Kapitola 1

Hilbertův prostor

1.1 Základní vlastnosti

Historická poznámka 1.1.1. Prostor se skalárním součinem je normovaný lineární prostor (dále NLP), v němž je norma definována pomocí tzv. skalárního součinu. Operace sčítání a násobení skalárem v NLP spojité, získává se však mnohem více. Skalární součin umožňuje zavést v prostoru se skalárním součinem kolmost prvků. Je-li takový prostor navíc úplný, budeme ho nazývat Hilbertův prostor (HP).

Ve vztahu k ostatním probíraným strukturám (topologický prostor, metrický prostor, normovaný lineární prostor) je Hilbertův prostor obdařen „nejsilnějšími" axiómy. Je pojmenován po Davidu Hilbertovi (1862 – 1943), který položil základy studia této struktury. Vznik teorie abstraktního Hilbertova prostoru se klade až do r. 1927 a je spojován se jménem John von Neumann (1903 – 1957); viz [5]. Látka o HP patří do tzv. *funkcionální analýzy* a je vykládána v mnoha učebnicích funkcionální analýzy. Stručný výklad nejdůležitějších výsledků lze nalézt např. v [2].

Definice 1.1.2. Nechť X je LP nad tělesem K reálných nebo komplexních čísel s binární operací $(\cdot,\cdot)$, která má následující vlastnosti:
Pro všechna $x, y, z \in X$ a všechna $\alpha, \beta \in K$ platí

$$\begin{array}{ll} (1) & (x,x) \geq 0 \ , \\ (2) & (x,x) = 0 \iff x = 0 \ , \\ (3) & (x,y) = \overline{(y,x)} \ , \\ (4) & (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z) \ . \end{array} \tag{1.1}$$

Pak říkáme, že dvojice X spolu s $(\cdot,\cdot)$ tvoří *prostor se skalárním součinem* (někdy též *unitární prostor*). Operaci $(\cdot,\cdot)$ nazýváme *skalární součin* na X.

Položíme $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$, $x \in X$ a ukážeme, že takto definovaná funkce je opravdu *norma* na X, jak to odpovídá použitému označení běžnému v teorii NLP. Skutečně, přímo z vlastností skalárního součinu a definice normy plyne, že pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in K$ je $\|x\| \geq 0$, přičemž $\|x\| = 0$, právě když $x = 0$, a také $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$. Pro důkaz trojúhelníkové nerovnosti pro normu si připravíme užitečné lemma.

Lemma 1.1.3 (Schwarzova nerovnost). *Je-li X prostor se skalárním součinem, pak pro $x, y \in X$ platí*

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \; ; \tag{1.2}$$

rovnost v (1.2) nastává, právě když jsou x, y lineárně závislé.

Důkaz. Pro $x = 0$ nebo $y = 0$ platí v (1.2) dokonce rovnost a x, y jsou lineárně závislé. Při $y \neq 0$, $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

$$0 \leq (x - \alpha y, x - \alpha y) = \|x\|^2 - \alpha(y,x) - \overline{\alpha}(x,y) + \alpha\overline{\alpha}\|y\|^2 \; . \tag{1.3}$$

Volme $\alpha = (x,x)/(y,x)$ a dosaďme do předchozí rovnosti; tak dostaneme

$$0 \leq \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \frac{\|x\|^4}{|(y,x)|^2}\|y\|^2 \; , \tag{1.4}$$

z čehož již plyne (1.2). Jestliže platí v (1.2) rovnost, platí postupně také v (1.3) a (1.4), tedy $x = \alpha y$ a x, y jsou lineárně závislé. Abychom ukázali, že v (1.2) nastává rovnost, právě když jsou x, y lineárně závislé, zbývá vyšetřit případ nenulových závislých x, y. Pak existuje $\beta \in \mathbb{C}$ tak, že $x = \beta y$ a platí

$$|(x,y)| = |(\beta y, y)| = |\beta||(y,y)| = \|\beta y\|\|y\| = \|x\|\|y\| \; ,$$

a tedy v (1.2) platí rovnost. Tím je důkaz tvrzení dokončen. □

Lemma 1.1.4 (trojúhelníková nerovnost). *Je-li X prostor se skalárním součinem, $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$, $x \in X$, pak pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{1.5}$$

Důkaz. Podle (1.2) platí

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = |(x+y, x+y)| &\leq (x,x) + |(x,y)| + |(y,x)| + (y,y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \; , \end{aligned}$$

z čehož dostaneme odmocněním

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \; . \tag{1.6}$$

Uvažme, že dále platí $\|x\| = |x+y-y| \leq \|x+y\| + \|y\|$, a tedy $\|x\| - \|y\| \leq \|x+y\|$. Ze symetrie dostáváme stejný odhad pro $\|y\| - \|x\|$ a spojením obou

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x+y\| \; , \tag{1.7}$$

čímž je trojúhelníková nerovnost dokázána. □

Důsledek 1.1.5. *Funkce* $x \mapsto \|x\| := \sqrt{(x,x)}$, $x \in H$ *definuje na* H *normu.*

Z ověření vlastností normy bylo netriviální pouze dokázat trojúhelníkovou nerovnost, což jsme provedli v předcházejícím lemmatu. Na prostory se skalárním součinem lze aplikovat poznatky NLP, se kterým již čtenář seznámil. Zásadní význam má pro další výklad úplnost.

