Kapitola 9

Diferenciální rovnice prvního řádu

9.1 Lineární rovnice

Setkali jsme se již s funkcionálními rovnicemi, ve kterých v roli neznámé vystupovaly funkce. Podobným typem rovnic jsou *diferenciální rovnice*, ve kterých neznámé funkce vystupují i prostřednictvím svých derivací.

Příklad 9.1.1. Již v Kapitole 6 jsme poznali, že exponenciála vyhovuje na $\mathbb{R}$ rovnici $f' - f = 0$, tj. rovnicím

$$f'(x) - f(x) = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ . \tag{9.1}$$

Z historických důvodů se používá zápisu tvaru

$$y' - y = 0 \ . \tag{9.2}$$

Přitom se rozumí, že rovnici řešíme na $\mathbb{R}$, což je maximální interval, na kterém má rovnice (9.2) smysl. Funkce exp je jedním řešením této rovnice na $\mathbb{R}$; platí pro ně $\exp(0) = 1$. Snadno uhádneme i *jiné* řešení: je jím funkce $y \equiv 0$ (tj. $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$). Jsou to již všechna řešení rovnice (9.2) na $\mathbb{R}$? Zkusme zderivovat funkci $y/\exp$ s tím, že $y \in \mathcal{C}^{(1)}(I)$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, na kterém je y je řešením rovnice (9.2) [1]. Platí

$$\left(\frac{y}{\exp}\right)' = \frac{y' \exp - y \exp}{(\exp)^2} = \frac{y' - y}{\exp} = 0 \ .$$

Vyšetřovaný podíl je proto podle Důsledku 5.2.20 konstantní funkce na I a tedy platí $y/\exp = C$, $C \in \mathbb{R}$. Protože se snadno derivováním přesvědčíme, že každá funkce $C \exp$ je řešením rovnice (9.2), vyplývá odtud, že *všechna* řešení rovnice (9.2) na I jsou popsána vztahem $y(x) = C \exp x = Ce^x$, kde $C \in \mathbb{R}$. Tak se zpravidla zapisuje poznatek, že $\{y = C \exp;\ C \in \mathbb{R}\}$ je množina všech řešení rovnice (9.2) na $I = \mathbb{R}$.

---

[1] Prostory $\mathcal{C}^{(k)}(I)$ jsme zavedli v Definici 6.6.1.

Úmluva 9.1.2. Při studiu diferenciálních rovnic budeme užívat obvyklé symboliky, která se poněkud liší od té, kterou jsme dosud používali. Neznámá funkce se obvykle značí y a její proměnná se při zápisu zpravidla vynechává. Tak např. píšeme poněkud nelogicky

$$y' = \frac{1}{x}\ , \quad x \in (0, \infty)\ , \tag{9.3}$$

což je rovnice, o níž jsme se zmínili při zavádění logaritmu. Často se též vynechává specifikace intervalu, na kterém máme rovnici řešit. Pokud bychom v (9.3) vynechali $x \in (0, \infty)$, rozumí se automaticky, že hledáme řešení na intervalech $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tedy na intervalech, kde má rovnice smysl. Opět je však nutno vždy bezpečně znát přesný význam poněkud vágních zápisů, které budeme používat. Poznamenejme ještě, že ve fyzice se často při derivování funkce závislé na čase užívá k označení derivace místo čárky tečka.

Nejvyšší derivace neznámé funkce, která v rovnici „efektivně vystupuje“, určuje *řád rovnice*. Objasníme to na příkladu: rovnice $y'' - y'' + y' - y = 0$ je diferenciální rovnice *prvního* řádu, kdežto rovnici $y' - y' - y = 2x$ za diferenciální rovnici nepovažujeme. Zatím se v této kapitole omezíme na zkoumání velmi jednoduchých, pro fyziku však značně důležitých rovnic 1. řádu, které se užívají k popisu zákonů pro růst populací, k popisu radioaktivního rozpadu, atp. Jsou to rovnice tvaru

$$y' + a(x)y = b(x)\ , \quad x \in (c, d)\ , \tag{9.4}$$

kde $a, b \in \mathcal{C}(c, d)$.

Nejjednodušší rovnice tohoto typu jsme již poznali. I když jsme při popisu metod hledání primitivních funkcí výslovně o diferenciálních rovnicích nemluvili, lze úlohu nalézt primitivní funkci k dané funkci f interpretovat jako jednoduchou diferenciální rovnici. Budeme proto využívat dosud nedokázanou Větu 8.1.6 o existenci primitivní funkce ke spojité funkci.

Definice 9.1.3. *Řešením rovnice* (9.4) na nějakém intervalu $(\gamma, \delta) \subset (c, d)$ je taková funkce φ, pro kterou existuje derivace φ' na (γ, δ) a platí

$$\varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = b(x)\ , \quad x \in (\gamma, \delta)\ .$$

Důsledek 9.1.4. *Je-li y řešením rovnice* (9.4) *na intervalu $(\gamma, \delta) \subset (c, d)$, pak s ohledem na spojitost funkcí a, b a y plyne ze vztahu $y'(x) = b(x) - a(x)y$, $x \in (\gamma, \delta)$, že platí $y \in \mathcal{C}^{(1)}(\gamma, \delta)$. Víme tedy, že stačí hledat řešení pouze mezi funkcemi třídy $\mathcal{C}^{(1)}$.*

