Kapitola 3

Fourierovy řady

3.1 Trigonometrické řady

Poznámka 3.1.1. V Kapitole 1 o Hilbertových prostorech jsme pracovali s Lebesgueovým integrálem, nyní se však omezíme na práci s Riemannovým integrálem, pro který jsme dokázali řadu tvrzení. Dostaneme sice slabší výsledky, budou však opřeny o to, co jsme dokázali. V komentářích se Lebesgueovu integrálu vyhýbat nebudeme. Myšlenkově vycházíme z práce s $\mathcal{L}^2((-\pi,\pi))$ a z tzv. trigonometrického systému. Ten, jak uvidíme, je ortogonální. Místo ortonormalizace dáváme přednost modifikaci definice skalárního součinu. V řeči teorie míry tak při práci s 2π-periodickými funkcemi pracujeme s integrálem *vzhledem k násobku Lebesgueovy míry*; jde o jistou normalizaci, dostáváme tak pro $f \equiv 1$ rovnost $\|f\| = 1$. Někdy též bývá vhodné 2π-periodické funkce interpretovat jako funkce na jednotkové kružnici $\mathbf{T} \subset \mathbb{C}$. Je-li F funkce na $\mathbf{T}$, pak funkce $f(t) = F(e^{it})$, $t \in \mathbb{R}$, je 2π-periodická funkce na $\mathbb{R}$. I když jde o rozdílné objekty, někdy se ztotožňují. Je to vhodné mít na paměti, pokud čtenář bude porovnávat výsledky z různých zdrojů.

Prostor $\mathcal{L}^2((-\pi,\pi))$ je úplný Hilbertův prostor. Nejprve v tomto prostoru určíme vhodný úplný ortonormální systém. Skalární součin je v tomto případě dán vzorcem

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt \ . \qquad (3.1) \quad \{qq6\}$$

Pro $u_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, ověříme výpočtem

$$\begin{aligned}(u_m,u_n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}dt \ = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)t + i\sin(m-n)t)dt \ = \left\{\begin{array}{ll} 0 & m \neq n \ , \\ 1 & m = n \ . \end{array}\right.\end{aligned}$$

Proto tvoří $\{u_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ortonormální systém v $\mathcal{L}^2((-\pi,\pi))$; upozorňujeme na to, že před integrálem v definici skalárního součinu stojí faktor $1/(2\pi)$. Analogický výpočet lze provést též pro systém $\{1, \cos kt, \sin kt\}_{k=1}^{\infty}$ a dokázat, že tvoří ortogonální systém v $L^2((-\pi,\pi))$. Ze součtových a rozdílových vzorců pro sin a cos dostaneme

$$\begin{aligned} \sin kt \sin lt &= \tfrac{1}{2}[\cos(k-l)t - \cos(k+l)t] \ , \\ \cos kt \cos lt &= \tfrac{1}{2}[\cos(k-l)t + \cos(k+l)t] \ , \\ \sin kt \cos lt &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(k+l)t + \cos(k-l)t\right] \ . \end{aligned}$$

Pro $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, pak zřejmě je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt dt \ = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt dt \ = 0 \ ,$$

přičemž poslední integrál je roven 0 i pro $k = 0$. Odtud dostaneme pro $k \neq l$, $k, l \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \sin lt dt \ = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos lt dt \ = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos lt dt \ = 0 \ ,$$

přičemž poslední z integrálů je roven 0 i pro $k = l$. Konečně pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dt \ = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt \ = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt \ = \pi \ .$$

Všimneme si nyní blíže toho, jak spolu souvisí systém, složený z exponenciálních funkcí a systém s goniometrickými funkcemi. Ukazuje se, že jde prakticky pouze o dvojí vyjádření stejných věcí.

Definice 3.1.2. *Trigonometrická řada* je každá řada tvaru

{*qq1*}
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \ , \tag{3.2}$$

kde $t \in \mathbb{R}$ a $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$).

Je výhodné pracovat s *komplexními* koeficienty a dále klást $b_0 = 0$. *Trigonometrické polynomy* definujeme vztahem

{*qq2*}
$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \ , \tag{3.3}$$

kde opět $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Budeme užívat ještě další vyjádření;

upravíme následující součet:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikt} &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \mathrm{e}^{ikt} + c_{-k}\mathrm{e}^{-ikt}\right) = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(c_k(\cos kt + i\sin kt) + c_{-k}(\cos kt - i \sin kt)\big) = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \big((c_k + c_{-k})\cos kt + i(c_k - c_{-k})\sin kt\big)\ .\end{aligned}$$

Položíme-li nyní

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} \qquad , \quad b_k = i(c_k - c_{-k})\ , \quad \text{resp.}\\ c_k &= (a_k - ib_k)/2\ , \quad c_{-k} = (a_k + ib_k)/2\ ,\end{aligned}$$

a dále $s_0(t) = c_0 = (a_0/2)$, lze přepsat (3.2) a (3.3) do tvarů

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}\ , \quad \text{a} \quad \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikt}\ ; \tag{3.4}$$ {qq3}

jde o jiné vyjádření trigonometrických řad a trigonometrických polynomů. Obojí jsou, pokud ovšem nekonečná řada konverguje pro všechna $t \in \mathbb{R}$, 2π-periodickými funkcemi.

V teoretických úvahach často pracujeme se systémem $\{\mathrm{e}^{ikt}\}$, při praktických výpočtech častěji s „reálným“ systémem $\{1, \cos kt, \sin kt\}$. Následující lemma nám poslouží jako ilustrativní příklad.

