Kapitola 4

Mocninné řady

4.1 Připomenutí

V této kapitole se vracíme k mocninným řadám. Může být částečně chápána jako úvod do teorie funkcí komplexní proměnné: budeme pracovat v $\mathbb{C}$ a to, co dokážeme, tvoří základ pro pozdější budování této teorie, neboť v ní jsou mocninné řady důležitým jednoduchým nástrojem. Je to vlastně zkrácená a lehce upravená kapitola 16 skript. Ukázali jsme si, že mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{4.1}$$

má v komplexní rovině $\mathbb{C}$ jednoduché konvergenční chování. Je-li R poloměr konvergence řady (4.1), označíme

$$\mathcal{K}(z_0, R) = \{z, |z - z_0| < R\} \ , \quad \mathcal{C}(z_0, R) = \{z, |z - z_0| = R\} \ . \tag{4.2}$$

Potom řada (4.1) konverguje pro všechna $z \in \mathcal{K}(z_0, R)$ a diverguje pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{K}(z_0, R)}$. Množinu $\mathcal{K}(z_0, R)$ nazýváme *kruh konvergence* řady (4.1). V případě, že pro poloměr konvergence R platí $0 < R < \infty$, nazýváme množinu

$$\mathcal{C}(z_0, R) = \{z; |z - z_0| = R\}$$

konvergenční kružnicí [1] řady (4.1). Na rozdíl od $\mathcal{U}(z_0, r) := \mathcal{U}_r(z_0)$, $r > 0$, symboly $\mathcal{K}(z_0, R)$ a $\mathcal{C}(z_0, R)$ budeme užívat jen ve spojení s poloměrem konvergence mocninné řady. Poznamenejme ještě, že každá mocninná řada konverguje ve svém středu z_0.

---

[1] Tento název není příliš šťastně utvořen, neboť vzbuzuje nesprávný dojem, že řada na této množině konverguje. Pro body této množiny však *nelze* o konvergenci mocninné řady (4.1) obecně nic říci.

Pro tuto kapitolu uzavřeme opět *zjednodušující úmluvy*. Budeme vynechávat meze u sumačních znaků v případě, že se sčítá od 0 do $+\infty$; proměnná z probíhá vždy podmnožiny $\mathbb{C}$, kdežto označení pomocí x užíváme jen v případě, že tato proměnná probíhá podmnožiny $\mathbb{R}$; to by mělo čtenáři usnadnit orientaci při čtení textu, žádnou jinou *magickou roli* to nemá.

Připomeňme konečně, že jsme zavedli limitu, spojitost a derivaci v komplexním oboru, a to analogicky jako v $\mathbb{R}$. Připomeneme pouze definici *derivace* $f'(z)$ *funkce* f *v bodě* z:

$$f'(z) := \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \;,$$

kde w a z jsou z $\mathbb{C}$. Vyšší derivace f'', resp. $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, $\dots$ definujeme opět rekurentně, tj. $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklady 4.1.1. 1. Řady $\sum (n!)z^n$ a $\sum z^n/n!$ ukazují, že pro poloměr konvergence nastávají i extrémní případy $R = 0$ a $R = +\infty$.

2. Řada $\sum z^n/a^n$ pro $a \in (0,\infty)$ má poloměr konvergence $R = a$. Z Cauchyova odmocninového kritéria plyne s ohledem na

$$\sqrt[n]{|z^n/a^n|} = |z|/a$$

konvergence pro všechna $z \in \mathcal{K}(0,a)$ a divergence pro všechna z, pro něž je $|z| > a$.

3. Uvažte, že řady

$$\sum z^n \;, \qquad \sum z^{n+1}/(n+1) \;, \qquad \sum z^{n+2}/((n+1)(n+2))$$

se chovají na konvergenční kružnici $\mathcal{C}(0,1)$ rozdílně; prvá na ní všude diverguje, druhá konverguje v bodě -1 a diverguje v bodě 1, třetí konverguje absolutně ve všech bodech $\mathcal{C}(0,1)$.

Úmluva 4.1.2. Vzhledem k tomu, že konvergence řady (4.1) v bodě z závisí podstatně pouze na vzdálenosti $|z - z_0|$, můžeme se v dalším omezit na řady o středu $z_0 = 0$. I když dále budeme věty vždy vyslovovat pro řady v obecném tvaru (4.1), budeme je dokazovat pouze pro případ $z_0 = 0$, tj. pro řadu

$$\sum a_n z^n \;. \tag{4.3}$$

Tím se zápis formálně trochu zjednoduší.

4.2 Základní vlastnosti

Lemma 4.2.1. *Řada* $\sum a_n(z - z_0)^n$ *konverguje ve svém kruhu konvergence absolutně a lokálně stejnoměrně.*

Důkaz. Připomeňme předchozí úmluvu, že v důkazu se automaticky omezujeme na případ (4.3). Případ $R = 0$ je triviální, nechť tedy je $R > 0$. Absolutní konvergence v $\mathcal{K}(0, R)$ je důsledkem Lemmatu 2.1.26 a definice poloměru konvergence. Je-li $0 \leq |z| \leq |z_1| < R$, pak lze (konvergentní) řadu $\sum |a_n z_1^n|$ použít ve Weierstrassově větě jako majorantní řadu pro $\sum |a_n z^n|$, takže řada (4.3) konverguje na $\mathcal{U}(0, |z_1|)$ stejnoměrně podle Weierstrassova M-testu, a tedy lokálně stejnoměrně na $\mathcal{K}(0, R)$. □

Lemma 4.2.2. *Součet mocninné řady* (4.1) *je funkce, která je* spojitá *v jejím kruhu konvergence.*

Důkaz. V kruhu konvergence řada (4.1) podle Lemmatu 4.2.1 konverguje lokálně stejnoměrně a její částečné součty jsou polynomy spojité v $\mathbb{C}$. Zbytek plyne z věty o stejnoměrné konvergenci a spojitosti. □

Úmluva 4.2.3. Ve shodě s úmluvou o definičním oboru je vztahem

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n \tag{4.4}$$

definována funkce $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$ je *maximální množina*, na níž řada (4.1) konverguje. Zřejmě platí $\mathcal{K}(z_0, R) \subset M$, avšak M může navíc obsahovat i body konvergenční kružnice řady (4.1).

Lemma 4.2.4. *Pro výpočet poloměru konvergence R mocninné řady* (4.1) *platí vzorec*

$$R = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$$

s konvencí $1/0 = +\infty$ *a* $1/+\infty = 0$.