Poznámka 9.1.5. Rovnice (9.4) je *lineární diferenciální rovnice 1. řádu s pravou stranou b.* To vyžaduje určité objasnění. Při řešení této rovnice hraje významnou roli též rovnice

$$y' + a(x)y = 0 \ , \quad x \in (c, d) \ , \tag{9.5}$$

kterou z předchozí rovnice dostaneme speciální volbou $b \equiv 0$. O ní zpravidla mluvíme jako o rovnici s *nulovou pravou stranou* nebo jako o *homogenní rovnici*. Absurdnímu termínu „rovnice bez pravé strany“, který se někdy užívá, se budeme zásadně vyhýbat. Tato úmluva nám umožňuje se o obou rovnicích (9.4) a (9.5) jednoduše domlouvat. Obecně je nutno dávat pozor na kontext, neboť termín „homogenní“ se v příbuzných matematických disciplínách vyskytuje v jiných významech.

Termín *lineární* souvisí s tím, že označíme-li

$$L(y) = y' + a(x)y \ , \quad y \in \mathcal{C}^{(1)}(c, d) \ ,$$

je L *lineární operátor* na $\mathcal{C}^{(1)}(c, d)$ (viz Definice 6.6.1). To znamená, že pro každé dvě funkce $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^{(1)}(c, d)$ a všechna $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2) \ .$$

Linearita rovnice značně usnadňuje její úplné vyřešení.

Definice 9.1.6. Jestliže je φ řešením diferenciální rovnice (9.4), pro něž platí $(\gamma, \delta) = (c, d)$, nazývá se takové řešení *maximální řešení*, podrobněji maximální řešení na (c, d). Systém *všech maximálních řešení* rovnice (9.4) nazýváme *obecné řešení rovnice* (9.4).

Úmluva 9.1.7. Řešit diferenciální rovnici bude pro nás znamenat nalézt obecné řešení rovnice, a to i později, v případech mnohem složitějších. Máme-li nalézt např. maximální řešení rovnice (9.4) takové, že vyhovuje pro danou dvojici $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \in (c, d)$, podmínce $y(x_0) = y_0$, je to *jiná* úloha.

Příklad 9.1.8. Množina funkcí $\{\log + C;\ C \in \mathbb{R}\}$ je obecným řešením rovnice $y' = 1/x$, $x \in (0, \infty)$. Povšimněte si, že pracujeme s řešeními vždy na intervalu, podobný pojem pro obecnější množinu nezavádíme.

Věnujme se nyní rovnici (9.5). Dokážeme, že pro ni je struktura řešení podobná jako u rovnice (9.2). Připomeňme, že používáme Důsledek 9.1.4.

Lemma 9.1.9. *Všechna maximální řešení rovnice* (9.5) *tvoří lineární podprostor prostoru* $\mathcal{C}^{(1)}(c, d)$. *Dimenze tohoto prostoru je* 1 [2] .

Důkaz. Z linearity operátoru L plyne, že jsou-li y_1, y_2 (maximálními) řešeními rovnice (9.5) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, je také $c_1 y_1 + c_2 y_2$ (maximálním) řešením rovnice (9.5),

[2] Použijeme-li znalostí z lineární algebry, je tento prostor jádrem $\operatorname{Ker} L$ operátoru L.

tj. platí

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = 0 \ .$$

K důkazu, že maximální řešení tvoří jednodimenzionální podprostor prostoru $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$, užijeme podobného obratu jako výše. Je-li A primitivní funkce k funkci a, tj. platí $A' = a$, potom se lze dosazením snadno přesvědčit, že funkce

$$y(x) = \exp(-A(x)) \ , \quad x \in (c,d) \ ,$$

je řešením (9.5). Všimněme si dále, že pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp(-A(x) + c) = (\exp c) \exp(-A(x)) \ ,$$

a proto zřejmě i každý *kladný* násobek funkce $\exp(-A(x))$ je řešením (9.5). Pro nás je podstatné dokázat, že *každé řešení* (9.5) *je násobkem* $\exp(-A(x))$. K tomu stačí uvážit, že pro *každé* řešení y rovnice (9.5) na $\mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\left(\frac{y(x)}{\exp(-A(x))}\right)' &= \frac{y'(x)\exp(-A(x)) + y(x)\exp(-A(x))a(x)}{\exp^2(-A(x))} = \\ &= \frac{y'(x) + a(x)y(x)}{\exp(-A(x))} = 0 \ ,\end{aligned}$$

a tedy je tento podíl konstantní funkcí na (c,d). Tím je důkaz dokončen. □

Lemma 9.1.10. *Je-li* y_1 *řešení rovnice* (9.4) *na* (γ,δ) *a* y_2 *řešením rovnice* (9.5) *na* (γ,δ), *pak je součet* $y_1 + y_2$ *řešením rovnice* (9.4) *na* (γ,δ). *Speciálně to platí pro maximální řešení.*

Důkaz. Přímý výpočet dává $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = b + 0 = b$. □

Lemma 9.1.11. *Jsou-li* y_1, y_2 *dvě řešení rovnice* (9.4) *na intervalu* (γ,δ), *pak je jejich rozdíl* $y_1 - y_2$ *řešením rovnice* (9.5) *na* (γ,δ). *Speciálně to opět platí pro maximální řešení.*

Důkaz. Přímý výpočet dává $L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = b - b = 0$. □