{tripomoc}

Lemma 3.1.3. *Je-li $T(t)$ trigonometrický polynom, pak také $(T(t))^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $T(t+x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ jsou trigonometrické polynomy.*

Důkaz. Trigonometrický polynom je konečnou lineární kombinací funkcí $\{\mathrm{e}^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a mocniny těchto funkcí s přirozeným exponentem jsou opět funkcemi z tohoto systému. Podobně $\mathrm{e}^{ik(t+x)} = \mathrm{e}^{ikx}\cdot\mathrm{e}^{ikt}$ je (komplexním) násobkem e^{ikt}. Odtud již vyplývá tvrzení lemmatu. □

Poznámka 3.1.4. Při práci s 2π-periodickými funkcemi nemusíme vždy integrovat přes interval $(-\pi, \pi)$, ale přes jakýkoli interval délky 2π. To budeme v případě potřeby využívat. Snadno si lze rozmyslit, že 2π-periodicitu v našich úvahách lze nahradit periodicitou s obecnou periodou L (lineární substituce nám umožní přenést výsledky na obecnější případ) a že ve vzorcích pro koeficienty lze opět integrovat přes jakýkoli interval o délce L. Také studium funkce definované na obecném intervalu $[\,a, b\,]$ není problémem: při jejím studiu popsanými metodami pracujeme de facto s jejím rozšířením s periodou $(b-a)$ z intervalu $[\,a, b)$ na $\mathbb{R}$.

Následující větu, související s látkou o Hilbertových prostorech, pouze vyslovíme, dokazovat ji však nebudeme.

Věta 3.1.5. *Systémy* $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *a* $\{1, \cos kt, \sin kt\}_{k\in\mathbb{N}}$ *jsou úplné v* $L^2((0,2\pi))$.

První otázka, kterou si položíme, je jednoduchá. Je-li

{*trirasteko*}
$$f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \ , \quad t \in \mathbb{R} \ , \tag{3.5}$$

kde $a_k\,, b_k \in \mathbb{C}$, lze z funkce f toto vyjádření trigonometrickou řadou zrekonstruovat? To samozřejmě možné je a alespoň v některých případech je to i velmi jednoduché. Jestliže např. trigonometrická řada na pravé straně rovnosti (3.5) konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$, pak využijeme ortogonality trigonometrického systému a zkoumáme skalární součin funkce f s „jednotkovou funkcí". Tak dostaneme

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \ := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dt \ + \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \Big) dt \ \ ,$$

a protože u posledního integrálu lze zaměnit pořadí sčítání a integrace, snadno obdržíme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \ \ .$$

Dále „násobíme" rovnici (3.5) postupně všemi funkcemi $\cos kt$ a $\sin kt$ a integrujeme vždy od $-\pi$ do π. Tak analogicky dostaneme

{*furko*}
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \ \ , \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \ \ . \tag{3.6}$$

Vidíme, že čísla a_k a b_k jsou Fourierovými koeficienty f jakožto prvku $L^2((-\pi,\pi))$ vzhledem k ortonormálnímu systému

{*trisynorm*}
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right\}_{k=1}^{\infty} \ , \tag{3.7}$$

pokud definujeme skalární součin „bez faktoru před integrálem". Maximalita (úplnost) systémů $\{e^{ikt}\}_{-\infty}^{\infty}$ a (3.7) v $\mathcal{L}^2((-\pi,\pi))$ dává možnost aplikovat výsledky z teorie Hilbertových prostorů. Speciálně dostáváme pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^2((-\pi,\pi))$ (a tedy speciálně i pro riemannovsky integrovatelné funkce z $R((-\pi,\pi))$ pro

$$c_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \, , \quad n \in \mathbb{Z} \ ,$$

pro částečné součty *Fourierovy řady* funkce f

$$s_n = s_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \ , \quad t \in \mathbb{R} \ ,$$

vztah $\|f - s_n\|_2 \to 0$. V čem je tento výsledek neuspokojivý? Nevíme např. nic o bodové konvergenci $\{s_n(t)\}$. Také k tomu, abychom sestrojili „rozumnou“ Fourierovu řadu funkce f, není zdaleka nutné, aby platilo $f \in \mathcal{L}^2((-\pi,\pi))$. Koeficienty c_k lze zřejmě podle stejných vzorců určit i v jiných případech. Stačí např. předpokládat $f \in L^1((-\pi,\pi))$ a lze *definovat* Fourierovy koeficienty funkce f vzorcem

{*nodef*}
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\ , \qquad n \in \mathbb{Z}\ . \tag{3.8}$$

Potom řadu

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

opět nazýváme *Fourierovou řadou* funkce f a čísla c_n *Fourierovými koeficienty* funkce f. Tak jako výše definujeme

$$a_k = (c_k + c_{-k})\ , \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \tag{3.9}$$
{*koefi*}

pro $k = 0, 1, 2, \ldots$. Protože nevíme, zda vůbec „formálně sestrojená“ Fourierova řada v tomto případě konverguje a k jaké funkci, užíváme zápis

$$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}\ , \ \text{resp.}\ \ f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)\ . \tag{3.10}$$

Zápis říká *pouze to*, že c_k, resp. a_k a b_k jsou určeny jednoznačně pomocí příslušných formulek, tj. $c_k = \hat{f}(k)$, resp. (3.9). Musíme si však být vědomi i toho, že v tomto případě je pořadí funkcí systému, podle něhož rozvíjíme, pevně dáno, a že je to důležité: z $s_n(f,t) \to f(t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ nijak neplyne absolutní konvergence zkoumané řady.

Poznámka 3.1.6. Jak jsme již poznamenali, z posledně dokázané věty plyne, že pokud trigonometrická řada speciálně konverguje stejnoměrně, potom je Fourierovou řadou svého součtu, tj. příslušné limitní funkce posloupnosti trigonometrických polynomů. Bez důkazu prozradíme, že k tomu stačí i konvergence v $L^p((-\pi,\pi))$, pro kterékoli $p \in [1,+\infty)$. Na druhé straně se lze setkat s některými „méně příjemnými“ jevy. Lze sestrojit *spojitou* 2π-periodickou funkci na $\mathbb{R}$ tak, že její Fourierova řada diverguje v nějakém bodě $t_0 \in \mathbb{R}$. Těchto bodů může být v jistém smyslu „hodně“: mohou např. tvořit hustou podmnožinu typu G_δ v intervalu $(-\pi,\pi)$. Uvádíme tyto příklady proto, aby si čtenář uvědomil, že jde o problematiku velmi složitou, která ostatně byla jedním z vůdčích motivů pro tvorbu teorie množin.

