Kapitola 14

Diferenciální rovnice

14.1 Úvod

Poznámka 14.1.1. V Kapitole 9 jsme se již jednou setkali s diferenciálními rovnicemi. Naučili jsme se řešit lineární rovnici 1. řádu a rovnice speciálního tvaru; početní metody, se kterými jsme se seznámili, nám umožnily řešit některé rovnice tvaru $y' = f(x)\, g(y)$ se *separovanými proměnnými.* Pro řešení konkrétních rovnic tohoto typu jsme použili ad hoc vytvořených postupů. I když jsme potřebné pojmy ve speciálních případech již jednou definovali, uděláme to nyní stručně v obecnější situaci znova.

Je užitečné připomenout, že v teorii (obyčejných) diferenciálních rovnic se historicky ustálily některé konvence: neznámá funkce se značí téměř vždy y (proměnná se vynechává), „integrační konstanty“ se často nerozlišují, i když se v průběhu výpočtu několikrát změní. Naším cílem je seznámit se s touto partií zejména pro její praktický význam; budeme podstatně využívat základních poznatků z algebry a nebudeme je dokazovat. Výklad bude mít navíc volnější popisnou formu, neboť striktní formalizace by pro naše potřeby byla příliš náročná a neúčelná.

Označení 14.1.2. *Obyčejnou diferenciální rovnicí* budeme rozumět rovnici

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \ , \tag{14.1}$$

kde funkce F je spojitá funkce na nějaké oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Nejvyšší řád derivace efektivně vystupující v rovnici nazýváme *řád rovnice.* Je-li F např. polynom, pak jeho stupeň je *stupněm rovnice. Řešením rovnice* (14.1), podrobněji *řešením rovnice* (14.1) *na intervalu* (c, d), nazýváme každou funkci φ definovanou na intervalu (c, d) takovou, že existuje její derivace $\varphi^{(n)}$ na (c, d), je $[\, x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\,] \in G$ pro všechna $x \in (c, d)$ a platí

$$F\Big(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\Big) = 0 \ , \qquad x \in (c, d) \ .$$

Řešení rovnice (14.1) se nazývá *maximální řešení* (někdy se užívá i termín *úplné řešení*), je-li definováno na maximálním intervalu, tj. není restrikcí řešení rovnice (14.1), definovaného na intervalu (c', d'), pro nějž $(c, d) \subset (c', d') \neq (c, d)$. Množinu všech maximálních řešení rovnice (14.1) nazýváme *obecným řešením* (14.1).

Poznámka 14.1.3. Velmi často pracujeme s rovnicemi

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \ ,$$

které jsou *rozřešeny vzhledem k nejvyšší derivaci.* Jelikož vlevo stojí derivace $y^{(n)}$ neznámé spojité funkce $y^{(n-1)}$, je tato rovnice řešitelná pouze v případě, že i vpravo stojící funkce f je „dostatečně rozumná". Proto se omezíme opět na případ *spojité* funkce f.

Všimněme si nejprve blíže jednoduchého případu takové diferenciální rovnice

$$y' = f(x, y) \ , \tag{14.2}$$

kde f je funkce definovaná na oblasti (tj. otevřené souvislé množině) $G \subset \mathbb{R}^2$. Z praktických důvodů je důležitá též otázka existence, případně jednoznačnosti řešení, vyhovujícího ještě další podmínce : je-li $[x_0, y_0] \in G$, často řešíme problém nalézt takové řešení φ, které je definováno na nějakém intervalu $(c, d) \subset \mathbb{R}$, pro který je $x_0 \in (c, d)$ a platí rovnost

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \ , \quad x \in (c, d) \ ,$$

a tudíž i inkluze $\{[\,x, \varphi(x)\,];\, x \in (c, d)\} \subset G$, a zároveň rovnost

$$\varphi(x_0) = y_0 \ . \tag{14.3}$$

S ohledem na některé fyzikální aplikace, kde proměnnou x bývá často čas, nazývá se tato úloha *počáteční úlohou.* Obvykle užívaný stručný zápis úlohy je tvaru

$$y' = f(x, \varphi(x)) \ , \quad y(x_0) = y_0 \ ,$$

kde rovnost $y(x_0) = y_0$ popisuje počáteční podmínku.

Při geometrické interpretaci řešení jakožto křivky popsané funkcí φ hovoříme pak o *řešení, procházejícím bodem* $[x_0, y_0]$. Přirozené otázky, na které budeme hledat odpověď, jsou dvě:

(a) kdy existuje řešení rovnice (14.2) vyhovující počáteční podmínce (14.3), a

(b) kdy ke každým dvěma řešením této úlohy existuje okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0, na kterém tato řešení splývají.

V tomto smyslu také popsaný problém chápeme jako problém *existence a jednoznačnosti řešení* (14.2) *procházejícího bodem* $[x_0, y_0]$. Zformulujeme odpověď jako následující tvrzení:

Tvrzení 14.1.4 (Peano 1886). [1] *Předpokládejme, že v rovnici*

$$y' = f(x,y) \ , \tag{14.2}$$

je funkce f spojitá *na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ a že platí $[x_0, y_0] \in G$. Potom existuje interval (c,d) a funkce $\varphi : (c,d) \to \mathbb{R}$ tak, že je $x_0 \in (c,d)$, $[\,x, \varphi(x)\,] \in G$ pro všechna $x \in (c,d)$, a platí*

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \qquad & x \in (c,d) \ , \\ \varphi(x_0) = y_0 \ . & \end{aligned} \tag{14.3}$$

Poznámka 14.1.5. Toto tvrzení, zaručující existenci řešení rovnice (14.2) procházejícího bodem $[x_0, y_0]$, *nebudeme dokazovat*, jeho důkaz však alespoň naznačíme. Ze spojitosti funkce f vyplývá, že řešení φ musí na nějakém okolí bodu x_0 vyhovovat podmínce

$$|\varphi'(x)| \le M < \infty \ .$$

Zvolíme-li interval $[\,c,d\,]$ v tomto okolí tak, aby $x_0 \in (c,d)$ a dále libovolné dělení D intervalu $[\,c,d\,]$

$$D = \{\, c = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = d \,\}$$

takové, že $x_0 \in D$, lze snadno definovat spojitou po částech lineární funkci $l(D)$ tak, že platí

$$\frac{l(t_k) - l(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = f(t_{k-1}, l(t_{k-1}))$$

pro všechny dělící body D ležící vpravo od bodu x_0. Vlevo od bodu x_0 sestrojíme funkci $l(D)$ tak, aby splňovala podobnou podmínku

$$\frac{l(t_k) - l(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = f(t_k, l(t_k)) \ ;$$

funkce $l(D)$ sestrojujeme tedy vždy „od bodu x_0“. Ukazuje se, že sestrojíme-li takové funkce $l(D)$ pro všechna popsaná dělení D intervalu $[\,c,d\,]$, lze z tohoto systému funkcí (někdy se nazývají *Eulerovy po částech lineární funkce*) vybrat *stejnoměrně konvergentní* posloupnost $\{l_n\} = \{l_n(D_n)\}$ tak, že

$$l_n \longrightarrow \varphi \quad \text{na} \quad [\,c,d\,] \ ,$$

přičemž funkce φ je řešením rovnice (14.2) s požadovanými vlastnostmi. Poznamenejme, že pro každý bod x intervalu $[\,c,d\,]$ existuje k $\varepsilon > 0$ takové $\delta > 0$, že pro *všechny* funkce $l = l(D)$ platí

$$(y \in [\,c,d\,],\ |x-y| < \delta) \Rightarrow |l(y) - l(x)| < \varepsilon \ ;$$

toto je tzv. *stejná spojitost* všech funkcí $l(D)$. Funkce $l(D)$ jsou *stejně omezené* a *stejně spojité*, a lze proto na ně uplatnit obecnou větu z teorie MP, která existenci takové vybrané konvergentní posloupnosti $\{l_n\}$ na $[\,a,b\,]$ zaručí. Jde vlastně o kritérium kompaktnosti množiny $M \subset \mathcal{C}([\,c,d\,])$, popsané tzv. *Arzelà-Ascoliho větou.* Poznamenejme, že však ještě musíme dokázat, že funkce φ je diferencovatelná a vyhovuje (14.2).