Důkaz. Lemma je důsledkem odmocninového kritéria, resp. definice limes superior a základních poznatků o konvergenci řad. Je-li

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z|^n} = |z| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \ ,$$

řada konverguje v bodě z. Platí-li obrácená nerovnost, řada diverguje. □

Lemma 4.2.5. *Má-li řada* (4.1) *poloměr konvergence* $R \in [0, \infty]$, *mají týž poloměr konvergence i řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad a \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \ . \tag{4.5}$$

Poznámka 4.2.6. Formálním derivováním nebo integrací řady (4.1) člen po členu vznikají tedy řady se stejným poloměrem konvergence jako má řada (4.1). Je tu ale rozdíl: zatímco pro $z_0 = 0$ bychom mohli s odvoláním na větu o derivování a rozklad na reálnou a imaginární část psát $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$, $x \in (-R, R)$, podobný vzorec pro f na $\mathcal{K}(z_0, R)$ budeme muset dokázat. Stojí za povšimnutí, že řady v Příkladech 4.1.1 (viz 3.), vznikají postupným derivováním a podmnožiny $\mathcal{C}(0,1)$, na nichž konvergují, jsou rozdílné.

Důkaz Lemmatu 4.2.5. Tvrzení plyne snadno ze vzorce pro poloměr konvergence z Lemmatu 4.2.4 a z poznatku, že $\sqrt[n]{n} \to 1$ při $n \to +\infty$. □

Věta 4.2.7. *Má-li řada* (4.1) *poloměr konvergence $R > 0$ a označíme-li f její součet v $\mathcal{K}(z_0, R)$, pak pro funkce*

$$g(z) =: \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \ , \quad G(z) =: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \tag{4.6}$$

platí $g(z) = f'(z)$ a $G'(z) = f(z)$ pro všechna $z \in \mathcal{K}(z_0, R)$.

Důkaz. Podle uzavřené úmluvy budeme tvrzení dokazovat jen pro $z_0 = 0$. Pak pro libovolně zvolené $z \in \mathcal{K}(0, R)$, r, $|z| < r < R$, a $w \in \mathcal{K}(0, r)$, $w \neq z$, platí

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1} \right) \ .$$

Výraz v závorce budeme odhadovat. Pro $n = 1$ je roven 0 a pro $n > 1$ výrazu

$$\begin{gathered} (w^{n-1} - z^{n-1}) + z(w^{n-2} - z^{n-2}) + \cdots + z^{n-2}(w - z) = \\ = (w - z)(w^{n-2} + w^{n-3} z + \cdots + y^{n-2}) + (w - z)(w^{n-3} + \cdots + z^{n-3}) + \cdots + \\ + (w - z) z^{n-3} (w + z) + (w - z) z^{n-2} \ . \end{gathered}$$

Po vytknutí $(w - z)$ se výraz dobře odhadne, neboť platí $|w| < r$, $|z| < r$, a součty exponentů mocnin o základech w a z dávají stále $(n - 2)$. Dostaneme tak

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| \leq |w - z| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, \frac{n(n-1)}{2} \, r^{n-2} \ . \tag{4.7}$$

Protože k řadě vpravo existuje majorantní řada $\sum (n^2/r^2)|a_n| r^n$, která s ohledem na

$$\limsup_{n \to \infty} ((n^2/r^2 |a_n| r^n)^{1/n} = r \limsup_{n \to \infty} (|a_n|)^{1/n} < r/R < 1$$

konverguje, je limita výrazu v (4.7) vlevo pro $w \to z$ rovna 0. Platí tedy rovnost $f'(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \mathcal{K}(z_0, R)$. Odtud plyne užitím již dokázané části tvrzení na G i jeho zbytek. □

Důsledek 4.2.8. *Je-li $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ a řada vpravo má poloměr konvergence $R > 0$, pak má f v $\mathcal{K}(z_0, R)$ derivace všech řádů, lze je všechny vyjádřit mocninnými řadami a platí*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k} \ , \quad z \in \mathcal{K}(z_0, R) \ .$$

Důsledek 4.2.9. *Za stejných předpokladů jako v Důsledku 4.2.8 platí*

$$k!\, a_k = f^{(k)}(z_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

a koeficienty a_n jsou tedy ve vyjádření f v (4.4) jednoznačně určeny.

4.3 Operace s mocninnými řadami

Lemma 4.3.1. *Nechť $\{a_{kl}\}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ je dvojná posloupnost komplexních čísel. Platí-li*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{kl}| < +\infty \ , \quad \textit{potom je} \quad \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \ .$$

Důkaz. Zvolme prostou posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_0^\infty$, $x_n \to y$, $x_n \neq y$, a definujme posloupnost funkcí na metrickém prostoru $M := \{x_n; n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{y\}$ s eukleidovskou metrikou takto:

$$f_k(x_n) = \sum_{l=0}^{n} a_{kl} \ , \quad f_k(y) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \ . \tag{4.8}$$

Položme $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, $x \in M$. Protože platí

$$A_k := \sum_{l=0}^{\infty} |a_{kl}| \geq |f_k(x)| \ , \quad x \in M \ ,$$

a $\sum A_k < \infty$, řada $\sum f_k$ konverguje podle Weierstrassovy věty stejnoměrně k funkci f. Dále platí $f_k(x_n) \to f_k(y)$ pro $n \to \infty$, takže f_k jsou spojité v y (vzhledem k M). Podle věty Moore-Osgoodovy, aplikované na posloupnost částečných součtů řady $\sum f_k$, platí rovněž $f(x_n) \to f(y)$ pro $n \to \infty$. Podle definice z 4.8 a s ohledem na dokázanou stejnoměrnou konvergenci je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y) = f(y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} a_{kl} = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} \ .$$

Tím je tvrzení, kterému se někdy říká *velká věta o záměně*, dokázáno. □

Věta 4.3.2. *Nechť $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$, řada vpravo má poloměr konvergence $R > 0$ a nechť $w_0 \in \mathcal{K}(z_0, R)$. Potom pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž je*

$$|z - w_0| < R - |w_0| \;, \tag{4.9}$$

platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!}(z - w_0)^n \;. \tag{4.10}$$

Důkaz. Dokazujeme pro $z_0 = 0$. Připomeňme si vztah binomické věty a binomického rozvoje: pro $n \in \mathbb{N}$ jsou binomické koeficienty rovny nule pro $n > k$. Pro všechna uvažovaná z platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_n\binom{n}{k}w_0^{n-k}(z - w_0)^k\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}|a_n|\binom{n}{k}|w_0|^{n-k}|z - w_0|^k\Big| =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n| \cdot (|z - w_0| + |w_0|)^n < \infty \;.$$