Historická poznámka 3.1.7. K Fourierovým řadám jsme dospěli cestou, která není totožná s historickým vývojem, tj. přes abstraktní Fourierovy řady v Hilbertově prostoru. Proto je vhodné se alespoň krátce zmínit o historickém vývoji. Trigonometrickými řadami se matematici zabývali již kolem roku 1740, nejprve zejména otázkami hladkosti jejich součtu (Leonhard Euler (1707 – 1783), aj.). Jean Baptist Joseph Fourier (1768 – 1830), po němž jsou Fourierovy řady nazvány, měl s prosazováním svých myšlenek obtíže, jeho výzkumy se dostávaly do rozporu se současným chápáním pojmu funkce apod. První posudek jeho výsledků byl záporný: nic nového, nic zajímavého (1808), ač právě v posuzované práci se již objevilo to, co dnes nazýváme Fourierovou řadou. V soutěži, v jejímž zadání bylo popsat šíření tepla a která byla vypsána r. 1811, výborně uspěl. V té době již Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) nemohl zabránit ocenění práce, ale práce nebyla publikována. Fourier dosáhl uznání a významné role ve francouzské matematice a začal psát o svých výsledcích knihu. Ta vyšla r. 1822. S problémem konvergence to však bylo ještě složité. R. 1826 se jím zabýval Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857), ale i jeho důkaz měl „díry“. A tak teprve práce, která se objevila v r. 1829, znamenala průlom. Napsal ji třiadvacetiletý „čerstvý“ profesor berlínské univerzity Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) a s jeho výsledkem se nyní seznámíme. Ten také byl jedním z těch, kteří přispěli ke změně v chápání pojmu funkce.

Pro funkce z $L^2(-\pi,\pi)$ víme, že jejich Fourierovy koeficienty (vzhledem k danému úplnému ortonormálnímu systému) jsou z l^2, a proto konvergují k 0. Mají-li takové dvě funkce stejné Fourierovy koeficienty, jsou si rovny skoro všude v intervalu $[-\pi,\pi]$. To při odhadování členů řady nedává zdaleka stejnoměrnou konvergenci, a tak bez silnějších předpokladů nelze více očekávat.

Věta 3.1.8. *Nechť f, g jsou spojité 2π-periodické funkce na $\mathbb{R}$. Potom z rovnosti všech Fourierových koeficientů funkcí f a g plyne $f(t)=g(t)$ pro* všechna $t\in\mathbb{R}$.

Důkaz. Fourierovy koeficienty funkce $h=f-g$ jsou vesměs nulové, proto platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cos kt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin kt\,dt = 0$$

a je-li $T(t)$ libovolný trigonometrický polynom, platí rovněž

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)T(t)\,dt = 0.$$

Dále provádíme důkaz sporem: jestliže platí $h\neq 0$ na $[-\pi,\pi]$, pak lze předpokládat, že existuje bod $\zeta\in(-\pi,\pi)$ tak, že $h(\zeta)>0$; jinak přejdeme k funkci $-h$. Zvolme nyní $\delta>0$ tak, že $I:=[\zeta-\delta,\zeta+\delta]\subset(-\pi,\pi)$ a $h>K>0$ na I. Nyní najdeme trigonometrický polynom p tak, že $p(t)\geq 1$ pro $t\in I$ a $p(t)<1$ na zbytku intervalu $[-\pi,\pi]$. Lze volit např. $p(t)=1+\cos(t-\zeta)-\cos\delta$. Označíme-li $x_0:=\zeta-\delta$, platí podle Lemmatu 3.1.3

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)p^n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} h(t)p^n(t)\,dt = 0\ .$$

Na intervalu $I=[x_0,x_0+2\delta]$ je pro každé $n\in\mathbb{N}$

$$\int_{x_0}^{x_0+2\delta} h(t)p^n(t)\,dt \geq \int_{x_0}^{x_0+2\delta} h(t)\,dt \geq 2K\delta\ .$$

Na intervalu $J := [\,x_0 + 2\delta, x_0 + 2\pi\,]$ budeme postupovat takto: pro libovolný uzavřený interval $K \subset J^\circ$ je

$$\Big|\int_K h(t)p^n(t)dt\Big| \le \int_K |h(t)||p(t)|^n dt \ \to 0 \ ,$$

neboť $|p(t)|^n \rightrightarrows 0$ na K podle Diniho věty. Na zbytku $J \setminus K$ lze pro všechna $n \in \mathbb{N}$ integrál z $|h(t)p^n(t)|$ odhadnout integrálem z $|h(t)|$ a ten lze volbou K udělat libovolně malý. Odtud plyne, že pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ je

$$\int_I h(t)p(t)^n dt \ > 0 \ ,$$

což je potřebný spor a platí tedy $h = 0$. □

Poznámka 3.1.9. Pro praktické výpočty jsou užitečná následující pozorování:

(1) Fourierova řada *reálné funkce* ve tvaru (3.2) má vesměs reálné koeficienty a_k, b_k, a tedy odpovídající c_k a c_{-k} jsou čísla komplexně sdružená.

(2) Jestliže počítáme Fourierovu řadu liché funkce f, jsou všechny její Fourierovy koeficienty (pokud jsou definovány) a_k rovny 0.

(3) Analogicky, jestliže počítáme Fourierovu řadu sudé funkce f, jsou všechny její Fourierovy koeficienty (pokud jsou definovány) b_k rovny 0.

