Obsah

Kapitola 1

Teorie integrálu v $\mathbb{R}^m$

1.1 Vícerozměrný integrál

Připomeňme si, že již na střední škole se žáci setkávají s určováním obsahu jednoduchých rovinných obrazců; učí se vzorečky pro obsahy trojúhelníku, lichoběžníku, kruhu apod. Seznámí se rovněž se vzorci pro objemy jednoduchých těles v $\mathbb{R}^3$. Při určování obsahu *omezené* množiny $A \subset \mathbb{R}^2$ se postupuje zpravidla takto: v rovině se pomocí přímek rovnoběžných s osami souřadnic o rovnicích

$$x = k = \frac{k}{2^0} \;, \quad y = k = \frac{k}{2^0} \;, \quad k \in \mathbb{Z} \;,$$

vytvoří čtvercová síť N_0. Pro tuto síť označíme s_0 součet obsahů všech čtverců C sítě N_0 takových, pro které $C \subset A$, a S_0 součet obsahů všech čtverců C sítě N_0, pro něž $C \cap A \neq \emptyset$; pro lepší představu si načrtněte jednoduchý obrázek. Síť S_0 „zjemníme“ tak, že dělíme každý čtverec sítě S_0 na čtyři shodné čtverce sítě S_1 pomocí spojnic středů stran. Analogicky vytvoříme součty s_1 a S_1. Postupným opakováním tohoto procesu dostaneme posloupnosti součtů $\{s_n\}$ a $\{S_n\}$. Snadno nahlédneme že posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající, posloupnost $\{S_n\}$ nerostoucí a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n \leq S_n$. Existuje-li společná limita takto vzniklých posloupností, nazýváme ji **Jordan-Peanovým objemem množiny** A.

Tento poněkud zjednodušeně popsaný postup lze zpřesnit. Ukazuje se, že Jordan-Peanův objem nemusí být definován i pro relativně jednoduché množiny. Je-li např. A množina všech bodů čtverce $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, které mají obě souřadnice racionální a zvolíme-li pro jednotlivá $n \in \mathbb{N}$ sítě čtverců S_n popsané pomocí přímek o rovnicích

$$x = \frac{k}{2^n}, \quad y = \frac{k}{2^n}, \quad k \in \mathbb{Z} \;,$$

pak pro každé n je $s_n = 0$ a $S_n = 1$. Pro množinu A není tedy její Jordan-Peanův objem definován. Tento způsob měření velikosti množin úzce souvisí s Riemannovým integrálem, jehož myšlenkové jádro je svázáno se základními intuitivně zřejmými vlastnostmi obsahu a objemu jako jsou aditivita, monotonie apod.

1.2 Body nespojitosti funkce.

V dalším se nám bude hodit možnost charakterizovat jednoduše body nespojitosti funkce. K tomu se užívá funkce, kterou nazýváme **oscilace**. Někdy se jí též kvůli zmíněné charakterizaci bodů spojitosti říká **modul spojitosti**.

Definice 1.2.1. Nechť je funkce f definována na množině A. Potom hodnotu

$$\omega(f;A) := \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in A\}$$

nazýváme **oscilace funkce f na množině** A.

Poznámky 1.2.2. 1. Obecně zřejmě platí $0 \le \omega(f;A) \le \infty$.

2. Je-li f omezená na A, $|f| \le M < \infty$, pak zřejmě $\omega(f;A) \le 2M$.

3. Je-li f definována na A a $B \subset A$, pak $\omega(f;B) \le \omega(f;A)$.

4. Platí $\omega(f;A) = \sup\{f(x); x \in A\} - \inf\{f(x); x \in A\}$.

Je-li navíc A např. podmnožina metrického prostoru (P,ρ), dá se pojem oscilace snadno „lokalizovat“.

Definice 1.2.3. Nechť $A \subset (P,\rho)$ a f je funkce na A. Položme pro $x \in A$

$$B(x,r) := \{y \in A; \rho(x,y) < r\} ,$$

tj. $B(x,r)$ je otevřená koule o středu x v podprostoru A prostoru (P,ρ); definujeme

$$\omega_f^A(x) := \lim_{r \to 0_+} \omega(f; B(x,r)) .$$

Hodnotu této limity nazýváme **oscilace funkce f v bodě x vzhledem k množině** A.

Poznámky 1.2.4. 1. Je-li f omezená funkce na A, $|f| \le M < \infty$, pak také je ω_f^A je omezená a $\omega_f^A(x) \le 2M$ pro všechna $x \in A$.

2. Funkci ω_f^A jsme definovali *pouze v bodech* množiny A.

3. Je-li $x \in A$ a $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou posloupnosti bodů z A, které konvergují k bodu x, pak pokud $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je $\omega_f^A(x) \ge \varepsilon$.

4. Je-li $x \in A$ a $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou opět posloupnosti bodů z A, které konvergují k bodu x, pak pokud posloupnosti $\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ mají různé limity pro $n \to \infty$, je $\omega_f^A(x) > 0$.

5. Je-li funkce f nespojitá v bodě $x \in A$, je $\omega_f^A(x) > 0$.

Lemma 1.2.5. *Při výše zavedeném označení nastává rovnost $\omega_f^A(x) = 0$, právě když je f spojitá v bodě x vzhledem k A.*

Důkaz. Je-li f nespojitá v x, je vzhledem k předchozí Poznámce 1.2.4 je $\omega_f^A(x) > 0$. Je-li $\omega_f^A(x) = 0$, pak k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze nalézt $r > 0$ tak, že

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(f; B(x,r)) < \varepsilon$$

pro všechna $y \in B(x,r)$; $B(x,r)$ je zde otevřená koule v A o poloměru r. Odtud však již plyne spojitost f v bodě x vzhledem k A. $\square$

Z předchozího lemmatu vyplývá následující tvrzení:

Důsledek 1.2.6. *Je-li f funkce definovaná na množině $A \subset (P,\rho)$, pak množina $D(f;A)$ všech bodů nespojitosti f vzhledem k A je množina*

$$\{x \in A;\, \omega_f^A(x) > 0\} \ .$$

Označíme-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$D_n(f;A) := \Big\{x \in A;\, \omega_f^A(x) \geq \frac{1}{n}\Big\},$$

potom pro množinu $D(f;A)$ všech bodů nespojitosti f vzhledem k A platí

$$D(f;A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n(f;A).$$

1.3 Riemannův integrál v $\mathbb{R}^m$

Z $\mathbb{R}^1$ je známo, že postačující podmínkou pro existenci Riemannova integrálu (dále budeme psát krátce $(\mathcal{R})$-integrál) funkce f vzhledem k intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ je *monotonie* nebo *spojitost* funkce f na $[a,b]$. Druhá z podmínek se snadno přenese i na $(\mathcal{R})$-integrál v $\mathbb{R}^m$. Dříve však zavedeme některá označení a terminologii, kterou použijeme k definici integrálu.