Definice 1.1.6. Prostor se skalárním součinem, který je vzhledem k definované normě $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ *úplný* se nazývá *Hilbertův prostor.*

Historická poznámka 1.1.7. Existují tvary nerovnosti (1.2), spojované s několika jmény; to má následující kořeny: Louis Augustin Cauchy (1789 – 1858) odvodil nerovnost, kterou si v dalším lemmatu dokážeme; je Schwarzovou nerovností v konkrétním HP. Viktor Jakovlevič Bunjakovskij (1804 – 1889) dokázal integrální variantu nerovnosti r. 1859. Nezávisle k ní dospěl r. 1875 Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), který ji pak zobecnil i na vícerozměrný integrál r. 1885.

Lemma 1.1.8 (Cauchy 1821*). *Nechť* x_k, y_k, $k = 1, \dots, m$, *jsou libovolná nezáporná čísla. Potom platí*

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \le \Big(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{1=1}^{m} y_k^2\Big)^{1/2} . \tag{1.8}$$

Důkaz. Pro $\|y\| = 0$ tvrzení platí. Zvolme tedy libovolně x, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $y \neq 0$. Z nerovnosti $\sum_{k=1}^{m}(x_k + \alpha y_k)^2 \ge 0$, plyne, že pro kvadratickou rovnici s neznámou α

$$\sum_{1}^{m} x_k^2 + 2\alpha \sum_{1}^{m} x_k y_k + \alpha^2 \sum_{1}^{m} y_k^2 = 0$$

musí být její diskriminant nekladný. Z toho již plyne

$$\Big(\sum_{1}^{m} x_k y_k\Big)^2 \le \sum_{1}^{m} x_k^2 \cdot \sum_{1}^{m} y_k^2 , \tag{1.9}$$

z čehož již odmocněním dostaneme (1.8). ☐

Příklad 1.1.9. Z lineární algebry je známý skalární součin a jeho základní vlastnosti, přinejmenším v $\mathbb{R}^m$. Budeme pracovat *současně* s lineárním prostorem $\mathbb{R}^m$ všech m-tic reálných čísel a prostorem $\mathbb{C}^m$ všech m-tic komplexních čísel; postup je totiž stejný. Jsou-li $x = [x_1, \dots, x_m]$, $y = [y_1, \dots, y_m]$ z uvažovaného prostoru, klademe

$$(x,y) := x_1\overline{y_1} + \cdots + x_m\overline{y_m} .$$

Snadno ověříme, že (x,y) má všechny vlastnosti skalárního součinu. Pomocí něj je definována norma $\|\cdot\|_2$. Z dokázané nerovnosti (1.8) snadno dostaneme pro absolutní hodnoty

$$|(x,y)| \le \sum_{1}^{m} |x_k\, y_k| \le \Big(\sum_{1}^{m} |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{1}^{m} |y_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 . \tag{1.10}$$

Proto se název *Cauchyova nerovnost* velmi často užívá nejen pro nerovnost (1.8), ale i pro Schwarzovu nerovnost $|(x,y)| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2$ v (daleko obecnějších) prostorech se skalárním součinem.

Označení 1.1.10. Označme l^2 systém všech posloupností reálných nebo komplexních čísel $x = \{x_k\}$, pro něž platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \ .$$

Snadno lze nahlédnout, že l^2 je lineární prostor: pro $x \in l^2$ zřejmě platí rovnost $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^2 = |\alpha|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$, z níž plyne $\alpha x \in l^2$. Pro libovolná dvě čísla a, b vyplývá dále z nerovnosti $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ odhad $2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$, takže

$$|a+b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2) \ . \tag{1.11}$$

Aplikujeme-li předchozí nerovnost na x_k, y_k a sečteme, dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 \leq 2\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \Big) < \infty \ .$$

Chceme-li ukázat, že

$$(x,y) := x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} \ ,$$

definuje na l_2 skalární součin, stačí dokázat jeho konečnost pro každé dva prvky $x, y \in l^2$. K tomu stačí dokázat následující lemma.

