\\ \text{na}\end{matrix}$ $\begin{matrix}\text{tecnou}\\ \text{tecne}\end{matrix}$ T_a, jestlize $f(x)$ $\begin{matrix}>\\ <\\ =\end{matrix}$ $f(a)+$ $f\prime(a)(x-a)$

MA45

.

4.6.1. inflexe (klicovy pojem).

DEFINITION 4.6.3. Rekneme, ze f ma v bode a **inflexi** (a je inflexnim bodem f) MA46

jestlize $\exists$ **vlastni** derivace $f\prime(a)$ a $\exists\delta > 0$ takove, ze:

Bud $\forall x \in (a-\delta, a)$ lezi $[x, f(x)]$ nad $T_a \& \forall x \in (a, a+\delta)$ lezi $[x, f(x)]$ pod T_a

Nebo $\forall x \in (a-\delta, a)$ lezi $[x, f(x)]$ pod $T_a \& \forall x \in (a, a+\delta)$ lezi $[x, f(x)]$ nad T_a

THEOREM. *27 (nutna podminka $\exists$ inflexe) - uplne sprave dukaz!*

Necht f ma v bode a inflexi.

Potom bud $f\prime\prime(a)$ neexistuje nebo $f\prime\prime(a) = 0$

PROOF. Take sporem.

Necht $\exists f\prime\prime(a)$ a navic BUNO $f\prime\prime(a) > 0$

$f\prime\prime(a) = \lim_{x\to a} \frac{f\prime(x)-f\prime(a)}{x-a} > 0 \Rightarrow \exists\delta : f\prime(x) > f\prime(a)\, \forall x \in \mathcal{P}^+(a,\delta) \& f\prime(x) < f\prime(a)\, \forall x \in \mathcal{P}^-(a,\delta)$ MA47

$x \in (a, a+\delta) : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{V22}{\Rightarrow} \exists\xi \in (a,x) : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f\prime(\xi) > f\prime(a) \Rightarrow f(x) > f(a) + f\prime(a)(x-a)$

t.j. $[x, f(x)]$ nad T_a

$x \in (a, a-\delta)\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{V22}{\Rightarrow} \exists\xi \in (x,a) : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f\prime(\xi) < f\prime(a) \Rightarrow f(x) > f(a) + f\prime(a)(x-a)$ (x-a je zaporne)

$\Rightarrow f$ nema inflexi v a. <- spor

MA48 □

Poznamka: veta nelze obratit - e.g. $f(x) = x^4, f\prime(0) = 0, f\prime\prime(0) = 0$ inflexe tam vsak neni!

THEOREM. *28 (postacujici podminka pro $\exists$ inflexe)*

Necht f ma na $int(I)$ spojitou prvni derivaci. Necht $z \in (a,b) \subset I$ a necht plati $f\prime\prime(x) > 0 \forall x \in (a,z), f\prime\prime(x) < 0 \forall x \in (z,b)$

*Pak f **na inflexi v bode** z.*

PROOF. Vime dle V26: $f\prime$ je rostouci na (a,z) a klesajici na (z,b).

Necht $x \in (z,b)$. Potom (Lagrange) $\exists\xi \in (z,x) : \frac{f(x)-f(z)}{x-z} = f\prime(\xi) < f\prime(z) \Rightarrow f(x) < f(z) + f\prime(z)(x-z) \Rightarrow [x, f(x)]$ pod T_z

Necht $y \in (a,z)$. Potom (Lagrange) $\exists\zeta \in (y,z) : \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f\prime(\zeta) < f\prime(z) \Rightarrow f(y) > f(z) + f\prime(z)(y-z) \Rightarrow [y, f(y)]$ nad T_z

jelikoz x, y byli libovolne $\Rightarrow f(z)$ ma inflexi □

DEFINITION 4.6.4. Rekneme, ze f je na I **ryze konvexni**, jestlize $\forall x, y, z \in I, x < y < z$, plati, ze
$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
ryze konkavni $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > \frac{f(z)-f(x)}{z-x} > \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
konvexni $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
konkavni $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
konvexni funkce je takova funkce, ze kdyz do ni naprsi, tak tam voda zustane MA50