Definice 1.3.1. Nechť $a = [a_1,\ldots,a_m]$, $b = [b_1,\ldots,b_m]$ jsou body z $\mathbb{R}^m$ takové, že $b_k - a_k > 0$ pro všechna $k = 1,2,\ldots,m$. Potom definujeme

$$[\,a,b\,] := [\,a_1,b_1\,] \times [\,a_2,b_2\,] \times \cdots \times [\,a_m,b_m\,]\ ; \tag{1.1}$$

Je-li $x = [x_1,\ldots,x_m] \in \mathbb{R}^m$, pak $x \in I$, právě když $a_k \leq x_k \leq b_k$, $k = 1,2,\ldots,m$. Pro každý interval $I = [\,a,b\,]$ definujeme jeho **objem** $\mathrm{vol}(I)$ vzorcem

$$\mathrm{vol}(I) := \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k)\ .$$

Definice 1.3.2. Jestliže pro uzavřené intervaly I_j, $j = 1, \dots, n$ platí, že žádné dva nemají společný *vnitřní* bod a zároveň $I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, říkáme, že $\{I_j\}$ tvoří **dělení intervalu** I. Množinu všech *dělení* intervalu I označíme analogicky $\mathcal{D}(I)$. Je-li $I = [a, b]$ popsán pomocí (1.1), označme symbolem D_k dělení intervalu $[a_k, b_k]$, tj. $D_k \in \mathcal{D}([a_k, b_k])$,

$$D_k = \{a_k = x_k^0 < x_k^1 < \cdots < x_k^{n_k} = b_k\},$$

$k = 1, 2, \dots, m$. Potom dělení D intervalu I, jehož dělící intervaly vzniknou jako všechny možné kartézské součiny m dělících intervalů $[\, x_k^{j_k - 1}, x_k^{j_k}\,]$, $1 \le j_k \le n_k$, $k = 1, \dots, m$, dělení D_k, budeme nazývat **rozdělením** D intervalu I. Množinu všech *rozdělení* intervalu I označíme analogicky $\mathcal{D}^*(I)$.

Jak si čtenář jistě povšiml, i když neprovádíme žádné náročné úvahy, přesný popis může být formálně komplikovaný. Proto si budeme někdy pomáhat obrázkem v $\mathbb{R}^2$.

Definice 1.3.3. Jsou-li D', D'' dvě dělení intervalu $I \subset \mathbb{R}^m$, pak říkáme, že dělení D'' je **zjemněním** dělení D', jestliže $D'' = \{I_j\}_{j=1}^{p}$, $D' = \{J_l\}_{l=1}^{q}$ a pro každý dělící interval J_l dělení D' existují dělící intervaly I_j dělení D'' tak, že tvoří dělení J_l; v tom případě píšeme $D' \prec D''$.

Poznámky 1.3.4. 1. Interval $I := [a, b]$ je tedy omezený a uzavřený, a tedy je kompaktní množinou v $\mathbb{R}^m$.

2. Jsou-li $I, J \subset \mathbb{R}^m$ omezené uzavřené intervaly, které mají společný alespoň jeden vnitřní bod, je $I \cap J$ opět omezený uzavřený interval. Omezenost a uzavřenost vyplývají z obecnějších tvrzení o průnicích; „tvar“ si stačí rozmyslet pro jednorozměrný případ a uvážit, že výsledný průnik je kartézským součinem průniků příslušných jednorozměrných intervalů. Pro lepší představu uvádíme obrázek několika (ne všech) možných případů v $\mathbb{R}^2$.

Obrázek 1.1: Průnik uzavřených intervalů

3. Ke každému dělení D' intervalu I existuje rozdělení $D'' \in \mathcal{D}(I)$, $D' \prec D''$. Konstrukce D'' je nejlépe patrna z následujícího obrázku.

Obrázek 1.2: Rozdělení zjemňující dělení

4. Ke každému konečnému systému intervalů $\{J_l\}_{l=1}^q$, $J_l \subset I$ pro $l = 1, 2, \ldots, q$, existuje rozdělení $D'' = \{I_j\}_{j=1}^p$ intervalu I takové, že ke každému intervalu J_l lze nalézt v D'' množinu intervalů I_j, které tvoří dělení J_l. Z následujícího obrázku je opět patrna konstrukce.

Obrázek 1.3: Generované rozdělení

5. Ke každým dvěma rozdělením $D', D'' \in \mathcal{D}(I)$ existuje jejich společné zjemnění D^*

$$D' \prec D^*, \quad D'' \prec D^* \ .$$

Připojujeme opět obrázek, ze kterého názorně vyplývá způsob konstrukce.

V dalším popisujeme dělící intervaly rozdělení $D \in \mathcal{D}(I)$ převážně výčtem: $D = \{I_j\}_{j=1}^p$. Pro každý interval $I = [a, b]$ definovaný v (1.1) klademe

$$\operatorname{vol}(I) = \prod_{k=1}^m (b_k - a_k). \tag{1.2}$$

Je-li $D \in \mathcal{D}(I)$, $D = \{I_j\}_{j=1}^p$, pak vzhledem k tomu, že pracujeme s rozdělením, zřejmě platí

$$\operatorname{vol} I = \sum_{j=1}^p \operatorname{vol}(I_j).$$

Obrázek 1.4: Společné zjemnění

Je-li nyní f omezená funkce na intervalu I a dělení $D \in \mathcal{D}(I)$ je zjednodušeně popsáno výčtem $D = \{I_j\}_{j=1}^p$, označme pro $j = 1, 2, \dots q$

$$m = \inf\{f(x); x \in I\}, \qquad M = \sup\{f(x); x \in I\},$$
$$m_j = \inf\{f(x); x \in I_j\}, \quad M_j = \sup\{f(x); x \in I_j\}.$$

Potom zřejmě pro rozdělení D a součty

$$s(f;D) := \sum_{j=1}^{p} m_j \operatorname{vol}(I_j), \quad S(f;D) = \sum_{j=1}^{p} M_j \operatorname{vol}(I_j)$$

platí jako v jednorozměrném případě nerovnosti

$$m \operatorname{vol}(I) \le s(f;D) \le S(f;D) \le M \operatorname{vol}(I)$$

Číslo $s(f;D)$ nazýváme **dolní součet** pro funkci f a rozdělení D a číslo $S(f;D)$ **horní součet** pro funkci f a rozdělení D. Čtenář nechť si laskavě uvědomí, že pouze opakujeme úvahy, které se dělají pro případ jednorozměrného $(\mathcal{R})$-integrálu; viz opět [MAU], str. 252 a násl.

