Obsah

Kapitola 2

Mocninné řady

2.1 Úvod

• V této kapitole je vyložen aparát mocninných řad. Shrnuje vlastnosti obecně známé z elementárních učebnic (reálné) analýzy a uvádí i některé vlastnosti složitější; viz např. [MAU], Kapitola 16. Čtenář ji může zběžně projít a vrátit se pouze v případě, že by něčemu o mocninných řadách dále nerozuměl. Pokud je s mocninnými řadami v komplexním oboru již seznámen, může ji i při prvním čtení přeskočit. Důležité pojmy jsou opět graficky vyznačeny **polotučnou antikvou**, i když patrně nebudou pro čtenáře nové. Připomínáme, že u sumačních znaků budeme opět *vynechávat meze v případě, že se sčítá od* 0 *do* $+\infty$. → **Kapitola 3.**

Historická poznámka 2.1.1. Mocninné řady patřily již od vzniku infinitezimálního počtu k důležitým matematickým nástrojům, avšak jejich používání nebylo svázáno s přesnými znalostmi jejich vlastností. V jistém smyslu, který záhy poznáme, teorie funkcí komplexní proměnné „splývá“ s teorií mocninných řad. Již Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) pracoval s funkcemi, které bylo možno lokálně vyjádřit mocninnou řadou. V práci *Théorie des fonctions analytiques* z r. 1797 chtěl dokonce dokázat, že lze takto vyjádřit každou spojitou funkci. Z té doby pochází název *analytické funkce*; byly to zároveň právě ty funkce, které byly pokládány v analýze za užitečné.

2.2 Základní vlastnosti

{*defmora*}

Definice 2.2.1. Nechť $z_0, a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, Řada funkcí (v proměnné z) tvaru

$$\sum a_k (z - z_0)^k \,, \tag{2.1}$$ {*mora*}

se nazývá **mocninná řada**. Čísla a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, jsou **koeficienty** řady (2.1) a číslo z_0 je její *střed*.

Příklad 2.2.2. Nejjednodušším netriviálním příkladem mocninné řady (a zároveň velmi důležitým) je **geometrická řada** s prvním členem rovným 1, která zřejmě konverguje právě pro ta $z \in \mathbb{C}$, pro něž $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \ .$$

Tento vzorec je pro $z \in (-1, 1)$ standardní částí středoškolské látky, často však bez odůvodnění konvergence; viz [MAU], Příklad 3.3.1, str. 81.

Mocninná řada (2.1) konverguje vždy alespoň v bodě z_0; v komplexní rovině $\mathbb{C}$ má přitom velmi jednoduché konvergenční chování. To vyplývá z následujícího tvrzení, které pochází od Nielse Henrika Abela (1802 – 1829).

{*mocra*}

Lemma 2.2.3 (Abel 1826). *Jestliže mocninná řada* (2.1) *konverguje v bodě* $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta \neq z_0$, *pak konverguje* absolutně *pro všechna* $z \in \mathbb{C}$, *vyhovující nerovnosti*

{*mocra1*}
$$|z - z_0| < |\,\zeta - z_0| \ . \tag{2.2}$$

Důkaz. Nechť $\zeta \neq z_0$ a nechť $z \in \mathbb{C}$ vyhovuje nerovnosti (2.2). Potom existuje $M \in \mathbb{R}_+$ tak, že pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ platí

{*omevkk*}
$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k(\zeta - z_0)^k| \cdot \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^k \leq M \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^k \ . \tag{2.3}$$

Existence M plyne z konvergence (2.1) v bodě ζ; číslo M je společným odhadem absolutní hodnoty **členů konvergentní řady**, které tvoří posloupnost *konvergentní k* 0. Pro (2.1) jsme tak našli konvergentní majorantu; je jí geometrická řada s kvocientem menším než 1. □

Poznámka 2.2.4. V souladu s Poznámkou 1.7.6 z Kapitoly 1 lze říci, že konverguje-li řada (2.1) v bodě $\zeta \neq z_0$, konverguje **normálně** v $U(z_0, |\,\zeta - z_0|)$. Pomocí M-testu dokazujeme jak absolutní, tak i lokálně stejnoměrnou konvergenci v kruhu $U(z_0, |\zeta - z_0|)$.