Lemma 1.1.11. *Pro každé dvě posloupnosti $x, y \in l^2$ platí nerovnost*

$$\sum_{1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \Big(\sum_{1}^{\infty} |x_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{1}^{\infty} |y_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{1.12}$$

Důkaz. Stačí uvážit, že podle (1.9) platí nerovnost s konečnými součty pro každé $m \in \mathbb{N}$. V nerovnosti (1.9) přejdeme k supremu přes všechna $m \in \mathbb{N}$ nejprve na pravé straně a tak dostaneme na pravé straně řady; pak uděláme totéž ještě na levé straně a po odmocnění obdržíme (1.12). $\square$

Již tedy víme, že l^2 je prostor se skalárním součinem a tak je přirozené se ptát, zda je tento prostor úplný. To se většinou dokazuje v daleko obecnějším kontextu, není však obtížné to dokázat přímo z definice.

Věta 1.1.12. *Prostor l^2 je úplný.*

Důkaz. Pro práci s posloupnostmi prvků z l^2 zavedeme další index n a místo $x_n = \{x_{n1}, x_{n2}, \dots\}$ budeme psát $\{x_{nk}\}$. Pro cauchyovskou posloupnost prvků $x_n \in l^2$ platí: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq p$

$$\|x_m - x_n\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{mk} - x_{nk}|^2 \Big)^{1/2} < \varepsilon \ . \tag{1.13}$$

Protože sčítáme nezáporná čísla, platí $|x_{mk} - x_{nk}| < \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $\{x_n k\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost $x_n k$ chápaných jako funkce proměnné $k \in \mathbb{N}$, která konverguje stejnoměrně vzhledem ke k k nějaké posloupnosti $x_0 = \{x_0 k\}$. Vzhledem ke stejnoměrnosti v $k \in \mathbb{N}$ lze zaměnit v (1.13) limitní přechod pro $n \to \infty$ se sčítáním řady a tak „limitovat“ za znamením sumy. Dostaneme tak podle varianty Věty 15.3.3 z [MAU] z (1.13) odhad $\|x_m - x_0\| \leq \varepsilon$. Nyní ukážeme, že $x_0 \in l^2$. Pro čtverec normy x_0, platí

$$\|x_0\|^2 \leq \|x_0 - x_n + x_n\|^2 \leq 2\big(\|x_0 - x_n\|^2 + \|x_n\|^2\big)$$

což dává $x_0 \in l^2$. □

Poznámka 1.1.13. Čtenář patrně zná obecnou větu o zúplnění metrických prostorů. Uvedeme bez důkazu, že každý prostor se skalárním součinem lze zúplnit a že toto zúplnění je Hilbertovým prostorem: tak lze unitární prostor vždy vnořit „přirozeným způsobem“ do Hilbertova prostoru.

K příkladům se ještě vrátíme, nyní dokážeme několik obecných tvrzení o HP.

Lemma 1.1.14. *Nechť H je Hilbertův prostor, $y_0 \in H$. Zobrazení $[x, y] \mapsto (x, y)$, kde dvojici $[x, y]$ přiřazujeme hodnotu skalárního součinu (x, y), je spojité zobrazení $H \times H$ do $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$). Zobrazení $x \mapsto (x, y_0)$, $x \mapsto (y_0, x)$, $x \mapsto \|x\|$ jsou (při pevně zvoleném y_0) stejnoměrně spojitá na H.*

Důkaz. Začneme se stejnoměrnou spojitostí všech tří zobrazení najednou. Snadno spočteme, že platí odhady

$$|(x, y_0) - (x_0, y_0)| \leq \|y_0\| \|x - x_0\| \ , \quad |(y_0, x) - (y_0, x_0)| \leq \|y_0\| \|x - x_0\| \ ;$$

z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\big| \|x\| - \|x_0\| \big| \leq \|x - x_0\| \ .$$

Nerovnosti dávají stejnoměrnou spojitost všech tří zkoumaných zobrazení [1]. Nakonec dokážeme spojitost skalárního součinu. Snadno ověříme přímým výpočtem

$$\begin{aligned}(x - x_0, y - y_0) &= (x, y) - (x, y_0) - (x_0, y) + (x_0, y_0) = \\ &= (x, y) - (x_0, y_0) - (x - x_0, y_0) - (x_0, y - y_0) \ ,\end{aligned}$$

[1] Zobrazení jsou dokonce lipschitzovská; viz výklad existenční Věty 14.1.7 v [MAU].

z čehož dostáváme pomocí (1.2)

$$|(x,y)-(x_0,y_0)| \le \|x_0\|\|y-y_0\| + \|y_0\|\|x-x_0\| + \|x-x_0\|\|y-y_0\|$$

a tedy i prvou část tvrzení. □

Poznámka 1.1.15 (důležitá). V každém Hilbertově prostoru H platí pro každou dvojici prvků $x, y \in H$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ . \tag{1.14}$$

