Kapitola 2

Vybrané poznatky o řadách

2.1 Komplexní čísla

Jedním z našich cílů je zobecnění poznatků o posloupnostech a řadách na případ posloupností a řad s *komplexními* členy. Obor komplexních čísel $\mathbb{C}$ nám umožní lépe studovat některé jevy, například chování tzv. mocninných řad. Jeho zavedení není složité, pokud již obor $\mathbb{R}$ pokládáme za známý.

Definice 2.1.1. Komplexní čísla jsou uspořádané dvojice reálných čísel. Množinu všech komplexních čísel budeme značit $\mathbb{C}$. Je-li $z = [\,x, y\,] \in \mathbb{C}$, pak číslo x nazýváme *reálná část* čísla z a číslo y *imaginární část* čísla z. Píšeme

$$x = \operatorname{Re} z \ , \quad y = \operatorname{Im} z \ .$$

Pro komplexní číslo $[\,0, 1\,]$ zavádíme speciální označení písmenem i. Dále definujeme *sčítání* a *násobení* komplexních čísel (užíváme opět $+$ a $\cdot$ k označení operací včetně konvence o vynechávání znaku $\cdot$ pro násobení) takto: jsou-li $z_1 = [\,x_1, y_1\,]$, $z_2 = [\,x_2, y_2\,]$ komplexní čísla, klademe

$$z_1 + z_2 := [\,x_1 + x_2,\, y_1 + y_2\,] \ , \quad z_1 z_2 := [\,x_1 x_2 - y_1 y_2,\, x_1 y_2 + x_2 y_1\,] \ .$$

Komplexní čísla si často geometricky znázorňujeme pomocí bodů v rovině: číslu $[\,x, y\,]$ odpovídá bod roviny o souřadnicích x, y. Proto se často pro $\mathbb{C}$ užívá též názvů *komplexní rovina*, nebo *rovina komplexních čísel*, nebo *Gaussova rovina*.

Poznámka 2.1.2 (důležitá). Snadno vidíme, že pro dvojice s nulovou imaginární částí jsou takto zavedené operace ve shodě s operacemi v $\mathbb{R}$:

$$[\,x_1, 0\,] + [\,x_2, 0\,] = [\,x_1 + x_2, 0\,] \ , \qquad [\,x_1, 0\,] \cdot [\,x_2, 0\,] = [\,x_1 x_2, 0\,] \ ;$$

můžeme tedy množinu všech těchto komplexních čísel „ztotožnit“ s $\mathbb{R}$. Zavedené operace vyhovují v $\mathbb{C}$ stejným požadavkům, jako byly ty, které jsme použili k zavádění $\mathbb{R}$ pod čísly (1) – (9); proto je $\mathbb{C}$ pole. Je vhodné uvážit, že prvek opačný k číslu $z = [x, y] \in \mathbb{C}$ je číslo $-z = [-x, -y] \in \mathbb{C}$ a prvek inverzní k číslu $z = [x, y] \in \mathbb{C}$, $[x, y] \neq [0, 0]$, je číslo

$$\frac{1}{z} = \left[\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right] \in \mathbb{C} \ .$$

Ověření se provede přímým výpočtem. Mnoho pojmů, které dále používáme, se zavede analogicky jako v případě $\mathbb{R}$, tedy např. induktivně zavedeme pro všechna $z \in \mathbb{C}$ mocniny

$$z^0 = 1, \ z^1 = z, \ z^2 = z \cdot z, \ldots, z^{n+1} = z \cdot z^n \ ,$$

a to pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Polynomy definujeme jako jejich lineární kombinace (ovšem s koeficienty z $\mathbb{C}$!) a racionální funkce jako podíly polynomů. Speciálně definujeme