[1] Na základě práce, v níž je obsažena tato věta, získal Giuseppe Peano (1858 – 1932) doktorát. Často se cituje až práce z r. 1890; viz [3], str. 150.

Historická poznámka 14.1.6. Tvrzení vyžaduje krátký komentář. Již v r. 1694 JOHANN BERNOULLI (1667 – 1748) používal metodu *přibližného řešení* takové rovnice. Metoda, kterou používal Euler, je z r. 1768, avšak historicky prvním tvrzením o *existenci a jednoznačnosti* bylo tvrzení, které dokázal LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789 – 1857) r. 1824. Kompaktnost množiny spojitých funkcí na intervalu studovali CESARE ARZELÀ (1847 – 1912) a GIULIO ASCOLI (1843 – 1896), jejich tvrzení je však pouze jednou z možných cest k důkazu výše uvedeného Peanova tvrzení. Viz dále komentář v Historické poznámce 14.1.10.

Uvedená Peanova věta nezaručuje jednoznačnost řešení rovnice (14.2) ani lokálně. Jestliže si čtenář připomene Příklad 9.2.6, snadno nahlédne, že na libovolně malém otevřeném intervalu obsahujícím bod x_0 mohou existovat dvě různá řešení (dokonce i nekonečně mnoho) rovnice (14.2), splňující podmínku (14.3). Popsaná metoda dává i jisté tušení o možné přibližné metodě řešení a je zdrojem zajímavé interpretace úlohy. Funkce f představuje jakýsi podivný „kompas“, podle něhož máme projít množinou G tak, aby trajektorie našeho pohybu prošla bodem $[x_0, y_0]$.

Pro naši potřebu je důležitá věta, v níž se o funkci f předpokládá více a která dává navíc i (lokální) jednoznačnost řešení popsané počáteční úlohy.

Věta 14.1.7 (Picard 1890, Lindelöf 1894). *Nechť $\delta > 0$ a nechť*

$$I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \ .$$

Předpokládejme, že v rovnici (14.2)*, tj. rovnici*

$$y' = f(x, y) \ ,$$

je funkce f spojitá v intervalu I a že existuje kladné číslo K takové, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a pro všechna $y_1, y_2 \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ platí

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

(stručněji říkáme, že $f(x, \cdot)$ jsou pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (stejně) lipschitzovské v proměnné y v $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$). Potom platí:

(a) *Existuje interval (c, d) a řešení φ rovnice* (14.2) *na intervalu (c, d) takové, že je $x_0 \in (c, d)$ a platí $\varphi(x_0) = y_0$, tj. řešení vyhovuje* počáteční podmínce (14.3).

(b) *Jestliže řešení φ_1, φ_2 splňují podmínku* (14.3)*, shodují se v okolí bodu x_0.*

Důkaz. Nejprve převedeme řešení popsané úlohy na řešení jiné úlohy (místo diferenciální rovnice budeme pracovat s *integrální* rovnicí). Zvolíme interval $[c, d]$ tak, aby současně platilo $x_0 \in (c, d)$, $d - c < \delta$ a $d - c < 1/2K$. Smysl této speciální volby bude zřejmý dále.

Řešit rovnici (14.2) s podmínkou (14.3) je ekvivalentní s problémem řešit rovnici

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t \ . \tag{14.4}$$

Skutečně, je-li $x_0 \in (c, d)$ a φ spojitá funkce na intervalu $[\,c, d\,]$, pro kterou platí (14.4) pro všechna $x \in [\,c, d\,]$, pak zřejmě $\varphi(x_0) = y_0$ a podle Věty 10.2.36 o derivování integrálu podle horní meze platí též (14.2). Je-li naopak φ řešením počáteční úlohy (14.2), (14.3), platí podle tvrzení o primitivních funkcích i (14.4). Všimneme si, že pro $\varphi \in \mathcal{C}([\,c, d\,])$ je pravá strana rovnosti (14.4) spojitá funkce na $[\,c, d\,]$.

Nyní aplikujeme *lokálně* Banachovu větu o pevném bodu v prostoru $\mathcal{C}([\,c, d\,])$ se suprémovou normou $\|\cdot\|_\infty$. Víme, že v I je splněna výše uvedená lipschitzovská podmínka

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le K|y_1 - y_2|$$

pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $y_1, y_2 \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. Uvažujme (14.4) jako operátor na $\mathcal{C}([\,c, d\,])$, Pro operátor A

$$A\varphi(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t \ , \quad x \in [\,c, d\,] \ ,$$

který zobrazuje prostor $\mathcal{C}([\,c, d\,])$ do $\mathcal{C}([\,c, d\,])$, platí pro každé $x \in [\,c, d\,]$ odhady

$$\begin{aligned} |A\varphi(x) - A\psi(x)| = {} & \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\,\mathrm{d}t \right| \le \\ & \le \int_{x_0}^{x} \Big| f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) \Big|\,\mathrm{d}t \le \int_{x_0}^{x} K\,|\varphi(t) - \psi(t)|\,\mathrm{d}t \le \\ & \le K \int_{x_0}^{x} \|\varphi - \psi\|_\infty\,\mathrm{d}t \le K(d-c)\|\varphi - \psi\|_\infty \le (1/2)\|\varphi - \psi\|_\infty \ . \end{aligned}$$

Přejdeme-li ještě vlevo k suprému přes všechna $x \in [\,c, d\,]$, dostaneme

$$\|A\varphi - A\psi\|_\infty \le (1/2)\|\varphi - \psi\|_\infty \ ,$$

kde na obou stranách je „suprémová“ norma v úplném prostoru $\mathcal{C}([\,c, d\,])$. Volbou intervalu $[\,c, d\,]$ dostatečně malé délky jsme dosáhli toho, že A je kontrakce na $\mathcal{C}([\,c, d\,])$ a lze tedy použít Banachovu větu.