Stačí totiž sečíst rovnosti

$$\|x+y\|^2 = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \ ,$$
$$\|x-y\|^2 = (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) \ .$$

Je zajímavé, že tímto vztahem je „hilbertovská norma" plně charakterizována. Každou normu s právě popsanými vlastnostmi lze generovat pomocí vhodného skalárního součinu. Např. jde-li o prostor nad $\mathbb{R}$, stačí položit (předchozí rovnosti nyní odečtěte)

$$(x,y) := \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

v „komplexním případě" je to trochu složitější; tento fakt nebudeme v dalším k ničemu potřebovat. Geometricky je podmínka (1.14) zajímavá a bývá nazývána *rovnoběžníkové pravidlo.* Doporučujeme čtenáři načrtnout si obrázek a uvážit, co víme v rovnoběžníku o vztahu délek jeho stran a úhlopříček. Konečně stojí za povšimnutí, že se ověřuje podmínka v dvojrozměrném podprostoru generovaném prvky x, y. Je-li tedy každý dvojrozměrný podprostor *úplného* NLP „hilbertovský", je celý prostor Hilbertovým prostorem. Dále budeme k označení pro tyto prostory užívat symbol H.

Věta 1.1.16. *Nechť $M \subset H$ je neprázdná* konvexní uzavřená *podmnožina Hilbertova prostoru H. Potom pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in M$ tak, že je*

$$\|x-y\| = \operatorname{dist}(x,M) =: d \ .$$

Důkaz. Existuje posloupnost $\{y_n\}$ tak, že $\|x-y_n\| \to d$. Potom z (1.14) plyne

$$\begin{aligned}\|(y_n-x)-(y_m-x)\|^2 &= 2\left(\|y_n-x\|^2 + \|y_m-x\|^2\right) - \|y_n+y_m-2x\|^2 = \\ &= 2\left(\|y_n-x\|^2 + \|y_m-x\|^2\right) - 4\,\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\|^2 \le \\ &\le 2\left(\|y_m-x\|^2 + \|y_n-x\|^2\right) - 4d^2 \ ,\end{aligned}$$

z čehož vyplývá, že posloupnost $\{y_n\}$ je cauchyovská. Označme její limitu y; je $y_n \to y$ a $\|x-y\| = d$. Pokud by existovaly dva prvky y_1, y_2 s touto vlastností, musela by být podle předcházející úvahy posloupnost $\{y_1, y_2, y_1, y_2, \dots\}$ cauchyovská a tedy konvergentní, tj. $y_1 = y_2$. □

Označení 1.1.17. Jestliže pro $x, y \in H$ platí $(x, y) = 0$, říkáme, že x, y jsou *ortogonální*; píšeme pak $x \perp y$. Jestliže pro všechna $x \in A, y \in B$ je $x \perp y$, píšeme $A \perp B$ a množiny A, B nazýváme též *ortogonální*. Množinu *všech* $y \in H$, pro které je $y \perp A$ (tak zkráceně zapisujeme $\{y\} \perp A$), značíme $A^\perp$; podobně píšeme $x^\perp$ místo $\{x\}^\perp$.

Poznámka 1.1.18 (důležitá). Z linearity skalárního součinu a jeho spojitosti plyne, že pro každé $x \in H$ platí: (1) $x^\perp$ *je lineární podprostor* H a (2) $x^\perp$ *je uzavřený*. Odtud jednoduše plyne přechodem k průnikům, že též $M^\perp$ je uzavřený podprostor H: zobrazení $x \mapsto (y, x)$ je spojité, lineární, a tedy množina $\{x;\, (y, x) = 0\}$ je *uzavřený* lineární podprostor H. Množina $M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp$ je uzavřený podprostor pro *každou* množinu M.

Věta 1.1.19. *Nechť M je uzavřený lineární podprostor v H a $x \in H$. Potom existuje $y \in H$ tak, že $x = y + z$ a $z \in H^\perp$. Tyto prvky jsou určeny jednoznačně.*

Důkaz. Je-li $x \in H$, volme za $y \in M$ prvek, jehož existenci zaručuje předcházející Věta 1.1.16. Poznamenejme, že tvrzení je triviální v případě $x \in M$, kdy $z = 0$. Pro $w \in M$, $w \neq 0$, je $y + \alpha w \in M$ pro všechna α a

$$\|x - (y + \alpha w)\| \geq \|x - y\| = d\ .$$

Označme $z = x - y$ a upravme poslední nerovnost umocněním:

$$(z - \alpha w, z - \alpha w) = \|z\|^2 - \alpha(w, z) - \overline{\alpha}(z, w) + |\alpha|^2 \geq \|z\|^2\ .$$