Konvergence poslední řady je zaručena předpokladem (4.9). Nyní užijeme Lemma 4.3.1 a dostaneme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n((z - w_0) + w_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}w_0^{n-k}(z - w_0)^k\Big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}a_n w_0^{n-k}\Big)(z - w_0)^k \;;$$

poznamenejme, že jsme v součtech přidali a pak opět vypustili členy, které jsou vesměs rovny 0. Formule (4.10) plyne z věty o derivování (Věta 4.2.7), podle níž dostáváme

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_k z^{n-k} = (k!) \cdot \sum_{n=k}^{\infty} a_n\binom{n}{k}z^{n-k} \;.$$

Čtenář by si měl povšimnout, že koeficienty $f^{(k)}(z)/k!$ rozvoje f se středem z jsou určeny pomocí $\{a_n\}$ jednoduchým vztahem, tedy posloupnost $\{a_n\}$ nese „plnou informaci“ o f. □

Poznámka 4.3.3. Věta říká, že řada (4.10) *musí* konvergovat alespoň pro ta z, která vyhovují (4.9); *může však konvergovat* i pro další z, která tuto podmínku nesplňují. Jinak řečeno, její poloměr konvergence může být větší než $R - |x_0|$. Toho se využívá k rozšiřování f metodou tzv. *analytického pokračování.* Za zdůraznění stojí fakt, že funkce f, určená jako součet řady (4.4), má v kruhu konvergence *derivace všech řádů*, je tedy z třídy $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathcal{K}(z_0,R))$. Dá se dokázat i to, že je-li $G \subset \mathbb{C}$ oblast a na ní je definována komplexní funkce f taková, že existuje $f'(z)$ pro všechna $z \in G$ [2], pak pak rovněž platí $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(G)$. Přitom funkce f má v každém bodě $w \in G$ Taylorův rozvoj, což je mocninná řada o středu w a poloměru konvergence R, pro který platí $R \geq \operatorname{dist}(w, \complement G)$.

Pro operace, které s mocninnými řadami děláme, je důležitá následující *věta o jednoznačnosti.*

Věta 4.3.4. *Nechť $R > 0$, řady $\sum a_n(z-z_0)^n$ a $\sum b_n(z-z_0)^n$ konvergují v kruhu $\mathcal{K}(z_0,R)$ a nechť M je množina všech $z \in \mathcal{K}(z_0,R)$ takových, pro něž platí*

$$\sum a_n(z-z_0)^n = \sum b_n(z-z_0)^n \ . \tag{4.11}$$

Je-li M' množina všech hromadných bodů M a $M' \cap \mathcal{K}(z_0,R) \neq \emptyset$, platí $a_n = b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a rovnost (4.11) *platí všude v $\mathcal{K}(z_0,R)$.*

Důkaz. Položme $c_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, a definujme

$$f(z) = \sum c_n(z-z_0)^n \ .$$

Potom zřejmě platí $f(z) = 0$ pro všechna $z \in M$. Množina M' je dále podle tvrzení z teorie MP uzavřená, takže $N = M' \cap \mathcal{K}(z_0,R)$ je uzavřená v $\mathcal{K}(z_0,R)$; podle předpokladů je $N \neq \emptyset$ a ze spojitosti f plyne, že f se anuluje i na N. Dokážeme-li, že N je zároveň otevřená v $\mathcal{K}(z_0,R)$, pak vzhledem k souvislosti $\mathcal{K}(z_0,R)$ dostaneme $N = \mathcal{K}(z_0,R)$ a zároveň též $f(z) = 0$ na $\mathcal{K}(z_0,R)$. Pak však je i $f^{(k)}(z) = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a $z \in \mathcal{K}(z_0,R)$. Odtud plyne $c_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Zbývá proto dokázat otevřenost N. Podle předchozí věty platí

$$f(z) = \sum d_n(z-w_0)^n \ , \tag{4.12}$$

kde w_0 je libovolně zvolený bod N; řada (4.12) konverguje pro všechna z, pro něž je $|z-w_0| < R - |w_0|$. Pokud je $d_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, je $f(x) = 0$ i v okolí w_0 a důkaz je hotov.

Dále postupujeme sporem. Předpokládejme, že existuje index $m \in \mathbb{N}_0$ tak, že $d_m \neq 0$ a označme k *nejmenší* index m s touto vlastností. Definujme dále funkci $g(z) := \sum_{l=0}^{\infty} d_{k+l}(z-w_0)^l$. Pak však platí

$$f(z) = (z-w_0)^k \sum_{l=0}^{\infty} d_{k+l}(z-w_0)^l = (z-w_0)^k g(z) \ .$$

Řada, definující funkci g, konverguje alespoň pro všechna z, $|z-w_0| < R - |w_0|$. Je však $(z-w_0) \neq 0$ všude kromě $z = w_0$ a také $g(w_0) = d_k \neq 0$, takže ze

[2] Funkce s touto vlastností se nazývají *holomorfní funkce* v G.

spojitosti g existuje prstencové okolí $P(w_0)$ bodu w_0, na němž je $g(z) \neq 0$. Proto je i $f(z) \neq 0$ na $P(w_0)$, což je spor, neboť w_0 není izolovaný, ale *hromadný* bod množiny M. Spor ukazuje, že $d_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a tedy f se anuluje v okolí w_0, což jsme měli dokázat. □

Poznámka 4.3.5. Konverguje-li řada $\sum a_n(z - z_0)^n$ *absolutně* v bodě ζ, pak je její součet F spojitá funkce na množině $\{z; |z - z_0| \leq |\zeta - z_0|\}$; speciálně to platí i v případě, že bod ζ leží na konvergenční kružnici $\mathcal{C}(z_0, R)$. Zejména pak platí

$$\lim_{z \to \zeta,\ z \in \mathcal{K}(z_0, R)} f(z) = \sum a_n(\zeta - z_0)^n = f(\zeta)\ .$$

Platí však tato rovnost za předpokladu, že $\zeta \in \mathcal{C}(z_0, R)$ a $\sum a_n(\zeta - z_0)^n$ pouze konverguje, avšak *nikoli absolutně*? Niels Henrik Abel (1802 – 1829) dokázal r. 1826, že odpověď na tuto otázku je kladná, pokud se „blížíme k ζ speciálním způsobem". Obecněji platí, že konverguje-li mocninná řada v bodě ζ konvergenční kružnice $\mathcal{C}(z_0, R)$, je její součet spojitý vzhledem k úsečce spojující ζ se středem kružnice z_0 a konvergence (4.1) na této úsečce je stejnoměrná.