Jestliže pro $D', D'' \in \mathcal{D}(I)$ platí $D' \prec D''$, je rovněž

$$s(f;D') \le s(f;D''), \quad S(f;D'') \le S(f;D'),$$

tedy hodnota dolního součtu se při přechodu ke zjemnění nezmenší a hodnota horního součtu nezvětší. Odtud pomocí Poznámky 1.3.4 (4) též vyplývá, že pro *libovolná* $D', D'' \in \mathcal{D}(I)$ platí $s(f;D') \le S(f;D'')$. Je tedy

$$\sup\{s(f;D); D \in \mathcal{D}(I)\} \le \inf\{S(f;D); D \in \mathcal{D}(I)\}. \tag{1.3}$$

Číslo, které stojí na levé straně předcházející nerovnosti se nazývá **dolní Riemannův integrál** funkce f přes interval I a podobně číslo stojící na pravé straně *horní Riemannův integrál* funkce f přes interval I. Čtenář si laskavě rozmyslí, že to, že jsme se omezili na *rozdělení* $D \in \mathcal{D}(I)$ a nepracovali s obecnějšími děleními, nemá na existenci a hodnotu obou čísel žádný vliv.

Společnou hodnotu porovnávaných čísel v (1.3) značíme

$$(\mathcal{R})\int_I f, \quad (\mathcal{R})\int_I f(x)dx\,, \quad (\mathcal{R})\int_I f(x_1,\ldots,x_m)dx_1\,\ldots dx_m$$

apod. Pokud v (1.3) platí ostrá nerovnost, říkáme, že (R)-integrál z f přes interval I **neexistuje**. Pro $I=[a,b]$ se lze, zejména v $\mathbb{R}^2$ či $\mathbb{R}^3$, setkat i s označením

$$(\mathcal{R})\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_m}^{b_m} f(x_1,\ldots x_m)dx_1\,\ldots dx_m\ .$$

Tyto integrály se někdy tradičně nazývají **množné integrály**, a následující označení se pak užívá pro **dvojné** a **trojné** integrály

$$(\mathcal{R})\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dx\,dy\,, \quad (\mathcal{R})\iiint_I f(u,v,w)du\,dv\,dw\,.$$

Konečně v případě, že nemůže dojít k nedorozumění, symbol $(\mathcal{R})$- před integrálem vynecháváme. Přímo z definice $(\mathcal{R})$-integrálu plyne tato zřejmá podmínka

Věta 1.3.5 (Darboux). *Nutnou a postačující podmínkou pro existenci $(\mathcal{R})$-integrálu z f přes interval I je rovnost horního a dolního $(\mathcal{R})$-integrálu z f přes I.*

Z této věty lze stejně stejně jako v $\mathbb{R}$ obdržet následující nutnou a postačující podmínku:

Věta 1.3.6 (Riemann). *Nutnou a postačující podmínkou pro existenci $(\mathcal{R})$-integrálu z f přes interval I je, že ke každému $\varepsilon>0$ musí existovat $D\in\mathcal{D}(I)$ tak, že*

$$S(f;D)-s(f;D)<\varepsilon.$$

Poznámka 1.3.7. Někdy užívaná označení *Darbouxova* nebo *Riemannova podmínka* pro podmínky z Vět 1.3.5 a 1.3.6 referují spíše k zásluhám Jeana Gastona Darbouxe (1842 – 1917) a Georga Friedricha Bernharda Riemanna (1826 – 1866) o teorii $(\mathcal{R})$-integrálu. Riemann místo s dolními a horními součty pracoval se součty tvaru

$$\sum_{j=1}^{p} f(\zeta_j)\,\mathrm{vol}(I_j), \tag{1.4}$$

kde $\zeta_j\in I_j$ je libovolně zvolený bod. Označíme-li $\nu(D)$ maximum průměrů dělících intervalů dělení D a je-li $\{D_n\}$ posloupnost dělení $D_n\in\mathcal{D}(I)$ taková, že $\nu(D_n)\to 0$, a jestliže ζ_j jsou libovolně zvolené body z dělících intervalů I_j dělení D_n, definoval Riemann $(\mathcal{R})$-integrál jako limitu součtů (1.4) pro $\nu(D_n)\to 0$, pokud tato existovala a byla nezávislá na volbě posloupnosti $\{D_n\}$ a volbě bodů ζ_j. Přístup přes horní a dolní součty náleží Darbouxovi. Viz podrobněji [2].

Postačující podmínka spojitosti f v I pro existenci $(\mathcal{R})$-integrálu platí i pro případ $\mathbb{R}^m$ a dokazuje se stejně jako v $\mathbb{R}$; vzhledem k užitečnosti podmínky ho podrobně provedeme.

Věta 1.3.8. *Nechť f je spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}^m$. Potom existuje R-integrál z f přes interval I.*

Důkaz. Z Věty 13.4.25 v [MAU] o spojité funkci na kompaktní množině plyne, že f je *stejnoměrně spojitá* na I. Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti tak, aby platilo pro všechna $x, y \in I$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Nyní vybereme $D \in \mathcal{D}(I)$ tak, aby pro všechny dělící intervaly I_j rozdělení $D = \{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ platilo

$$\operatorname{diam}(I_j) = \sup\{|x - y|; x, y \in I_j\} < \delta\ .$$

Pak však ze (1.5) plyne

$$\sup\{f(x); x \in I_j\} - \inf\{f(x); x \in I_j\} \leq \varepsilon\ ,$$

a tak dostáváme

$$S(f; D) - s(f; D) \leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \cdot \operatorname{vol}(I_j) \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \operatorname{vol}(I_j) \leq \varepsilon \operatorname{vol}(I)\ .$$

Je tedy splněna Riemannova podmínka z Věty 1.3.6 a existence integrálu je dokázána. □

Podmínka spojitosti je ještě zbytečně značně silná, neboť i pro funkce „dosti nespojité“ může existovat R-integrál. Nejjednodušší příklady si čtenář snadno zkonstruuje sám. Složitější příklad připomeneme:

Příklad 1.3.9. Standardní ilustrativní příklad využívá tzv. Riemannovy funkce ρ. Zopakujeme její definici

$$\rho(x) = 1\,, \quad x \in \mathbb{Z}\,, \qquad \rho(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,,$$
$$\rho\Big(\frac{p}{q}\Big) = \frac{1}{q} \quad \text{pro} \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\ , \quad \text{a} \quad (p, q) = 1\ .$$

Tato funkce je spojitá právě ve všech bodech $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a pro její $(\mathcal{R})$-integrál platí

$$\int_0^1 \rho(x)dx = 0.$$

Srovnej s [MAU], Příklady 10.2.14. Existence se dokazuje přímým ověřením Darbouxovy podmínky z Věty 1.3.5. Čtenář nechť si samostatně dokáže, že

$$\omega_\rho(x) = \rho(x), \quad x \in \mathbb{R} \, .$$

Poznámka 1.3.10. Existuje posloupnost funkcí f_n spojitých na $\mathbb{R}$ taková, že $\{f_n(x)\}$ je *nerostoucí* posloupnost, $0 \le f_n \le 1$ a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \rho(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tj. Riemannova funkce ρ je limitou neklesající posloupnosti spojitých funkcí. Čtenář nechť si laskavě povšimne, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina

$$\{x \in \mathbb{R};\ \rho(x) > a\}$$

otevřená. Tudy vede cesta k definici tzv. (*shora*) *polospojitých funkcí*, se kterými se ještě setkáme.