Pokud se studují pouze tzv. **formální mocninné řady** o tomtéž středu bez ohledu na konvergenci, lze o nich říci, že tvoří *komplexní algebru.* Pak $u \in \mathbb{C}$ ztotožňujeme s řadou $u + \sum_{k=1}^{\infty} 0^k (z - z_0)^k$ a pro $f = \sum a_k (z - z_0)^k$, $g = \sum b_k (z - z_0)^k$ definujeme

$$f + g = \sum (a_k + b_k)(z - z_0)^k \ , \quad f\,g = \sum p_k (z - z_0)^k \ ,$$

kde $p_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ je Cauchyův součin řad $\sum a_k, \sum b_k$; viz [MAU], str. 311.

{*polkon*}

Definice 2.2.5. Říkáme, že **mocninná řada konverguje** nebo **je konvergentní**, konverguje-li alespoň ve *dvou různých* bodech. Číslo R, $0 \leq R \leq +\infty$,

{*rmoc*}
$$R := \sup_{z \in \mathbb{C}} \{|z - z_0|;\ \sum a_n (z - z_0)^n \text{ konverguje v bodě } z\} \tag{2.4}$$

se nazývá **poloměr konvergence** řady (2.1). Je-li $R > 0$, pak se množina

$$U(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < R\}$$

nazývá **kruh konvergence** řady (2.1).

Tato terminologie je vcelku přirozená: Řada (2.1) totiž konverguje v $U(z_0, R)$ a diverguje pro všechna z, $|z - z_0| > R$ [1]. Zdůrazňujeme ještě jednu důležitou vlastnost: U geometrické řady je v kruhu konvergence $U(0,1)$ *posloupnost členů řady omezená* a vně $U(0,1)$ není *omezená*. Tuto vlastnost mají i obecné mocninné řady.

$\{meluz\}$

Lemma 2.2.6. *Posloupnost členů mocninné řady* (2.1) *je v každém bodě kruhu konvergence omezená a není omezená v žádném bodě z komplementu jeho uzávěru. Platí tedy*

$$R = \sup\{t \geq 0;\ \textit{posloupnost}\ \{|a_k| t^k\}\ \textit{je omezená}\}\ .$$

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z odhadu (2.3) v důkazu Lemmatu 2.2.3. □

$\{dupri\}$

Příklady 2.2.7. 1. Řady $\sum (k!) z^k$ a $\sum z^k / k!$ ukazují, že pro poloměr konvergence mohou nastat i extrémní případy $R = 0$ a $R = +\infty$.

2. Řada $\sum z^k / a^k$ pro $a \in (0, \infty)$ má poloměr konvergence $R = a$. Z limitní verze Cauchyova odmocninového kritéria (viz [MAU], str. 93) plyne s ohledem na rovnost

$$\sqrt[k]{|z^k / a^k|} = |z| / a$$

konvergence pro všechna $z \in U(0, a)$ a divergence pro všechna z, pro něž je $|z| > a$.

3. Uvažte, že řady

$$\sum z^k\ , \qquad \sum z^{k+1} / (k+1)\ , \qquad \sum z^{k+2} / ((k+1)(k+2))$$

mají poloměr konvergence $R = 1$ a na konvergenční kružnici $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ se chovají rozdílně; prvá na ní všude diverguje, protože neplatí $z^k \to 0$, druhá konverguje v bodě -1 a diverguje v bodě 1, třetí na ní konverguje všude. Všimněte si vzájemného vztahu uvedených řad (zkuste poslední řadu derivovat „člen po členu“).