Pro pevný bod φ operátoru A na prostoru $\mathcal{C}([\,c, d\,])$ platí $\varphi \in \mathcal{C}([\,c, d\,])$ a

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t \ , \qquad x \in (c, d) \ ,$$

čímž je důkaz tvrzení dokončen (funkce φ je dokonce z prostoru $\mathcal{C}^1((c, d))$, neboť vyhovuje předcházející integrální rovnici). Banachova věta dává zároveň jednoznačnost řešení φ rovnice (14.4), a tedy i počáteční úlohy z Věty 14.1.7. $\square$

Případ složitější rovnice

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) ,$$

můžeme celkem snadno zjednodušit. Položíme-li

$$y(x) = y_1(x) , \quad y'(x) = y_2(x) , \dots , \quad y^{(n-1)}(x) = y_n(x) ,$$

přejdeme k ekvivalentní úloze řešit soustavu rovnic

$$y_1' = y_2 , \quad y_2' = y_3 , \dots , \quad y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) .$$

Bez zjevného zvýšení obtížnosti lze vyšetřovat soustavu tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) , \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) , \\ &\dots , \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) . \end{aligned}$$

Stručnější zápis využívá vektorového označení. Vektorová funkce

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

zobrazuje interval $[a, b]$ na reálné ose do $\mathbb{R}^n$. Funkce $\mathbf{f} = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ je definována na oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a zobrazuje G do $\mathbb{R}^n$. Pro funkci $\mathbf{g} = (g^1, g^2, \dots, g^n)$ na $[a, b]$ se spojitými složkami g^k definujeme

$$\|\mathbf{g}\|_\infty = \max\{\sup\{g^k(t);\, t \in [a, b]\},\, k = 1, \dots, n\} .$$

Množinu všech takových funkcí označíme ${}^n\mathcal{C}([a, b])$; jde tedy vlastně o kartézský součin n prostorů $\mathcal{C}([a, b])$.

Zformulujme větu obdobnou předchozí větě:

Věta 14.1.8. *Nechť $\delta > 0$ a nechť*

$$I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0^1 - \delta, y_0^1 + \delta) \times \dots \times (y_0^n - \delta, y_0^n + \delta) .$$

Nechť $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ a $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^n)$ [2]. Předpokládejme, že v rovnici

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) , \tag{14.5}$$

je zobrazení $\mathbf{f}$ spojité v intervalu I. Dále předpokládáme, že existuje kladné číslo K takové, že pro všechna $(x, \mathbf{y}_1), (x, \mathbf{y_2}) \in I$ platí

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)\|_\infty \le K\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_\infty ,$$

takže $\mathbf{f}$ je (stejně) lipschitzovská vůči $\mathbf{y}$ pro všechna x v $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Potom

[2] Jde tedy o *systém* celkem o n rovnicích $(y^1)' = f^1(x, y^1, \dots, y^n)$, •. Složky $\mathbf{f}$ i $\mathbf{y}$ jsou značeny pomocí horních indexů.

(a) *existuje řešení* Φ *rovnice* (14.5) *na intervalu* (c, d) *obsahujícím* x_0 *takové, že platí*

$$\Phi(x_0) = \mathbf{y}_0\,, \quad (\textit{po složkách:} \quad \varphi^1(x_0) = y_1^0, \bullet)\ , \tag{14.6}$$

tj. řešení Φ *vyhovuje předcházející počáteční podmínce;*

(b) *řešení je určeno lokálně jednoznačně, tj. každá dvě taková řešení splývají na nějakém okolí* x_0.

Důkaz. Prakticky lze „okopírovat“ postup důkazu předcházející věty, proto budeme stručnější. Z důvodů snazšího chápání nebudeme důsledně užívat vektorového označení. Nejprve vhodně zvolíme interval $[\,c, d\,]$ a přejdeme k ekvivalentní integrální formulaci úlohy

$$\varphi^1(x) = y_0^1 + \int_{x_0}^{x} f^1(t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))\,\mathrm{d}t\ ,\ \bullet.$$

Dále definujeme operátor A na prostoru ${}^n\mathcal{C}([\,c, d\,])$ analogicky jako v předcházejícím důkazu, tj.

$$A\Phi(x) := \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \Phi(t))\,\mathrm{d}t\ , \quad x \in [\,c, d\,]\ . \tag{14.7}$$

Interval $[\,c, d\,]$ jsme zvolili opět o dostatečně malé délce tak, abychom dosáhli toho že A bude kontrakce na prostoru ${}^n\mathcal{C}([\,c, d\,])$. Pro každé $x \in [\,c, d\,]$ platí (pozor, normy se v průběhu důkazu mění)

$$\begin{aligned}\|A\Phi(x) - A\Psi(x)\| &= \|\int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \Phi(t))\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \Psi(t))\,\mathrm{d}t\,\| \le \\ &\le \int_{x_0}^{x} \|\mathbf{f}(t, \Phi(t)) - \mathbf{f}(t, \Psi(t))\|\,\mathrm{d}t \le \int_{x_0}^{x} K\|\Phi(t) - \Psi(t)\|\,\mathrm{d}t \le \\ &\le K\int_{x_0}^{x} \|\Phi - \Psi\|\,\mathrm{d}t \le K \cdot (d - c)\|\Phi - \Psi\|\ .\end{aligned}$$

Po úpravě levé strany, podobně jako v důkazu, který jsme již dělali, volíme interval $[\,c, d\,]$ tak, že posléze dostaneme

$$\|A\Phi - A\Psi\| \le (1/2)\|\Phi - \Psi\|\ .$$

Zbytek je zřejmý. □

Jako důsledek předcházející věty dostaneme větu pro počáteční úlohu pro rovnici n-tého řádu.

Věta 14.1.9. *Nechť* $\delta > 0$ *a nechť*

$$I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0^1 - \delta, y_0^1 + \delta) \times \cdots \times (y_0^n - \delta, y_0^n + \delta)\ .$$

Nechť dále je funkce f v rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{14.8}$$

spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a (stejně) lipschitzovská pro každé x vzhledem k posledním n proměnným. Potom platí:

(a) *Existuje řešení φ rovnice* (14.8) *takové, že je*

$$\varphi(x_0) = y_0 \ , \quad \varphi'(x_0) = y_1 \ , \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \ ,$$

tj. toto řešení vyhovuje počáteční podmínce.

(b) *Jestliže dvě řešení φ_1, φ_2 splňují obě počáteční podmínku, shodují se na nějakém okolí bodu x_0.*

Historická poznámka 14.1.10. Cauchy dokázal Větu 14.1.7 za předpokladu, že funkce $f(x, \cdot)$ má pro každé x spojitou derivaci a teprve později r. 1876 Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 – 1903) oslabil tuto podmínku do formy, kterou jsme použili v této větě my. Jestliže generujeme posloupnost postupných aproximací $\Phi_{n+1} = A(\Phi_n)$, která je skryta v důkazu Banachovy věty o pevném bodu, nazývá se tato posloupnost *Picardova posloupnost postupných aproximací.* K důkazu věty ji použil Charles Émile Picard (1856 – 1941) r. 1890. Tento nástroj byl však již používán dříve. Picardův důkaz dále zlepšil r. 1894 Ernst Leonard Lindelöf (1870 – 1946). Viz [3], str. 146.

Vzniká přirozená otázka, zda existuje nějaké *maximální* řešení, které vyhovuje (14.3). Odpověď na tuto otázku je kladná. Řešení, jejichž existenci jsme dokázali, se totiž „dají slepit“.