Předcházející pozorování zobecníme. V Důsledku 1.2.6 jsme zavedli množiny speciální množiny bodů nespojitosti $D_n(f;A)$, které vystupují v následujícím tvrzení.

Lemma 1.3.11. *Nechť f je omezená funkce na omezeném uzavřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}^m$. Potom množiny $D_n(f;I)$ jsou pro každé $n \in \mathbb{N}$ kompaktní.*

Důkaz. Označme obecněji pro $a \in \mathbb{R}$

$$d_a(f;I) = \{x \in I;\ \omega_f^I(x) \ge a\}$$

a dokažme, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $d_a(f;I)$ kompaktní. Protože $d_a(f;I) \subset I$, což je kompaktní interval, stačí dokázat pouze uzavřenost množiny $d_a(f;I)$. Pro $a \le 0$ je $d_a(f;I) = I$ a tvrzení platí. Je-li $a > 0$ takové, že $d_a(f;I) \ne \emptyset$, zvolme x v jejím uzávěru a body $x_n, y_n \in B(x, 1/n) \cap d_a(f,I)$ tak, aby platilo

$$|f(x_n) - f(y_n)| \ge a.$$

Platí však $x_n \to x$, $y_n \to x$ a $\omega_f^I(x) \ge \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \ge a$. Je tedy $x \in d_a(f;I)$, což jsme chtěli ověřit. ☐

Poznámka 1.3.12. Připomeňme, že $f : (P,\rho) \to (Q,\sigma)$ je spojité zobrazení na P, jsou-li vzory všech otevřených množin v Q otevřené v P; viz [MAU], Věta 12.5.5. Je-li $Q = \mathbb{R}$, stačí podmínku ověřit pouze pro množiny tvaru

$$\{x \in P; f(x) > a\}, \quad \{x \in P; f(x) < a\}$$

pro všechna $a \in \mathbb{R}$. Jsou-li vesměs otevřené, je f spojitá funkce na P. K tomu stačí uvážit, že

$$\{x \in P; f(x) \in (\alpha,\beta)\} = \{x \in P; f(x) > \alpha\} \cap \{x \in P; f(x) < \beta\}$$

a vztah otevřených množin v $\mathbb{R}$ a intervalů v $\mathbb{R}$. Předcházející tvrzení říká, že množiny $\{x \in I;\, \omega_f^I(x) < a\}$ jsou pro všechna $a \in \mathbb{R}$ *otevřené* v I (jsou to doplňky uzavřených množin v $\mathbb{R}$). Jak jsme se již zmínili dříve, znamená to, že ω_f^I je shora polospojitá funkce na I.

Lemma 1.3.13. *Nechť I je omezený uzavřený interval v $\mathbb{R}^m$ a pro funkci f a $\varepsilon > 0$ platí*

$$\omega_f^I(x) < \varepsilon$$

pro všechna $x \in I$. Potom existuje rozdělení $D \in \mathcal{D}(I)$,$D = \{I_j\}_{j=1}^p$, že

$$\omega(f; I_j) < \varepsilon$$

pro všechna $j = 1, \ldots, p$.

Důkaz. Označme pro $\delta > 0$ symbolem $K_\delta(x)$ množinu

$$K_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^m;\, |x_k - y_k| \le \frac{\delta}{2},\, k = 1, \ldots, m\};$$

je to tedy „krychle“ o středu x a délce hrany δ, která má stěny rovnoběžné se souřadnicovými nadrovinami. Protože platí

$$\omega_f^I(x) = \lim_{\delta \to 0_+} \omega(f; I \cap K_\delta(x)),$$

lze pokrýt interval I otevřenými množinami $K^0_{\delta/2}(x)$, $x \in I$ tak, že pro každé $x \in I$ volíme příslušné $\delta > 0$ tak, aby

$$\omega(f; I \cap K_\delta(x)) < \varepsilon\,. \tag{1.6}$$

Z tohoto pokrytí vybereme konečné pokrytí *otevřenými* „polovičními“ krychlemi a z něj dostaneme i pokrytí *uzavřenými* krychlemi s dvojnásobnou délkou hrany a vlastností (refbora). Nyní podle Poznámky 3.1.3 (3) sestrojíme $D \in \mathcal{D}(I)$ tak, že jeho vhodné podsystémy dělících intervalů budou rozděleními intervalů $K_\delta(x_j) \cap I$. $\square$

Věta 1.3.14 ([Du Bois-Reymond). *Nechť f je omezená funkce na intervalu $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^m$. Potom $(\mathcal{R})$-integrál z f přes I existuje, právě když je splněna podmínka: Pro každá dvě $r, s \in (0, +\infty)$ existuje* konečný *systém intervalů J_l, $l = 1, 2, \ldots, q$ tak, že*

$$\{x \in I; \omega_f^I(x) \ge r\} = d_r \subset \bigcup_{l=1}^q J_l$$

a zároveň platí $\sum_{j=1}^q \operatorname{vol}(J_l) < s$.

Důkaz. Ukážeme nejprve, že z vyslovené podmínky plyne Riemannova podmínka z Věty 1.3.6. Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$ a položme $r = s = \varepsilon$. Pomocí podmínky nalezneme pokrytí množiny

$$\{x \in I; \omega_f^I(x) \geq \varepsilon\}$$

konečně mnoha intervaly J_l, $l = 1, \dots, q$ o součtu objemů menším než ε. Nyní v prvém kroku vyrobíme pomocí $\{J_l\}_{l=1}^q$ rozdělení intervalu I, jehož podsystémy tvoří rozdělení každého J_l, $l = 1, \dots q$. Na dělících intervalech, které nejsou částí žádného J_l, je oscilace ω_f^I v každém jejich bodě menší než ε. Lze tedy podle Lemmatu 1.3.13 každý z nich rozdělit na intervaly, na nichž oscilace f vzhledem k tomuto intervalu bude menší než ε, to uděláme v druhém kroku.

Pokud podmínka z dokazované věty splněna není, existují $r, s \in (0, +\infty)$ tak, že pro každý konečný systém intervalů J_l pokrývající množinu

$$\{x \in I; \omega_f^I(x) \geq r\}$$

má celkový součet objemů $\geq s$. Proto je též $S(f; D) - s(f; D) \geq rs > 0$ a tedy Riemannova podmínka není splněna. Tím je důkaz dokončen. Existence $(\mathcal{R})$-integrálu z f přes I je tedy ekvivalentní splnění podmínky z dokazované věty. □

Poznámka 1.3.15. Du Bois-Reymondovu podmínku lze vyjádřit ještě jiným způsobem: říká, že množinu bodů určitých nespojitostí funkce f (těch, v nichž je $\omega_f^I \geq r$) lze pokrýt *konečně mnoha* intervaly, součet jejich objemů je *libovolně malý*. Později tuto podmínku dáme do souvislosti s Jordan-Peanovým objemem. Nyní nám poslouží jako inspirace k další nutné a postačující podmínce.