Úmluva 2.2.8. Absolutní konvergence řady (2.1) v bodě z závisí v následujícím smyslu na vzdálenosti $|z - z_0|$: substitucí $z = z_0 + w$ lze vyšetřování konvergence

[1] Jestliže pro poloměr konvergence R platí $0 < R < \infty$, nazýváme množinu $\{z; |z - z_0| = R\}$ **konvergenční kružnicí**; tento název není příliš šťastně utvořen, neboť vzbuzuje dojem, že řada v bodech této množiny konverguje. Právě pro ně však *nelze* o konvergenci mocninné řady (2.1) obecně nic říci.

řady (2.1) převést na vyšetřování řady $\sum a_k w^k$ se středem 0. Proto se v dalším textu budeme omezovat na řady o středu $z_0 = 0$. Tvrzení budeme vždy vyslovovat pro řady v obecném tvaru (2.1), budeme je však automaticky dokazovat pouze pro případ $z_0 = 0$, tj. pro řadu

$$\sum a_k z^k \ , \qquad (2.5)$$ {spemora}

čímž se zápis formálně zjednoduší. Na tento případ se obecný převede jednoduchou substitucí $z - z_0 = w$.

{zakvl}

Lemma 2.2.9. *Řada* $\sum a_k(z-z_0)^k$ *konverguje ve svém kruhu konvergence o poloměru* $R > 0$ *normálně, tedy i absolutně a lokálně stejnoměrně, k funkci spojité v kruhu* $U(z_0, R)$.

Důkaz. Připomeňme předchozí úmluvu, že v důkazu se automaticky omezujeme na případ (2.5) a také $R > 0$. Absolutní konvergence v $U(0, R)$ je důsledkem Lemmatu 2.2.3 a Definice 2.2.5, v níž jsme definovali kruh konvergence. Je-li $0 \le |z| \le |z_1| < R$, pak lze (konvergentní) řadu $\sum |a_k z_1^k|$ použít ve Větě 1.7.5 jako majorantní řadu pro $\sum |a_k z^k|$, takže řada (2.5) konverguje na $U(0, |z_1|)$ absolutně a stejnoměrně podle Weierstrassova M-testu, a tedy lokálně stejnoměrně na $U(0, R)$; speciálně je součet v $U(0, R)$ spojitá funkce. □

Úmluva 2.2.10. Pro mocninné řady budeme používat tuto úmluvu: pokud není řečeno něco jiného, vztahem

{smr}

$$f(z) := \sum a_n(z - z_0)^n \qquad (2.6)$$

je definována funkce $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$ je množina *všech* z, pro něž řada v (2.6) konverguje. Je-li R poloměr konvergence řady, je zřejmě $U(z_0, R) \subset M$, avšak M může navíc obsahovat i některé body konvergenční kružnice řady.

Poznámka 2.2.11. Jestliže $R_1, R_2 > 0$ jsou po řadě poloměry řad

$$f(z) := \sum a_k(z-z_0)^k \quad \text{a} \quad g(z) := \sum b_k(z-z_0)^k \ ,$$

pak řady pro součet či rozdíl $f \pm g$ vzniklé sečtením či odečtením „člen po členu“ mají poloměr konvergence *alespoň* $\min\{R_1, R_2\}$. Také Cauchyův součin řad má poloměr konvergence *alespoň* $\min\{R_1, R_2\}$ a konverguje k fg. To plyne ze základních vět o operacích s (absolutně) konvergentními řadami. Další elementární operace (dělení, skládání) vedou opět k řadám s kladným poloměrem konvergence, to však jednoduše vyplyne z výsledků, ke kterým dospějeme v Kapitole 5.

2.3 Derivování mocninné řady

V této části si blíže všimneme, jak lze určit poloměr konvergence každé mocninné řady tvaru (2.1), a také některých vlastností této řady v $U(z_0, R)$ v případě $R > 0$.

Připomeňme, že pro posloupnost $\{x_k\}$, $x_k \in \mathbb{R}$, definujeme **limes superior** neboli **horní limitu** $\limsup x_k$ jako *největší* (v $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) z hromadných bodů posloupnosti $\{x_k\}$. Je-li $\alpha := \limsup x_k \in \mathbb{R}$, platí

$$\text{je-li } a < \alpha,\ \text{potom je množina } \{k \in \mathbb{N}_0\,;\ x_k > a\} \text{ je nekonečná },$$
$$\text{je-li } b > \alpha,\ \text{potom je množina } \{k \in \mathbb{N}_0\,;\ x_k > b\} \text{ je konečná }.$$

Pomocí těchto vlastností lze limes superior i definovat. Poznamenejme, že při $\alpha = +\infty$ je druhá podmínka prázdná, neboť neexistuje $b > \alpha$.