$$z^{-n} = 1/z^n \ , \quad z \neq 0, \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Analogicky pracujeme s konvencí o definičním oboru: maximální množinu, kde má „předpis smysl“, hledáme však v $\mathbb{C}$. Zavedení dalších elementárních funkcí je složitější, u odmocnin je řeší algebra. Všimněte si, že je $1^2 = (-1)^2 = 1$. Podobně je

$$i^2 = i \cdot i = [0, 1] \cdot [0, 1] = [-1, 0] = -1 \ , (-i)^2 = -1 \ .$$

Pokud bychom tedy hledali množinu, na které je funkce $z \mapsto z^2$ prostá, nemůže tato množina obsahovat ani $\mathbb{R}$, ani množinu $\{ix;\, x \in \mathbb{R}\}$. Je-li $[x, y] \in \mathbb{C}$, pak

$$x + iy = [x, 0] + i[y, 0] = [x, 0] + [0, 1] \cdot [y, 0] = [x, 0] + [0, y] = [x, y] \ ,$$

takže lze komplexní čísla zapisovat i ve tvaru, který je znám ze střední školy. Pozor, z rovnosti $z = x + iy$ obecně neplyne, že $x, y \in \mathbb{R}$, tj. $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Kdykoli však dále použijeme zápis čísla ve tvaru $x + iy$, pak *předpokládáme*, že již platí $x, y \in \mathbb{R}$; je to další konvence, kterou používáme.

Definice 2.1.3. Je-li $z = x + iy$, nazýváme číslo $\overline{z} := x - iy$ číslem *komplexně sdruženým* k číslu z.

Snadno nahlédneme, že pro $z = x + iy$ je $z\overline{z} \geq 0$, neboť platí

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \ ;$$

proto lze definovat pro všechna $z \in \mathbb{C}$

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

Pokud znázorňujeme komplexní čísla jako body roviny, je $|z|$ vzdálenost bodu $z = [x, y]$ od počátku. Analogicky jako v reálném oboru můžeme definovat $\operatorname{sgn} z = z/|z|$ pro $z \neq [0, 0] = 0$, přičemž klademe $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Tato definice je opět rozšířením definice funkce sgn z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$. Pro $z \neq 0$ jsme výše ukázali, že platí $z^{-1} = \overline{z}/z\overline{z}$.

Velmi důležitý je fakt, že pro absolutní hodnotu platí i v $\mathbb{C}$ *trojúhelníková nerovnost*. To lze dokázat různě, např. přímo z definice.

Lemma 2.1.4. *Pro každá dvě čísla* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *platí*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \ .$$

Důkaz. Postupujme „přirozeně“: nechť $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Dokažme nejprve, že platí nerovnost $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, neboli

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \ .$$

Po umocnění a úpravě dostaneme

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \ ,$$

avšak pro její platnost stačí znát nerovnost

$$|x_1 x_2 + y_1 y_2| \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \ , \tag{2.1}$$

ze které snadno plyne nerovnost předcházející. To je však speciální případ Cauchyovy nerovnosti. Dále platí

$$\begin{gathered} |z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2| \ , \ \text{tj.} \\ |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \ . \end{gathered}$$

Ze symetrie v z_1 a z_2 plyne

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2| \ , \ \text{takže platí} \ ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \ .$$

Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 2.1.5 (důležitá). Je vhodné si uvědomit, že na $\mathbb{C}$ *nezavádíme* relaci $<$ či $\leq$ jako na $\mathbb{R}$. Komplexní čísla lze uspořádat např. lexikograficky apod., ale ne tak, aby takové uspořádání mělo stejné vlastnosti jako uspořádání relací „$\leq$“ na $\mathbb{R}$, tj. aby byly splněny vlastnosti (10) – (12) z popisu $\mathbb{R}$. K tomu stačí zvážit, že $i \neq 0$ a že z obou nerovností $i > 0$ a $i < 0$ by z těchto vlastností plynulo

$$i^2 = -1 > 0 \ ,$$

což vede ke sporu. V $\mathbb{C}$ lze tedy porovnávat pomocí relací $<$, $\leq$, $>$ a $\geq$ pouze absolutní hodnoty komplexních čísel.