4.4 Abelova věta a sčítatelnost

Následující tvrzení je důsledkem obecnější, kterou jsme však nedokazovali. Protože je to tvrzení *velmi* důležité, dokážeme ho nezávisle přímo.

Věta 4.4.1 (Abel 1826). *Nechť $\zeta \neq z_0$ a řada $\sum a_n(\zeta - z_0)^n$ konverguje. Označme*

$$f(z) := \sum a_n(z - z_0)^n\ .$$

Potom platí

$$\lim_{x \to 1-} f(z_0 + x(\zeta - z_0)) = f(\zeta)\ .$$

Důkaz plyne z následujícího lemmatu. Zvolíme-li v něm $b_n = a_n(\zeta - z_0)^n$, je zřejmé, že řada $\sum b_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum a_n(\zeta - z_0)^n$ a

$$f(z_0 + x(\zeta - z_0)) = \sum a_n(x(\zeta - z_0))^n = \sum b_n x^n\ .$$

Věta 4.4.2 (Abel 1826). *Nechť $\sum b_n$ konverguje. Položme*

$$f(x) = \sum b_n x^n\ , \quad x \in (-1, 1)\ .$$

Potom platí $\lim_{x \to 1-} f(x) = \sum b_n$.

Důkaz. Položme $s_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $s_{-1} = 0$. Potom

$$\sum_{n=0}^{k} b_n x^n = \sum_{n=0}^{k} (s_n - s_{n-1}) x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{k-1} s_n x^n + s_k x^k \ .$$

Pro každé x, $|x| < 1$ proveďme limitní přechod pro $k \to \infty$. Protože $|s_n|$ je konvergentní a tedy i omezená posloupnost, platí

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} b_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \ , \quad x \in (-1,1) \ .$$

Je-li $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum b_n$ a $\varepsilon > 0$, pak lze nalézt $m \in \mathbb{N}$ tak, že nerovnost $|s - s_n| < \varepsilon/2$ platí pro všechna $n \geq m$. Ze znalostí o geometrické řadě dostáváme

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \ , \quad x \in (-1,1) \ .$$

Protože $\lim_{x\to 1_-} (1-x) \sum_{n=0}^{m} |s_n - s| = 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x, $1 - \delta < x \leq 1$, platí

$$|f(x) - s| = \left|(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{m} |s_n - s| \cdot |x|^n + \varepsilon/2 < \varepsilon \ .$$

Tím je důkaz dokončen. □

Tvrzení 4.4.3 (Abel 1826). *Nechť $\sum a_n$, $\sum b_n$ a $\sum c_n$ jsou konvergentní řady, přičemž je*

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 \ , \quad n \in \mathbb{N}_0 \ ,$$

tedy $\sum c_n$ je Cauchyův součin řad $\sum a_n$, $\sum b_n$. Potom pro součty *uvažovaných řad platí*

$$\left(\sum a_n\right) \cdot \left(\sum b_n\right) = \sum c_n \ .$$

Důkaz. Položme

$$f(x) = \sum a_n x^n \ , \quad g(x) = \sum b_n x^n \ , \quad h(x) = \sum c_n x^n$$

pro všechna $x \in [0,1]$. Potom při $x \to 1-$ platí

$$f(x) \to \sum a_n \ , \quad g(x) \to \sum b_n \ , \quad h(x) \to \sum c_n \ ,$$

a rovněž je $f(x) \cdot g(x) = h(x)$, $x \in (0,1)$. Limitním přechodem dostaneme žádané tvrzení. □

Poznámka 4.4.4. Předcházející tvrzení náleží včetně uvedeného důkazu Abelovi, nyní se však často používá důkaz, který podal r. 1890 ERNESTO CESÀRO (1859 – 1906).

Poznámka 4.4.5. Uvážíme-li případ řady $\sum(-1)^n x^n$, pak platí

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum(-1)^n x^n$$

a limita $\lim_{x\to 1-} f(x)$ existuje (a je rovna $1/2$). To nás spolu s Větou 4.4.2 vede k definici *Abelovy sčítací metody.*

Definice 4.4.6 (Abelova sčítací metoda). Jestliže řada $\sum a_n x^n$ s komplexními koeficienty konverguje v intervalu $(-1,1)$ a pro její součet $f(x)$ existuje $\lim_{x\to 1-} f(x) \in \mathbb{C}$, pak klademe

$$(\mathcal{A})\text{-}\sum a_n = \lim_{x\to 1-} f(x) \ .$$

Takto definované číslo se nazývá *abelovský součet* řady $\sum a_n$.

Poznámka 4.4.7. Z Věty 4.4.2 vyplývá, že pokud $\sum a_n$ konverguje, je její součet shodný s jejím abelovským součtem. Abelovský součet je však přiřazen i některým *divergentním* řadám, Poznámka 4.4.5 ukazuje, že platí $(\mathcal{A})\text{-}\sum(-1)^n = 1/2$. Protože popsaná Abelova sčítací metoda *rozšiřuje* definici „normálního“ součtu, je to metoda regulární.

Často sčítáme číselné řady takto: dokážeme, že $\sum a_n$ je konvergentní a určíme její abelovský součet s; pak samozřejmě platí $\sum a_n = s$.

Příklad 4.4.8. Příklad je převzat z knihy [11], str. 485. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme n-tý částečný součet $s(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2$. Potom platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(n)}{n!} = \frac{17e}{6} \ .$$

Na první pohled se zdá tento výsledek téměř magický. Uvědomíme–li si však, že platí

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ,$$

stačí dokázat, že platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n!} = 17e \ . \tag{4.13}$$

To dokážeme pomocí abelovské sčítatelnosti. Řada v rovnosti (4.13) vlevo zřejmě konverguje podle podílového kritéria. Hledejme nyní vhodné vyjádření funkce f, která se vyskytuje v definici abelovského součtu. Platí

$$xe^x = \sum \frac{x^{n+1}}{n!} ,$$

a tedy po dvojím zderivování

$$(2+x)e^x = \sum \frac{n(n+1)x^{n-1}}{n!} .$$

Dosadíme nyní x^2 za x, čímž dostaneme

$$(2+x^2)e^{x^2} = \sum \frac{n(n+1)x^{2n-2}}{n!} .$$

Nyní násobíme obě strany rovnosti x^3 a pak ještě jednou derivujeme. Obdržíme

$$(2x^6+9x^4+6x^2)e^{x^2} = \sum \frac{n(n+1)(2n+1)}{n!}x^{2n} .$$

Protože je vlevo v rovnosti spojitá funkce proměnné x, stačí při výpočtu limity pouze dosadit $x=1$, z čehož již plyne žádaný výsledek.