Věta 14.1.11. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je oblast a nechť funkce $\mathbf{f}$ v rovnici*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \ , \tag{14.5}$$

je v G spojitá a lokálně lipschitzovská vůči $\mathbf{y}$. Potom

(a) *existuje interval (c, d) obsahující bod x_0 a na něm definované maximální řešení Φ rovnice* (14.5) *takové, že platí*

$$\Phi(x_0) = \mathbf{y}_0 \ , \tag{k13-5}$$

tj. toto maximální řešení Φ vyhovuje počáteční podmínce (14.6)*;*

(b) *toto maximální řešení je určeno jednoznačně.*

Poznámka 14.1.12. Než předcházející větu dokážeme, dodejme na vysvětlenou, že předpokládáme, že ke každému bodu $[x, \mathbf{y}] \in \mathbf{G}$ existuje interval $I \subset G$, který tento bod obsahuje a na kterém jsou splněny pro tento bod a I předpoklady Věty 14.1.8. Protože v takovém bodě se nemůže řešení „štěpit“, je tvrzení intuitivně zřejmé.

Důkaz Věty 14.1.11. Nechť Φ_1 a Φ_2 jsou dvě řešení (14.5), definovaná na intervalech (c_1, d_1) a (c_2, d_2), obsahujících bod x_0, a nechť platí $\Phi_1(x_0) = \Phi_2(x_0) = y_0$. Označme

$$(c, d) := (c_1, d_1) \cap (c_2, d_2) \ , \quad G = \{x \in (c, d);\ \Phi_1(x) = \Phi_2(x)\} \ .$$

Potom $x_0 \in G$, a tedy $G \neq \emptyset$. Použijeme nyní Větu 13.5.4, podle které je interval souvislou množinou. Množina G je uzavřená, neboť pro množinu všech hromadných bodů G' platí s ohledem na spojitost Φ_1, Φ_2 inkluze $G' \subset G$. Je však i otevřená v (a, b), neboť podle věty o lokální jednoznačnosti z $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$ plyne $\Phi_1 = \Phi_2$ na nějakém okolí $\mathcal{U}(x)$ bodu x. Proto je $G = (a, b)$ a lze tedy definovat Φ na sjednocení obou intervalů tak, že položíme

$$\Phi := \Phi_1 \ \text{na} \ (c_1, d_1) \ , \quad \Phi := \Phi_2 \ \text{na} \ (c_2, d_2) \ .$$

Avšak stejným způsobem lze definovat maximální řešení $\Phi_{\max}$ pomocí množiny všech řešení $\{\Phi_\alpha;\ \alpha \in A\}$, splňujících podmínku $\Phi_\alpha(x_0) = y_0$. Je-li (c_α, d_α) definiční obor řešení Φ_α, platí tedy $x_0 \in (c_\alpha, d_\alpha)$. Položíme pro všechna $\alpha \in A$

$$\Phi_{\max} := \Phi_\alpha \ \text{na} \ (c_\alpha, d_\alpha) \ ;$$

definice je dle předchozí úvahy korektní, $\Phi_{\max}$ je hledané maximální řešení, přičemž $c := \inf\{c_\alpha;\ \alpha \in A\}$ a $d := \sup\{d_\alpha;\ \alpha \in A\}$. □

Poznámka 14.1.13. V Příkladu 9.2.6 lze za G z předcházející Věty 14.1.11 volit oblasti $G_1 := \{[x, y];\ y > 0\}$ nebo $G_2 := \{[x, y];\ y < 0\}$, neboť to jsou *maximální* oblasti, v nichž jsou splněny předpoklady Věty 14.1.11. Čtenář by si měl znovu uvědomit, že definiční obor (interval) každého maximálního řešení v G_1 závisí na počáteční podmínce, tj. bodu $[x_0, y_0]$, který v G_1 zvolíme.

Je-li G množina z Věty 14.1.11, pak by se čtenář mohl domnívat, že pro každé maximální řešení Φ s definičním oborem (c, d) existuje $\lim_{x \to d-} \Phi(x)$ a že „graf maximálního řešení končí v nějakém bodě hranice G“. Platí totiž jen mnohem méně: označíme-li $\mathrm{Gr}(\Phi)$ graf Φ, platí

$$\mathrm{dist}(\mathrm{Gr}(\Phi), \complement G) = 0 \ ,$$

tj. graf Φ „se neomezeně blíží k doplňku množiny G“.

Protože je $((1/x)\sin(1/x))' = (-1/x^2)((1/x)\cos(1/x) + \sin(1/x)$, má rovnice

$$y' = (-1/x^2)((1/x)\cos(1/x) + \sin(1/x)$$

v $G = \{[x, y];\ x > 0\}$ maximální řešení

$$\varphi(x) = (1/x)\sin(1/x) \ , \quad x \in (0, \infty) \ ,$$

které se však k doplňku G „blíží“ velmi komplikovaným způsobem.

Jako důsledek Věty 14.1.11 dostaneme tvrzení o existenci maximálního řešení pro rovnice n-tého řádu.

Důsledek 14.1.14. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je oblast a nechť funkce f v rovnici*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{14.9}$$

je v G spojitá a lokálně lipschitzovská vůči posledním n proměnným. Potom

(a) *existuje interval (c,d) obsahující bod x_0 a na (c,d) definované maximální řešení φ rovnice* (14.9) *takové, že platí*

$$\varphi(x_0) = y_0 \ , \quad \varphi'(x_0) = y_1 \ , \quad \dots , \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \ .$$

tj. toto maximální řešení φ vyhovuje předcházejícím počátečním podmínkám;

(b) *toto maximální řešení φ je určeno jednoznačně.*

14.2 Lineární diferenciální rovnice

V dalším se budeme zabývat *lineární diferenciální rovnicí* řádu n. Čtenáři doporučujeme si připomenout jednoduchá tvrzení z Kapitoly 9. Budeme pracovat s pevně zvoleným intervalem (c,d); *funkce* $a_1, \dots, a_n, b$ jsou spojité funkce na (c,d). Vyšetřovaná rovnice je tvaru (dále však proměnnou x budeme vynechávat)

$$L(y) := y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x) \ , \quad x \in (c,d) \ . \tag{14.10}$$

Stejně jako v případě rovnice prvního řádu i zde snadno nahlédneme, že řešením rovnice (14.10) je funkce z prostoru $\mathcal{C}^{(n)}((c,d))$. Terminologie souvisí s tím, že levá strana rovnice (14.10) je lineární diferenciální operátor na prostoru $\mathcal{C}^{(n)}((c,d))$: je zřejmé, že pro y, y_1, y_2 z tohoto prostoru a $k \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) =& L(y_1) + L(y_2) \ , \\ L(ky) =& kL(y) \ . \end{aligned}$$

Kromě rovnice (14.10) budeme ještě uvažovat rovnici

$$L(y) = 0 \ , \tag{14.11}$$

což je *přiřazená rovnice k* (14.10) *s nulovou pravou stranou*; někdy se užívá i názvu *přiřazená homogenní rovnice*. Náš postup je založen stejně jako v případě rovnice 1. řádu opět na myšlence nalézt všechna řešení rovnice (14.10) pomocí všech řešení rovnice (14.11).

Funkce $a_1, \dots, a_n$ jsou spojité na (c,d) a tedy i lokálně omezené, proto je funkce na pravé straně rovnosti

$$y^{(n)}(x) = b(x) - a_1(x)y^{(n-1)}(x) - \dots - a_n(x)y(x)$$

lokálně lipschitzovská vzhledem k proměnným $y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Z výše uvedeného Důsledku 14.1.14 proto plyne, že maximální řešení rovnice (14.10) jsou definována na intervalu (c,d) a jsou jednoznačně určena počátečními podmínkami. Poznamenejme, že pro rovnici 1. řádu jsme maximální řešení jednoduše přímo spočetli.