Věta 9.1.12. *Obecné řešení rovnice* (9.4) *obdržíme jako součet jednoho maximálního řešení rovnice* (9.4) *a obecného řešení rovnice* (9.5). *Jinak řečeno, je-li* y_1 *maximálním řešením rovnice* (9.4), *pak pro každé maximální řešení* y *rovnice* (9.4) *existuje maximální řešení* y_2 *rovnice* (9.5) *tak, že platí*

$$y = y_1 + y_2 \ .$$

Důkaz. Zvolme jedno maximální řešení y_1 rovnice (9.4). Je-li y libovolné maximální řešení rovnice (9.4), platí $y = y_1 + (y - y_1)$, z čehož pomocí předcházejících dvou lemmat lehce plyne tvrzení věty. □

Úmluva 9.1.13. S ohledem na předcházející větu je přirozené, že se použité řešení y_1 rovnice (9.4), které nám pomohlo vyjádřit obecné řešení (9.4), nazývá *partikulární řešení rovnice* (9.4).

Poznámka 9.1.14. Nalezení partikulárního řešení (9.4) není obtížným problémem. Používá se k tomu metody *variace konstant* (zde půjde o jedinou konstantní funkci). Již víme, že

$$y(x) = C \exp(-A(x)) \ , \quad x \in (c, d) \ ,$$

je obecným řešením (9.5), pokud $A' = a$. Budeme nyní hledat řešení (9.4) ve tvaru

$$y(x) = C(x) \exp(-A(x)) \ , \quad x \in (c, d) \ ,$$

kde C je nějaká funkce, která má vlastní derivaci pro všechna $x \in (c, d)$. Zderivováním a dosazením do (9.4) dostaneme pro všechna tato x

$$\begin{aligned} C'(x) \exp(-A(x)) + C(x) \exp(-A(x))(-a(x)) + \\ + C(x) \exp(-A(x))\, a(x) = b(x) \ , \end{aligned}$$

tj. platí

$$C'(x) = b(x) \exp(A(x)) \ .$$

Vpravo je funkce z $\mathcal{C}(c, d)$, existuje k ní tedy (alespoň jedna) primitivní funkce a ta po dosazení za $C(x)$ dá formuli pro partikulární řešení rovnice (9.4). Podle předcházejícího lemmatu pak dostaneme obecné řešení této rovnice. Snadno nahlédneme, že funkce C je vždy z $\mathcal{C}^{(1)}(c, d)$.

9.2 Několik příkladů

Příklad 9.2.1 (exponenciální růst). Populace bakterií v roztoku závisí na čase; označme $P(t)$ jejich počet v čase t. Nechť $\Delta P := P(t + \Delta t) - P(t)$ je přírůstek počtu bakterií za čas Δt; ten je úměrný velikosti $P(t)$. To znamená, že platí

$$\Delta P \approx \alpha P(t) \Delta t \ ,$$

kde α je kladná konstanta [3]. Odtud dostáváme po nahrazení $\approx$ symbolem $=$

$$\Delta P / \Delta t = \alpha P(t) \ ,$$

resp. při $\Delta t \to 0_+$ dostáváme jednoduchou diferenciální rovnici

$$P' - \alpha P = 0 \ . \tag{9.6}$$

[3] To je poznatek podložený zkušeností z experimentů. Symbol $\approx$ má čtenáře varovat, že náš model popisuje *zjednodušenou* situaci.

Jak jsme výše odvodili, obecné řešení této rovnice má tvar

$$P(t) = P_0\, e^{\alpha t}\ , \quad t \in \mathbb{R}\ ,$$

kde P_0 je velikost populace v čase $t = 0$ [4]. Tento jednoduchý zákon růstu populace není specifický pro populaci bakterií a je aplikovatelný na lidskou populaci, populaci rostlin či zvířat určitého druhu.

Známe-li $P_1 := P(t_1)$ pro $t_1 > 0$, můžeme vypočítat konstantu α; platí

$$\alpha = \frac{1}{t_1} \log \frac{P_1}{P_0}\ .$$

Označme δ čas, za který se velikost populace zdvojnásobí. Snadno nahlédneme, že platí

$$2 = \frac{P(t+\delta)}{P(t)} = \frac{P_0\, e^{\alpha(t+\delta)}}{P_0\, e^{\alpha t}} = e^{\alpha\delta}\ ,$$

a tedy $\delta = \log 2/\alpha$. Je pozoruhodné, že tento růstový zákon i přes zjednodušení reálné situace dává pro určitá časová období výsledky blízké empiricky získaným datům.

Poznámka 9.2.2. Je zřejmé, že v předchozím modelu vlastnost (je $P_0 > 0$)

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} P_0 e^{\alpha t} = +\infty$$

odporuje našim představám. Intuitivně cítíme, že pro dlouhé časové intervaly (v závislosti na rychlosti růstu populace) takový model nebude dávat dobré výsledky. Ukažme si to na následujícím příkladu, který se týká lidské populace.