Všimněme si blíže ještě otázky, jaké vlastnosti $\mathbb{C}$ vyplývají z těch vlastností $\mathbb{R}$, které plynou z důležitého axiomu (13) o suprému. Ten souvisí úzce s posloupnostmi. Nejprve dokážeme jednoduché tvrzení o odhadech.

Lemma 2.1.6. *Pro $z = x + iy \in \mathbb{C}$ platí nerovnosti*

$$0 \leq |x| \leq |z| \ , \quad 0 \leq |y| \leq |z| \quad \text{a také} \quad 0 \leq |z| \leq |x| + |y| \ . \tag{2.2}$$

Důkaz. Obtížnější je snad pouze si uvědomit, že platí

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \ . \tag{2.3}$$

Nerovnost však stačí umocnit a upravit na tvar

$$|x| \cdot |y| \geq 0 \ .$$

Odtud dostaneme násobením obou stran nerovnosti číslem 2 a přičtením nezáporného čísla $x^2 + y^2$ k oběma jejím stranám další nerovnost, jejíž snadnou úpravou a odmocněním dostaneme (2.3) [1]. □

Definice 2.1.7. Nechť $\{z_n\}$ je posloupnost komplexních čísel, $z_n = x_n + iy_n$, a nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, resp. $z_n \to z$ pro $n \to +\infty$, pokud je

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \ .$$

Poznámka 2.1.8. Snadno nahlédnete, že tuto definici lze přepsat i pomocí okolí: je-li $\mathcal{U}_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C}; |z - w| < \varepsilon\}$, pak $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ znamená

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(z_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(z)) \ .$$

Tak jako v reálném oboru říkáme, že posloupnost $\{z_n\}$ *konverguje* k z. Pojmy typu nevlastních limit v $\mathbb{C}$ zavádět nebudeme. Z Lemmatu 2.1.6 dostaneme okamžitě následující *důležitý* poznatek.

Věta 2.1.9. *Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$, a nechť $z = x + iy$. Potom $z_n \to z$, právě když $x_n \to x$ a současně $y_n \to y$.*

Důkaz. Stačí zvážit, že podle Lemmatu 2.1.6 platí

$$\left.\begin{matrix} |x_n - x| \\ |y_n - y| \end{matrix}\right\} \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \ . \tag{2.4}$$

Platí-li $z_n \to z$ dostaneme z první nerovnosti v (2.4) $x_n \to x$ a zároveň $y_n \to y$. Z druhé nerovnosti plyne zbytek tvrzení. □

Z předchozí věty lehce vyplývá, že v $\mathbb{C}$ platí např. věty o posloupnostech a aritmetických operacích, nebudeme je však uvádět a dokazovat znovu, neboť by to bylo nudné opakování něčeho, co jsme již dělali. Posuďte to sami na základě (důležitého) příkladu, dříve však uveďme jednu „zřejmou“ definici.

[1] Tento krok se velmi často vynechává s odvoláním na „ekvivalentní úpravy“, nic takového jsme však nezavedli a tak nám nezbývá, než se alespoň přesvědčit, že nic nebrání „cestě zpět“ k žádanému výsledku.

Definice 2.1.10. Budeme říkat, že posloupnost $\{z_n\}$ *komplexních čísel* splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku (kratčeji: je *cauchyovská*), platí-li

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq k)(|z_m - z_n| < \varepsilon) \; .$$

Velmi jednoduše dokážeme, že $\mathbb{C}$ má s $\mathbb{R}$ společnou důležitou vlastnost, popsanou v následující větě.