Zcela analogicky jako v případě rovnice prvního řádu se dokáží následující jednoduchá tvrzení (důkazy vynecháme):

Lemma 14.2.1. *Je-li y_1 řešení rovnice* (14.10) *na (γ,δ) a y_2 řešením rovnice* (14.11) *na (γ,δ), pak je součet y_1+y_2 řešením rovnice* (14.10) *na (γ,δ). Speciálně to platí pro maximální řešení.*

Lemma 14.2.2. *Jsou-li y_1, y_2 dvě řešení rovnice* (14.10) *na intervalu (γ,δ), pak je jejich rozdíl y_1-y_2 řešením rovnice* (14.11) *na (γ,δ). Speciálně to opět platí pro maximální řešení.*

Věta 14.2.3. *Obecné řešení rovnice* (14.10) *obdržíme jako součet jednoho maximálního řešení rovnice* (14.10) *a obecného řešení rovnice* (14.11). *Jinak řečeno, je-li y_1 maximálním řešením rovnice* (14.10), *pak pro každé maximální řešení y rovnice* (14.10) *existuje maximální řešení y_2 rovnice* (14.11) *tak, že platí*

$$y = y_1 + y_2 \ .$$

Tvrzení 14.2.4. *Řešení rovnice* (14.11) *tvoří lineární prostor.*

Protože nás tento lineární prostor (podprostor $\mathcal{C}^{(n)}((c,d))$) zajímá, budeme nejprve studovat lineární nezávislost diferencovatelných funkcí.

Definice 14.2.5. Nechť $y_1,\dots,y_n \in \mathcal{C}^{(n-1)}((c,d))$. Potom funkci definovanou na (c,d) předpisem

$$W[y_1,\dots,y_n](x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x), & \dots, & y_n(x) \\ y_1'(x), & & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x), & \dots, & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \ , \ x \in (c,d) \ ,$$

nazýváme podle objevitele Josefa Marii Wronského (1776 –1853) *Wronského determinantem* funkcí $y_1,\dots,y_n$, resp. krátce, avšak nespisovně *wronskiánem* funkcí $y_1,\dots,y_n$.

Tvrzení 14.2.6. *Nechť $y_1,\dots,y_n$ jsou lineárně závislé funkce z $\mathcal{C}^{(n-1)}((c,d))$. Potom*

$$W[y_1,\dots,y_n](x) = 0 \ , \ x \in (c,d) \ ,$$

tj. wronskián těchto funkcí je roven identicky 0.

Důkaz. Pokud jsou $y_1, \ldots, y_n$ lineárně závislé, existují konstanty $c_1, \ldots, c_n$, které nejsou vesměs rovny 0 tak, že platí

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = 0$$

(jde o rovnost funkcí na (c,d) !). Zderivujeme tuto rovnost $(n-1)$-krát, čímž dostaneme pro všechna $x \in (c,d)$

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x) & + & \ldots & + & c_n y_n(x) & = & 0 \ , \\ c_1 y_1'(x) & + & \ldots & + & c_n y_n'(x) & = & 0 \ , \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) & + & \ldots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \ . \end{array} \tag{14.12}$$

Tato soustava lineárních rovnic musí mít netriviální řešení, dokonce nezávislé na x. Odtud ale plyne, že matice soustavy musí být singulární pro každé $x \in (c,d)$, a proto platí

$$W[\,y_1, \ldots, y_n\,](x) = 0 \ , \quad x \in (c,d) \ .$$

Tím je důkaz dokončen. □

Připomínáme, že jsme dokázali obecné tvrzení o existenci a jednoznačnosti maximálního řešení, z něhož pro lineární rovnici n-tého řádu plyne pro každou počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \ , \ldots \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \ , \quad x_0 \in (c,d) \ ,$$

určenou n-ticí čísel $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ existence a jednoznačnost maximálního řešení na intervalu (c,d). Zvolíme-li nyní například

$$\begin{array}{llll} y(x_0) = 1 \ , & y'(x_0) = 0 \ , & \ldots \ , & y^{(n-1)}(x_0) = 0 \ , \\ y(x_0) = 0 \ , & y'(x_0) = 1 \ , & \ldots \ , & y^{(n-1)}(x_0) = 0 \ , \\ \quad \vdots & \quad \vdots & & \quad \vdots \\ y(x_0) = 0 \ , & y'(x_0) = 0 \ , & \ldots \ , & y^{(n-1)}(x_0) = 1 \ , \end{array} \tag{14.13}$$

pak tomuto systému n počátečních podmínek odpovídá n lineárně nezávislých řešení rovnice (14.11).

Tvrzení 14.2.7. *Nechť $y_1, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislé funkce z $\mathcal{C}^{(n-1)}((c,d))$, které jsou* řešeními rovnice (14.11). *Potom platí pro všechna $x \in (c,d)$*

$$W[\,y_1, \ldots, y_n\,](x) \neq 0 \ .$$

Důkaz. Nechť existuje nějaké $x_0 \in (c,d)$ tak, že

$$W[\,y_1, \ldots, y_n\,](x_0) = 0 \ .$$

Potom má soustava (14.12) pro $x = x_0$ netriviální řešení $(c_1, \dots, c_n)$. Položme

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = y^* \ .$$

Zřejmě je $y^*(x_0) = 0$. Jestliže však jsou $y_1, \dots, y_n$ řešení (14.11), je i y^* řešením (14.11) a

$$y^*(x_0) = 0 \ , \ (y^*)'(x_0) = 0 \ , \dots \ , (y^*)^{(n-1)}(x_0) = 0 \ ;$$

podle věty o jednoznačnosti je $y^*(x) \equiv 0$, tj. y^* je nulové řešení. Je tedy

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \equiv 0$$

a tato rovnost platí všude v (c, d). Odtud plyne, že $W[\,y_1, \dots, y_n\,]$ nemůže nabývat hodnoty 0 v žádném bodě $x \in (c, d)$, pokud jsou řešení $y_1, \dots, y_n$ nezávislá. □

Poznámka 14.2.8. Není-li wronskián funkcí $y_1, \dots, y_n$ z $\mathcal{C}^{(n-1)}((c,d))$ identicky roven 0, jsou tyto funkce lineárně nezávislé, což plyne z již dříve dokázaného tvrzení. Předchozí tvrzení ukazuje, že pro $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{(n)}((c,d))$, které *jsou řešeními* (14.11), nastává právě jedna z možností:

1. $W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) = 0$ pro všechna $x \in (c, d)$, nebo
2. $W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) \neq 0$ pro všechna $x \in (c, d)$.

Poznámka 14.2.9. Tvrzení podstatně závisí na větě o jednoznačnosti: jsou-li $y_1, \dots, y_n$ pouze (dostatečně hladké) funkce, pro které je wronskián nulový, *neplyne odtud* jejich lineární závislost.

Dimenze prostoru všech řešení (14.11) je právě n. Víme již, jak např. pomocí (14.13) takových n řešení nalézt. Ty však tvoří bázi: jestliže je y libovolné řešení $L(y) = 0$, pak zvolme $x_0 \in (c, d)$ a určeme

$$y(x_0) = y_0 \ , \ y'(x_0) = y_1 \ , \dots \ , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \ ;$$

Nyní ze soustavy rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n(x_0) & = & y_0 \ , \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{array}$$

určíme (jednoznačně) koeficienty $c_1, \dots, c_n$, neboť matice soustavy je regulární. Avšak pak platí

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

všude v (c, d), neboť levá i pravá strana jsou řešeními (14.11), která mají shodné počáteční podmínky v bodě x_0.