Nepsali jsme, který typ integrálu používáme, integrovali jsme však spojité funkce, a tak jsme v jednoduché situaci. Využití plné síly Lebesgueova integrálu by náš výklad zjednodušilo. Pro další výklad budeme potřebovat následující výpočet (jde o tzv. *Abelovu parciální sumaci*):

{aps}

Lemma 3.1.10. *Nechť jsou dány posloupnosti* $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ *a čísla* $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$. *Označme*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Potom platí

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p+1}^{q} (s_k - s_{k-1})b_k = \sum_{k=p+1}^{q} s_k b_k - \sum_{k=p}^{q-1} s_k b_{k+1} =$$
$$= \sum_{k=p+1}^{q} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_q b_{q+1} - s_p b_{p+1} \ .$$

{dirve}

Věta 3.1.11 (Dirichlet 1863). *Nechť* $\sum a_k$ *je řada s komplexními členy,* $\{b_k\}_1^\infty$ *nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Potom řada*

$$\sum a_k b_k \quad \textit{konverguje} \ ,$$

jestliže řada $\sum a_k$ *má omezené částečné součty a* $b_k \to 0$ *pro* $k \to \infty$.

Základem důkazu je ověření Bolzano-Cauchyovy podmínky pro limitu částečných součtů $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. Protože $b_k \to 0$ při $k \to \infty$ a $\{b_k\}$ je nerostoucí posloupnost, existuje pro libovolné $\varepsilon > 0$ číslo $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $p \geq m$ je $b_p \leq \varepsilon$. Je-li $|s_k| \leq M < \infty$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, můžeme odhadnout pro $p, q \geq m$, $p < q$,

$$\Big|\sum_{1}^{q} a_k b_k - \sum_{1}^{p} a_k b_k\Big| = \Big|\Big(\sum_{k=p+1}^{q} s_k(b_k - b_{k+1})\Big) + s_q b_{q+1} - s_p b_{p+1}\Big| \leq$$

$$\leq M\Big(\sum_{k=p+1}^{q}(b_k - b_{k+1}) + b_{q+1} + b_{p+1}\Big) \leq 2Mb_{p+1} \leq 2M\varepsilon \ .$$

Tím je podmínka ověřena. Ukazuje se, že pro konvergenci řady $\sum a_k b_k$ stačí monotonie a omezenost posloupnosti $\{b_k\}$ v případě, že řada $\sum a_k$ konverguje, to si může zkusit čtenář samostatně dokázat či vyhledat v některé učebnici.

Částečné součty řady

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikt} = \sum_{k=0}^{n}(\cos kt + i \sin kt)$$

jsou pro každé $t \in (-\pi, \pi)$ omezené. Skutečně, je

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikt}\Big| = \Big|\frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{it}}\Big| \leq \frac{2}{|e^{(1/2)it} - e^{-(1/2)it}|} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}t}$$

Pro „sinovou" řadu to platí dokonce pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.1.12. Podle Věty 3.1.11 trigonometrická řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{\log k}$$

konverguje pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Tato trigonometrická řada však není Fourierovou řadou žádné funkce. Dá se totiž ukázat, že pak by musela konvergovat řada $\sum_{k=2}^{\infty}(k \log k)^{-1}$ a ta např. podle integrálního kritéria diverguje.

Příklad 3.1.13. Rozvineme ve Fourierovu řadu 2π-periodické rozšíření restrikce funkce $|x|$ na interval $[-\pi, \pi]$. Protože je tato funkce f sudá, platí $b_k = 0$ a

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \ .$$

Integrací metodou per-partes dostaneme

$$a_k = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{x \sin kx}{k}\Big]_{x=0}^{\pi} - \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} \sin kx \, dx = \frac{2}{k^2\pi}(\cos k\pi - 1) = \frac{2}{k^2\pi}((-1)^k - 1) \ .$$

Odtud dostáváme

{zajima} $$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big[\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \cdots + \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2} + \cdots\Big] \ . \qquad (3.11)$$

Snadno nahlédneme, že řada konverguje podle Weierstrassova kritéria stejnoměrně. Přitom rozvíjená funkce nemá všude derivaci a není tedy „hladká". S tím se matematici v období vytváření teorie trigonometrických a Fourierových řad špatně vyrovnávali, a proto narážely Fourierovy výsledky na nepochopení. Přitom dosazením $t = 0$ dostáváme velmi zajímavý výsledek:

$$\pi^2 = 8\Big(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots\Big) .$$

Z teorie Hilbertových prostorů víme, že Fourierovy řady 2π-periodických spojitých funkcí konvergují *skoro všude* v $\mathbb{R}$. Ve Fourierovy řady je však užitečné rozvíjet dokonce i nespojité funkce a proto potřebujeme kritérium, zaručující konvergenci řady k rozvíjené funkci i v takových případech.

3.2 Dirichletova věta

Nejprve si ujasníme ve zkratce, jak se k výsledku došlo a připravíme některé vztahy. Budeme pracovat s tzv. Dirichletovým jádrem D_n

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} ,$$

Pomocí něj lze částečný součet $s_n(f,t)$ Fourierovy řady funkce f v bodě t vyjádřit ve tvaru (užijeme „exponenciální" tvar)

$$s_n(f,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(t-x)\, dx .$$

Vyjádření $D_n(x)$ pak upravíme do vhodnějšího tvaru

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} .$$

Pokud nyní za D_n dosadíme, dostaneme

$$f_n(t) := s_n(f,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin((2n+1)(x-t)/2)}{2\sin((x-t)/2)} dx .$$

Až dosud lze shrnout nároky na předpoklady tak, že pro určení koeficientů potřebujeme *integrabilitu* k výpočtu integrálů. K dalšímu zjednodušení budeme ještě potřebovat 2π-periodicitu funkce f, jíž jsme si však vysvětlili, jak pomocí periodického rozšíření se tento požadavek jeví pro lokální zkoumání prakticky neomezující. S těmito předpoklady upravíme předchozí vyjádření na tvar

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \big(f(t-2u) + f(t+2u)\big) \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u} du , \qquad (3.12) \quad \{updiruv\}$$

Je dobré si povšimnout, že výraz nezávisí na $f(t)$, závisí však globálně na hodnotách f v *celém* intervalu $(t-\pi, t+\pi)$. Přitom bychom rádi dokázali, že