Věta 2.1.11. *Posloupnost komplexních čísel $\{z_n\}$ je konvergentní v $\mathbb{C}$, právě když je cauchyovská.*

Důkaz. Jedna část ekvivalence byla triviální i v $\mathbb{R}$. Je-li $z_n \to z$, pak

$$|z_m - z_n| \leq |z_n - z| + |z_m - z|$$

naznačuje, jak se její důkaz provádí. Druhá část však také není obtížná, neboť to obtížné jsme již „odpracovali“ v $\mathbb{R}$. Je-li $\{z_n\}$ cauchyovská posloupnost, pak pro reálné a imaginární části platí

$$|x_m - x_n| \leq |z_m - z_n| \; , \quad |y_m - y_n| \leq |z_m - z_n|$$

a tedy $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou cauchyovské posloupnosti v $\mathbb{R}$. To znamená, že jsou konvergentní; označme

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \; , \quad y := \lim_{n\to\infty} y_n \; ;$$

pak je zřejmé, že platí $z_n \to z \; = x + iy$. □

Definice 2.1.12. Součet s řady $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ komplexních čísel z_k definujeme analogicky jako v $\mathbb{R}$. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ klademe $s_n := \sum_{k=0}^{n} z_k$ a pokud existuje v $\mathbb{C}$ limita posloupnosti $\{s_n\}$, definujeme

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \; .$$

Příklad 2.1.13 (důležitý). Snadno vidíme, že platí např.

$$\sum_{0}^{\infty} |z_n| < \infty \;\Rightarrow\; \sum_{0}^{\infty} z_n \;\text{ konverguje} \; .$$

V $\mathbb{C}$ jsme nezavedli žádné nevlastní body, s touto záležitostí se vyrovnáme později. Pro řady v $\mathbb{C}$ nebudeme formulovat a dokazovat všechna tvrzení analogická tvrzením pro řady v $\mathbb{R}$. Povětšině je lze pouze převzít z „reálného“ případu.

Úmluva 2.1.14. Nyní bude výhodné *změnit úmluvu* a vynechávat u řad sčítací meze v případě, že sčítáme *od indexu* 0. To znamená, že píšeme

$$\sum a_k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ .$$

Poznámka 2.1.15. Jestliže vyšetřujeme konvergenci řady $\sum a_k$ s *komplexními členy* a_k, pak řada konverguje, právě když konvergují řady $\sum \operatorname{Re} a_k$ a $\sum \operatorname{Im} a_k$. Pak také platí

$$\sum a_k = \sum \operatorname{Re} a_k + i \sum \operatorname{Im} a_k \ .$$

Podobně, připomeneme-li definice

$$a_k^+ := (|a_k| + a_k)/2 \ , \quad a_k^- := (|a_k| - a_k)/2 \ ,$$

je pak zřejmě $a_k = a_k^+ - a_k^-$, $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$ a řada $\sum a_k$ s *reálnými členy* a_k *konverguje absolutně*, právě když konvergují řady s nezápornými členy $\sum a_k^+$ a $\sum a_k^-$. Pak také platí

$$\sum |a_k| = \sum (a_k^+ + a_k^-) = \sum a_k^+ + \sum a_k^- \ .$$

Skutečně, snadno nahlédneme, že při divergenci právě jedné z řad $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ řada $\sum a_k$ diverguje. Proto pro *neabsolutně konvergentní* řadu, kdy $\sum a_k$ konverguje a $\sum |a_k| = \infty$ musí současně platit

$$a_k \to 0 \quad a \quad \sum a_k^+ = \sum a_k^- = \infty \ .$$

Neabsolutně konvergentní řady lze „přerovnat k libovolnému součtu“, případně po přerovnání mohou i divergovat, což by mělo být čtenáři známo. Pro připomenutí uvedeme ilustrativní příklad: použijeme-li schematický zápis, je

$$\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \ , \\ s/2 &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots \ ; \end{aligned}$$

vložení nulových členů neovlivní konvergenci ani součet řady. Z předchozího vyplývá sečtením obou konvergentních řad člen po členu

$$3s/2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Vzhledem k tomu, že je $s \neq 0$, neboť je $s \in (1/2, 1)$, změnil se „přeskupením členů“ (neabsolutně konvergentní) řady její součet.