Příklad 9.2.3. Statistická data ukazují, že po dlouhou dobu se počet obyvatel na Zemi zdvojnásobuje přibližně každých 35 let. Podle údajů OSN v r. 1986 žilo na Zemi asi 5 miliard lidí. Z těchto údajů snadno určíme potřebné konstanty, takže pro počet lidí na Zemi dostáváme vzorec

$$P(t) = 5 \cdot 10^9 \cdot e^{0.02\, t}\ .$$

Podle něj provedeme výpočet předpokládaného počtu obyvatel Země v budoucnosti; po zaokrouhlení příslušných hodnot dostaneme tabulku

Rok	**Obyvatel Země**	
2000	6.6	miliard
2050	18	miliard
2100	48.9	miliard
2300	2.7	biliónů
2501	148.7	biliónů .

[4] Zpravidla nás zajímá pouze chování P od jistého okamžiku, jemuž odpovídá $t = 0$.

To by znamenalo, že v r. 2501 bude mít každý obyvatel Země k dispozici cca $1\,m^2$. I když model poskytuje v kratších časových intervalech vcelku přijatelné hodnoty, z posledního vidíme, že popsaný model je absurdní.

Dále budeme poněkud stručnější, neboť jde o úvahy téhož typu jako v předcházejícím příkladu.

Příklad 9.2.4 (radioaktivní rozpad). Rozpad radioaktivních látek se řídí podobnou zákonitostí jako je ta, kterou jsme již poznali. Je-li $M(t)$ množství látky v čase t, pak

$$\Delta M = M(t+\Delta t) - M(t) \approx \alpha M(t)\Delta t \ ,$$

kde však je $\alpha < 0$. Předpokládejme proto $\alpha > 0$, takže je

$$\Delta M \approx -\alpha M(t)\Delta t \ .$$

Dospějeme k rovnici tvaru $M' + \alpha M = 0$ s obecným řešením

$$M(t) = M_0\, e^{-\alpha t} \ ,$$

takže rozpad je popsán vztahem ($\alpha > 0$)

$$M(t) = M_0\, e^{-\alpha t} \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Čas, za který se množství látky změní na poloviční, se obvykle nazývá *poločas rozpadu.*

Poznámka 9.2.5. Ukazuje se, že není obtížné řešit i trochu složitější rovnice, pokud jsou speciálního tvaru. Tak např. obecně *nelineární rovnici se separovanými proměnnými*, což je rovnice tvaru

$$y' = f(x)g(y) \ , \tag{9.7}$$

kde f, g jsou dané spojité funkce, řešíme zpravidla bez větších obtíží. Formální způsob řešení spočívá v úpravě

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \ , \quad \text{resp.} \quad y'(x) = f(x)g(y(x))$$

vedoucí posléze k rovnosti

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,\mathrm{d}x \ = \int f(x)\,\mathrm{d}x \ \ .$$

Protože jde o rovnost nějakých dvou primitivních funkcí, je jejich rozdíl konstantní. Tento fakt se zpravidla zapisuje formulí

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,\mathrm{d}x \ = \int f(x)\,\mathrm{d}x \ + C \ .$$

Potíže nastávají v případě, kdy funkce g má nulové body. V Kapitole 14 si příčiny těchto potíží objasníme podrobněji. Poskytnutý návod je třeba kriticky zhodnotit: pokud podle něj něco spočteme, *musíme* se přesvědčit, že jsme dostali řešení dané rovnice, ale to lze lehce provést derivováním. Jsme však velice daleko od ideálního stavu, který žádá nalézt *všechna* maximální řešení rovnice, neboť o maximalitě systému takto získaných řešení nic nevíme.

Příklad 9.2.6 (Peano 1890). Řešme rovnici $y' = 3\,y^{2/3}$. Podle návodu přejdeme k rovnici

$$\int \frac{1}{3}\,y^{-2/3}(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + C\ , \tag{9.8}$$

jejímž řešením jsou funkce $\sqrt[3]{y(x)} = (x+C)$, resp. $y(x) = (x+C)^3$ pro každé $C \in \mathbb{R}$. Snadno se přesvědčíme, že nulový bod $x_0 = -C$ „nevadí", funkce je vždy řešením na $\mathbb{R}$, tedy zřejmě i maximálním řešením. Našli jsme však opravdu *všechna maximální řešení*? Odpověď je záporná, snadno zjistíme, že také funkce $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je maximálním řešením. Situace je však horší, než se může na první pohled zdát. Např. každá funkce tvaru (je $K > 0$)

$$y(x) = \begin{cases} (x+K)^3\,, & \text{pro } x < -K\,,\\ 0 \qquad\quad , & \text{pro } x \in [\,-K, K\,]\,,\\ (x-K)^3\,, & \text{pro } x > K\,, \end{cases}$$

je také maximálním řešením vyšetřované rovnice, pro které platí $y(0) = 0$, a takových řešení je nekonečně mnoho (a zdaleka ještě nejsou všechna).

Jestliže budeme zkoumat všechna taková řešení y rovnice (9.8), pro která platí např. $y(1) = 1$, pak tato řešení v nějakém okolí bodu $x = 1$ splynou. Budeme-li si představovat úlohu geometricky a interpretovat každé řešení jako křivku v rovině, pak podobnou vlastnost jako právě zvolený bod $[\,1,1\,]$ mají všechny body v rovině kromě bodů osy x, tj. bodů, ležících na přímce o rovnici $y = 0$. Těmito body prochází také grafy nekonečně mnoha maximálních řešení. Je tu ale jistý rozdíl: ke každému $x_0 \in \mathbb{R}$ a každému jeho okolí $\mathcal{U}(x_0)$ lze nalézt taková dvě řešení y_1, y_2 na $\mathbb{R}$, která na $\mathcal{U}(x_0)$ nesplývají. Je to lehké, např. pro bod $x_0 = 0$ stačí volit $y_1(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ a $y_2(x) = x^3$.