Rovnice (14.11) má n lineárně nezávislých řešení, které tvoří bázi prostoru všech řešení (14.11). Je vhodné si uvědomit, že pouze víme, že tato řešení *existují*, ale nemáme žádnou praktickou metodu, jak je spočítat.

Definice 14.2.10. Každá n-tice lineárně nezávislých řešení (14.11) se nazývá *fundamentální systém řešení.*

Řešení rovnice (14.11) jsme převedli na úlohu nalézt fundamentální systém řešení (14.11); potom lze *každé řešení* (14.11) vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí z tohoto fundamentálního systému. Obecné řešení (14.11) je tedy tvaru

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \ ,$$

kde $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tvoří fundamentální systém řešení (14.11) a $c_1, \ldots, c_n$ jsou libovolné (reálné) konstanty.

Nyní při určení obecného řešení rovnice (14.10) postupujeme, jako v případě rovnice 1. řádu, podle tvrzení z Lemmat 14.2.1, 14.2.2 a Věty 14.2.3. Odtud plyne praktický návod: Obecné řešení rovnice (14.10) je součtem obecného řešení rovnice (14.11) a jednoho libovolně zvoleného řešení rovnice (14.10); tomuto řešení se opět říká *partikulární řešení.*

Avšak i nalezení obecného řešení rovnice (14.11) není obecně lehké. Umíme to např. pro rovnice prvního řádu (úloha se redukuje na hledání vhodné primitivní funkce). Podaří-li se nám nějaké řešení rovnice (14.10) uhodnout, lze řešení někdy převést na řešení rovnice nižšího řádu, někdy je rovnice (14.11) speciálního tvaru a pak se dá díky tomu rovněž vyřešit. Tyto metody nebudeme podrobněji rozebírat a čtenáře, pokud by tyto metody chtěl naučit, odkazujeme např. na [1], [5], [6] a další učebnice.

Podaří-li se překlenout problém nalezení obecného řešení rovnice (14.11), existuje obecná metoda, která říká, jak pak nalézt potřebné partikulární řešení. Předpokládejme, že se toto řešení dá vyjádřit ve tvaru

$$y = c_1(x) y_1(x) + \cdots + c_n(x) y_n(x) \ ,$$

kde $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ jsou funkce. Je to lineární kombinace fundamentálního systému řešení s koeficienty, které jsou *funkcemi* na (c, d).

Historická poznámka 14.2.11. Metoda, kterou vyložíme, se objevuje v jednoduché verzi v souvislosti se studiem speciální rovnice 2. řádu porvé u LEONHARDA EULERA (1707 – 1783) r. 1739. V obecnější podobě ji při systematickém studiu lineárních diferenciálních rovnic (s nekonstantními koeficienty) použil později JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813); ten se patrně inspiroval staršími metodami výpočtů v astronomii. Viz [3].

Provedeme následující výpočet: derivujeme y a ve vyjádření y' položme součet členů obsahujících $c'_1, \ldots, c'_n$ roven 0; pak počítejme y'' a postupujme obdobně, atd. Klademe výrazy ve druhé až předposlední rovnici zcela vpravo, obsahující derivace $c'_1, \ldots, c'_n$, vždy rovny 0, čímž dostaneme $n - 1$ rovnic pro neznámé

$c'_1, \dots, c'_n$. Formální úprava dává dobrou představu o podstatě věci, pro stručnost vynecháváme proměnnou x:

$$\begin{array}{lclclclclcl}
y & = & c_1 y_1 & + \cdots + & c_n y_n \,, & & & & & & \\
y' & = & c_1 y'_1 & + \cdots + & c_n y'_n & + & c'_1 y_1 & + \cdots + & c'_n y_n \,, \\
y'' & = & c_1 y''_1 & + \cdots + & c_n y''_n & + & c'_1 y'_1 & + \cdots + & c'_n y'_n \,, \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y^{(n-1)} & = & c_1 y_1^{(n-1)} & + \cdots + & c_n y_n^{(n-1)} & + & c'_1 y_1^{(n-2)} & + \cdots + & c'_n y_n^{(n-2)} \,, \\
y^{(n)} & = & c_1 y_1^{(n)} & + \cdots + & c_n y_n^{(n)} & + & c'_1 y_1^{(n-1)} & + \cdots + & c'_n y_n^{(n-1)} \,.
\end{array}$$

Upravme nalezených $n+1$ rovnic tak, že vynásobíme prvou rovnici funkcí a_n, druhou rovnici funkcí a_{n-1} atd. Předposlední rovnici násobíme funkcí a_1. Všechny takto získané rovnice včetně poslední neupravované sečteme. Protože $y_1, \dots, y_n$ jsou řešeními (14.11), dostáváme po snadné úpravě s přihlédnutím k (14.10)

$$c_1 L(y_1) + \cdots + c_n L(y_n) + c'_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + c'_n y^{(n-1)} = b \,.$$

Prvých n sčítanců se zřejmě anuluje; dostaneme tak poslední, tj. n-tou rovnici

$$c'_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + c'_n y_n^{(n-1)} = b \,.$$

Nalezená soustava

$$\begin{array}{lclcl}
c'_1 y_1 & + \cdots + & c'_n y_n & = & 0 \,, \\
c'_1 y'_1 & + \cdots + & c'_n y'_n & = & 0 \,, \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
c'_1 y_1^{(n-1)} & + \cdots + & c'_n y_n^{(n-1)} & = & b \,,
\end{array}$$

pro neznámé $c'_1, \dots, c'_n$ má regulární matici, proto se problém redukuje na nalezení n primitivních funkcí, čímž získáme potřebné partikulární řešení.

Popsaná metoda se nazývá *metoda variace konstant*. Její aplikace na konkrétní případy může být velmi pracná, zejména pokud ji provádíme „ručně“.

Ve speciálním případě rovnice (14.10), resp. (14.11), kdy koeficienty $a_1, \dots, a_n$ jsou *konstantní* funkce na (c, d), můžeme převést úlohu nalézt fundamentální systém řešení rovnice (14.11) na ryze algebraickou úlohu. Naším cílem je však najít pro případ takové rovnice (14.11) s koeficienty $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ opět *reálné funkce* na (c, d), tvořící fundamentální systém řešení (14.11). Předpokládejme, že rovnice (14.11) má řešení tvaru

$$y(x) = e^{\alpha x} \,, \quad x \in (c, d) \,, \tag{14.14}$$

a pokusme se nalézt podmínky omezující volbu takových α. Po zderivování a dosazení do (14.11) dostaneme

$$e^{\alpha x} \left(\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_n \alpha^0 \right) = 0 \,.$$

Stačí tedy nalézt $\alpha \in \mathbb{R}$, které je kořenem tzv. *charakteristické rovnice* příslušné k (14.11)

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \ .$$

a máme jedno (reálné) řešení tvaru (14.14).

Avšak rovnice nemusí vůbec *reálné* kořeny mít: základní věta algebry o existenci kořene každé algebraické rovnice tvaru $P(x) = 0$, kde P je polynom stupně $\mathrm{st}(P) \geq 1$, nám jako důsledek dává pro rovnici stupně n, $n \geq 1$, existenci *právě n obecně komplexních kořenů*, počítaných včetně jejich násobnosti.