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left(f_n^-(t) + f_n^+(t)\right) ,$$

kde $f_n^-(t)$ je „polovina" integrálu (3.12) bez $f(t+2u)$ a $f_n^+(t)$ je „druhá polovina" integrálu (3.12) bez $f(t-2u)$. Až sem prakticky došel i Fourier, avšak Dirichlet dospěl dále: povšiml si, že „příspěvek k hodnotě integrálů" závisí *podstatně více* na chování f v blízkosti t, nežli na chování v bodech vzdálenějších. Dirichlet si také jako první uvědomil, jak je nutno pracovat s nespojitými funkcemi. V nepřesné rovině lze jeho úvahu popsat, např. pro $f_n^+(t)$, takto:

$$\begin{aligned} f_n^+(t) &\approx \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/(2n+1)} f(t+2u)\frac{\sin((2n+1)u)}{\sin(u)}\,du \approx \\ &\approx \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} f\Big(t+\frac{\pi}{2n+1}\Big) = \frac{1}{2}\, f\Big(t+\frac{\pi}{2n+1}\Big) . \end{aligned}$$

Pro velká n jsou tyto hodnoty blízké $f(t+) = \lim_{x\to t_+} f(t)$, pokud *tato limita existuje*. Další Dirichletova úvaha spočívala v tom, že chtěl mít eventuální nespojitosti „oddělené" (po částech spojitá funkce) a „kontrolu" nad znamením $f(t) - f(x)$ (funkce po částech monotonní). Připomínáme, že spojením „po částech" se opět myslí existence takového dělení $D = \{-\pi = x_0 < \cdots < x_m = \pi\}$ intervalu $[-\pi,\pi]$, že vyšetřovaná funkce je v každém dělícím intervalu $[x_{r-1}, x_r]$, $r = 1,\dots,m$ spojitě rozšiřitelná a monotónní. Dospěl tak posléze k tvrzení:

Věta 3.2.1 (Dirichlet). *Nechť f je omezená, po částech spojitá a po částech monotónní funkce na intervalu $[-\pi,\pi]$. Předpokládejme dále, že f je 2π-periodická na $\mathbb{R}$ a že platí*

$$f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

pro všechna $t\in\mathbb{R}$. Jsou-li čísla a_k, b_k Fourierovými koeficienty f, tj. platí (3.6) *pro všechna $k\in\mathbb{N}_0$ a definitoricky dle úmluvy $b_0 = 0$, pak platí rovnost*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

pro všechna $t\in\mathbb{R}$, neboli Fourierova řada funkce f konverguje k f.

Předcházející poněkud filozofický výklad má nejenom motivační charakter, ale měl by čtenáři napomoci se zorientovat, k čemu a jakými prostředky se pomocí níže uvedených lemmat chceme dostat. Některé kroky jsou závislé na tom, že se snažíme užívat minimálně těch poznatků, které jsme nedokázali. Dospějeme k obecnějšímu a elegantnějšímu tvrzení, bez předchozího výkladu by však bylo obtížné roli jednotlivých předpokladů pochopit. Pracujeme s Riemannovým integrálem, což poprvé vyznačíme jako varování pro čtenáře, dále však již speciální označení typu integrálu nebudeme užívat.

{*zakllok*}

Lemma 3.2.2. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť g má Riemannův integrál na intervalu $[a, b]$. Potom platí*

{*bibi*}
$$\lim_{v\to\infty} (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\sin(vx)dx = \lim_{v\to\infty} (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\cos(vx)dx = 0\ . \tag{3.13}$$

Důkaz. Integrály jsou dále v důkazu uvažovány v Riemannově smyslu. Násobením spojitou omezenou funkcí se nemění množina bodů nespojitosti funkce g a její omezenost, takže integrály vystupující v (3.13) existují. Dokážeme (3.13) pro sin, pro cos se dokazuje analogicky. Předpokládejme nejprve, že g je charakteristická funkce intervalu $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Potom

$$\lim_{v\to\infty} \left| \int_\alpha^\beta g(x)\sin(vx)dx \right| = \lim_{v\to\infty} \frac{|-\cos(\beta v) + \cos(\alpha v)|}{v} \le \lim_{v\to\infty} \frac{2}{v} = 0\ .$$

Je-li $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r\}$ libovolné dělení intervalu $[a, b]$, položíme $m_k = \inf\{g(x);\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, \cdots, r$ a dále $h = m_k \cdot 1|[x_{k-1}, x_k]$; poznamenejme, že jde o lineární kombinaci charakteristických funkcí, a tak z předchozího plyne platnost tvrzení pro funkci h. Zároveň je integrál této funkce riemannovským dolním součtem $s(g; D)$. Je $g = h + (g - h)$ a pro každé $\varepsilon > 0$ lze nalézt h tak, že platí $|g - h| < \varepsilon$, a tedy

$$\left| \int_a^b (g(x) - h(x))\sin(vx)dx \right| \le \varepsilon(b - a)\ ,$$

z čehož již plyne dokazované tvrzení. □

Důsledek 3.2.3. *Pro skoro všude spojité omezené 2π-periodické funkce jejich Fourierovy koeficienty konvergují k 0, tj.*

$$a_k \to 0\,, \quad b_k \to 0\,, \quad (\,c_k \to 0\,,\ c_{-k} \to 0\,) \quad \textit{pro} \quad k \to \infty\,.$$

Poznámka 3.2.4. Z důkazu vyplývá idea i pro případ Lebesgueova integrálu: je jí aproximace jednoduchými funkcemi. Věta pak platí i pro neomezené intervaly, avšak přechod od charakteristických funkcí intervalu k jednoduchým funkcím není úplně zřejmý. V informativní rovině poznamenejme, že věta platí pro libovolnou funkci $g \in L(a, b)$, nebudeme to však v důkazech dalších tvrzení používat.