Příklad 9.2.7. Protože existuje funkce, která je řešením rovnice $y' = y$, je přirozené se ptát, zda existuje také funkce, pro kterou platí $f' = f^2$. Podle postupu popsaného v Poznámce 9.2.5, dostaneme $y'(x)/y^2(x) = 1$, a pak po přechodu k primitivním funkcím

$$-\frac{1}{y(x)} = x\ .$$

Rozdíl těchto dvou funkcí musí být konstantní, z čehož obdržíme elementárními úpravami pro každé $C \in \mathbb{R}$

$$y(x) = (C-x)^{-1}\ , \quad x \neq C\ .$$

Vidíme, že maximálními řešeními této rovnice jsou funkce

$$y(x) = (C - x)^{-1}, \quad x \in (-\infty, C), \quad \text{pro všechna } \; C \in \mathbb{R} \; ,$$

a také funkce

$$y(x) = (C - x)^{-1}, \quad x \in (C, +\infty), \quad \text{pro všechna } \; C \in \mathbb{R} \; ;$$

o tom se stačí přesvědčit dosazením do řešené rovnice. Maximalita řešení je zřejmá. Tímto postupem *nenalezneme* řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, je to však další maximální řešení rovnice, kterou zkoumáme. To je zřejmé. U jiných rovnic však může být situace mnohem složitější.

Poznámka 9.2.8. Pro názorné chápání řešení diferenciálních rovnic uveďme ještě jednu interpretaci geometrického charakteru. Diferenciální rovnice (9.7) je jakýmsi „kompasem", který v bodech $[x, y]$ roviny ukazuje, jakým směrem se v ní máme pohybovat. Vyřešit diferenciální rovnici (9.7) pak znamená „projít rovinou" podle tohoto kompasu. Křivka, po níž se pohybujeme, je grafem (nějakého) řešení. Často se v této souvislosti mluví o *směrovém poli*, určeném rovnicí (9.7) a to se též graficky znázorňuje.

Příklad 9.2.9 (logistický růstový zákon). Snaha po nalezení dokonalejšího růstového zákona vedla k modifikacím příslušné diferenciální rovnice. Intuitivně cítíme, že „lepší" růstový zákon by měla popisovat rovnice $P' = \alpha(P) \cdot P$, kde α je vhodně zvolená, pro velká P klesající funkce. Pak bude klesat i rychlost růstu populace. Budeme se zabývat jednoduchým případem tohoto typu, dříve však uveďme jeden údaj, týkajících se formy rovnice. Často se růstová konstanta α v rovnici (9.6) zapisuje ve tvaru rozdílu a pracuje se s nepatrně *formálně* odlišnou rovnicí

$$P' = \gamma P - \tau P \; , \quad (\gamma, \tau > 0) \; ,$$

kde konstanty γ a τ charakterizují *porodnost* a *úmrtnost* dané populace.

Modifikovaná rovnice, popisující logistický růstový zákon, je tvaru

$$P' = \gamma P - \tau P^2 \; , \quad (\gamma, \tau > 0) \; . \tag{9.9}$$

Rovnici lze dát ještě další interpretaci: prostředí, v němž populace žije, má omezené zdroje, které určují „maximální kapacitu životního prostoru". Růst populace je úměrný nejen její velikosti, ale i „velikosti zbývajícího prostoru". Skutečně, položme $\lambda = \tau$ a $K = \gamma/\lambda$. Zbývající životní prostor popisuje veličina $K - P(t)$, kde konstanta K odpovídá maximální kapacitě. Rovnice tak po úpravě má tvar

$$P' = \lambda P(K - P) \; , \quad (\lambda, K > 0) \; .$$

Zde je výše zmíněná klesající funkce $\alpha(P) = \lambda(K - P)$ lineární, tedy obzvlášť jednoduchá. Řešení rovnice je tvaru (odvoďte to separací proměnných nebo se o tom přesvědčte derivováním)

$$P(t) = \frac{\gamma}{\tau + (\gamma/P_0 - \tau)e^{-\gamma t}} \; , \quad \text{resp.} \quad P(t) = \frac{K}{1 + (K/P_0 - 1)e^{-\lambda K t}} \; , \quad t \geq 0 \; ,$$

kde $P_0 > 0$. Lze ukázat, že v *daném oboru* je to popis všech maximálních řešení rovnice (9.9). Řešená rovnice však již není *lineární rovnicí* prvního řádu, neboť obsahuje člen P^2.

Poznámka 9.2.10. Rovnice tohoto typu se v některých případech jeví jako poměrně dobrý model pro reálnou situaci. Tak např. studie o růstu slunečnic ukazují jinou reálnou situaci, jíž odpovídá týž model. Výška slunečnic poměrně dobře vyhovuje analogickému vztahu

$$h(t) = \frac{H}{1 + (H/h_0 - 1)e^{-\lambda H t}} \ ,$$

kde H je maximální výška rostliny a h_0 výška na začátku pozorování. V r. 1983 byla publikována studie, která ukázala, že analogické chování vykazuje i „světová automobilová populace“.