Definice 1.3.16. Říkáme, že množina $A \subset \mathbb{R}^m$ **má Lebesgueovu míru** λ_m **rovnu** 0, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje *společný systém* intervalů $\{J_l\}_{l=1}^\infty$ takový, že

$$A \subset \bigcup_{l=1}^\infty J_l \quad a \quad \sum_{l=1}^\infty \mathrm{vol}(J_l) < \varepsilon;$$

píšeme pak $\lambda(A) = \lambda_m(A) = 0$, přičemž pokud nehrozí nebezpečí z nedorozumění, index m u λ_m vynecháváme.

Poznámka 1.3.17. Až dosud jsme pracovali s omezenými uzavřenými intervaly. V předchozí definici nejsou intervaly J_l specifikovány. Je to proto, že pokud rozšíříme definici objemu intervalu (1.2) na nedegenerované intervaly libovolného typu, definice bude stále správná. Jsou-li tedy I_k, $k = 1, \dots, m$, omezené intervaly o koncových bodech $a_k < b_k$, $k = 1, \dots, m$, pak pro $I = I_1 \times \dots I_m$ klademe vždy

$$\mathrm{vol}(I) = \prod_1^m (b_k - a_k).$$

Pro nás je podstatné, že v předchozí definici lze pokrývat též omezenými *otevřenými* intervaly. To je vidět z následující úvahy: při pokrytí otevřenými intervaly pokrývají i jejich uzávěry (což jsou uzavřené intervaly) množinu A a součet jejich objemů zůstane stejný. Ve druhém případě pokryjeme A uzavřenými intervaly o celkovém součtu objemů $\varepsilon/2$, kde $\varepsilon > 0$ je předem dáno; pak každý z pokrývajících intervalů nahradíme otevřeným intervalem, který je podmnožinou uvažovaného intervalu a má stejný střed a dvojnásobný objem. Tyto intervaly opět pokrývají A a součet jejich objemů je menší než ε. Pro obecnější intervaly lze postupovat stejně, avšak my tento fakt nebudeme potřebovat.

Věta 1.3.18 (Lebesgue). *Nechť f je omezená funkce na omezeném uzavřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}^m$. Potom existuje $(\mathcal{R})$-integrál z funkce f přes interval I, právě když množina $D(f;I)$ všech bodů nespojitosti f vzhledem k I má nulovou Lebesgueovu míru, tj. je $\lambda(D(f;I)) = 0$.*

Důkaz. Ukážeme, že je-li splněna Du Bois-Reymondova podmínka z Věty 1.3.14, je splněna i Lebesgueova podmínka. Zvolíme $\varepsilon > 0$ a množiny $D_n(f;I)$ zavedené v Důsledku 1.2.6 pokryjeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ konečně mnoha intervaly J_l^n tak, že

$$\sum_{l=1}^{p_n} \operatorname{vol}(J_l^n) \le \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Potom je systém intervalů $\{\{J_l;\ l = 1, \dots l_n\};\ n \in \mathbb{N}\}$ spočetný a příslušný součet objemů

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{p_n} \operatorname{vol}(J_l^n) \le \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

Takto lze dospět k rozdělení $D \in \mathcal{D}(I)$, $D = \{I_j\}_{j=1}^p$ takovému, že na intervalech I_j platí buď $\omega(f;I_j) < \varepsilon$, nebo, pokud tato nerovnost splněna není, je součet objemů takových I_j malý. Podle tohoto hlediska rozdělíme dělící intervaly D do dvou skupin. Pro rozlišení intervaly v prvé skupině a druhé skupině označíme přidáním jedné a dvou čárek a při sčítání budou symboly $\sum'$ $\sum''$ znamenat, že sčítáme pouze v rámci jedné z těchto skupin.

V první ze skupin lze odhadnout příspěvek od intervalů I_j k rozdílu horního a dolního součtu $S(f;D) - s(f;D)$ hodnotou

$$\sum{}' \varepsilon \cdot \operatorname{vol}(I_j') \le \varepsilon \sum{}' \operatorname{vol}(I_j') \le \varepsilon \operatorname{vol}(I).$$

Ve druhé skupině jsou intervaly I_J'', z nichž každý je částí nějakého intervalu J_l, $l = 1, \dots, q$. Tyto přispívají k vyšetřovanému rozdílu hodnotou, kterou lze odhadnout číslem

$$\sum{}'' 2M \cdot \operatorname{vol}(I_j'') \le 2M \sum{}'' \operatorname{vol}(I_J'') \le 2M. \sum \operatorname{vol}(J_l) \le 2M\varepsilon.$$

Celkově tak dospíváme k odhadu

$$S(f;D) - s(f;D) \le \varepsilon(2M + \mathrm{vol}(I)),$$

z čehož plyne splnění Riemannovy podmínky z Věty 1.3.6, neboť volbou $\varepsilon > 0$ lze rozdíl vlevo odhadnout libovolně malým kladným číslem.

Je-li obráceně splněna Lebesgueova podmínka, existuje *spočetný* systém otevřených intervalů (viz Poznámka 1.3.17), pokrývajících množinu bodů nespojitosti $D(f;I)$ funkce f vzhledem k I, o libovolně malém součtu objemů. Množina

$$\{x \in I; \omega_f^I(x) \ge r\}$$

je pro každé $r > 0$ kompaktní, lze tedy z otevřeného pokrytí množiny D o celkovém součtu objemů $\le s$ vybrat konečné. Uzávěry těchto konečně mnoha intervalů mají součet objemů $\le s$, což ukazuje, že je splněna Du Bois-Reymondova podmínka z Věty 1.3.14. □

1.4 Obecnější množiny

Jestliže máme určit Jordan-Peanův objem množiny $A \subset \mathbb{R}^m$, použijeme k tomu $(\mathcal{R})$-integrál. Budeme předpokládat, že A je vždy *omezená*, jinak tento objem nedefinujeme. Zvolíme libovolně omezený uzavřený interval I tak, že je $A \subset I$ a integrujme **charakteristickou funkci** χ_A (připomínáme, že je $\chi_A(x) = 1$ pro $x \in A$ a $\chi_A(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}^m \setminus A$) přes interval I.

Definice 1.4.1. Pro omezenou $A \subset \mathbb{R}^m$ definujeme její *Jordan-Peanův objem* $m(A)$ rovností

$$m(A) := (\mathcal{R})\int_I \chi_A(t)dt\,, \tag{1.7}$$

kde I je libovolný omezený uzavřený interval obsahující I, pokud integrál vpravo existuje.