{vzorr}

Lemma 2.3.1 (Cauchy 1821, Hadamard 1888). *Pro poloměr konvergence R mocninné řady* (2.1) *platí vzorec*

$$R = (\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1} \tag{2.7}$$ {caadvz}

s konvencí $1/0 = +\infty$ *a* $1/+\infty = 0$.

Důkaz. Lemma je důsledkem obecné formy odmocninového kritéria; viz [MAU], str. 286, vzorec však dokážeme jen na základě výše popsaných vlastností limes superior. Položme

$$L = (\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}\ ;$$

dokážeme nerovnosti $L \le R$ a $R \le L$. K tomu postačí dokázat, že pro každé c, pro něž $0 < c < L$, platí $c \le R$ a pro každé d, pro něž $L < d < \infty$, platí $d \ge R$.

Nejprve volme c, $0 < c < L$; potom platí $c^{-1} > \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, a proto existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že pro všechna $k \ge n$ platí $\sqrt[k]{|a_k|} < c^{-1}$. Proto je posloupnost $\{|a_k|c^k\}$ omezená, a tedy $c \le R$. Jestliže zvolíme d, $L < d < \infty$, pak $d^{-1} < \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Proto pro nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ platí $d^{-1} < \sqrt[k]{|a_k|}$ a tedy pro všechna tato k je $|a_k|d^k > 1$. Avšak odtud plyne, že $\{|a_k|d^k\}$ *nekonverguje* k 0 a tudíž $d \ge R$. Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 2.3.2. Čtenář patrně již zná některé metody výpočtu poloměru konvergence mocninné řady. Vzorec (2.7) nemá velký význam pro *praktický výpočet* poloměru konvergence R řady (2.1). Často lze použít vzorec

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| , \tag{2.8}$$ {Rpod}

pokud ovšem limita vpravo existuje. To plyne z absolutní konvergence řady (2.1) v kruhu konvergence a divergence mimo jeho uzávěr; stačí užít limitní podílové kritérium. Analogicky můžeme použít i limitní odmocninové kritérium: platí

$$R = (\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1} , \tag{2.9}$$ {Rodm}

pokud existuje limita vpravo. Je vhodné si však uvědomit, že vzoreček (2.7) je použitelný i v případě, že limita v (2.8) neexistuje. Podrobněji se touto otázkou nebudeme zabývat.

Poznamenejme, že r. 1821 LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789 – 1857) odvodil výše uvedené tvrzení o konvergenci mocninné řady *včetně vzorce* (2.7); vzorec popsal slovy, neboť formální definici lim sup podal teprve PAUL DAVID GUSTAV DU BOIS-REYMOND (1831 – 1889) r. 1882. Cauchy též současně dokázal vzorec (2.9), pokud v něm uvedená limita existuje. R. 1888 objevil (2.7) znovu, patrně nezávisle na Cauchym, JAQUES HADAMARD (1865 – 1963); v té době byl studentem známé *École Normale*. Přesnou formulaci pak podal v článku z r. 1888, vlivem kterého se v řadě učebnic uvádí (2.7) jako Hadamardův vzorec. Patrně je nejvhodnější užívat označení *Cauchy-Hadamardův vzorec*, neboť Hadamard dalším využitím vzorec „zpopularizoval“. Viz dále Historická poznámka 3.3.4.

Definice 2.3.3. Nechť funkce f je definována v nějakém okolí $U(z_0)$ bodu z_0. Jestliže existují derivace $f^{(n)}(z_0)$ komplexní funkce f pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, pak mocninnou řadu

$$\sum \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu** z_0.