Pro *absolutně konvergentní* (dříve též *bezpodmínečně konvergentní*) řady se ukazuje, že tento jev nastat nemůže. Připomeneme nejprve pojem *přerovnání* řady. Přerovnání si nejsnáze představíme jako „nekonečnou permutaci“

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \end{pmatrix} .$$

Je to prosté zobrazení φ množiny $\mathbb{N}_0$ na množinu $\mathbb{N}_0$.

Definice 2.1.16. Je-li $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ prosté zobrazení *na* množinu $\mathbb{N}_0$, potom řadu $\sum b_k := \sum a_{\varphi(k)}$ nazýváme *přerovnání řady* $\sum a_k$.

Lemma 2.1.17. *Nechť $\sum a_k$ je řada s nezápornými členy a řada $\sum b_k$ její libovolné přerovnání. Potom platí*

$$\sum a_k = \sum b_k \ .$$

Důkaz. Protože řada $\sum a_k$ je přerovnáním $\sum b_k$, právě když řada $\sum b_k$ je přerovnáním $\sum a_k$, stačí dokázat

$$\sum b_k \leq \sum a_k \ . \tag{2.5}$$

Označme $n_0 = \max\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$. Pak platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ ,$$

Odtud plyne při $n \to \infty$ nerovnost (2.5). Tím je tvrzení dokázáno. □

Věta 2.1.18. *Nechť řada komplexních čísel $\sum a_k$ konverguje* absolutně. *Potom pro její libovolné přerovnání $\sum b_k$ platí*

$$\sum b_k = \sum a_k \ . \tag{2.6}$$

Důkaz. Protože řada $\sum |b_k|$ je přerovnáním řady $\sum |a_k|$, konverguje i řada $\sum b_k$ absolutně. Větu stačí dokázat pro řady s reálnými členy, protože pro řady s komplexními členy pak vyplyne rozkladem „člen po členu“ na reálnou a imaginární část. Dále tedy pracujeme s řadami s reálnými členy.

Pro součty řad platí

$$\sum a_k^+ = \sum b_k^+ \ , \quad \sum a_k^- = \sum b_k^- \ ,$$

a je tedy

$$\begin{aligned} \sum b_k &= \sum (b_k^+ - b_k^-) = \sum b_k^+ - \sum b_k^- = \\ &= \sum a_k^+ - \sum a_k^- = \sum (a_k^+ - a_k^-) = \sum a_k \ . \end{aligned}$$

□

Definice součinu řad není obecně *přirozená*. Schematický zápis

$$\left(\sum a_k\right) \cdot \left(\sum b_l\right) = \sum_{(k,l)} a_k b_l$$

ukazuje, že problém spočívá v „součtu přes spočetnou množinu", tj. v definici symbolu

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha \tag{2.7}$$

pro spočetnou množinu $A = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Ukazuje se, že existuje více možných přístupů k tomuto problému, které se od sebe liší. Vše se však zjednoduší, budeme-li násobit *pouze absolutně konvergentní řady.*

Věta 2.1.19. *Nechť $\sum a_k$, $\sum b_l$, jsou absolutně konvergentní řady a nechť platí*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = s_n \to x \ , \quad \sum_{l=0}^{n} b_l = t_n \to y \ , \quad n \to \infty \ .$$

Potom také řada

$$\sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} a_k b_l$$

absolutně konverguje a její součet je roven součinu xy.