Nyní po úpravě a dosazení $\alpha = (z, w)/\|w\|^2$ dostaneme

$$-|(w, z)|^2 - |(w, z)|^2 + \frac{|(w, z)|^2}{\|w\|^4}\|w\|^2 = -|(w, z)|^2 \geq 0\ ,$$

takže $(w, z) = 0$, a proto $z \in M^\perp$. Pokud $y_1 \in M$ a $z_1 \in M^\perp$ jsou takové, že $x = y_1 + z_1$, platí $y - y_1 \in M$, $z - z_1 \in m^\perp$ a také $y - y_1 = z_1 - z$. Proto

$$\|y - y_1\|^2 = (y - y_1, z_1 - z) = 0\ ,$$

a tedy $y = y_1$ a $z = z_1$. □

Poznámka 1.1.20. Dá se ukázat, že v předchozím kontextu jsou y a z projekce x na M a $M^\perp$. Pokud je $M \neq H$, pak existuje nenulové $z \in H$, $z \perp M$, neboť pro $x \in H \setminus M$ je $x = y + z$ a $z \neq 0$.

Definice 1.1.21. Řekneme, že $\{x_\alpha\,;\ \alpha \in A\}$ je *ortonormální systém* (též: *ortonormální množina*), pokud

$$\|x_\alpha\| = 1 \text{ pro všechna } \alpha \in A$$

a vektory x_α jsou *po dvou ortogonální*, tj. použijeme-li Kroneckerova symbolu $\delta_{\alpha\beta} = 1$ pro $\alpha = \beta$ a $\delta_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha \neq \beta$, platí rovnost

$$(x_\alpha, x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}\,, \quad \alpha, \beta \in A \quad .$$

Poznámka 1.1.22. Ortonormální systém $\{x_k\}$ je tvořen lineárně nezávislými vektory. Je-li $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$, pak postupným násobením prvky $x_1, \ldots, x_n$ dostaneme $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Úmluva 1.1.23. V dalším budeme často pracovat s ortonormálními systémy vektorů v Hilbertově prostoru H. Všude v dalším výkladu *budeme předpokládat, že tento prostor H je separabilní*, tj. že obsahuje *spočetnou* hustou podmnožinu; obecně Hilbertův prostor nemusí být separabilní, tím se však některé úvahy *technicky* zkomplikují.

Lemma 1.1.24. *Je-li H separabilní a A je ortonormální systém v H. Potom systém A je konečný nebo nekonečný spočetný.*

Důkaz. Jestliže $\|x\| = \|y\| = 1$ a $x \perp y$, pak

$$(x - y, x - y) = (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2\ ,$$

a tedy $\|x - y\| = \sqrt{2}$. Protože existuje spočetná $S = \{z_k\}$ taková, že $\overline{S} = H$, lze ke každému $x \in A$ zvolit takové $z_k \in S$, že $\|x - z_k\| < \sqrt{2}/3$. K y podobně najdeme prvek z_l s analogickou vlastností. Protože platí

$$\sqrt{2} = |x - y| = |x - z_k| + |z_k - z_l| + |z_l - y| < 2\sqrt{2}/3 + |z_k - z_l|\ ,$$

je $\|z_k - z_l\| > \sqrt{2}/3$. Tak jsou prvkům A jednoznačně přiřazeny různé prvky spočetné množiny S a proto je A spočetná. $\square$

Lemma 1.1.25. *Nechť $\{x_k; k = 1, \ldots, n\}$ je ortonormální systém v Hilbertově prostoru H. Potom pro libovolné skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ z pole příslušného k H platí*

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} (x, x_k) x_k\| \leq \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\|\ .$$

Důkaz. Dokážeme, že platí

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} (x, x_k) x_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - (x, x_k)|^2 = \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\|^2 .$$

Spočteme nejprve

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - (x, x_k)|^2 &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - (x, x_k))\,\overline{(\alpha_k - (x, x_k))} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(|\alpha_k|^2 - \alpha_k (x_k, x) - \overline{\alpha}_k (x, x_k) + |(x, x_k)|^2\right)\ .\end{aligned}$$

Nyní již snadno dostaneme rovnost

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\|^2=\Big(x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\,,\,x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\Big)=$$

$$=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x_k,x)-\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_k}\,(x,x_k)+\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2=$$

$$=\|x\|^2+\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k-(x,x_k)|^2-\sum_{k=1}^{n}|(x,x_k)|^2\ .$$