Příklad 4.4.9 (Gregory 1671). Ukažme si jiný jednoduchý, avšak důležitý příklad: určíme rozvoj funkce arctg v mocninou řadu o středu 0. Je

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} ,$$

a tedy („integrační konstanta c" je rovna 0)

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} .$$

Řada má poloměr konvergence rovný 1 a v bodě $x=1$ konverguje. Odtud plyne vzorec, který r. 1682 odvodil Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Platí

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots . \tag{4.14}$$

Poznamenejme, že exp i arctg jsou z $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$, ale jejich rozvoje o středu 0 mají *různé* poloměry konvergence. Při vyšetřování na $\mathbb{R}$ bychom důvod ztěží nalezli, avšak v $\mathbb{C}$ si snadno povšimneme, že kořeny rovnice $x^2+1=0$ leží na konvergenční kružnici $\mathcal{C}(0,1)$ Maclaurinových rozvojů funkce $1/(x^2+1)$ a funkce arctg.

Historická poznámka 4.4.10. Podívejme se na sčítací metody v širších souvislostech. V předcházejících kapitolách jsme se pokusili naznačit, že cesta k pojmu konvergence řady byla velmi složitá. O jednom aspektu jsme se však dosud nezmínili: divergentní řady se ukázaly v některých případech užitečné. Dokonce i Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) napsal: „Musel jsem vyjít z předpokladů *zdánlivě trochu tvrdých*, např. že divergentní řady nemají součet". Abel napsal r. 1826 nejen základní práci o konvergenci binomické řady, ale v dopise z Francie i těchto několik (často citovaných) řádek: „Divergentní řady jsou ďábelským výmyslem a je ostudné zakládat na nich jakýkoli důkaz. Pomocí nich lze odvodit jakýkoli potřebný závěr, proto vedly k tolika klamným výsledkům a paradoxům. Stal jsem se k tomu všemu abnormálně pozorným, protože s výjimkou geometrické řady neexistuje v celé matematice snad jiná řada, jejíž součet by byl určen korektně. Jinak řečeno, v matematice mají nejdůležitější věci ty nejhorší základy. Je pravda, že výsledky jsou většinou správné, to je na tom nejdivnější."

Zatím jsme se setkali prakticky s jedinou divergentní řadou $\sum(-1)^{n+1}$ a zmínili se o tom, jak s ní matematici zacházeli. Tak např. Luigi Guido Grandi (1671 – 1742) dosazením do rovnosti

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots \tag{4.15}$$

za $x = -1$ přisoudil této řadě „součet" $1/2$. Euler rozeznával konvergentní a divergentní řady, užíval však v pestré směsici oboje. Tak např. odvodil rovnosti

$$1/4 = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots \,, \qquad -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots \,, \tag{4.16}$$

přičemž postupoval stejně jako Grandi. První rovnost dostal z (2.8) z Kapitoly 11 dosazením $x = 1$, druhou z (4.15) dosazením $x = 2$. Euler si uvědomoval, že „nešikovné zacházení" s řadami vede k rozporům, byl však přesvědčen, že příčina neleží v řadách samotných, nýbrž v nedokonalosti metod sčítání. Jeho představy doložíme opět citátem „(…) každá řada musí mít určitou hodnotu. Abychom se vyrovnali se všemi při tom vznikajícími obtížemi, neměla by se tato hodnota nazývat součet. K tomuto označení se váže jeho chápání jakožto výsledku skutečného sčítání, což není možné u divergentních řad." Eulerovým ideálem bylo přiřadit každé řadě jakýsi *zobecněný součet* a zdánlivě „absurdní" rovnosti (4.16) jsou důsledkem jeho přesvědčení, že „součet každé řady je hodnotou toho konečného výrazu, jehož rozvinutím příslušná řada vzniká" (1745). Toto je tzv. *Eulerův princip*. Analytické pokračování lze interpretovat jako jistou realizaci tohoto principu.

Zacházení s divergentními řadami a „podivně správné výsledky" si přiblížíme ukázkou: v rovnosti (4.15) položme $x = \mathrm{e}^{it} = \cos t + i \sin t$, $t \in (0, \pi)$. Porovnáním reálných částí výrazů na obou stranách rovnosti dostaneme pro $t \in (0, 2\pi)$

$$1/2 = -\cos t - \cos 2t - \cos 3t - \ldots$$

a z ní záměnou $t + \pi$ za t

$$1/2 = \cos t - \cos 2t + \cos 3t - \ldots$$

pro $t \in (-\pi, \pi)$. Integrací odtud dostaneme

$$t/2 = \frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots$$

a další integrací pak

$$\frac{t^2}{4} = \frac{-\cos t}{1^2} - \frac{-\cos 2t}{2^2} + \frac{-\cos 3t}{3^2} - \dots + C \ ,$$

kde je nutno určit integrační konstantu C. Všimněte si, že vpravo je již řada, která je dokonce *stejnoměrně konvergentní* na intervalu $[\,-\pi, \pi\,]$, ač jsme vyšli od řady, která v bodech e^{it} pro všechna $t \in (0, 2\pi)$ *divergovala.* Z předchozí rovnosti dopočteme C např. dosazením $t = 0$ a tak dostaneme

$$\frac{t^2}{4} = \frac{1-\cos t}{1^2} - \frac{1-\cos 2t}{2^2} + \frac{1-\cos 3t}{3^2} - \cdots \ . \tag{4.17}$$

Zde je za C dosazována konvergentní řada o nám neznámém součtu, nicméně po dosazení $t = 0$ se obě strany rovnice (4.17) anulují. Euler nyní dosadil $t = \pi$ a tak odvodil *správný výsledek*

$$\sum (2k+1)^{-2} = \pi^2/8 \ .$$

Pokud odůvodníte níže naznačené operace (není to těžké!), snadno jeho správnost ověříte nezávisle na užití divergentních řad:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} - \dots =$$
$$= \Big(1 - \frac{1}{4}\Big) \cdot \Big(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\Big) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

Podezření Nicolase Bernoulliho (1687 – 1759) z r. 1743, že by táž číselná řada mohla vzniknout z podstatně odlišných výrazů, posilovalo nedůvěru k Eulerovu principu, Euler však takové podezření odmítal. Později se však našel i příklad

$$\frac{1-x^m}{1-x^n} = \frac{1+x+\dots+x^{m-1}}{1+x+\dots+x^{n-1}} = 1 - x^m + x^n - x^{n+m} + x^{2n} - \cdots \ ,$$

který „dává“ podle Eulerova principu jako hodnotu pro $\sum(-1)^{n+1}$ každé z čísel m/n. Tento jev vysvětlil později Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813). Příslušné mocninné řady nejsou stejné a po dosazení $x = 1$ je třeba přihlédnout k *nulovým členům* $0 \cdot x^k$. Obecně lze však říci, že existují sčítací metody, které do jisté míry Eulerovu myšlenku naplňují: lze jimi „sečíst“ mocninnou řadu i v bodech, kde diverguje. To však vyžaduje hlubší znalost teorie funkcí komplexní proměnné a přesahuje značně rámec tohoto textu. Důležitým momentem je fakt že Euler pracoval s *mocninnými* řadami a ne s libovolnými funkčními řadami, pro které by analogický princip neměl naději na exaktní zpracování: jednoduché příklady ukazují, že analogické tvrzení neplatí.