Čtenář se již s mnohými Taylorovými řadami v reálné analýze setkal, jak však poznáme, je situace v reálné analýze a v komplexní analýze rozdílná.

{*forder*}

Lemma 2.3.4. *Je-li $R \in [0,\infty]$ poloměr konvergence řady* (2.1)*, mají tentýž poloměr konvergence i řady vzniklé derivováním a integrováním „člen po členu“, tj.*

{*fordi*}
$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1} \quad a \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1} . \tag{2.10}$$

Důkaz. Tvrzení plyne snadno ze vzorce (2.7) pro poloměr konvergence a z poznatku, že $\sqrt[k]{k} \to 1$ při $k \to +\infty$. Je totiž

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \big(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\big)\big(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\big) .$$

□

{*derint*}

Věta 2.3.5. *Jestliže je řada* (2.1) *konvergentní, $R > 0$ je její poloměr konvergence, f její součet v $U(z_0, R)$, pak pro funkce*

{*fordii*}
$$g(z) := \sum_{k=1} k a_k (z-z_0)^{k-1} , \quad G(z) := \sum \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1} \tag{2.11}$$

platí $g(z) = f'(z)$ a $G'(z) = f(z)$ pro všechna $z \in U(z_0,R)$. Funkce f je tedy holomorfní v $U(z_0,R)$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} n!\binom{k}{n} a_n (z-z_0)^{k-n} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{p!} a_{n+p}(z-z_0)^p \quad z \in U(z_0,R).$$

{*efen*} (2.12)

Pro z_0 *a pro všechna* $k \in \mathbb{N}_0$ *speciálně platí*

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k \ ,$$

tedy řada (2.1) *je Taylorovou řadou svého součtu a její koeficienty jsou* **koeficienty Taylorova rozvoje** f.

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat rovnost $g(w) = f'(w)$ v libovolně zvoleném bodě $w \in U(z_0, R)$. Odtud dostaneme vzorec $G'(w) = f(w)$ a vícenásobným opakováním též vzorec (2.12); stačí pouze připomenout, že

$$n!\binom{k}{n} = \tfrac{k!}{(k-n)!} = k(k-1)\cdots(k-n+1) \ .$$

S ohledem na předcházející Větu 2.3.1 je funkce g definována v $U(z_0, R)$. Bez újmy na obecnosti budeme opět předpokládat $z_0 = 0$. Položme dále pro $z \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$

$$q_k(z) = z^{k-1} + z^{k-2}w + \cdots + z^{k-l}w^{l-1} + \cdots + w^{k-1} \ .$$

Pak platí $z^k - w^k = (z-w)q_k(z)$ a dále

$$f(z) - f(w) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z^k - w^k) = (z-w)\sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k(z) \ , \quad z \in U(z_0, R) \ .$$

Položme $\vartheta(z) := \vartheta_w(z) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k(z)$. Z předcházející rovnosti dostáváme s ohledem na $q_k(w) = kw^{k-1}$

$$f(z) - f(w) = \vartheta(z)(z-w) \ , \quad z \in U(z_0, R) \quad \text{a}$$

$$\vartheta(w) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k w^{k-1} = g(w) \ .$$

Podle Lemmatu 1.4.1 stačí nyní dokázat *spojitost* ϑ *v bodě* w. Řada, kterou je definována funkce ϑ, je řadou spojitých funkcí. Dokážeme její stejnoměrnou konvergenci na okolí $U(0, r)$, kde $|w| < r < R$ (stále pracujeme za předpokladu $z_0 = 0$). Platí $\sup\{|a_k q_k(z)|;\ z \in U(0, r)\} \le |a_k| k r^{k-1}$, a tedy pro $z \in U(0, r)$ je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k q_k(z)| \le \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k| r^{k-1} < \infty \ ,$$

kde poslední nerovnost plyne opět z předcházejícího Lemmatu 2.3.4. Tím je důkaz dokončen. □

{dermr}

Důsledek 2.3.6. *Je-li* $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ *a řada vpravo má poloměr konvergence* $R > 0$, *pak má* f *v* $U(z_0, R)$ *derivace všech řádů, lze je všechny vyjádřit mocninnými řadami a platí*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k z^{k-n} \ , \quad z \in U(z_0, R) \ .$$