Druhý člen ve výrazu na pravé straně rovnosti je nezáporný a nabývá hodnoty 0, právě když platí

$$\alpha_k=(x,x_k)\,,\quad k=1,\dots,n\ . \tag{1.15}$$

Zbytek je zřejmý. □

Poznámka 1.1.26. Vzniká přirozená otázka, jak lze ortonormální systém v nějakém Hilbertově prostoru H získat. Každý konečný lineárně nezávislý systém A prvků unitárního prostoru lze nahradit ortonormálním systémem B tak, že $\mathrm{Lin}[A]=\mathrm{Lin}[B]$. To se prakticky provádí tzv. Gramm-Schmidtovým ortogonalizačním procesem. Při něm se postupně z báze H sestrojuje ortonormální systém, přičemž každý krok procesu přímo souvisí s popsanou konstrukcí. Je-li např. $\{y_k\}$ nekonečná posloupnost lineárně nezávislých prvků H a jsou již nalezeny ortonormální prvky $x_1,\dots,x_n$ tak, že platí rovnost $\mathrm{Lin}[x_1,\dots,x_n]=\mathrm{Lin}[x_1,\dots,x_n]$, pak sestrojíme k y_{n+1} prvky y a z podle Věty 1.1.19, kde je

$$y=\sum_{k=1}^{n}(x,x_k)x_k\ ,\quad z=x-y\ ,$$

a položíme $x_{n+1}=z/\|z\|$. Ortogonalizační proces a jeho technika je zpravidla předmětem výkladu v algebře.

Definice 1.1.27. Je-li $\{x_k\,;\ k\in\mathbb{N}\}=\{x_k\}$ ortonormální systém v Hilbertově prostoru H , pak číslům (x,x_k) říkáme *Fourierovy koeficienty* vzhledem k systému $\{x_k\,;\ k\in\mathbb{N}\}$. Budeme je značit

$$\hat{x}(k)=(x,x_k)\,,\quad k\in\mathbb{N}\ .$$

Důsledek 1.1.28. *Nechť $\{x_k\}$ je ortonormální systém v Hilbertově prostoru H a nechť $x\in H$ a $\hat{x}(k)=(x,x_k)$. Potom platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\hat{x}(k)|^2\le\|x\|^2\ . \tag{1.16}$$

Důkaz. K (1.16) dospějeme takto: je-li H Hilbertův prostor a $\{x_k\,; k=1,\ldots,n\}$ je ortonormální systém v H, odvodili jsme si pro každé $x \in H$

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - (x,x_k)|^2 - \sum_{1}^{m} |(x,x_k)|^2 \ .$$

Odtud dostáváme volbou Fourierových koeficientů na místě α_k

$$\sum_{k=1}^{n} |(x,x_k)|^2 = \|x\|^2 - \|x - \sum_{k=1}^{n}(x,x_k)x_k\|^2, \quad \text{a tedy} \quad \sum_{k=1}^{n} |(x,x_k)|^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

Přechodem k supremu na levé straně plyne odtud (1.16), což je tzv. *Besselova nerovnost.* □

Poznámka 1.1.29. Snadno nahlédneme, že při daném ortonormálním systému $\{x_k\}$ je prvek $\sum_{k=1}^{\infty}(x,x_k)\,x_k$, jednoznačně určen pomocí $\hat{x} : k \mapsto (x,x_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Poznámka 1.1.30. Uveďme bez důkazů některá důležitá fakta, navazující na látku z teorie integrálu. Týkají se prostoru (tříd) funkcí, pro které je

$$\|f\|_2 := \int_a^b |f(t)|^2 dt \ < \infty \ . \tag{1.17}$$

Zde se pracuje s *třídami funkcí* (dle rovnosti λ-skoro všude, kde λ je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}$, běžně se však nerozlišuje mezi těmito třídami a funkcemi, které je reprezentují. Tzv. *Hölderova nerovnost* má tvar

$$\int_a^b \big|f(t)g(t)\big|dt \ \leq \Big(\int_a^b \big|f(t)\big|^2 dt\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_a^b \big|g(t)\big|^2 dt\Big)^{1/2} \ .$$

Snadno se pak dá dokázat, že na komplexním (resp. reálném) $\mathcal{L}^2((a,b))$ lze tuto normu definovat pomocí skalárního součinu

$$(f,g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \ \ . \tag{1.18}$$

Pro další výklad je zejména podstatné, že $\mathcal{L}^2((a,b))$ je Hilbertův prostor, tj. že je *úplný.* Toto tvrzení, které je mimořádně důležité, uvádíme bez důkazu. Poznamenáváme, že právě v něm hraje prominentní roli Lebesgueův integrál.

Věta 1.1.31. *Prostor $\mathcal{L}^2((a,b))$ je úplný, separabilní a je to vzhledem ke skalárnímu součinu definovanému pomocí (1.17) Hilbertův prostor.*

Rovnost $\hat{x}(k) = (x,x_k)$ definuje spojitý lineární funkcionál a proto je zobrazení $F : H \to l^2$, přiřazující $x \mapsto \hat{x}$, lineární. Z nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(k) - \hat{y}(k)|^2 \leq \|x-y\|^2$$

plyne spojitost F.

Je důležité zkoumat, kdy je v předchozím kontextu F zobrazením *na* l^2 a izometrií. Důkaz následující věty se zdá lehký jen proto, že pracujeme s úplným prostorem.