Tvrzení nutně vyžaduje komentář: Pokud seřadíme všechny součiny $a_k b_l$ do nekonečné prosté posloupnosti a dostaneme tak řadu s těmito členy, která *konverguje absolutně*, konverguje tato řada podle předcházejícího výkladu k témuž součtu i po libovolném přerovnání. Můžeme si proto v tomto případě vždy vybrat vhodné prosté zobrazení $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, které je zobrazením *na* a sečíst „řadu"

$$\sum (a_k b_l)_{\varphi(k)} \ ,$$

kde hodnota $\varphi(k)$, tj. dvojice (k,l), určuje příslušný součin $a_k b_l$.

Důkaz. Označme

$$\sum |a_k| = X \ < \infty \ , \quad \sum |b_l| = Y < \infty \ .$$

Uvažujme pro $n \in \mathbb{N}_0$ částečný součet

$$\sum_{0 \le k,l \le n} |(a_k b_l)| = \left(\sum_{0}^{n} |a_k|\right)\left(\sum_{0}^{n} |b_l|\right) \le XY \ .$$

Tento odhad (sčítáme „po čtvercích“) platí pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Odtud vidíme, že řada ze součinů konverguje absolutně.

Zvolíme opět speciální φ, které nejvýstižněji charakterizuje rčení „po čtvercích“, tj. s pořadím dvojic indexů k, l součinů $a_k b_l$

$$\{\varphi(k)\}_{k=0}^{\infty} = \{(0,0), |(0,1),(1,1),(1,0), |(0,2),(1,2),(2,2),(2,1),(2,0), | \\ (3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(2,3),(1,3),(0,3), |(0,4), \dots\} ;$$

poznamenejme, že symbol | odděluje jednotlivé „čtverce“. Platí tedy (připomínáme znovu, že jsme definovali $\sum_{k=0}^{n} a_k = s_n$, ač se nyní sčítá od 0 !)

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{l=0}^{n} b_l\Big) = \lim_{n\to\infty} s_n t_n = xy .$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Definice 2.1.20. Jsou-li $\sum a_k$, $\sum b_l$ řady komplexních čísel, definujeme jejich *Cauchyův součin* jakožto řadu $\sum c_n$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Poznámka 2.1.21. Je na čtenáři, aby si rozmyslel toto: jestliže v *konvergentní řadě* $\sum a_k$ členy „uzávorkujeme“ podle schématu

$$a_0 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2} + \cdots ,$$

potom součet takto vzniklé řady je limitou posloupnosti $\{s_{n_0}, s_{n_1}, s_{n_2}, \dots\}$, což je vybraná nosloupnost z posloupnosti $\{s_{n_k}\}$. Je proto stejný jako součet původní řady. Z *divergentní řady* však může „uzávorkováním“ vzniknout konvergentní řada. Ukazuje se tedy, že při násobení absolutně konvergentních řad není rozhodující, že pracujeme s Cauchyovým součinem.

Příklad 2.1.22. Použijeme-li vzorec pro součet geometrické řady

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots ,$$

snadno odvodíme násobením řad

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k , \quad x \in (-1,1) . \tag{2.8}$$

Později tento vztah odvodíme jinými, snad dokonce jednoduššími, prostředky.

Příklad 2.1.23. Víme, že pro všechna $z \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$\exp z = \sum \frac{z^k}{k!} . \tag{2.9}$$

Určeme nyní ta $z \in \mathbb{C}$, pro která řada vpravo konverguje. K vyšetření absolutní konvergence užijeme podílové kritérium:

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| : \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|z|}{n+1} \ .$$

Odtud plyne s ohledem na

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 \ ,$$

že řada dle (limitního) podílového kritéria konverguje ***absolutně*** pro každé $z \in \mathbb{C}$.

Definice 2.1.24. Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ definujeme $\exp z$ vzorcem (2.9).