3.3 Princip lokalizace

Lemma 3.3.1 (Dirichletovo jádro). *Označme pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $x \in \mathbb{R}$*

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\ .$$

Tato funkce je sudá a nabývá pouze reálných hodnot. Platí pro ni vzorce (první vyjádření lze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}$, v tom smyslu chápeme rovnost)

$$D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)} = 2\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\Big) \ .$$

Důkaz. Přímo z definice plyne

$$D_n(x) = D_n(-x) \quad \text{a} \quad D_n(x) = \overline{D_n(x)} \ , quadn \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Pro čtenáře zvyklé na úvahy v reálném oboru je ostatně obojí patrno z dalšího vyjádření; v obou případech užíváme Eulerovy vzorce.

$$D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{-ikx}) = 2\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\Big) \ .$$

Dále podobně obdržíme

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{-1} e^{ikx} + \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{-ix}(1-e^{-inx})}{1-e^{-ix}} + \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \\ &= \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} - \frac{1-e^{-inx}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x}-e^{-inx}}{e^{ix}-1} \cdot \frac{e^{-ix/2}}{e^{-ix/2}} = \\ &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} \ , \end{aligned}$$

z čehož plyne druhé vyjádření dělením čitatele i jmenovatele číslem $2i$. Rovnost platí po dodefinování limitou *všude* v $\mathbb{R}$, tedy i v nulových bodech jmenovatele; vyplývá to např. z předcházejícího vzorce s kosiny. □

Poznámka 3.3.2. V literatuře se označení často poněkud liší, např. o faktor $1/2$. Někdy se do vyjádření $D_n(x)$ „vtahuje" i faktor $1/\pi$. Existují další vhodná vyjádření D_n, my je však nebudeme potřebovat.

Pro každý částečný součet $s_n(f,t)$ Fourierovy řady riemannovsky integrovatelné 2π-periodické funkce f v bodě t platí

$$\begin{aligned} s_n(f,t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx\Big)e^{ikt} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(t-x)\,dx \ . \end{aligned}$$

Z ortogonality systému $\{\mathrm{e}^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ snadno vyplyne pro konstantní funkci f identicky rovnou 1

{*projednicku*}
$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)\,dx \ , \quad n \in \mathbb{N} \ . \tag{3.14}$$

Lemma 3.3.3 (Riemann). *Pro částečný součet Fourierovy řady 2π-periodické riemannovsky integrovatelné funkce platí*

{updir}
$$s_n(f,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \big(f(t-2u)+f(t+2u)\big)\frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u}\,du\ . \tag{3.15}$$

Důkaz. Za D_n dosadíme do vyjádření $s_n(f,t)$, které jsme právě odvodili, a tak s využitím $D_n(x) = D_n(-x)$ dostaneme po přesunutí faktoru $1/2$ za integrační znamení

$$f_n(t) := s_n(f,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin((2n+1)(x-t)/2)}{2\sin((x-t)/2)}\,dx\ . \tag{3.16}$$ {vyjsn}

Uděláme v integrálu lineární substituci $x - t = v$ a dostaneme tak

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(t+v)\frac{\sin((2n+1)v/2)}{2\sin(v/2)}\,dv\ .$$

Vzhledem k periodicitě lze posunout integrační meze a pak substituovat $v = 2u$. Dostaneme tak postupně

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+v)\frac{\sin((2n+1)v/2)}{2\sin(v/2)}\,dv\ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t+2u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du\ .$$

Nyní rozdělíme integrál na součet dvou integrálů: první s mezemi $-\pi/2$, 0, druhý s mezemi 0, $\pi/2$. V prvním integrálu provedeme substituci $-u$ za u, abychom mohli integrály sečíst (umístit integrandy pod jedno integrační znamení)

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \Big(f(t-2u)+f(t+2u)\Big)\frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u}\,du\ ; \tag{3.17}$$

tím je vzorec (3.15) dokázán. □

{projed}

Důsledek 3.3.4. *Speciálně z* (3.14) *a z předcházejících úprav vyplývá pro konstantní funkci* 1

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)v/2)}{\sin(v/2)}\,dv\ =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du\ = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u}\,du\ .$$

Následující věta bývá bez ohledu na kontext, tj. i pro obecnější Lebesgueův integrál, označována názvem *princip lokalizace.*

Lemma 3.3.5. *Nechť funkce f je 2π-periodická na $\mathbb{R}$ a riemannovsky integrovatelná na intervalu $[-\pi,\pi]$. Označme dále pro $\delta \in (0,\pi/2)$*

$$s_n(f,t,\delta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \big(f(t+2u)+f(t-2u)\big)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du \ .$$

Potom pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \big(s_n(f,t) - s_n(f,t,\delta)\big) = 0 \ . \qquad (3.18)$$ {riprilo}

Důkaz. Užijeme vyjádření (3.15). Z aditivity Riemannova integrálu plyne pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$

$$s_n(f,t) - s_n(f,t,\delta) = \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi/2} \frac{f(t+2u)+f(t-2u)}{\sin u}\sin((2n+1)u)du \ .$$

Čitatel zlomku je zřejmě riemannovsky integrovatelná funkce a tato integrabilita se zachová násobením kladnou omezenou spojitou funkcí $1/\sin u$. Proto lze použít Lemma 3.2.2, z něhož již plyne (3.18). □

Dále využijeme tuto vlastnost (Dirichletova) jádra, plynoucí např. z (3.3.4)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du \ .$$

Věta 3.3.6 (Dini). *Nechť funkce f je 2π-periodická na $\mathbb{R}$ a riemannovsky integrovatelná na $[-\pi,\pi]$, a nechť pro nějaké $\delta \in (0,\pi)$ existuje konečný Riemannův integrál*

{integrabilita} $$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(t+v)-f(t)}{v}dv \ . \qquad (3.19)$$

Potom $\lim_{n\to\infty} s_n(f,t) = f(t)$.

Důkaz. Z vlastností Dirichletova jádra plyne

$$s_n(f,t) - f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+v)-f(t)}{v}\frac{v}{\sin(v/2)}\sin((2n+1)v/2)dv \ ,$$

přičemž z riemannovské integrability (konečnost integrálu v (3.19) dostaneme integrabilitu $(f(t+v)-f(t))/v$ na intervalu $[-\pi,\pi]$. Násobením omezenou spojitou funkcí $v/\sin(v/2)$ se tato integrabilita neporuší, a tak lze opět použít Lemma 3.2.2; z něj již vyplývá tvrzení Diniho věty. □

Poznámka 3.3.7. Snadno nahlédneme, že předpoklady Diniho věty jsou splněny, pokud má f v bodě t konečné jednostranné derivace.