Věta 1.1.32 (F. Riesz, Fischer 1907). *Nechť $\{x_k\} \subset H$ je ortonormální systém a nechť $\varphi(k) \in l^2$. Potom existuje $x \in H$ tak, že je $\varphi = \hat{x}$, řada $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) x_k$ konverguje v H a platí $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(k)|^2\right)^{1/2}$.*

Důkaz. Označme $x_n := \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) x_k$. Potom pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, platí

$$\|x_m - x_n\|^2 = \Big(\sum_{k=n+1}^{m} \varphi(k) x_k \, , \sum_{k=n+1}^{m} \varphi(k) x_k \Big) = \sum_{k=n+1}^{m} \|\varphi(k)|^2 \ .$$

Protože však řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(k)|^2$ konverguje, je poslední součet v předchozím vztahu libovolně malý pro všechna $m > n$, jakmile je $n \in \mathbb{N}$ dostatečně velké, čímž je důkaz dokončen. Jde prakticky o odhad zbytkem konvergentní řady po n-tém členu. □

Dokázali jsme tedy, že *s ohledem na úplnost* H je zobrazení $F : H \to l^2$ vždy *na*. Nás samozřejmě nejvíce zajímá, kdy lze každé $x \in H$ v separabilním Hilbertově prostoru vyjádřit pomocí určité ortonormální množiny $\{x_k\}$, a to ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k) x_k \ ,$$

což je *Fourierova řada v* H. Nejprve uveďme jednu definici.

Definice 1.1.33. Maximální ortonormální množinu v Hilbertově prostoru H nazýváme *ortonormální báze Hilbertova prostoru* [2]. Je to tedy taková ortonormální množina $B \subset H$, že pro každou ortonormální množinu B_1 v H, $B \subset B_1$, platí $B = B_1$.

Věta 1.1.34. *Nechť $B := \{w_k\} \subset H$ je ortonormální v H. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(1) *B je báze Hilbertova prostoru H;*

(2) *všechny* konečné *lineární kombinace prvků z B tvoří hustou podmnožinu H, tj.* $\overline{\mathrm{Lin}[B]} = H$*;*

(3) *jestliže pro všechna w_k, $k \in \mathbb{N}$, platí $(x, w_k) = 0$, pak $x = 0$;*

(4) *pro všechna $x \in H$ je $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k) w_k$;*

(5) *Pro všechna $x, y \in H$ je*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}(k) \overline{\hat{y}(k)} \ .$$

[2] Dvojslovný název je „nedělitelný“; báze lineárního prostoru a ortonormální báze jsou podstatně rozdílné pojmy. Viz ještě dále.

(6) *pro všechna $x \in H$ platí tzv. Parsevalova rovnost*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(k)|^2 \tag{1.19}$$

Důkaz. Dokážeme sérii implikací (1) $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2) : Zřejmě je $\mathrm{Lin}[B]$ lineární podprostor H a proto je $\overline{\mathrm{Lin}[B]}$ uzavřený lineární podprostor H, neboť snadno ověříme, že

$$x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow\ x_n + y_n \to x + y\,, \ldots$$

Při $\overline{\mathrm{Lin}[B]} \neq H$ je $\overline{\mathrm{Lin}[B]}^{\perp}$ netriviální a tedy B není maximální, což dává ekvivalentní výrok non (2) $\Rightarrow$ non (1).

(2) $\Rightarrow$ (3) : Jestliže platí $(x, w_k) = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, je i $(x, y) = 0$ pro každé $y \in \mathrm{Lin}[B]$ a ze spojitosti skalárního součinu i pro každé $y \in \overline{\mathrm{Lin}[B]} = H$, tedy je i $(x, x) = 0$ a $x = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Pro každé $w_l \in B$ a každé $x \in H$ dostáváme

$$\Big(x - \sum_{k=1}^{\infty}(w_k, x)w_k\,,\, w_l\Big) = (x, w_l) - \sum_{k=1}^{\infty}(w_k, x)(w_k, w_l) =$$
$$= (x, w_l) - (x, w_l) = 0\ ,$$

což dává potřebné tvrzení.

(4) $\Rightarrow$ (5) : Pro každá dvě $x, y \in H$ dostáváme

$$(x, y) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(w_k, x)w_k\,,\, \sum_{l=1}^{\infty}(w_l, y)w_l\Big) =$$
$$= \sum_{[k,l]}(x, w_k,)(w_k, w_l)\overline{(y, w_l)} = \sum_{m=1}^{\infty}(x, w_m)\overline{(y, w_m)}\ .$$

(5) $\Rightarrow$ (6) : Nyní stačí do tvaru z (5) dosadit $x = y$.