Podobně lze postupovat s goniometrickými funkcemi, pro které jsme v $\mathbb{R}$ také odvodili vyjádření řadami. Čtenář si snadno samostatně dokáže, že řady

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \ , \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ . \tag{2.10}$$

konvergují pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Pomocí vzorců (2.10) *definujeme* cos a sin v komplexním oboru. Snadno ověříme sečtením dvou konvergentních řad „člen po členu“, že pak platí rovnost

$$\exp iz = \cos z + i \sin z \ . \tag{2.11}$$

Čtenáře patrně napadne otázka, zda pak platí v celé komplexní rovině $\mathbb{C}$, tj. pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$, rovnost

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w \ ;$$

pomocí takové funkcionální rovnice jsme v $\mathbb{R}$ exponenciálu definovali a tak jsme z ní odvodili prakticky vše, co o ní dosud víme. Pak by patrně bylo možné analogicky postupovat i v $\mathbb{C}$. Nežli tento problém vyřešíme, všimneme si blíže řad, pomocí nichž jsme exp, cos a sin definovali. Tyto řady jsou velmi důležité a jejich výskyt v analýze je velmi častý. Připomeňme, že analogickou podobu má i geometrická řada, ta však již nekonverguje v celé komplexní rovině $\mathbb{C}$.

Definice 2.1.25. Nechť z, z_0 a a_k jsou pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ vesměs z $\mathbb{C}$. Řada tvaru

$$\sum a_k (z - z_0)^k \ , \tag{2.12}$$

se nazývá *mocninná řada.* Čísla a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, jsou *koeficienty* řady (2.12) a číslo z_0 je její *střed.*

Smysl takto zavedené „geometrické“ terminologie bude patrný z dalšího lemmatu. Všimneme si nejprve, jak vypadá *obor konvergence* řady (2.12), tj. množina všech takových $z \in \mathbb{C}$, pro něž (2.12) konverguje.

Lemma 2.1.26. *Nechť mocninná řada* (2.12) *konverguje v bodě* $\zeta \in \mathbb{C}$. *Potom* (2.12) *konverguje* absolutně *pro každé* $z \in \mathbb{C}$, *pro něž platí*

$$|z - z_0| < |\zeta - z_0| \ . \tag{2.13}$$

Důkaz. Pro $\zeta = z_0$ se řada redukuje na konečný součet, tedy absolutně konverguje; tento samozřejmý fakt není obsahem tvrzení. Nechť je tedy $\zeta \neq z_0$ a $z \in \mathbb{C}$ vyhovuje odhadu (2.13). Pak existuje $0 \leq M < \infty$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n(\zeta - z_0)^n| \cdot \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^n \ .$$

Existence M plyne z konvergence (2.12) v bodě ζ, odhadujeme jím velikost členů *konvergentní* řady. Pro vyšetřovanou řadu jsme tak našli konvergentní majorantu, kterou je geometrická řada s kvocientem menším než 1. □

Poznámka 2.1.27. Čtenář by si měl povšimnout, že ve skutečnosti bychom „vystačili“ s omezeností posloupnosti členů řady $\{a_k(\zeta - z_0)^k\}$, což je další možný znak, na kterém bychom mohli založit definici tzv. poloměru konvergence mocninné řady (viz níže).

Poznámka 2.1.28. Z (2.11) odvodíme vztah funkcí sin a cos k exponenciále. Je-li $x \in \mathbb{R}$, snadno nahlédneme, že platí také tzv. *Eulerovy vzorce*

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \ , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \ , \qquad x \in \mathbb{C} \ ; \tag{2.14}$$

Příklad 2.1.29 (důležitý). Procvičíme si prakticky násobení řad na dalším příkladě: legitimita výpočtu je důsledkem absolutní konvergence řady pro exponenciálu v $\mathbb{C}$. Platí

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\Big)\Big(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!}\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{z^m w^{n-m}}{m!(n-m)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} z^m w^{n-m}\Big) \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \ .\end{aligned}$$

Příklad 2.1.30 (důležitý). Pro funkce sin a cos dostáváme tzv. *Moivreovu formuli*

$$(\cos x + i \sin x)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$