Nový zájem o divergentní řady nevznikl okamžitě s uveřejněním Abelovy práce. Trvalo to až do r. 1880, kdy se podařilo GEORGU FROBENIOVI (1849 – 1917) ukázat, že Abelova věta platí i v modifikované podobě, nahradíme-li „obyčejný" součet řady cesàrovským zobecněným součtem. Jeho výsledek dále zobecnil o dva roky později OTTO HÖLDER (1859 – 1937), který studoval další iterované průměry posloupností částečných součtů řad a definoval sčítací metody $(\mathcal{H}, k)$. Poněkud strohý popis ozřejmíme na příkladě: částečné součty první z řad v (4.16) zřejmě divergují; tvoří posloupnost

$$\{1, -1, +2, -2, \dots\}\ .$$

Jejich aritmetické průměry tvoří posloupnost

$$\{1, 0, 2/3, 0, \dots\}\ ,$$

která opět diverguje, a proto $(\mathcal{H}, 1)$-součet uvažované řady neexistuje. Utvoříme další průměry členů předchozí posloupnosti, čímž dostaneme posloupnost

$$\{1, 1/2, 5/9, 5/12, \dots\}\ ,$$

která konverguje k $1/4$, tedy k „Eulerovu výsledku". Zároveň vidíme, že $(\mathcal{H}, 2)$-metoda dvakrát opakovaných průměrů je „silnější" než $(\mathcal{H}, 1)$-metoda. Později zavedl Cesàro metody $(\mathcal{C}, 1)$, $(\mathcal{C}, 2), \dots$, o kterých KONRAD KNOPP (1882 – 1957) r. 1907 a WALTER SCHNEE (1885 – 1958) r. 1909 dokázali, že jsou ekvivalentní s Hölderovými metodami, tj. že platí $(\mathcal{C}, 1) = (\mathcal{H}, 1)$, $(\mathcal{C}, 2) \approx (\mathcal{H}, 2)$, $(\mathcal{C}, 3) \approx (\mathcal{H}, 3), \dots$. To znamená, že metody $(\mathcal{C}, k)$ a $(\mathcal{H}, k)$ splývají pro $k = 1$ a pro $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ jsou rozdílné, ale sčítají tytéž řady ke stejným zobecněným součtům.

Cesàro dokázal nejen variantu Tvrzení 4.4.3 pro $(\mathcal{C}, k)$-součty, ale obecněji ukázal, že je-li řada $\sum a_n$ sčítatelná $(\mathcal{C}, k)$-metodou a řada $\sum b_n$ podobně $(\mathcal{C}, l)$-metodou ke konečným součtům a, b, pak je jejich Cauchyův součin sčítatelný $(\mathcal{C}, k + l + 1)$-metodou k hodnotě ab. Definitivně prolomil panující nedůvěru ke sčítacím metodám r. 1903 LEOPOLD FEJÉR (1880 – 1959), který dokázal, že *Fourierova řada* každé spojité 2π-periodické funkce je sčítatelná $(\mathcal{C}, 1)$-metodou k této funkci všude, i když může v mnoha bodech divergovat. Poznamenejme, že sčítacích metod je mnoho a jsou „různě silné". Hölderův výsledek např. říká, že platí implikace

$$(\mathcal{H}, k)\text{-}\sum a_n = a \Rightarrow (\mathcal{A})\text{-}\sum a_n = a$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, tedy Abelova metoda je „silná". V monografii [21] je v přehledné tabulce uvedeno takových metod 99.

Poznámka 4.4.11. Při práci s mocninnými řadami lze užívat i další operace. Vcelku přirozená jsou tvrzení o sčítání a násobení mocninných řad, která nebudeme ani vyslovovat. Trochu zajímavější je tvrzení o dělení mocninných řad; to však pouze vyslovíme, ale dokazovat je nebudeme.

Věta 4.4.12. *Nechť mocninné řady o středu* 0 *funkcí f a g konvergují k těmto funkcím pro všechna z, $|z| < R$. Potom v případě, že $g(0) \neq 0$, existuje takové $r > 0$, že funkci f/g lze rozvinout v řadu o středu* 0 *konvergentní pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$, a příslušný rozvoj lze získat „dělením řad“. Pro toto r platí: $r = \inf\{|z|; |z| < R, g(z) = 0\}$, pokud se g anuluje v $\mathcal{K}(0, R)$, nebo $r = R$ v případě, že $g(z) \neq 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$.*

Příklad 4.4.13. Ukažme si na příkladu funkce tg, jak se takové dělení provádí. Platí $\operatorname{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{x; \cos(x) = 0\}$ všude kromě nulových bodů funkce cos, dostáváme tedy pomocí dělení

$$
\begin{array}{l}
x - x^3/3! + x^5/5! - \dots \ : \ 1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots \ = \ x + \dfrac{x^3}{3} + \dots \ . \\
\underline{\pm x \mp x^3/2! \pm x^5/4! \mp \dots} \\
\quad x^3/3 \ - x^5/30 + \dots \\
\quad \underline{\pm x^3/3 \mp x^5/6 \pm} \\
\qquad 2x^5/15
\end{array}
$$

Postup je analogický jako dělení polynomu polynomem, dělíme však „odzadu“, tj. od nejnižších mocnin. Tak se odvodí rozvoj

$$
\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots ,
$$

který konverguje pro $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, tedy až „k nejbližšímu nulovému bodu funkce sin od počátku“. Legitimitu tohoto dělení nebudeme dokazovat, poznamenejme však, že pro $b_0 \neq 0$ lze jednoduše určit koeficienty „podílové řady“ $\sum a_n z^n$ ze vztahu

$$
\sum a_n z^n = \left(\sum c_n z^n\right) : \left(\sum b_n z^n\right)
$$

metodou porovnání koeficientů, založenou na Větě 4.3.4. Řešíme tak rovnice

$$
\begin{aligned}
a_0 b_0 &= c_0 \ , \\
a_0 b_1 + a_1 b_0 &= c_1 \ , \\
a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= c_2 \ , \dots
\end{aligned}
$$

vzhledem k neznámým $a_0, a_1, a_2, \dots$. Z prvé rovnice vypočteme a_0 a dosadíme do druhé, vypočteme a_1 a a_0, a_1 dosadíme do třetí, atd. Všimněme si ještě souvislostí s elementární matematikou.