Poznámky 1.4.2. 1. Je třeba si rozmyslet, že definice nezávisí na volbě I: jsou-li I, J dva takové intervaly obsahující A, pak zřejmě platí

$$\int_I \chi_A = \int_{I\cap J} \chi_A = \int_J \chi_A$$

2. Je-li I interval, je $\mathrm{vol}(I) = m(I)$; v tomto smyslu je Jordan-Peanův objem rozšířením funkce vol na větší systém množin.

3. Z předcházejícího výkladu víme, že integrál v (1.7) existuje, právě když $D(\chi_A; I)$ má nulovou Lebesgueovu míru. Pro χ_A jsou však body nespojitosti právě všechny body hranice δA množiny A.

Úmluva 1.4.3. Jestliže existuje $m(A)$, pak říkáme, že množina A je **měřitelná v Jordan-Peanově smyslu**, nebo krátce **jordanovsky měřitelná**.

Důsledek 1.4.4. *Omezená množina $A \subset \mathbb{R}^m$ je jordanovsky měřitelná, právě když je $\lambda(\partial A) = 0$, tj. její hranice má nulovou Lebesgueovu míru.*

Chceme-li integrovat přes omezenou množinu $A \subset \mathbb{R}^m$ v Riemannově smyslu obecnější funkci než $f \equiv 1$, nebo $f \equiv$ *konst.*, budeme postupovat takto: vždy budeme předpokládat, že A je jordanovsky měřitelná. Pak už je přirozená následující definice:

Definice 1.4.5. Je-li $A \subset \mathbb{R}^m$ jordanovsky měřitelná množina a f omezená funkce na A, pak definujeme pomocnou funkci f_1 tak, že $f_1(x) = f(x)$, $x \in A$ a $f_1(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}^m \setminus A$. Pak klademe

$$(\mathcal{R})\int\limits_A f := (\mathcal{R})\int\limits_I f_1,$$

kde I je libovolný omezený uzavřený interval obsahující A.

Poznámka 1.4.6. O takto definovaném $(\mathcal{R})$-integrálu lze dokázat řadu tvrzení. Některá z nich uvedeme, dokazovat je však nebudeme. Dokazují se zpravidla stejně jako pro případ $\mathbb{R}^1$, kde jsme se $(\mathcal{R})$-integrálem zabývali v [MAU] poměrně podrobně. Při výpočtech tato tvrzení budeme používat.

Věta 1.4.7. *Nechť $R(A)$ je systém všech omezených funkcí na jordanovsky měřitelné množině A, pro které existuje $(\mathcal{R})$-integrál přes množinu A. Potom $R(A)$ je lineární prostor a položíme-li pro každou $f \in R(A)$*

$$Rf := \int\limits_A f(x)dx\,,$$

je $R : f \mapsto Rf$ nezáporný lineární funkcionál. Dále podle Věty 1.3.8 je zřejmě $\mathcal{C}(A) \subset\subset R(A)$. Pokud opatříme $R(A)$ supremovou normou

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in A\}$$

je funkcionál R na $R(A)$ vzhledem k této normě spojitý. Analogicky jako v $\mathbb{R}^1$ platí

$$\Big|\int_A f(x)dx\Big| \leq \int_A |f(x)|dx \;\;.$$

Poznámka 1.4.8. Bylo by možné zavést „integrální normu" i na $R(A)$? Čtenář si snadno rozmyslí, že $R(|f|)$ má i v tomto případě některé vlastnosti normy, ale *nikoli* všechny. Je totiž $R(|f|) = 0$ i pro funkce, které mají na množině Lebesgueovy míry nula nenulové hodnoty, takže neplatí $R(|f|) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ na A. V případě intervalu $I \subset \mathbb{R}^m$ by opět stačilo omezit se na funkce z $\mathcal{C}(I)$, obecněji však to vyžaduje dodatečné předpoklady o A; pouhá jordanovská měřitelnost nestačí.

Lze však dokázat větu, která v jistém smyslu postihuje „meze“ $(\mathcal{R})$-integrálu. Ty ho v některých případech činí nepoužitelným.

Věta 1.4.9. *Jsou-li $A_1, \dots, A_n$ jordanovsky měřitelné disjunktní množiny v $\mathbb{R}^m$, pak platí*

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} m(A_j); \tag{1.8}$$

je-li f omezená funkce na $A = \bigcup_{j=1}^{n}$, pak

$$(\mathcal{R})\int_A f = \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} f \ ,$$

jakmile existuje integrál na levé straně rovnosti (1.8) *nebo pokud existují všechny integrály v součtu na pravé straně* (1.8).

Předcházející věta popisuje pro $f \equiv 1$ důležitou vlastnost Jordan-Peanova objemu m; obsah rovnosti (1.8) pak slovně popisujeme tak, že říkáme o Jordan-Peanově objemu, že je **konečně aditivní** množinovou funkcí na systému všech jordanovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}^m$. To též odpovídá elementárním představám o aditivitě a monotonii obsahů a objemů, kterou známe z elementární geometrie.

Souvisí nějak výpočet obsahu nebo objemu $m(A)$ s tím, co se zpravidla učí student v kalkulu, kde se seznamuje se vzorečkem pro obsah obrazce „pod grafem“ spojité funkce f na intervalu $[a, b]$ nebo s výpočtem objemu rotačních těles? Odpověď je kladná, dříve však dokážeme tvrzení, které nám umožní $(\mathcal{R})$-integrály v $\mathbb{R}^m$ pro $m > 1$ počítat.

1.5 Výpočet Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^m$

Poznámka 1.5.1. Začátečník by mohl snadno nabýt dojmu, že integrál je dítětem devatenáctého století. Ve skutečnosti lze techniky s integrálem související sledovat až k ARCHIMEDOVI (287 před n. l. – 212 před n. l.); stačí ostatně srovnat exhaustivní metodu či jeho *metodu komprese* s definicí $(\mathcal{R})$-integrálu pomocí dolních a horních součtů. Věta, kterou si v jednoduché verzi dokážeme, souvisí také s velmi starým poznatkem, který dnes nazýváme *Cavalieriho princip*:

Když dvě tělesa mají stejnou výšku a když řezy rovinami, které jsou rovnoběžné s jejich podstavami a mají od nich stejnou vzdálenost, jsou takové, že poměr jejich obsahů je vždy stejný, potom objemy těles mají týž poměr.

Jestliže je poměr v předcházejícím případě roven 1, vyplývá z tvrzení např. to, že kolmý a šikmý hranol o téže výšce mají stejný objem apod. Při odvozování tohoto principu se vycházelo z geometrických názorných představ, kterým v dnešní době lze dát nejen přesný smysl, ale lze je i podstatným způsobem zobecnit.

Jádrem metody, kterou vyložíme, je převedení výpočtu vícerozměrného integrálu na postupný výpočet jednorozměrných integrálů. Pro *Lebesgueův integrál* pochází elegantní věta tohoto typu od QUIDA FUBINIHO (1879 – 1943) , který ji dokázal r. 1907. Základním krokem je zde převod m-rozměrného integrálu na jednorozměrný integrál z funkce, která je vyjádřena jako $(m-1)$-rozměrný integrál.