Důsledek 2.3.7. *Nechť* $\sum a_k(z-z_0)^k = \sum b_k(z-z_0)^k$ *pro všechna* $z \in U(z_0, r)$, *kde* $r \in \mathbb{R}_+$. *Potom platí* $a_k = b_k$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz. Pro $c_k = a_k - b_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, je součet řady $g(z) = \sum c_k(z-z_0)^k$ roven 0 v okolí bodu z_0 a je tedy $g^{(k)}(z_0) = k!c_k = 0$. □

{*gera*}

Příklad 2.3.8. Velmi často používáme znalostí o geometrické řadě k odvození analogických rozvojů. Tak např. pro navzájem různá $z, \zeta, z_0 \in \mathbb{C}$ ze zřejmé identity

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{1-(\zeta-z_0)/(z-z_0)}\right) =$$
$$= \frac{1}{-(\zeta-z_0)}\left(\frac{1}{1-(z-z_0)/(\zeta-z_0)}\right)$$

plynou snadno vzorečky

{*gera1*}
$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum \frac{(\zeta-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\,, \qquad \frac{1}{z-\zeta} = -\sum \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,. \tag{2.13}$$

První platí pro všechna z, ζ, pro něž je $|\,\zeta - z_0| < |z - z_0|$ a druhý pro všechna ta z, ζ, pro něž $|\,\zeta - z_0| > |z - z_0|$. Tato vyjádření jsou velmi užitečná.

Uvedeme ještě věty, které se někdy o mocninných řadách elementárně, tj. bez rozvíjení teorie funkcí komplexní proměnné, dokazují. Zájemce odkazujeme např. na [MAU], Kapitolu 16. My je dostaneme později, avšak jako důsledek obecnějších vět.

{*rozmora*}

Věta 2.3.9. *Za stejných předpokladů jako ve Větě 2.3.5 lze funkci* f *v každém bodě* $w \in U(z_0, R)$ *rozvinout v Taylorovu řadu*

{*fnuk*}
$$f(z) = \sum \frac{f^{(k)}(w)}{k!}(z-w)^k\,, \tag{2.14}$$

jejíž poloměr konvergence je alespoň $R - |w - z_0|$.

Důkaz. Viz např. [MAU], důkaz Lemmatu 16.3.1, str. 417. □

Poznámka 2.3.10. Věta říká, že řada (2.14) *musí* konvergovat alespoň pro ta z, která vyhovují podmínce $|z-w| < R-|w-z_0|$; *může však konvergovat* i pro další z, která tuto podmínku nesplňují. Jinak řečeno, poloměr konvergence řady (2.14) může být větší než $R - |w - z_0|$. Toho se využívá k rozšiřování f metodou tzv. *analytického pokračování.*

Také velmi užitečnou následující **větu o jednoznačnosti** pro mocninné řady, založenou na předcházející Větě 2.3.9, dokážeme později, při důkazu lokální rozvinutelnosti každé holomorfní funkce v mocninnou řadu. Avšak i tato věta bývá známa před rozvinutím teorie funkcí komplexní proměnné. Pak lze ovšem některé poznatky této teorie odvodit podstatně dříve.

{*vojmr*}

Věta 2.3.11. *Nechť $R > 0$, řady $\sum a_k(z-z_0)^k$ a $\sum b_k(z-z_0)^k$ konvergují v kruhu $U(z_0,R)$ a nechť M je množina všech $z \in U(z_0,R)$ takových, pro něž platí*

{*q5s*}

$$\sum a_k(z-z_0)^k = \sum b_k(z-z_0)^k \ . \tag{2.15}$$

Je-li M' množina všech hromadných bodů M a $M' \cap U(z_0,R) \neq \emptyset$, platí $a_k = b_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a rovnost (2.15) *platí pro všechna $z \in U(z_0,R)$.*