9.3 Speciální rovnice vyšších řádů

K rovnicím vyšších řádů se vrátíme v Kapitole 14, avšak speciální rovnice tohoto typu umíme řešit ad hoc bez budování dalšího teoretického zázemí. Snadno nahlédneme, že je-li $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, pak v některých případech není obtížné pro jakékoli $n \in \mathbb{N}$ řešit rovnici

$$y^{(n)} = f(x) \ .$$

K řešení stačí určit *jedinou* funkci F tak, aby platilo $F^{(n)}(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Čtenář jistě snadno dokáže, že existuje obecné řešení této rovnice, avšak v případě konkrétní f může být explicitní popis řešení pomocí funkcí, které jsme definovali, jak triviálním, tak i neřešitelným problémem. Doporučujeme čtenáři, aby zvážil případy $f \equiv 0$, $f = \sin$, $f = \exp$ a $f(x) = \exp(-x^2)$. Níže se budeme takovými jednoduchými speciálními rovnicemi formou příkladů zabývat.

Příklad 9.3.1 (volný pád). Volný pád lze rovněž popsat jednoduchou diferenciální rovnicí (užijeme fyzikálního značení)

$$mg = m\ddot{x} \ , \quad \text{resp.} \quad \ddot{x} = g \ .$$

Zde $x(t)$ je poloha předmětu v čase t a m jeho hmotnost, g je gravitační zrychlení, jehož hodnota je $9.81\, ms^{-2}$. Rovnice je lineární diferenciální rovnice druhého řádu, avšak velmi speciální a lze ji snadno *integrovat* [5]. Dostáváme tak

$$v(t) := \dot{x}(t) = gt \ .$$

Protože rozdíl primitivních funkcí je na intervalu konstantní, je obecné řešení tvaru $g(t) + C_1$, kde $C_1 \in \mathbb{R}$ je, jak se v některých učebnicích z oblasti diferenciálních rovnic říká, „integrační konstanta“. Položíme-li $v_0 = \dot{x}(0)$, dostaneme dosazením $v_0 = C_1$

[5] Zde znamená „integrovat“ v podstatě totéž, jako nalézt řešení rovnice. S touto historicky motivovanou terminologií se můžete setkat v mnoha učebnicích, zejména aplikačního charakteru.

a dospějeme ke vzorečku pro rychlost $v(t) = gt + v_0$, známému z fyziky. Analogicky dospějeme dalším krokem ke vzorci

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C_2$$

a položením $x(0) = 0$ určíme $C_2 = 0$. Dospějeme tak k rovnici

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \ .$$

Pro $v_0 = 0$ tak dostaneme

$$v(t) = gt \ , \quad x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \ ,$$

což jsou vztahy popisující fyzikální zákony, ke kterým dospěl empiricky jako první Galileo Galilei (1564 – 1642).

Snadno nahlédneme, že v některých situacích jsou tyto zákony nepoužitelné: neřídí se jimi ani klesání padáku, ani pád člověka v zemské atmosféře (např. před otevřením padáku). Zcela jsme zanedbali vliv odporu prostředí. Viz další příklad.

Příklad 9.3.2 (stabilizovaný pád). Jestliže přihlédneme k odporu vzduchu, který je úměrný rychlosti padajícího tělesa v atmosféře, dospějeme na základě fyzikálních úvah k rovnici

$$m\ddot{x} = mg - \varrho\dot{x} \ , \quad (\varrho > 0) \ ,$$

kde kladná konstanta ϱ popisuje odpor prostředí. Přechodem k $\dot{x} = v$ dostaneme

$$m\dot{v} = mg - \varrho v \ , \quad \text{resp.} \quad \dot{v} = -\frac{\varrho}{m}v + g \ .$$

Toto je lineární rovnice tvaru $\dot{v} = \alpha v + \beta$, jejíž řešení pro $\alpha \neq 0$ je dáno vzorcem

$$v(t) = Ce^{\alpha t} - \beta/\alpha \ , \quad C \in \mathbb{R}$$

(zde jde o obecné řešení rovnice). Přepišme ho do tvaru

$$v(t) = C_1 e^{-(\varrho/m)t} + \frac{mg}{\varrho} \ ,$$

kde jsme již označili integrační konstantu C_1, neboť při další integraci přibude ještě jedna. Položíme-li

$$v_0 = v(0) = C_1 + \frac{mg}{\varrho} \ , \quad \text{resp.} \quad C_1 = v_0 - \frac{mg}{\varrho} \ ,$$

dostaneme rovnici tvaru

$$v(t) = \Big(v_0 - \frac{mg}{\varrho}\Big)e^{-(\varrho/m)t} + \frac{mg}{\varrho} \ .$$

Odtud další integrací dostaneme

$$x(t) = \Big(v_0 - \frac{mg}{\varrho}\Big)\Big(-\frac{m}{\varrho}\Big)e^{-(\varrho/m)t} + \frac{mg}{\varrho}t + C_2 \ .$$

Je-li $x(0) = 0$, dostaneme dosazením

$$C_2 = \left(v_0 - \frac{mg}{\varrho}\right)\frac{m}{\varrho}$$

a posléze i hledaný vzorec

$$x(t) = \frac{m}{\varrho}\left(v_0 - \frac{mg}{\varrho}\right)\left(1 - e^{-(\varrho/m)t}\right) + \frac{mg}{\varrho}t \ ;$$

z něho plyne $v(t) \to mg/\varrho$ pro $t \to \infty$, což je fakt, odpovídající reálné situaci, kdy se rychlost pádu stabilizuje.