NOTE 4.6.5. f je konvexni $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2, x_3 : \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ neni tak nazorna, ale je (zdanlive) silnejsi

PROOF. $\Rightarrow$ trivialni
$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$
$\Leftrightarrow$(dokazuju tu pravou)
$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} / (x_3 - x_2)\,; +f\,(x_2)$
$f\,(x_2) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_3 - x_2) \leq f\,(x_3)\ / -f\,(x_1)$ & spol. vlevo
$\frac{(f(x_2)-f(x_1))(x_3-x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(f(x_2)-f(x_1))+(f(x_2)-f(x_1))(x_3-x_2)}{x_2-x_1} \leq f\,(x_3) - f\,(x_1)\ / {:}(x_3 - x_1)$
$\rightarrow \frac{(f(x_2)-f(x_1))}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{(x_3-x_1)}$ □

THEOREM. *29*
Necht f je (ne nutne ryze) konvexni na intervalu I a $a \in int(I)$. Potom $\exists \lim_{x\to a+} f\prime(x) \in \mathbf{R} \& \exists \lim_{x \to a-} f\prime(x) \in \mathbf{R}$
(to je jenom o patro vejs vety "monotonni funkce ma jednostranne limity" + navic $\in \mathbf{R}$)

PROOF. $f\prime_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
Necht $a < x_1 < x_2$
Z konvexity: $\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a} \geq \frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}$ MA51
$\Rightarrow F\,(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ je neklesajici na $(a, a+\delta)$ pro nejake δ
Tedy $\exists \lim_{x\to a+} F\,(x) = f\prime_+(a)$.
Zbyva dokazat $f\prime_+(a) \in \mathbf{R}$
Ted pouzijeme, ze je vnitrni bod
Necht $y < a < x$.
Potom z konvexity: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{f(a)-f(y)}{a-y} \Rightarrow F$ je zdola omezena na $(a, a+\delta) \Rightarrow \lim_{x\to a+} F\,(x) \in \mathbf{R}$ □

THEOREM. *30 (spojitost a konvexita)*
Je-li funkce f na otevrenem intervalu (a, b) konvexni, pak f je na (a, b) spojita

PROOF. plyne z predchozich vet
Necht $x \in (a, b) \Rightarrow x \in int\,((a, b))$
$\begin{array}{cc} V29 & \exists f\prime_+(x) \in \mathbf{R} \\ \Rightarrow & \exists f\prime_-(x) \in \mathbf{R} \end{array} \Rightarrow f$ je v x spojita zprava i zleva $\Rightarrow$ je v x spojita □

poznamky: (i) $sgn\,(x)$ na $[-1, 0]$ JE konvexni, ale ne spojita
(ii) jednostranne derivaci se nemusi =(ani nemusi $\exists$) MA52 (vetu to ale nemeni)

THEOREM. *31 (druha derivace a konvexita)*

/$f\prime$ ~ monotonie f ~ extremy funkce*
$f\prime\prime$ ~ konvex/konkav f ~ inflexni body/*
Necht f ma na I spojitou prvni derivaci. Necht $I=(a,b)$
Jestlize $\forall x\in(a,b)$
$f\prime\prime(x)>0$ potom f je na I ***ryze konvexni***
$f\prime\prime(x)<0$ potom f je na I ***ryze konkavni***
$f\prime\prime(x)\geq 0$ potom f je na I ***konvexni***
$f\prime\prime(x)\geq 0$ potom f je na I ***konkavni***