Důkaz. Viz např. [MAU], důkaz Věty 16.3.4 na str. 419. □

2.4 Hraniční chování mocninné řady

Jestliže má mocninná řada (2.1) poloměr konvergence $R \in \mathbb{R}_+$, vzniká otázka, jestli lze její součet spojitě rozšířit na uzávěr $U(z_0,R)$. Elementární příklady ukazují, že to obecně není možné, avšak pokud existuje bod ζ takový, že $|\zeta - z_0| = R$, v němž řada (2.1) konverguje *absolutně*, možné to je. Pak totiž řada $\sum |a_k||\zeta - z_0|^k$ je majorantní řadou k (2.1) v každém bodě množiny $M := \{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| \le R\}$ a tak řada konverguje *stejnoměrně* na M. Speciálně součet řady je *spojitá funkce* na M.

V [MAU] jsme dokázali Větu 16.4.1, kterou nyní ještě mírně zesílíme. Její znění lze formálně zjednodušit tak, že stačí uvažovat řadu (2.5) o poloměru konvergence $R = 1$, která *neabsolutně konverguje* v bodě 1.

{*abelvet*}

Věta 2.4.1 (Abel 1826). *Nechť řada $\sum a_k$ neabsolutně konverguje. Označme pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ její částečný součet $f_n(z) := \sum_{k=1}^n a_k z^k$. Potom pro každou množinu $M \subset U(0,1)$, na níž je funkce $|1-z|/(1-|z|)$ omezená, platí $f_k \rightrightarrows$ na M.*

Důkaz. Zavedeme ještě toto označení: pro $n \in \mathbb{N}_0$ položíme

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \ , \quad s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ , \quad r_n := s - s_n$$

a dále $\varepsilon_n := \sup\{|r_k|;\ k \ge n\}$. Zřejmě $r_n \to 0$ a tak $\{\varepsilon_n\}$ je neklesající posloupnost konvergující k 0. Snadno spočteme pro $z \in U(0,1)$

$$\frac{f_p(z)}{1-z} = (1+z+\cdots)\sum_{k=0}^{p} a_k z^k = \sum_{k=0}^{p} s_k z^k + s_p \frac{z^{p+1}}{1-z} \ .$$

Podobně násobením geometrické řady číslem s dostaneme

$$\frac{s}{1-z} \sum_{k=0}^{p} s\, z^k + s\, \frac{z^{p+1}}{1-z} \ .$$

Odečteme nalezené vztahy a dostaneme po úpravě pro $p \in \mathbb{N}$ vztah

$$\frac{s - f_p(z)}{1-z} = \sum_{k=0}^{p} r_k z^k + r_p \frac{z^{p+1}}{1-z} \ . \tag{2.16}$$

{*pulrozd*}

Nyní zvolíme $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$ a dosadíme je za p do (2.16) a pak obdržené vztahy odečteme; dostaneme

$$\frac{f_n(z) - f_m(z)}{1-z} = \sum_{k=n+1}^{m} r_k z^k + \frac{r_m z^{m+1} - r_n z^{n+1}}{1-z} \tag{2.17}$$
{celrozd}

Nyní „absolutně“ odhadneme $|r_m z^{m+1} - r_n z^{n+1}| < 2\varepsilon$ a

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{m} r_k z^k \Big| \le |r_{n+1} z^{n+1}| + \cdots + |r_m z^m| < \varepsilon_n (1 + |z| + \cdots) < \frac{\varepsilon_n}{1-|z|} \ .$$

Odtud dostaneme odhad

{celodab}
$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon_n \Big(2 + \frac{|1-z|}{1-|z|} \Big) \tag{2.18}$$

ze kterého již plyne dokazované tvrzení. □

Poznámka 2.4.2. Podmínka z předcházející věty má názorný geometrický charakter. Zvolme nyní $z = x + iy \in U(1/2, 1/2)$ s $y > 0$ a označme θ úhel, který leží v trojúhelníku $\triangle(0,1,z)$ při vrcholu v bodě 1. Je-li $\rho = |1-z|$, pak dle kosinové věty pro $\triangle(0,1,z)$ dostáváme $|z|^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta$. Odtud plyne