Opět jsme však zanedbali některé vlivy, které mohou za určitých okolností hrát podstatnější úlohu, např. pokles hustoty atmosféry v závislosti na výšce apod.

Příklad 9.3.3 (start rakety). Do našich úvah zahrneme opět pouze „hlavní parametry“ úvahy. Předpokládáme, že vesmírná raketa startuje ve svislém směru; poloměr Země označíme R a h_v výšku rakety nad zemským povrchem v okamžiku, kdy dojde k vyhoření paliva rakety; hodnota $x(t)$ nechť udává výšku rakety nad zemským povrchem v čase t. Od okamžiku vyhoření paliva se raketa chová jako kámen, vržený do prostoru. Vrhneme-li ho malou rychlostí, spadne opět na zemský povrch, při velké rychlosti se vymaní z vlivu zemské přitažlivosti. Minimum rychlostí, pro něž nastává druhý případ, se nazývá *úniková rychlost*. Tu bychom rádi, v závislosti na velikosti h_v, určili.

Na počátku situace, kterou se zabýváme, platí

$$x(0) = R + h_v =: x_v \quad \text{a} \quad \dot{x}(0) =: v_v \ .$$

Z Newtonova gravitačního zákona vyplývá, že pro velikost síly působící na raketu platí $K = -\gamma \cdot m(x)/x^2$, kde $m(x)$ je hmotnost rakety; ta se pochopitelně mění s dobou a tedy i v závislosti na x. Je proto např. $M := m(R)$ hmotnost rakety při startu a $m := m(x_v)$ vlastní hmotnost rakety (bez paliva) [6]. Určíme velikost γ vyšetřením situace při startu. Z rovnosti

$$-Mg = -\gamma\frac{M}{R^2} \quad \text{dostaneme} \quad \gamma = gR^2 \ ,$$

takže platí $K = -gR^2m/x^2$. Proto po vyhoření paliva pro raketu platí

$$m\ddot{x} = -gR^2 \cdot \frac{m}{x^2} \ , \quad \text{resp.} \quad \ddot{x} = -gR^2 \cdot \frac{1}{x^2} \ .$$

Nyní si pomůžeme „trikem“: násobíme obě strany rovnice činitelem $2\dot{x}$, takže dostaneme

$$2\dot{x}\ddot{x} = -2gR^2 \cdot \frac{\dot{x}}{x^2} \ , \quad \text{resp.} \quad (\dot{x}^2)' = \left(2gR^2 \cdot \frac{1}{x}\right)' \ ;$$

zde značíme čárkou opět derivaci podle času, zápis s užitím teček by byl značně nepřehledný. Odtud dostaneme integrací $(v := \dot{x})$

$$v^2 = 2gR^2 \cdot \frac{1}{x} + c \ , \quad C \in \mathbb{R} \ .$$

[6] Složitější modely zahrnují další veličiny, v našem případě je sledování úbytku hmotnosti rakety zbytečné.

Uvážíme-li, že pro $t = 0$ je $v_v^2 = 2gR^2 \cdot (1/x_v) + C$, dostáváme konečně

$$v^2 = 2gR^2 x^{-1} + v_v^2 - 2gR^2 x_v^{-1} \; . \tag{9.10}$$

Jestliže bude platit $v_v^2 - 2gR^2/x_v \geq 0$, příslušná rychlost umožní raketě opustit sféru vlivu přitažlivosti Země [7]. Tomuto jevu odpovídá hodnota $v_v = \sqrt{2gR^2/x_v}$.

Pro případ relativně malé výšky h_v, to znamená pro $x_v \doteq R$, dostaneme pro průměr Země $D = 2R = 12,757 \cdot 10^6$ m hodnotu, rovnou $\sqrt{gD} \doteq 11,19\, km\, s^{-1}$. Toto je tedy hledaná *úniková rychlost.*

Příklad 9.3.4 (lineární dietní model). Hmotnost člověka závisí na mnoha věcech, ale v prvním přiblížení je funkcí přísunu energie v potravinách a její „spotřeby“; ta závisí na činnosti, kterou člověk vykonává, ale i na věku a pohlaví jedince, na metabolických faktorech apod. Denní spotřeba jedince činí 30 až 40 kalorií na kilogram jeho váhy. Při průměrném energetickém přísunu $35\, cal/kg$ lze očekávat její stabilizaci. Vcelku je přijatelná představa, že změna váhy je přímo úměrná přebytku resp. nedostatku v energetickém přísunu, tedy že váha w vyhovuje rovnici

$$w' = k(c - 35w) \; .$$

Rozměr veličiny na levé straně je kg/den, druhý činitel vpravo má rozměr cal/den, konstanta k má proto rozměr kg/cal. Zpravidla se udává, že $7\, kcal = 7000\, cal$ je ekvivalentní jednomu kilogramu, takže $k = (7000)^{-1}\, kg/cal$. Při konstantním c dostáváme jednoduchou rovnici $7000w' = c - 35w$, jejíž řešení je dáno rovnicí

$$w(t) = c/35 + (w(0) - c/35)\mathrm{e}^{-0{,}005t} \; .$$

Stabilní (cílová) váha je $c/35$. Chce-li pan Tlustý, vážící $95\, kg$, omezit denní přísun na 2625 kalorií, bude jeho váha vyhovovat vztahu $w(t) = 75 + 20 \exp(-0,005t)$. Cílová váha pana Tlustého je 75 kg, přičemž dosáhne teoreticky váhy $80\, kg$ (!) za 278 dní, tedy za více než tři čtvrtě roku [8]. Proto patrně tolik dobrých předsevzetí končí fiaskem! (Model je popsán v [3]).