PROOF. pro $f\prime\prime(x)\geq 0\forall x\in(a,b)$
/*potrebuju $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$*/
pouziju V26 pro $f\prime\Rightarrow f\prime$ je na (a,b) neklesajici
MA53
Dle Lagrange V22$\Rightarrow\exists\xi_1\in(x_1,x_2):\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f\prime(\xi_1)$ a $\Rightarrow\exists\xi_2\in(x_2,x_3):\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f\prime(\xi_2)$
$\xi_1\leq\xi_2;f\prime$ neklesajici $\Rightarrow$ $f\prime(\xi_1)\leq f\prime(\xi_2)$ a to je dle predchozi poznamky konvexni □

poznamka:
pro $f\prime$. f spojita; $f\prime(x)>0\Rightarrow f$ rostouci (nebo etc.)
$f\prime>0$ vlevo/vpravo
$f\prime<0$ vpravo/vlevo
$\Rightarrow f$ ma v a extrem
$\Rightarrow f\prime(a)$ neex nebo $f\prime(a)=0$
pro $f\prime\prime$. $f\prime$ spojita; $f\prime\prime(x)>0\Rightarrow f$ ryze konvexni (nebo etc.)
$f\prime\prime>0$ vlevo/spravo
$f\prime\prime<0$ vpravo/vlevo
$\Rightarrow f$ ma v a inflexi
$\Rightarrow f\prime\prime(a)$ neex nebo $f\prime\prime(a)=0$

4.7. prubeh funkce

MA54

DEFINITION 4.7.1. Rekneme, ze f **ma v ∞ $(-\infty)$ asymptotu** $y=ax+b;a,b\in\mathbf{R}$ jestlize
$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$

THEOREM. *32 (existence asymptoty)*
Funkce f ma v bode ∞ asymptotu $y=ax+b\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\&\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$

PROOF. "$\Rightarrow$"
Necht tedy $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$
potom $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}=\frac{f(x)-ax-b+ax+b}{x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax-b}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}$ muzu - vsechny $\exists$, mam VOAL
$=0+a+0=a$
$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b+b)=b$
"$\Leftarrow$"
Necht plati $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$

Potom $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax - b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) + \lim_{x\to\infty}(b) = b - b = 0$ $\square$

EXAMPLE 4.7.2. Urcete asymtotu funkce $f(x) = \sqrt{x^2+x}$ v ∞
reseni:
spocitam $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = 1 = a$
tedy asymptota je ve tvaru $y = x + b$
spocitam $\lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}$
(ii) neex ass v ∞:$\frac{e^x}{x}(-\infty \to y = 0)$

4.7.1. prubeh funkce.

(1) definicni obor D(f) (mel by ji prinest) (mysli se: nalest max $\subseteq \mathbf{R}$) a obor spojitosti
(2) pruseciky grafu f se souradnymi osami (pokud to de)
(3) simetrie - sudost, lichost, periodicita
(4) jednostranne limity v krajnich bodech D (vcetne $\pm\infty$)
(5) $f\prime$ tam, kde $\exists$ $(f\prime_+, f\prime_-)$, urcime intervaly monotonie f, lokalni a globalni maxima i minima (ostra i neostra)
(6) spocitame $f\prime\prime$ a urcime intervaly konkavity a konvexity (ryzi i neryzi), urcime vsechny inflexni body
(7) vypocitame asymptoty funkce pokud to ma smysl (tedy je-li f definovana na okoli $\pm\infty$
(8) nacrtneme graf f.

EXAMPLE 4.7.3. –
ass $\pm\infty \to \frac{\pi}{4}$
$f\prime(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f$ ma ostre globalni minimum (meni se znamenka) jine nema - $f\prime$ vsude jinde $\exists$ a $\neq 0$
$f\prime\prime = \frac{-12x^4-4x^2-2}{(2x^4+2x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -6x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ $y = x^2 \to y_{1,2}\frac{\pm\sqrt{7}-1}{6} \to$ pouze $y = \frac{\sqrt{7}-1}{6}$
$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{6}}$ - infelxe
vzhledem k tomu, ze ma vsude 1. derivaci, nemuze tam byt dalsi lokalni extrem -> primika se zezdola

4.8. tayloruv polynom

"ponekud hlubsi pasague"
Motivace:
(i) e.g. $\sin x$ v bode 0 - polynom stupne - $0, 1, 2,$

	0	1	3	
chyba	≤ 1			
soulasi derivace do radu	0	2	4	

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ $x - \frac{x^3}{6}$
(ii) $f, a \in \mathbf{R}, \exists f\prime(a) \in \mathbf{R}$
$t(x) = f(a) + f\prime(a)(x-a)$