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{|1-z|(1+|z|)}{1-|z|^2} < \frac{2\rho}{2\rho\cos\theta - \rho^2} = \frac{2}{2\cos\theta - \rho} \ .$$

Z pravoúhlého trojúhelníku $\triangle(0,1,w)$ takového, že $z \in \langle [\,1; w\,] \rangle$ snadno vyčteme, že pro $z \in \langle [\,1; w\,] \rangle$ je $\rho \le \cos\theta$, takže

{prokapku}
$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < \frac{2}{\cos\theta} \ . \tag{2.19}$$

Pokud je tedy w *uvnitř* $\triangle(1, z, \overline{z})$, který má při vrcholu 1 vnitřní úhel 2θ platí odhad (2.19) a $f_n \rightrightarrows$ na *celém* $\triangle(1, z, \overline{z})$.

Poznámka 2.4.3. Snadno nahlédneme, že např. při konvergenci řady $\sum a_k z^k$ o poloměru konvergence $R \in \mathbb{R}_+$ v bodě ζ, $|\zeta| = R$, konverguje řada $\sum a_k (\zeta z)^k$ v bodě 1. Tak lze výsledek přenést na obecný případ. Jsou-li např. z_1, z_2, ζ tři různé body na kružnici $|z| = R$, pak existuje limita $f(z) = \sum a_k z^k$ v bodě ζ vzhledem k $\triangle(z_1, z_2, \zeta)$ a je rovna $\sum a_k \zeta^k$. K bodu ζ se tedy musíme *přibližovat netangenciálně*, např. v množině, kterou tvoří konvexní obal množiny $U(0,r) \cup \{\zeta\}$. Někdy se v této souvislosti mluví o *kapce* nebo *Stolzově oblasti.*

{duab}

Důsledek 2.4.4. *Nechť $a_k \in \mathbb{C}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a $f(z) = \sum a_k z^k$, $\sum a_k = L \in \mathbb{R}$. Potom f je definována alespoň v $U(0,1)$ a $\lim_{x \to 1_-} f(x) = L$.*

Poznámka 2.4.5. Důsledek 2.4.4 je dokázán v [MAU]. Obrácené tvrzení obecně neplatí. Nalezení dodatečných podmínek, při kterých z existence limity L plyne $\sum a_k = L$, má mimořádný význam. Výsledkem jsou tzv. *věty Tauberova typu.* Jsou nazvány po Alfredu Tauberovi (1866 – 1942). Jako příklad uveďme následující tvrzení, které dokázal r. 1911 John Edensor Littlewood (1885 – 1977):

Tvrzení 2.4.6. *Nechť* $f(z) = \sum a_k z^k$ *je funkce holomorfní v* $U(0,1)$ *a* $a_k \in \mathbb{R}$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}_0$. *Nechť existuje* $0 < K < \infty$ *tak, že* $ka_k \leq K$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$. *Jestliže existuje* $\lim_{x\to 1-} f(x) = L \in \mathbb{R}$, *pak* $\sum a_k = L$.

Důkaz tvrzení byl *velmi obtížný* a teprve r. 1930 se ho podařilo zjednodušit. V [3] lze nalézt velmi jednoduchý důkaz tohoto tvrzení. Viz též [4], kde je důkaz reprodukován; článek [4] velmi čtivě informuje o vzájemných vztazích reálné a komplexní analýzy.

Literatura:

{*bib:Ca1-16*}

[1] Cauchy, L. A.: *Course d'analyse de l'École Royal Polytechnique*, Paris, 1821. {*bib:MŠ*-a}

[2] Maz'ya, V., Shaposhnikova, T.: *Jacques Hadamard, a universal mathematician*, Providence, Amer. Math. Society, 1998. {*bib:Wi-02*}

[3] Wielandt, H.: *Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes*, Math. Zeitschr. **56** (1952), str. 206-207. {*bib:Za-02*}

[4] Zalcman, L.: *Real proofs of complex theorems (and vice versa)*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), str. 115-137.