Vznikají přirozené otázky:

1. Je-li charakteristická rovnice přiřazená operátoru L z rovnice (14.11) tvaru
$$P(\alpha) = 0 \ , \tag{14.15}$$
pak její vícenásobné kořeny dávají pouze jedno „přirozené řešení"; jak lze nalézt celý fundamentální systém řešení rovnice (14.11)?

2. Co dělat s komplexními kořeny rovnice (14.15) v případě, že hledáme *reálný* fundamentální systém (P je polynom s reálnými koeficienty)?

Výsledky jsou průhlednější, interpretujeme-li je z hlediska *komplexních funkcí* reálné proměnné. Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ kořeny (14.15) a jsou-li tyto navzájem různé, jsou funkce

$$e^{\alpha_1 x},\, e^{\alpha_2 x},\, \ldots,\, e^{\alpha_n x}$$

řešeními (14.11) a jsou navzájem nezávislé, tj. tvoří fundamentální systém. Pro jejich wronskián platí

$$W[\, e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}\,] = e^{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \ldots, & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \ ,$$

přičemž determinant vpravo je tzv. *Vandermondův determinant*; jeho hodnota je rovna součinu všech dvojčlenů $(\alpha_j - \alpha_k)$ pro $1 \leq j < k \leq n$, a je tedy nenulová. Jsou-li tyto kořeny vesměs reálné, získáme tak fundamentální systém složený z n reálných funkcí.

Historická poznámka 14.2.12. V této kapitole používáme mnoha poznatků z algebry. K oblasti studia lineárních rovnic položil základy Gottfried Wilhelm Leibniz (1642 – 1727) pracemi z r. 1678 a r. 1693. Metoda řešení soustav rovnic o dvou, třech a čtyřech neznámých pochází z r. 1729 od Colina Maclaurina (1698 – 1746), byla však publikována po jeho smrti r. 1748. Švýcar Gabriel Cramer (1704 – 1752), po němž se dnes postup (*Cramerovo pravidlo*) nazývá, ho popsal r. 1750. Významným algebraikem byl Alexander-Theophile Charles August Vandermonde (1735 – 1786). Pro práce z oblasti teorie řešitelnosti algebraických rovnic vyšších stupňů bývá označován jako předchůdce Nielse Henrika Abela (1802 – 1829). Nesporně je však tvůrcem *teorie determinantů*, ve které mu náleží řada výsledků.

Má-li polynom v (14.15) *reálné* koeficienty $a_1, \dots, a_n$, pak, jak snadno nahlédneme, s každým kořenem α má též kořen $\overline{\alpha}$ (číslo komplexně sdružené). V tom případě, když některé kořeny charakteristické rovnice nejsou reálné, dostáváme řešení rovnice (14.11), která jsou komplexními funkcemi reálné proměnné. Ta jsou nad $\mathbb{R}$ nezávislá. Je-li $\alpha = \beta + \mathrm{i}\gamma$, jsou řešení tvaru

$$e^{\beta x}(\cos\gamma x + \mathrm{i}\sin\gamma x) \ , \quad e^{\beta x}(\cos\gamma x - \mathrm{i}\sin\gamma x) \ .$$

Přejdeme k jejich vhodným lineárním kombinacím, které dají reálnou a imaginární část:

$$e^{\beta x}\cos\gamma x \ , \quad e^{\beta x}\sin\gamma x \ .$$

Snadno ověříme přímým výpočtem, že jsou to lineárně nezávislé funkce. Z rovnosti

$$c_1 e^{\beta x}\cos\gamma x + c_2 e^{\beta x}\sin\gamma x = 0$$

dostaneme dělením $e^{\beta x} \neq 0$ a pak zderivováním a dělením $\gamma \neq 0$ soustavu

$$\begin{aligned} c_1\cos\gamma x + c_2\sin\gamma x &= 0 \ , \\ -c_1\sin\gamma x + c_2\cos\gamma x &= 0 \ , \end{aligned}$$

která má pouze triviální řešení $c_1 = c_2 = 0$.

Poznámka 14.2.13. Zbývá vyřešit případ vícenásobných kořenů. Motivací je nám úvaha: jsou-li $\alpha_1 \neq \alpha_2$ reálná čísla, která jsou kořeny (14.15), je

$$\frac{e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

rovněž řešení (14.11). Při $\alpha_2 \to \alpha_1$ má zlomek limitu $x e^{\alpha_1 x}$, což nás vede k domněnce, že tato funkce je rovněž řešením (14.11) a že toto řešení je s ostatními „zřejmými“ lineárně nezávislé. Obojí není složité, avšak přeci jen pracnější a *technicky* náročnější. Přitom je pro nás podstatný pouze výsledek.

Tvrzení 14.2.14. *Jsou-li $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ kořeny* (14.15) *s násobností $s_1, \dots, s_k$, pak*

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha_1 x}, & x e^{\alpha_1 x}, & \dots, & x^{s_1-1} e^{\alpha_1 x}, \\ e^{\alpha_2 x}, & x e^{\alpha_2 x}, & \dots, & x^{s_2-1} e^{\alpha_2 x}, \\ & \dots & & \\ e^{\alpha_k x}, & x e^{\alpha_k x}, & \dots, & x^{s_k-1} e^{\alpha_k x}, \end{array} \tag{14.16}$$

tvoří fundamentální systém řešení (14.11) *a je* $s_1 + s_2 + \cdots + s_k = n$. *Eventuálním přechodem k lineárním kombinacím řešení příslušných komplexně sdruženým kořenům lze dosáhnout toho, že vzniklý systém je tvořen reálnými funkcemi, pokud* P *má reálné koeficienty.*

Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v učebnicích teorie obyčejných diferenciálních rovnic, např. v [4], str. 48, Věta 4.1, nebo [5], str. 126, nebo v [6], str. 239 a následující.

Příklad 14.2.15. Pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$y'' - 3y' + 2y = 0\ , \quad \text{resp. zkráceně} \quad L_1(y) = 0\ , \tag{14.17}$$

má její charakteristická rovnice tvar $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Jejími různými kořeny jsou čísla 1 a 2, proto je fundamentální systém řešení tvořen funkcemi e^x a e^{2x} a její obecné řešení obvykle zapisujeme ve tvaru $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$. Podobně v případě dvojnásobného kořene charakteristické rovnice pro rovnici

$$y'' - 2y' + y = 0\ , \quad \text{resp. zkráceně} \quad L_2(y) = 0\ , \tag{14.18}$$

je tvořen fundamentální systém řešení funkcemi e^x a $x\mathrm{e}^x$. Konečně pro rovnici

$$y'' + 4y' + 13y = 0\ , \quad \text{resp. zkráceně} \quad L_3(y) = 0\ , \tag{14.19}$$

jejíž charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $-2 + 3\mathrm{i}$ a $-2 - 3\mathrm{i}$, dostaneme jim odpovídající komplexní funkce $\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})x}$ a $\mathrm{e}^{(-2-3\mathrm{i})x}$, které mají (až na znaménko) shodnou reálnou a imaginární část $\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x$ a $\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$; tyto funkce rovněž tvoří fundamentální systém řešení rovnice (14.19). Zřejmě je

$$\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{-2x}(\cos 3x + \mathrm{i}\sin 3x)\ .$$

O správnosti těchto jednoduchých tvrzení se lze přesvědčit přímým výpočtem.