Definice 3.3.8. Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Pro reálnou funkci f definovanou na $[a,b]$ a dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ intervalu $[a,b]$ klademe

{varde}
$$V(f,D) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \ . \tag{3.20}$$

Totální variací f na $[a,b]$ nazýváme číslo (ne nutně z $\mathbb{R}$, hodnota ∞ se připouští)

$$V_a^b f = \sup\Big\{V(f,D); D \in \mathcal{D}([a,b])\Big\} \ ,$$

kde $\mathcal{D}([a,b])$ je množina všech dělení D intervalu $[a,b]$. Doplňme ještě definici pro degenerovaný interval typu $[a,a]$: v tomto případě klademe $V_a^a f = 0$.

Definice 3.3.9. Je-li $V_a^b < \infty$, říkáme, že f má *konečnou variaci* na $[a,b]$. Množinu všech funkcí s konečnou variací na $[a,b]$ značíme $\mathrm{BV}([a,b])$.

{trivile}

Lemma 3.3.10. *Je-li* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $c \in [a,b]$ *a* f,g *jsou reálné funkce na* $[a,b]$, *pak systém všech funkcí z* $\mathrm{BV}([a,b])$ *tvoří lineární prostor a*

(1) $V_a^b(f+g) \le V_a^b f + V_a^b g$,

(2) $V_a^b(\alpha f) = |\alpha| V_a^b f$,

(3) $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$.

Důkaz. Užijeme standardní techniku práce s děleními a supremem, důkaz stručně popíšeme. Je-li D dělení $[a,b]$, platí v jeho dílčích intervalech

$$|(f(x_k)+g(x_k)) - (f(x_{k-1})+g(x_{k-1}))| \le |f(x_k)-f(x_{k-1})| + |g(x_k)-g(x_{k-1})| \ ,$$

z čehož po sečtení a přechodu k supremu na pravé straně dostaneme

$$V(f+g,D) \le V_a^b f + V_a^b g$$

a posléze dalším přechodem k supremu na levé straně též první část tvrzení. Druhá část plyne podobně ze vztahu

$$|(\alpha f)(x_k) - (\alpha f)(x_{k-1})| = |\alpha||f(x_k) - f(x_{k-1})| \ .$$

Podobně (srovnejte s větou o aditivitě Riemannově integrálu) se prací s děleními $D \in \mathcal{D}([a,b])$ obsahujícími bod c dostane poslední vztah. Konečně z (1) a (2) vyplývá, že $\mathrm{BV}([a,b])$ je lineární prostor. □

Věta 3.3.11 (Jordan). *Nechť je dána* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Potom* $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, *právě když existují* neklesající funkce $f_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $j = 1,2$ *takové, že*

$$f = f_1 - f_2$$

Důkaz. Jelikož každá neklesající funkce $g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci a $V_a^b f = f(b) - f(a)$, vyplývá z existence rozkladu funkce f na rozdíl neklesajících funkcí f_j, $f = f_1 - f_2$, že $f \in \mathrm{BV}([\,a, b\,])$. Dokážeme, že lze tímto způsobem vyjádřit každou $f \in \mathrm{BV}([\,a, b\,])$.

Předpokládejme, že f je funkce na $[\,a, b\,]$, $V_a^b f < \infty$. Definujme (zde pracujeme s tzv. *neurčitou variací*) $g(x) := V_a^x f$, $x \in [\,a, b\,]$. Zřejmě je $g(b) < \infty$ a pro $a \le x < y \le b$ platí

$$0 \le g(x) \le g(x) + V_x^y f = g(y) \le g(b) \ ,$$

takže g je nezáporná a neklesající funkce na $[\,a, b\,]$. Položme $h = g - f$. Potom pro $a \le x < y \le b$ platí s ohledem na předcházející odhad

$$h(y) - h(x) = g(y) - g(x) - (f(y) - f(x)) \ge V_x^y f - |f(y) - f(x)| \ge 0 \ ,$$

neboť triviálně platí $|f(y) - f(x)| \le V_x^y f$; tím je tvrzení dokázáno. □

Poznámka 3.3.12. Důsledkem věty o existenci jednostranných limit monotónní funkce na $[\,a, b\,]$ ve všech bodech $x \in [\,a, b\,]$ je, že

$$f \in \mathrm{BV}([\,a, b\,]) \ \Rightarrow \ f(x+) \text{ a } f(x-) \ \text{ existují}$$

pro všechny body $x \in [\,a, b\,]$; v krajních bodech existuje z obou limit pochopitelně pouze jedna.

Jestliže ve vzorci (3.20) pracujeme s $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^m$ a chápeme $|\,\boldsymbol{.}\,|$ jako označení eukleidovské normy v $\mathbb{R}^m$, dostaneme běžnou definici *délky křivky* a (3) v Lemmatu 3.3.10 popisuje její aditivitu.

{*dirikri*}

Věta 3.3.13 (Jordan, Dirichlet). *Nechť funkce f je reálná 2π-periodická funkce riemannovsky integrovatelná na $[\,0, 2\pi\,]$. Nechť pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ existuje takové $\delta > 0$, že f má konečnou variaci na intervalu $[\,t - \delta, t + \delta\,]$. Potom pro částečné součty $s_n(f, t)$ Fourierovy řady funkce f platí*

$$\lim_{n \to \infty} s_n(f, t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2} \ .$$

Speciálně pro 2π-periodickou funkci s konečnou variací na intervalu $[\,0, 2\pi\,]$, pro kterou pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí

$$f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

dostáváme rovnost

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

neboli Fourierova řada funkce f konverguje k f.