MA54 $t\prime(a) = f\prime(a)$
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-t(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f\prime(a)\right) \overset{VOAL}{=} 0$
$t(x)$je polynom stupne 1
CHCI najit polynom P stupne n tak, aby $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0$

DEFINITION 4.8.1. (klicovy pojem) Necht f je realna funkce, $a \in \mathbf{R}$, $\exists f^{(n)}(a), n \in \mathbf{N}$. Pak **Taylorovym polynomem funkce f v bode a radu n** nazyvame polynom

$$T_n^{f,a}h(x) = f(a) + \frac{f\prime(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$

poznamky: (i) Funkce promenne x. x se vyskytuje jenom v mocnine $(x-a)^i$ - tedy je to polynom stupne nejvyse n
(ii) $\left(T_n^{f,a}\right)\prime(x) = f\prime(a) + \frac{f\prime\prime(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^n(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$ - stupen nejvyse $n-1$
$\Rightarrow \left(T_n^{f,a}\right)\prime = T_{n-1}^{f\prime,a}$!!!
(iii) qalita aproximace - derivace $\left(T_n^{f,a}\right)^{(n)} = f^{(n)}(a) \Rightarrow \left(T_n^{f,a}\right)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ -pochopitelne $(a-a)$ $\forall k = 1, 2, \ldots, n$

THEOREM. *33. (o Taylorove polynomu)*
Necht $a \in \mathbf{R}$ a $f^{(n)}$ je spojita v a.
Necht P je polynom stupne nejvyse n.
Potom $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}$

PROOF. napred musim "$\Leftarrow$" - pak ji pouziju
indukci podle n
$n = 1$
$T_1^{f,a}(x) = f(a) + f\prime(a)(x-a)$
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_1^{f,a}(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f\prime(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f\prime(a)\right) = 0$
$n-1 \to n$
PRIPOMINAM VZOREC $\left(T_n^{f,a}\right)\prime = T_{n-1}^{f\prime,a}$
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n^{f,a}x}{(x-a)^n} \overset{l\prime H\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f\prime(x)-\left(T_n^{f,a}\right)\prime(x)}{n(x-a)^{n-1}} = n\lim_{x\to a}\frac{f\prime(x)-T_{n-1}^{f\prime,a}(x)}{(x-a)^{n-1}}$
$\overset{\text{indukcni predpoklad, } f\prime \text{ spojita}}{=} 0$
"$\Rightarrow$"
Necht P splnuje $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0$ (aproximacni vlastnost)
$\lim_{x\to a}\frac{P(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{P(x)-f(x)}{(x-a)^n} \overset{\text{(event. nekorektnost)}}{+} \lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}$
$= \underbrace{0}_{\text{predpoklad}} + \underbrace{0}_{\text{implikace } \Leftarrow}$
zbyva dokazat Lemma:
Az ho dokazeme, dostaneme (pro $Q = P - T_n^{f,a}$), ze $\left(P - T_n^{f,a}\right) \equiv 0 \Rightarrow P = T_n^{f,a}$ $\square$

Lemma. *Q pol. st. $\leq n$, $a \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0 \Rightarrow Q \equiv 0$ na $\mathbf{R}$*

Proof. indkukci podle n
$n = 1$ $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{x-a} = 0 \Rightarrow Q(a) \equiv 0$ (??)
Q je polynom stupne nejvyse $1 \Rightarrow Q(x) = c(x-a)$
chci dokazat $c = 0$ vime $0 = \lim_{x\to a} \frac{c(x-a)}{x-a} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow Q \equiv 0$
$n - 1 \to n$
vime $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0 \Rightarrow Q(a) \equiv 0 \Rightarrow Q(x) = (x-a)R(x), st(R) \leq n-1$
$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{(x-a)R(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}} \overset{\text{indukcni predpoklad}}{=} R \equiv 0 \Rightarrow Q \equiv 0$ □

Theorem. *34. (o zbytku po Taylorove polynomu)*
/ pozor na vsechny predpoklady */*
Necht f ma na $[a,x]$ vlastni $(n+1)$ derivaci. Necht φ je spojita funkce na $[a,x]$, ktera ma $\forall x \in (a,b)$ vlastni a nenulovou derivaci.
MA55
Potom $\exists \xi \in (a,x)$:

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$$

*(Oznacime $R_n^{f,a} = f(x) - T_n^{f,a}(x)$, funkci $R_n^{f,a}$ nazyvame **zbytkem po Taylorove polynomu stupne** n) (remainder)*

Proof. pro $t \in [a,x]$ def $F(t) = f(x) - \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]$
Pak F spojita na $[a,x]$
$\exists F' \in \mathbf{R}$ na (a,x) (z toho, ze ma vlastni $n+1$ derivaci)
$F(x) = 0$
$F(a) = R_n^{f,a}(x)$
$\overset{\text{V23}}{\Rightarrow} \frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ pro nejake $\xi \in (a,x)$
$\Rightarrow R_n^{f,a}(x) = -\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} F'(\xi)$
$F'(\xi) = 0 - \left[f'(\xi) + f''(\xi)(x-\xi) + f'(\xi)(-1) + \frac{f'''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \frac{f''(\xi)}{2} 2(x-\xi)(-1) + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (\right.$
$= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$
$R_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$
derivaci se presvecime, ze se vsechny pozerou □

Example 4.8.2. priklady na nalezeni funkce φ (obecny tvar zbytku: $R_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$)
(i) (Lagrange) - obecne nejvyhodnejsi
$\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$
$\varphi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$ pro $t \in (a,x)$ je $\varphi'(t) \neq 0$
vsechno OK, dosadime
$\varphi(x) = 0, \varphi(a) = (x-a)^{n+1}$
tedy
$R_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{-(x-a)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$
DUSLEDEK 1 (Lagrangeuv tvar zbytku)

za predpokladu V34 $\exists \xi \in (a,b) : R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$
(ii) (Cauchy)
$\varphi(t) = t$
$\varphi\prime(t) = 1$
tedy
$\frac{1}{n!}\frac{x-a}{1} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x-a)$
DUSLEDEK 2 (Cauchyho tvar zbytku)
za predpokladu V34 $\exists \xi \in (a,b) : R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x-a)$

–

EXAMPLE 4.8.3. (Rozvoj funkce exp)
$f(x) = e^x, a = 0, n \in N$
$f\prime(x) = e^x$
$f^{(n)}(0) = 1$

$$T_n^{\exp,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} x^j$$

$R_n(x) = e^x - T_n(x)$
Lagrange:
pozor - to ξ vzdycky $\exists$, ale je zavisle na zafixovanych parametrech
pro $n \in N \exists \xi_n \in (0,x)$ takove, ze
$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1} = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1}$ jde k nule, ale aby to citatel nezkazil
$\leq \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \begin{matrix} \to 0 \\ (n \to \infty) \end{matrix}$
$\Rightarrow$ T. polynomy najdou aproximace libovolne presnosti
$e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + R_n(x)$, kde $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \forall x > 0$
Dusledek: $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$

NOTE 4.8.4. Tento vzorec plati $\forall x \in R$ - V34 plati i pro $x < a$ (misto $[a,x]$ mame $[x,a]$, totez otevreny)

EXAMPLE 4.8.5. specialne $e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$
Vime: $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \Rightarrow e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ (muzu, je absolutne konvergentni)
$= T_n(x) + R_n(x) \Rightarrow R_n(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$
pro $e = e^1 = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$
$R_n(1) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right)$
(geometrickou umim secist
$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}$
$\Rightarrow 0 < R_n(1) < \frac{1}{n!n}$
Vime: $e = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + R_n(1)$, kde $0 < R_n(1) < \frac{1}{n!n}$
napr.: spocitame e s presnosti na 0.001
Tj. hledame $n \in \mathbf{N}$ takove, aby $\frac{1}{n!n} < 0.001 \Rightarrow n!n > 1000$
$n = 6$ uz splnuje
$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$

-

EXAMPLE 4.8.6. $e \notin \mathbf{Q}$ pouze pomoci $e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$