Existuje „jednoduchý trik“, který umožňuje snadno, bez použití další integrace, kterou bychom prováděli při užití variace konstant, nalézt partikulární řešení rovnice (14.10) pro speciální pravé strany. Je vhodné si pamatovat jeho „komplexní verzi“, ze které snadno plyne postup v „reálném případě“. *Jestliže je pravá strana* $b(x)$ *rovnice* (14.10) *tvaru*

$$f(x)e^{\lambda x}\ ,$$

kde f *je* polynom stupně r (*s komplexními koeficienty*) *a* $\lambda \in \mathbb{C}$, *pak klademe* $k = 0$ *pro případ* $P(\lambda) \neq 0$, *respektive* $k =$ „násobnost kořenu λ charakteristického polynomu P“, *a rovnice* (14.10)

$$L(y) = f(x)\,e^{\lambda x}$$

má partikulární řešení tvaru

$$x^k\,g(x)\,e^{\lambda x}\ ,$$

kde g je polynom (s komplexními koeficienty) téhož stupně r jako f. Ostatní případy pravých stran s goniometrickými funkcemi apod. jsou v tomto případu zahrnuty, čtenář si je však musí samostatně promyslet. Jelikož při aplikaci metody zároveň ověřujeme, že předpokládané řešení je skutečně partikulárním řešením (14.10), nebudeme tento trik nijak teoreticky zdůvodňovat; viz [5], str. 128, [4], str. 52, nebo [6], str. 244.

Příklad 14.2.16. Navážeme na předcházející Příklad 14.2.15. Řešme rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 3 \ , \quad \text{tj.} \quad L_1(y) = 2x + 3 \ . \tag{14.20}$$

Kořeny příslušné charakteristické rovnice pro (14.17) jsou čísla 1 a 2, pravá strana (14.20) má tvar $\mathrm{e}^{0x}(2x+3)$ a 0 *není* kořenem charakteristické rovnice. Protože $2x+3$ je polynom stupně 1, hledáme partikulární řešení rovnice (14.20) ve tvaru $\mathrm{e}^{0x}(ax+b) = ax+b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Po zderivování a dosazení do (14.20) dostaneme rovnici

$$0 - 3a + 2(ax + b) = 3x + 2 \ ,$$

ze které snadno spočteme $a = 3/2$, $b = 13/4$. Tímto způsobem jsme snadno určili partikulární řešení $y_1 = (3/2)x + 13/4$, a proto obecné řešení (14.20) je tvaru

$$y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + (3/2)x + 13/4 \ .$$

Pro rovnici $L_1(y) = x^2\mathrm{e}^{2x}$ je situace nepatrně složitější, protože 2 je (jednoduchým) kořenem charakteristické rovnice pro (14.17); v tomto případě hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = \mathrm{e}^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx) \ .$$

Konečně pro rovnici $L_1(y) = \mathrm{e}^{x}\cos 2x$ uvážíme, že její pravá strana je reálnou částí funkce $\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}$, a protože komplexní číslo $1 + 2\mathrm{i}$ není kořenem charakteristické rovnice pro (14.17), hledáme v tomto případě partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = a\mathrm{e}^{x}\cos 2x + b\mathrm{e}^{x}\sin 2x \ ,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Podobně pro rovnici $L_2(y) = \mathrm{e}^{x}(x+3)$ hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_1 = \mathrm{e}^{x}(ax^3 + bx^2)$, protože číslo 1 je *dvojnásobným* kořenem charakteristické rovnice pro (14.18). Konečně pro rovnici $L_3(y) = x^2\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$ hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = (ax^3 + bx^2 + cx)\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x + (dx^3 + fx^2 + gx)\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x \ ,$$

kde $a, b, c, d, f, g \in \mathbb{R}$, protože komplexní čísla $-2 \pm 3\mathrm{i}$ jsou jednoduchými kořeny charakteristické rovnice pro (14.19).

Poznamenejme, že je pak již jen záležitostí početní praxe odhadnout, zda je výhodnější použít variaci konstant nebo „hádání“ tvaru řešení. Pokud se zbavíme nutnosti hledat primitivní funkce, neznamená to zdaleka, že jiný postup je časově výhodnější. Podrobný výklad metody nalezne čtenář např. v [5], str. 128. Tam se lze poučit i o metodách řešení soustav lineárních rovnic, které v maticovém tvaru lze zapsat pomocí vztahu

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \ .$$

Příklad 14.2.17. Dostatek praktických příkladů na rovnice vyšších řádů poskytuje např. fyzika. Rovnice

$$y'' + 2ay' + \omega^2 y = 0$$

s $\omega > 0$ a $a = 0$ je rovnice harmonického pohybu. Jejím netriviálním řešením ($c_1^2 + c_2^2 > 0$) jsou funkce

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \ , \quad t \in \mathbb{R} \ . \tag{14.21}$$

Položíme-li $C = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} > 0$, pak existuje $t_0 \in \mathbb{R}$ tak, že je

$$y(t) = C \sin(\omega t + t_0) \ .$$

Jestliže je $a > 0$, pak povaha řešení (14.21) závisí na vztahu ω a a. Řešení popisují tlumené ($0 < a < \omega$) či netlumené ($a > \omega$) kmity; v případě $a = \omega$ nemá řešení periodický charakter. Viz např. [2], str. 133. V tomto skriptu je též ukázáno odvození Keplerových zákonů pro pohyb planet z Newtonových zákonů.

Historické poznámky 14.2.18. Obyčejné diferenciální rovnice (ODE) tvoří významnou partii matematiky, která je vzhledem k četným aplikacím velmi důležitá. Velmi podnětné jsou v tomto směru učebnice [1] a [3]. U vět o existenci a jednoznačnosti jsme se o hlavních protagonistech vývoje již krátce zmínili. Neprobírali jsme typy rovnic, které lze bez větší námahy vyloženým aparátem řešit; viz např. [4]. Také jsme neuváděli složitější tvrzení o chování maximálních řešení.

V komplexním oboru je řešení diferenciálních rovnic rovněž rozvinutou partií matematické analýzy, poznamenejme však alespoň to, že řešení lze např. hledat ve tvaru mocninné řady. Těmito řadami se budeme zabývat v Kapitole 16.

Poznamenejme, že o stáří poznatků z této oblasti svědčí např. to, že pojem *charakteristický polynom* nebo *charakteristická rovnice* pocházejí patrně již od Eulera. Příklad, ukazující možnou nejednoznačnost řešení jsme uvedli již v Kapitole 9. Tzv. Lipschitzovu podmínku zavedl poprvé Lipschitz r. 1864 při vyšetřování Fourierových řad. Poznamenejme konečně, že jedinečným zdrojem poznatků z oblasti historie ODE je kniha [3].

Literatura:

[1] Braun, M.: *Differential equations and their applications. An introduction to applied mathematics*, Springer, New York, 1978. (2nd eddition.)

[2] Černý, I.: *Matematická analýza, 3. část*, Technická univerzita Liberec, Liberec, 1996.

[3] Heuser, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1995. (3. Auflage.)

[4] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno, 1995.

[5] Kurzweil, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL, Praha, 1978.

[6] Stěpanov, V. V.: *Kurs diferenciálních rovnic*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.