Lze očekávat, že nalezené výsledky o lineárních rovnicích bude možno dále zobecnit, např. pro *lineární rovnice n-tého řádu.* To skutečně později uděláme, nyní si pouze ukážeme, částečně pro povzbuzení čtenářovy zvědavosti, jednoduchý příklad rovnice druhého řádu. Řadu dalších zajímavých příkladů nalezne čtenář v [1], jedné z „nejčtivějších“ učebnic, které pojednávají o diferenciálních rovnicích. Další knihou tohoto typu je [2], z níž jsme vybrali některé ukázky.

Příklad 9.3.5 (Matematické kyvadlo). Studujeme-li pohyb ideálního kyvadla (je to hmotný bod M o hmotě m na nehmotném závěsu délky l, odpor prostředí se zanedbá),

[7] Rovnice (9.10) odpovídá energetické bilanci, kterou by patrně zkušenější fyzik při odvozování napsal přímo „bez počítání“.

[8] Pro milovníky SI soustavy uvádíme převodní vztah $1kcal = 4,186\, kJ$. Pro milovníky piva uvádíme ještě další převodní vztah $1\, l$ Gambrinusu $12° \doteq 1860\, kJ$.

lze ho na základě Newtonova pohybového zákona popsat rovnicí

$$m\ddot{s} = ml\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi \ , \quad \text{resp.} \quad \ddot{\varphi} + (g/l)\sin\varphi = 0 \ ;$$

zde $\ddot{s}$ je velikost okamžitého zrychlení a φ úhel výkyvu (doporučujeme čtenáři, aby si načrtl obrázek). Složka síly odpovídající směru závěsu o velikosti $mg\cos\varphi$ nemá na pohyb vliv, znamení minus odpovídá tomu, že síla působí proti směru pohybu bodu M. Pro malé hodnoty „rozkyvu" je $\sin\varphi \approx \varphi$. Rovnice

$$\ddot{\varphi} + (g/l)\varphi = 0 \ , \quad \text{resp.} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \ , \quad \omega_0 := \sqrt{g/l}$$

je rovnice harmonického oscilátoru, která je velmi důležitá ve fyzice. Ukažte, že jsou-li $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, každá funkce $\varphi(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$ je řešením rovnice. Při počátečních podmínkách $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ lze toto řešení upravit na tvar $\varphi(t) = \varphi_0\cos\omega_0 t$.

Zdaleka není zřejmé, že jsme „uhádli" *všechna řešení* uvažované rovnice. Pokud se čtenář zajímá jen o techniku řešení, ta není obtížná. Jestliže však chce pochopit teorii hlouběji, musí se ještě dříve naučit některé další partie matematiky.

Historické poznámky 9.3.6. Řešení, resp. dle tradiční terminologie integrace, prvních diferenciálních rovnic úzce souvisí se samotným zrodem infinitezimálního počtu. Takové rovnice řešili již např. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) r. 1684, resp. Jacob Bernoulli (1654 – 1705) (1692). Rovnice tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^\rho$$

se po něm nazývá *Bernoulliova rovnice*; je lineární pro $\rho = 0, 1$. Právě infinitezimální počet přinesl mocný nástroj k řešení velmi složitých úloh. Pokud např. uvažujeme matematické kyvadlo, pomohla nám pouze náhrada $\sin\varphi \approx \varphi$ k tomu, že doba kyvu T podle získaného popisu činila $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ a nezávisela na m a φ_0. Pokud chceme dosáhnout rozumného přiblížení k reálné situaci, musíme volit $\varphi_0 < \pi/6$. Christian Huygens (1629 – 1695) se zabýval problémem sestrojení dokonale isochronního kyvadla. Dokázal určit, že dráha, po níž se musí pohybovat hmotný bod v tomto případě není kružnice, nýbrž *cykloida*. Tato jednoduchá křivka je tedy tzv. *tautochronou*, resp. *isochronou*. Zde rovnost času kyvu nezávisle na výchylce lze interpretovat též takto: postavíme-li U-rampu pro skateboardisty ve tvaru cykloidy a necháme je sjíždět do nejnižšího bodu z různých výšek, pak nejnižším bodem (samozřejmě v ideálním případě, tj. bez tření apod.) projedou vždy za *stejnou* dobu. Odtud jsou odvozeny uvedené názvy.

Další stručný komentář k historii vývoje diferenciálních rovnic nalezne čtenář v Kapitole 14. Již teď však poznamenávám, že základním zdrojem informací v tomto směru byla pro mne kniha [2].

Literatura:

[1] Braun, M.: *Differential equations and their applications*, Springer, New York, 1978. (Druhé vydání.)

[2] Heuser, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1995. (Třetí vydání.)

[3] Segal, A. C.: *A linear diet model*, str. 175 – 176, obsaženo v: *Apostol, T. M. and al.*, *A century of calculus II*, The Mathematical Association of America, 1992. (Sborník článků z *American Mathematical Monthly* a *Mathematical Magazine*.)