(6) $\Rightarrow$ (1) : Budeme postupovat sporem: Předpokládejme, že existuje nenulové $z \in H \setminus B$, $\|z\| = 1$. Uvažujme ortonormální množinu $B_1 = B \cup \{z\}$. Pomocí (6) a Besselovy nerovnosti dostaneme

$$\|z\| = \sum_{k=1}^{\infty} |(z, w_k)|^2 < \sum_{k=1}^{\infty} |(z, w_k)|^2 + |(z, z)|^2 \leq \|z\|$$

Nalezený spor ukazuje, že B je maximální. Tím je důkaz „kolečka implikací“ dokončen.

□

Na závěr ještě připomeňme několik poznatků, které jsou převážně algebraického charakteru a které dokazovat nebudeme.

Tvrzení 1.1.35. *V každém lineárním prostoru X existuje* báze (*podle definice je to množina A lineárně nezávislých prvků, pro kterou lineární obal* $\mathrm{Lin}[A]$ *je roven* X). *Každý lineárně nezávislý systém lze doplnit na bázi.*

Toto tvrzení se dokazuje pomocí Zornova lemmatu či podobného aparátu. Poznamenejme, že báze A je *maximální množinou* lineárně nezávislých prvků v následujícím smyslu: Pokud by existovala $A_1 \subset X$, $A \subset A_1$ a $A_1 \setminus A \neq \emptyset$, pak prvek $x \in A_1 \setminus A$ neleží v $\mathrm{Lin}[A]$ a A není tudíž báze X.

Tvrzení 1.1.36. *Každou ortonormální množinu $B \subset H$ lze doplnit na maximální ortonormální množinu, tj. ortonormální bázi.*

Tato věta se dokazuje podobně jako věta o existenci báze lineárního prostoru na základě Zornova lemmatu nebo některého jiného tvrzení s ním ekvivalentního (jsou to tvrzení ekvivalentní axiomu výběru). Ani tuto větu dokazovat nebudeme.

Poznámka 1.1.37. Je vhodné si uvědomit, že maximální ortonormální množina v H není *obecně* bází. V prvém případě pracujeme s *konečnými lineárními kombinacemi* (a bez jakékoli topologie apod.), v druhém případě využíváme i topologické vlastnosti prostoru. Vágně řečeno, pracujeme s *nekonečnými* lineárními kombinacemi. Proto též obecně dimenze prostoru H, tj. mohutnost jeho *báze*, může být větší než mohutnost jeho *ortonormální báze*. Uvědomte si rozdíl mezi $\mathrm{Lin}[A] = H$ a $\overline{\mathrm{Lin}[H]} = H$.

V $\mathbb{R}^m$ je ortonormální báze zároveň bází, avšak např.v „reálném“ l^2 tvoří vektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots)$, ... maximální ortonormální množinu B, její lineární obal $\mathrm{Lin}[B]$ je však složen pouze z posloupností $x = (x_1, x_2, \dots)$ takových, pro něž je $\{k \in \mathbb{N}; x_k \neq 0\}$ *konečná*. Všechny takové posloupnosti tvoří lineární podprostor l^2, který je *vlastním podprostorem* l_2. Naproti tomu pro každé $x \in l^2$ je

$$x = (x_1, x_2, \dots) = \sum_{1}^{\infty} x_k \mathbf{e}_k \,, \quad x \in l^2 \;.$$

V tomto případě ortonormální báze není bází l^2.

S důležitým příkladem ortonormální báze v $\mathcal{L}^2((0, 2\pi))$ se seznámíme dále, dříve se však seznámíme se zavedením komplexních čísel a některých komplexních funkcí komplexní proměnné. Následující výklad je zkrácenou verzí Kapitoly 11 v [7]. Má-li čtenář tato skripta k dispozici, lze si látku z Kapitoly 2 tohoto textu nastudovat odtamtud. Také k látce z Kapitoly 1 existuje několik českých (slovenských) učebnic a skript, Hilbertovy prostory tvoří standardní látku textů o funkcionální analýze. Tam se ovšem probírají podrobněji.

Literatura:

V dalších kapitolách z prostorových důvodů již nebudeme literaturu uvádět a tak se níže uvedené položky váží i k dalšímu textu.

[1] Bressoud, D.: *A radical approach to real analysis*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994.

[2] Kadlec, J., Kufner, A.: *Fourierovy řady*, Academia, Praha, 1969.

[3] Kufner, A.: *Geometrie Hilbertova prostoru*, SNTL, Praha, 1973.

[4] Natanson, I. P.: *Těorija funkcij dějstvitělnoj peremennoj*, GITTL, Moskva, 1953.

[5] von Neumann, J.: *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Göttingen Nachr., 1927, str. 1-57.

[6] Stromberg, K. R.: *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

[7] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele*, Matfyzpress, Praha, 1997.