Historické poznámky 4.4.14. Kruh konvergence byl znám v podstatě již Cauchymu včetně metody výpočtu jeho poloměru, avšak důkaz vzorečku nebyl korektní a prodělal další vývoj. Proto se vzorec spojuje s letopočtem 1892 a jménem Hadamard. Jeho použití pro důkaz věty o derivování a integraci mocninné řady člen po členu není nezbytně nutné, představuje však jeho elegantní využití. Abelův výsledek o spojitosti vzhledem k úsečce spojující bod na konvergenční kružnici se středem kruhu konvergence zlepšil později Otto Stolz (1842 – 1905).

Rozvoj součtu f mocninné řady s kruhem konvergence $\mathcal{K}(x_0, R)$, $0 < R < +\infty$, v Taylorovu řadu o jiném středu je také dlouho znám. Uvedená Věta 4.3.2 zaručuje minimální velikost poloměru konvergence rozvoje, ta však může být obecně větší. Je proto možné, že existuje mocninná řada se středem $\zeta \in \mathcal{C}(z_0, R)$ tak, že její součet f_1 splývá s f na $\mathcal{K}(z_0, R)$. Na tom je založena myšlenka *analytického pokračování*, které sehrálo zásadní roli v teorii funkcí komplexní proměnné. Dá se ukázat, že alespoň jeden bod konvergenční kružnice tuto vlastnost nemá. Další studium mocninných řad vede směrem k teorii funkcí komplexní proměnné.

Větu o jednoznačnosti ve slabší formě, tj. pro případ, že M je interval v $\mathbb{R}$, dokázal již r. 1827 Abel. Ve formě, ve které jsme ji uvedli, ji patrně první dokázal Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897).

4.5 Ještě trocha historie

Historické poznámky 4.5.1. Jedním ze specifických rysů tohoto textu je množství historických ukázek a poznámek. Znalost historie vlastního oboru je užitečná pro každého matematika a pro učitele matematiky by měla být spolu se schopností nadhledu nad látkou, kterou učí, samozřejmostí. Snad k tomu tato učebnice alespoň částečně přispěje. Na závěr uvedeme ještě několik poznatků obecnějšího charakteru.

Centrálním objektem našeho výkladu byl pojem funkce. Věnujme mu proto několik poznámek. Termín *funkce* zavedl Leibniz r. 1692. K jeho rychlému vývoji přispěli zejména příslušníci rodiny Bernoulliů a Euler, od něhož pochází označení $f(x)$ (1748). Z dalších mnoha jmenujme ještě dva významné matematiky. K chápání pojmu funkce jako *libovolného zobrazení*, bez implicitních představ analytického vyjádření nebo spojitosti, přispěli zejména Jean Baptist Joseph Fourier (1768 – 1830) (1821) a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) (1837). Množinové pojetí pomocí relace, resp. grafu zavedl patrně Giuseppe Peano (1858 – 1932) r. 1911.

Představy o spojitosti funkce se vyvíjely v souvislosti s vývojem pojmu funkce. Tak např. v ranném stadiu vývoje byl považován za bod nespojitosti funkce takový bod, v němž se „měnil předpis“, který funkci popisoval. Největší vliv však patrně mělo zpřesnění tohoto pojmu, které opět přinesl teprve až Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) v r. 1821 v [4] a později Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897); viz též jeho přednášky z r. 1861, které publikoval Georg Cantor (1845 – 1918) r. 1870.

Podobné (snad i přesnější) pojetí jako u Weierstrasse nacházíme však již v práci [2] Bernarda Bolzana (1781 – 1848) z r. 1817; Bolzanovy práce však zůstaly po mnoho let téměř neznámé. V r. 1872 napsal Eduard Heine (1821 – 1881) práci, v níž exaktně odlišil spojitost v bodě, v intervalu a stejnoměrnou spojitost. Založil definici spojitosti na zacházení s posloupnostmi.

Náš výklad byl doprovázen ukázkami z některých historických pramenů. Přibližme si starší české učebnice. Na počátku 19. stol. byla v Rakousko-Uhersku v našich zemích gymnázia pětiletá a šestiletá. Na nich byli učitelé již specializováni podle předmětů, které učili. Později byla všechna gymnázia šestiletá, až do r. 1849, kdy byla zavedena osmiletá gymnázia a přípravy jejich učitelů se ujaly nově zřízené filozofické fakulty univerzit.

Tzv. reálná gymnázia byla od r. 1868 sedmiletá a od r. 1869 byla na nich zavedena maturita, opravňující však ke studiu jen na vysokých školách technických.

I když byla některá gymnázia označena jako česká, učilo se na nich česky i německy. Od r. 1867 byl užíván jen jeden jazyk, v Čechách zpravidla český, na Moravě německý. Např. Praha měla české gymnázium od r. 1850, Brno až od r. 1867. Na Královském českém polytechnickém ústavu byly první české přednášky zavedeny r. 1861. Od školního roku 1869/70 došlo k rozdělení na českou a německou část. Také na univerzitě se postupně přecházelo k češtině a r. 1882 byla i ona rozdělena na německou a českou část.

Matematika a fyzika neměla v prvé polovině 19. stol. na pražské univerzitě dobrou úroveň. Je obrovská škoda, že Bolzano nezískal r. 1804 místo profesora matematiky na univerzitě. To se uprázdnilo úmrtím Stanislava Vydry (1741 – 1804), získal je však Josef Ladislav Jandera (1776 – 1857), který sám nikdy nenapsal žádnou vědeckou práci (vydal posmrtně učebnici Vydrovu). Z oblasti analýzy neexistovala česky psaná odborná literatura, ještě Filip Jakub Kulik (1793 – 1863) a také Karl Hornstein (1824 – 1882) přednášeli na univerzitě matematiku německy; Kulik napsal německy učebnici vyšší analýzy.