Důkaz. Uvedeme základní myšlenku důkazu. Vzhledem k (3.3.4) zřejmě platí

$$\left|s_n(f,t) - \frac{f(t+)+f(t-)}{2}\right| \leq \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (f(t-2u)-f(t-))\frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u}du\right| +$$
$$+\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (f(t+2u)-f(t+))\frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u}du\right| ,$$

a z principu lokalizace stačí ukázat, že oba výrazy na pravé straně nerovnosti lze volbou horní meze $\delta \in (0,\pi/2)$ v obou integrálech udělat libovolně malé. Zde by byl „absolutní odhad" příliš hrubý a tak se standardně využívá tzv. druhé věty o střední hodnotě integrálního počtu, v jejíchž předpokladech je *monotonie* funkce, v tomto případě např. funkce $g(u) := (f(t+2u)-f(t+))$. Platí totiž $\lim_{u\to t+} g(u) = 0$. Každý z výrazů se odhadne volbou δ výrazem $|g(\delta)| \cdot M$, kde

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_\zeta^\delta \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u}du\right| \leq M \ .$$

a odhad pomocí M je nezávislý na volbě $\zeta \in (0,\delta)$ a $n \in \mathbb{N}$. To plyne z podrobnějšího studia integrandu, platí totiž

$$\left|\int_\zeta^\delta \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u}du\right| \leq \int_0^{\pi/2n+1} \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u}du \ < \pi \ .$$

Volíme proto nejprve vhodně $\delta \in (0,\pi/2)$ tak, aby $|g(\delta)| < \varepsilon/2$ a potom $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby také $\int_\delta^{\pi/2}(g(u)\sin((2n+1)u))/(\sin u)du$ byl absolutně odhadnut pro všechna $n \geq n_0$ hodnotou $\varepsilon/2$. Hlavními rekvizitami jsou zde existence integrálu a monotonie jedné z funkcí v integrandu, abychom mohli při odhadu využít alternace znamínek funkce sin. □

Jak již bylo řečeno, Dirichlet dokázal předcházející tvrzení ve slabší formě: po částech monotónní 2π-periodická funkce má konečnou variaci a dá se proto vyjádřit jako rozdíl dvou monotónních funkcí. Verze založená na Jordanově rozkladu funkce s konečnou variací na rozdíl nezáporných neklesajících funkcí je pozdějšího data. K dokončení důkazu Dirichlet-Jordanova kritéria stačí dokázat následující lemma; ve formě, v níž ho budeme potřebovat, ho dokázal již r. 1849 Ossian Bonnet (1819 – 1892).

{*druinpo*}

Lemma 3.3.14 (Tzv. druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu). *Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $a < b$, a nechť g je monotónní na $[a,b]$. Potom existuje $\zeta \in [a,b]$ tak, že*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \ = g(a)\int_a^\zeta f(t)dt \ + g(b)\int_\zeta^b f(t)dt \ . \tag{3.21}$$ {*druinpo1*}

Důkaz. Existuje-li $\int_a^b f$, lze definovat $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$. Dále existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že restrikce $f|[a,b]$ je menší či nejvýše rovna K a F je spojitá v $[a,b]$, protože $|\int_x^y f| \leq K|x-y|$.

Zřejmě též existuje $\int_a^b fg$. Předpokládejme nejprve, že g je nerostoucí funkce na $[a,b]$ a $g(b)=0$, takže $g|[a,b] \geq 0$. Pro $g(a)=0$ je $g \equiv 0$ a ζ lze volit libovolně v intervalu $[a,b]$. Označme dále A minimum a B maximum F na $[a,b]$. Pro každé dělení $D \in \mathcal{D}([a,b])$ položme

$$O(D) := \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt \ .$$

Zřejmě platí

$$\{uod\} \qquad g(a)A \leq O(D) \leq g(a)B \ . \tag{3.22}$$

Užitím Abelovy parciální sumace z Poznámky 3.1.10 dostaneme pro $s_k = g(x_{k-1})$ a $a_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$

$$\Big| O(D) - \int_a^b f(t)g(t)dt \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (g(x_{k-1}) - g(t))f(t)dt \Big| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(x_{k-1}) - g(t)| \cdot |f(t)|dt \Big| \leq K\big(S(g;D) - s(g;D)\big) \ .$$

Volbou dělení $D_m \in \mathcal{D}([a,b])$ tak, že D_m je *ekvidistantní* dělení s normou $\nu(D_m) = 1/m$, dostaneme $\lim_{m\to\infty} O(D_m) = \int_a^b fg$ a $\lim_{m\to\infty}(S(g;D_m) - s(g;D_m)) = 0$. Z (3.22) tak dostaneme limitním přechodem $m \to \infty$

$$A \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(t)g(t)dt \ \leq B \ ,$$

a jelikož F je spojitá a nabývá v $[a,b]$ obou hodnot A i B, existuje podle věty o nabývání mezihodnot takové $\zeta \in [a,b]$, že

$$F(\zeta) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(t)g(t)dt \ , \quad \text{neboli} \quad \int_a^b f(t)g(t)dt \ = g(a) \int_a^\zeta f(t)dt \ .$$

To je však již dokazovaný vzorec (3.21) pro uvažovaný případ $g(b) = 0$.

Jestliže je nyní g nerostoucí v $[a,b]$. Potom $g(t) - g(b)$ je rovněž nerostoucí v $[a,b]$ a má v bodě b hodnotu 0. Podle již dokázané předcházející části existuje $\zeta \in [a,b]$ tak, že

$$\int_a^b f(t)(g(t) - g(b))dt \ = (g(a) - g(b)) \int_a^\zeta f(t)dt \ ,$$

neboli

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \ = g(a) \int_a^\zeta f(t)dt \ + g(b) \int_a^b f(t)dt \ - g(b) \int_a^\zeta f(t)dt \ ,$$

což již dává vzorec (3.21). Jestliže je konečně g neklesající v $[a,b]$, dostaneme pomocí předcházejícího kroku

$$\int_a^b (-f(t))(-g(t))dt \ = (-g(a)) \int_a^\zeta (-f(t))dt \ + (-g(b)) \int_\zeta^b (-f(t))dt \ ,$$

což dá opět po úpravě vzorec (3.21). □