Dokážeme tvrzení o převodu ($\mathcal{R}$)-integrálu přes interval $I \subset \mathbb{R}^2$ ze spojité funkce na tzv. integrál *dvojnásobný*, což je sled dvou jednorozměrných integrací. Jde tedy o jistou větu *Fubiniova typu*; prozradíme již na tomto místě, že Lebesgueův integrál je obecnější nežli integrál Riemannův a tak věta, kterou dokážeme, je jen (velmi slabým) důsledkem Fubiniovy věty.

Věta 1.5.2. *Nechť f je funkce spojitá na intervalu $I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$. Potom platí*

$$\int_I f(x,y)dx\,dy \;=\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx \;=\int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy\ . \tag{1.9}$$

Důkaz. Na první pohled není příliš zřejmé, že oba „postupné“ integrály mají vůbec rozumný smysl. Dokážeme však mj. i to, že

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy, \quad x \in [a,b]\ ,$$

je spojitá funkce na [a,b]; podobně se dokáže i $G \in \mathcal{C}([c,d])$ pro

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)dx\,, \quad y \in [c,d]\ ;$$

tuto zcela analogickou úvahu jako pro případ funkce F přenecháme čtenáři. Potom ještě dokážeme první z obou rovností ve vztahu (1.9). Analogicky se totiž dokáže i rovnost

$$\int_I f(x,y)dx\,dy \;= \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy\ \ ,$$

ze které již plyne (1.9). Protože je f spojitá na I, je na I též stejnoměrně spojitá. Proto pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že speciálně platí

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| \le \varepsilon$$

pro každé $y \in [c,d]$ a každá dvě čísla $x_1, x_2 \in [a,b]$, pro něž je $|x_1 - x_2| < \delta$. Z ekvivalentního vztahu

$$-\varepsilon \le f(x_1,y) - f(x_2,y) \le \varepsilon$$

plyne integrací vzhledem k y přes interval $[c,d]$ po jednoduché úpravě

$$|F(x_1)-F(x_2)| = \left| \int_c^d f(x_1,y)dy - \int_c^d f(x_2,y)dy \right| \le \varepsilon(d-c);$$

z toho vyplývá (dokonce stejnoměrná) spojitost F v intervalu $[c,d]$.

V další části důkazu dokážeme první rovnost z (1.9). Nejprve však zavedeme speciální označení. Položme

$$D' = \{a = x_0 < x_1 \cdots < x_r = b\}, \quad D'' = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_s = d\},$$

tj. $D' \in \mathcal{D}([a,b])$ má r dělících intervalů $I_k, k = 1,2,\ldots,r$ a $D'' \in \mathcal{D}([c,d])$ má s dělících intervalů $J_l, l = 1,2,\ldots,s$. Dělení D, které vznikne jako „$D' \times D''$“ , tj. přesněji

$$D = \{K_{kl}; k = 1,\ldots r, l = 1,\ldots,s\},$$

kde $K_{kl} = I_k \times J_l$, je rozdělením I. Označme dále

$$m_{kl} = \inf\{f(x,y); [x,y] \in K_{kl}\}, \quad M_{kl} = \sup\{f(x,y); [x,y] \in K_{kl}\}.$$

Zřejmě platí pro každé $x \in I_k$ a $k = 1,\ldots,s$

$$m_{kl} \le \inf\{f(x,y); y \in J_l\} \le \sup\{f(x,y); y \in J_l\} \le M_{kl}$$

Všechny členy této nerovnosti vynásobíme kladným číslem $\mathrm{vol}(J_l)$ a pak vzniklé nerovnosti pro $k = 1,\ldots,s$ sečteme. Dostaneme tak

$$\sum_{l=1}^{s} m_{kl}\,\mathrm{vol}(J_l) \le s(f(x,\cdot),D'') \le S(f(x,\cdot),D'') \le \sum_{l=1}^{s} M_{kl}\,\mathrm{vol}(J_l)$$

z $f \in \mathcal{C}(I)$ plyne $f(x,\cdot) \in \mathcal{C}([c,d])$ pro všechna $x \in [a,b]$ a tedy

$$s(f(x,\cdot),D'') \le \int_c^d f(x,\cdot) \le S(f(x,\cdot),D''),$$

přičemž $(\mathcal{R})$-integrál ve „složené nerovnosti“ uprostřed existuje pro všechna $x \in [a,b]$ a je to $F(x)$, spojitá funkce proměnné x v $[a,b]$. Dále je

$$\sum_{l=1}^{s} m_{kl}\,\mathrm{vol}(J_l) \le \inf\{F(x); x \in I_k\} \le \sup\{F(x); x \in I_k\} \le \sum_{l=1}^{s} M_{kl}\,\mathrm{vol}(J_l)$$

Všechny členy této nerovnosti vynásobíme kladným číslem $\mathrm{vol}(I_k)$ a pak vzniklé nerovnosti pro $k = 1,\ldots,r$ sečteme. Dostaneme tak

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} m_{kl}\,\mathrm{vol}(K_{kl}) \le s(F;D') \le S(F;D') \le \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} M_{kl}\,\mathrm{vol}(K_{kl}),$$

neboli s ohledem na $(\mathcal{R})$-integrovatelnost F

$$s(f;D) \le \int_a^b F \le S(f;D),$$

což s přihlédnutím k definici F dává

$$s(f;D) \le \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx \ \le S(f;D).$$

Takovou nerovnost můžeme odvodit pro libovolné rozdělení $D \in \mathcal{D}(I)$. Odtud však již plyne rovnost

$$(\mathcal{R})\int_I f = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy\,)dx\,,$$

kterou jsme chtěli dokázat. $\square$

Představme si nyní oblast $A \subset \mathbb{R}^2$, která je popsána dvojicí spojitých funkcí $g, h \in \mathcal{C}([a,b])$, pro něž je $g(a) = h(a)$, $g(b) = h(b)$ a $g(x) < h(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$, takto:

$$G = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ g(x) \le y \le h(x),\ x \in [a,b]\}.$$

Dá se podobností jako v předcházejícím případě dokázat, že pro každou spojitou funkci f na A platí

$$(\mathcal{R})\int_A f = \int_a^b (\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\,)dx$$