První matematická vědecká práce psaná česky, jejímž autorem byl Václav Šimerka (1819 – 1887), vyšla r. 1862. Rok před tím byl čtyřmi studenty založen *Spolek pro volné přednášky z matematiky a fyziky* a po schválení stanov r. 1862 zahájil svoji činnost. Nejprve opět česky i německy, ale asi po dvou letech probíhal spolkový život již výhradně na bázi češtiny. Kulik projevoval Spolku přízeň a věnoval mu svoji knihovnu. V roce 1869 dostal Spolek nové jméno *Jednota českých matematiků*. Tato profesní organizace vyvíjí poměrně rozsáhlou činnost i dnes (nese jméno *Jednota českých matematiků a fyziků*. Jednota byla zejména v meziválečném období známa svojí ediční činností na poli učebnic i monografií.

R. 1870 nastoupil na univerzitu jako docent Emil Weyr (1848 – 1894), jeho bratr Eduard Weyr (1852 – 1903) se na univerzitě habilitoval jako docent r. 1876. Ten také napsal obsáhlou vysokoškolskou učebnici infinitezimálního počtu [20], z níž jsme vybrali některé ukázky. Je zajímavé, že vůbec první českou učebnicí věnovanou této problematice byla *středoškolská* učebnice Šimerkova [18] z r. 1864, která však byla schválena pouze jako kniha pomocná. O rok později vyšla knížka Gustava Skřivana (1831 – 1866), který se stal na základě konkursu, vypsaného ve šk. r. 1862/63, docentem pro české přednášky z elementární i vyšší matematiky na pražské polytechnice; Skřivanova knížka [17] byla určena technikům, přinášela však z matematického hlediska dosti obsáhlý výklad. V textu není uvedena žádná ukázka z této knihy, z její předmluvy však uveďme citát, který objasňuje roli matematiky tak, jak ji Skřivan chápal: „Že jsem konečně všelicos přijal, což, hledíc k životním zájmům polytechnikův, toliko vědecký, čili (jak vůbec se praví) theoretický význam v sobě obnáší, — toho se, tuším, snadno omluvím, povím-li, *že studium prosté mathematiky za nejprospěšnější a nejpřednější prostředek formálného vzdělání pro polytechnika vážím, za jehož pomocí nejen s ústrojem kalkulu podstatně se spřáteliti, nýbrž i abstrakcím a exaktnému myšlení snadno přivykati bude moci.*“ Kniha Weyrova způsobila jisté spory, které patrně nepřidaly autorovi na zdraví; viz [1] . Situace se vyhrotila, neboť spolu s Weyrem přednášel na univerzitě matematiku František Josef Studnička (1836 – 1903) a oba umírají v r. 1903.

Do Prahy byl na univerzitu povolán z Brna Karel Petr a později též i Jan Sobotka (1862 – 1931). Zejména vlivem Petrovým úroveň výuky analýzy výrazně stoupla. Petr napsal učebnici [16], která vyšla r. 1916 a v rozšířené verzi o Dodatek Vojtěcha

JARNÍKA (1897 – 1970) opět v r. 1931. První vydání bylo zamýšleno jako druhý díl Weyrovy učebnice [20]. Weyr pokračování své knihy již napsat nestihl. Petr později vydal i „svůj první díl“ [15] Modernizaci pojetí integrálu, založenou na teorii HENRI LOUISE LEBESGUEA (1875 – 1941) z počátku tohoto století, nalezneme v monografii [5], kterou publikoval r. 1936 (opět s Jarníkovým dodatkem) EDUARD ČECH (1893 – 1960). To byla první česká kniha, v níž byl Lebesgueův integrál vyložen.

Na Petrovo úsilí o pozvednutí úrovně přípravy středoškolských učitelů matematiky v analýze i profesních matematiků pracujících mimo oblast školství navázal Jarník, jehož učebnice [9], [10], napsané v době druhé světové války, se užívají dodnes; druhé díly obou učebnic jsou obsahově podstatně náročnější. Nezmiňujeme se o dalších učebních textech, kterých ve formě skript a učebních textů (nebo překladů) vyšlo dodnes značné množství.

Dotkli jsme se částečně jen výseku historického vývoje výuky matematiky v českých zemích. Vývoji matematiky na univerzitě v období 1900 – 1918 je věnován článek [7], další informace lze nalézt např. v publikaci [14]. Hlubší zájemce o historii matematiky upozorňuji na již delší dobu pravidelně pořádané *Letní školy o historii matematiky*; věřím, že i mezi jejich účastníky se najdou čtenáři, které tato učebnice osloví.

Literatura:

[1] Bečvář, J. (ed.): *Jan Vilém Pexider (1784 – 1914)*, Prometheus, Praha, (Pátý svazek edice Dějiny matematiky.)

[2] Bolzano, B.: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daßzwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Gottlieb Haase, Praha, 1817.

[3] Bressoud, D.: *A radical approach to real analysis*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994.

[4] Cauchy, L. A.: *Course d'analyse de l'École Royal Polytechnique*, Paris, 1821.

[5] Čech, E.: *Bodové množiny. Část první*, Praha, 1936. (Druhá část nevyšla.)

[6] Edwards, C. H.: *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.

[7] Folta, J., Mandlerová, J., Nový, L.: *Matematika na pražské universitě v letech 1900 – 1918*, Acta Universitatis Carolinae, **(VIII, f.2)**, 1967, str. 7 – 43.

[8] Hewitt, E., Stromberg, K.: *Real and abstract analysis*, Springer, Berlin, 1969.

[9] Jarník, V.: *Diferenciální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, 1963. (5. vydání.)

[10] Jarník, V.: *Integrální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, 1963. (4. vydání.)

[11] Klambauer, G.: *Aspects of Calculus*, Springer, Berlin, 1986.

[12] Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Springer, Berlin, 1908.

[13] Konforovič, A. G.: *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1981.

[14] Nový, L. a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1961.

[15] Petr, K.: *Počet differenciální* (*část analytická*), Jednota československých mathematiků a fysiků, Praha, 1923.

[16] Petr, K.: *Počet integrální* (*část analytická*), Jednota československých mathematiků a fysiků, Praha, 1931. (Druhé, pozměněné vydání s dodatkem V. Jarníka: Úvod do teorie množství.)

[17] Skřivan, G: *Přednášky o algebraické analysi*, Eduard Grégr, Praha, 1865.

[18] Šimerka, V.: *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia*, Tiskem a nákladem Dr. E. Grégra, Praha, 1864.

[19] Walter, W.: *Analysis I*, Springer, Berlin, 1992. (3. přepracované vydání.)

[20] Weyr, E.: *Počet differenciálný*, Jednota českých matematiků, Praha, 1902.

[21] Zeller, K., Beckman, W.: *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer, Berlin, 1970.