PROOF. sporem: Necht $e = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbf{N}$
MA55
q - dava mrizku
Necht $n \in \mathbf{N}$. Potom $e = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + R_n(1)$, kde $0 < R_n(1) < \frac{1}{n!n}$
Tedy: $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} < e = \frac{p}{q} < \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{nn!} / .qn!$, oznac $m = qn! * \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \in \mathbf{N}$
$m < pn! < m + \frac{q}{n}$ potrebuju $\frac{q}{n} < 1$
$\Rightarrow$ spor - prirozeny cislo mezi m a $m + 1$ □

EXAMPLE 4.8.7. (Rozbor sin)
$f(x) = \sin x$
$f\prime(x) = \cos x$
$f\prime\prime(x) = -\sin x$
$f\prime\prime\prime(x) = -\cos x$
$f^{iv}(x) = \sin x$
$a = 0, f = \sin$
$f(0) = 0$
$f\prime(0) = 1$
$f\prime\prime(0) = 0$
$f\prime\prime\prime(0) = -1$
$\rightarrow$ hrajou roli jenom lichy derivace
$T_0(x) = 0$
$T_1(x) = x$
$T_2(x) = x$
$T_3(x) = x + \frac{x^3}{3!}$ $\left(\frac{\sin x - x}{x^3} \tilde{} - \frac{1}{6}\right)$
$T_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$
zbytek: Lagrange
$R_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} \sin^{(2n+2)}(\xi_n)\, x^{2n+2} \Rightarrow |R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$
$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$

NOTE 4.8.8. rozvoj cos
$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j}$

(—— KONEC ZIMNIHO SEMESTRU ————).

APPENDIX A

Ze cvičení

A.0.1. Věty.

THEOREM. *(Stolzova) Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$,$\{b_n\}$ je rostoucí a neomezená. Platí:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A\in\mathbf{R}*\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A \tag{A.0.1}$$

PROOF. Sumace.

$$\begin{array}{rcl} (A-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) & <a_{n+1}-a_n< & (A+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) \\ \sum_{i=n_0}^{N-1}:(A-\varepsilon)(b_N-b_{n_0}) & <a_N-a_{n_0}< & (A+\varepsilon)(b_N-b_{n_0}) \\ (A-\varepsilon) & <\frac{a_N-a_{n_0}}{b_N-b_{n_0}}< & (A+\varepsilon) \end{array}$$

$\frac{a_N-a_{n_0}}{b_N-b_{n_0}}=\frac{\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{n_0}}{b_N}}{\frac{b_N}{b_N}-\frac{b_{n_0}}{b_N}}\lim\frac{\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{n_0}}{b_N}}{1-\frac{b_{n_0}}{b_N}}=\lim\frac{a_N}{b_N}$

vyjadreni pomoci znamych limit:$\lim\frac{a_N}{b_N}=\frac{\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{n_0}}{b_N}}{\frac{b_N}{b_N}-\frac{b_{n_0}}{b_N}}\left(\frac{b_N}{b_N}-\frac{b_{n_0}}{b_N}\right)+\frac{a_{n_0}}{b_N}$ □

A.0.2. některé triky.

A.0.2.1. *substituce definované funkce.* $\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$; $a,b,c\geq0$
(spojitost e^x)$=e^{\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}=e^{\alpha}$ slo by pouzit $1=\lim_{y\to1}\frac{\log y}{y-1}$ kde
$y=\frac{a^x+b^x+c^x}{3}$, ale musi bejt $y\neq1$
pritom ale puvodni vyraz definovan byl.
def. $F(y)=\begin{cases}\frac{\log y}{y-1}\text{ pro } y\neq1\\ \lim_{y\to1}\frac{\log y}{y-1}=1\text{ pro } x=1\end{cases}$ tedy F je spojita
$\alpha=\lim_{x\to0}F\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)\frac{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1}{x}$
a ted uz jednoduse
$=\lim_{x\to0}\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3x}$
$\ldots\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{e^{(x\log a)}-1}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{e^{(x\log a)}-1}{(x\log a)}\frac{(x\log a)}{x}=\log a$
$\Rightarrow\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=e^{\frac{1}{3}(\log a+\log c+\log c)}=\sqrt[3]{abc}$