Poznamenejme, že pro $f \equiv 1$ na A známe tento vzorec z teorie jednorozměrného integrálu: dává velikost plochy „mezi grafy“ funkcí g a h

$$m(A) = \int_A 1 = \int_a^b (h(x) - g(x))dx\,.$$

Ideální by bylo, kdyby se dal počítat $(\mathcal{R})$-integrál z $f \in R(I)$ stejným způsobem. Snadno však sestrojíme příklad, kdy v takovém případě

$$\int_c^d f(x,y)dy$$

nebude existovat pro některá $x \in [a,b]$ a tak analogicky popsaná funkce F nebude definována *všude* v $[\,a,b\,]$. To je však jen jedna z nevýhod $(\mathcal{R})$-integrálu. Dále lze např. ukázat, že pro Riemannovu funkci ρ na $[0,1]$ je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho(x)} = \delta(x),$$

kde vpravo $\delta(x)$ značí Dirichletovu funkci na $[0,1]$. Označíme-li $f_n(x) = \sqrt[n]{\rho(x)}$, $x \in [0,1]$ a $f(x) = \delta(x)$, $x \in [0,1]$, platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

avšak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0 \quad \text{a} \quad \int_0^1 f(x)dx \quad \text{neexistuje!}$$

Příklad 1.5.3. Přes popsané nevýhody $(\mathcal{R})$-integrál stačí k výpočtu obsahů a objemů jednoduchých útvarů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Tak např. pro

$$A := \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\, x^2 + y^2 \le R^2\}$$

s daným $R > 0$ spočteme $m(A)$ podle již odvozené věty. Snadno spočteme, že lze volit $h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$ a $g = -h$, takže

$$m(A) = \int_{-R}^{R} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\Big)dx = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx\,; \tag{1.10}$$

využili jsme zde symetrii podle obou os (integrujeme sudé funkce na oborech souměrných vzhledem k bodu 0). V integrálu ze spojité funkce, který proto můžeme spočítat jako Newtonův integrál, substituujeme např. $x = R\sin t$, čímž z posledního výrazu v (1.10) dostaneme

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sqrt{1-\sin^2 t}\,R\cos t\,dt = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$
$$= 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = 2R^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2$$

Příklad 1.5.4. Podobně pro $A = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\, x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$ s $R > 0$ lze spočítat objem $m(A)$ převodem na trojnásobný integrál

$$m(A) = \int_{-R}^{R} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz\Big)dy\Big)dx = \cdots = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Označíme-li $K(x,r)$ uzavřený kruh o středu x a poloměru r, je užitečné pozorování, že objem $m(A)$ je vlastně roven jednorozměrnému integrálu

$$m(A) = \int_{-R}^{R} m(K(x, \sqrt{R^2 - x^2}))dx = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx =$$
$$= \left[\pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{x=-R}^{R} = 2\pi R^3 - \frac{2R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3\ .$$

To nám blíže osvětluje výše zmíněný Cavalieriho princip.

Samotná Fubiniova věta ani ve své „silné verzi“ k efektivnímu počítání vícerozměrných integrálů obvykle nestačí a kombinuje se zpravidla s variantou „věty o substituci“ pro $\mathbb{R}^m$. Nežli ji vyslovíme, připomeneme si některé pojmy.

Definice 1.5.5. Nechť $G \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$, $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ je třídy $\mathcal{C}^{(1)}(G)$, tj. takové, pro něž existují a jsou spojité všude v G parciální derivace $D_j\varphi^k$, $j, k = 1, \dots, m$. Dále nechť pro všechna $x \in G$ platí

$$D_\varphi(x) = \det \begin{pmatrix} D_1\varphi^1(x) & D_2\varphi^1(x) & \dots & D_m\varphi_1(x) \\ D_1\varphi^2(x) & D_2\varphi^2(x) & \dots & D_m\varphi_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1\varphi^m(x) & D_2\varphi^m(x) & \dots & D_m\varphi_m(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Potom říkáme, že φ je *regulární zobrazení* na G.

Poznámka 1.5.6. Determinant $D_\varphi(x)$ z předchozí definice je determinantem tzv. *Jacobiho matice* zobrazení φ, nebo krátce *jakobiánem* zobrazení φ v bodě x. Z předpokladu $D_\varphi(x) \neq 0$ na G plyne, že φ je otevřené zobrazení, které je též *lokálně prosté*. Často budeme pracovat s *prostými regulárními zobrazeními*.

Platí následující tvrzení:

Věta 1.5.7. *Nechť G je otevřená jordanovsky měřitelná množina a nechť φ je prosté regulární zobrazení na G, zobrazující G na omezenou otevřenou množinu $\varphi(G)$. Je-li f spojitá a omezená funkce na $\varphi(G)$, pak platí*

$$\int_{\varphi(G)} f(y)dy = \int_G f(\varphi(x)).|D_\varphi(x)|dx\,.$$

Poznámka 1.5.8. Tuto větu dokazovat nebudeme. Její předpoklady jsou voleny tak, že $(\mathcal{R})$-integrál v rovnosti na levé straně *existuje.* Přesto jsou s jejím použitím obtíže, neboť často musíme „zanedbat“ malé části integračních oborů tak, abychom dosáhli regularity příslušné substituce.

Příklad 1.5.9. Budeme opět počítat $m(A)$ pro množinu A z Příkladu 1.5.3. Její vnitřek je otevřená množina a $m(\partial A) = 0$, to však není zdaleka zřejmé. Zobrazení (tzv. „polární souřadnice“) φ o rovnicích

$$x = \rho\cos t\ , \quad y = \rho \sin t$$

je prosté na množině $\{[\rho, t];\ \rho \in (0, \infty), t \in (0, 2\pi]\}$, to však není otevřená množina a proto φ ani nemůže být na ní regulární. Je však regulární a prosté na množině $G = (0, R) \times (0, 2\pi)$ a $\varphi(G)$ je množina

$$\tilde{A} = \{[x, y];\ x^2 + y^2 < R^2\} \setminus \{[t, 0];\ t \in (-R, 0]\}.$$

Snadno spočteme, že $D_\varphi([\rho, t]) = \rho$, a tedy

$$\int_G \rho d\rho dt = \int_{\tilde{A}} 1 dx\, dy \ = \int_A dx\, dy$$

Druhá z předchozích rovností platí vzhledem k tomu, že

$$\int_{A\setminus\tilde{A}} dx\, dy \ = 0.$$

První z integrálů *snadno* vypočteme pomocí věty Fubiniova typu. Je

$$\int_{\tilde{A}} \rho d\rho dt \ = \int_0^{2\pi} (\int_0^R \rho d\rho) dt \ = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R dt \ = \pi R^2.$$

Poznámka 1.5.10. Jakkoli je $(\mathcal{R})$-integrál velmi názorný, zachází se s ním relativně obtížně. V disertační práci z r. 1902 Henri Louis Lebesgue (1875 - 1941) zavedl integrál, který dnes označujeme jeho jménem a který *zobecňuje* $(\mathcal{R})$-integrál (knižní vydání [1] je z r.1904). S některými poznatky o Lebesgueově integrálu se nyní seznámíme. Výklad o jeho historii je stručně hezky podán v [2].

Literatura:

[1] Lebesgue, H.: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au College de France*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[2] Schwabik, Š., Šarmanová P.: *Malý průvodce historií integrálu*, Prometheus, Praha, 1996. (Dějiny matematiky, Svazek 6.)