Kapitola 15

Stejnoměrná konvergence

15.1 Základní pojmy

Se stejnoměrnou konvergencí jsme se již setkali při práci s metrickými prostory v Kapitolách 12 a 13, když jsme pracovali se suprémovou normou na prostoru $\mathcal{C}([a,b])$. Nyní ji prostudujeme podrobněji. Je vhodné si uvědomit, že je to pojem *náročný* a jeho dokonalé pochopení činilo v prvé polovině minulého století obtíže i špičkovým matematikům. Uvedeme proto větší počet příkladů.

Definice 15.1.1 (Weierstrass 1841). Nechť A je libovolná neprázdná množina a nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, a f jsou funkce na A. Potom říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ *konverguje stejnoměrně na A k funkci f*, jestliže platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\ . \tag{15.1}$$ {n7e1}

Píšeme pak $f_n \rightrightarrows f$ na A. Zápis $f_n \rightrightarrows$ na A znamená, že *existuje* taková f definovaná na A, že $f_n \rightrightarrows f$ na A.

Poznámky 15.1.2. 1. Srovnáním s látkou o MP vidíme, že ekvivalentně lze (15.1) vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|;\ x \in A\} = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_\infty\ ,$$

kde norma značí suprémovou normu v prostoru všech omezených funkcí na A.

2. Jestliže platí $f_n(x) \to f(x)$ pro všechna $x \in A$, pak říkáme, že posloupnost $\{f_n\}$ *konverguje* k f, podrobněji *konverguje bodově* k f. Zapíšeme-li tuto definici pomocí logických symbolů, dostaneme

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\ .$$

Srovnáním s (15.1) vidíme, že se definice bodové a stejnoměrné konvergence liší pouze *pořadím kvantifikátorů*. Zatímco v této definici závisí číslo $k \in \mathbb{N}$ na volbě

$x \in A$, u stejnoměrné konvergence toto $k \in \mathbb{N}$ závisí pouze na čísle $\varepsilon > 0$, avšak nikoli na $x \in A$.

3. Často používáme následujícího pozorování: platí $f_n \rightrightarrows f$ na A, právě když platí $|f_n - f| \rightrightarrows 0$ na A. To využijeme v Tvrzení 15.1.4.

Označení 15.1.3. K odlišení *bodové* a *stejnoměrné* konvergence používáme toto označení: $f_n \to f$ na A znamená $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in A$; tuto konvergenci nazýváme bodovou. Symbol $f_n \rightrightarrows f$ na A a $f_n \rightrightarrows$ na A užíváme pro stejnoměrnou konvergenci.

Nejjednodušším kritériem pro stejnoměrnou konvergenci je patrně následující upravený „přepis definice“:

{*primtvr*}

Tvrzení 15.1.4. *Platí $f_n \rightrightarrows f$ na A, právě když existuje posloupnost nezáporných čísel $\{\alpha_n\}$ tak, že $\alpha_n \to 0$ a*

$$a_n := \sup\{|f_n(t) - f(t)|;\, t \in A\} \le \alpha_n \ .$$

Důkaz. Jestliže $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, pak zřejmě $\limsup a_n = a > 0$ a pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ existují $t_n \in A$ tak, že $|f_n(t_n) - f(t_n)| > a/2 > 0$, tj. $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně k f. Zbytek je zřejmý. $\square$

Poznámka 15.1.5. Zdůrazňujeme, že Tvrzení 15.1.4 v sobě skrývá *ekvivalenci*

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } A, \text{ právě když } a_n \to 0;$$

vedle toho platí ještě užitečná implikace $(\alpha_n \to 0) \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ na A. Význam stejnoměrné konvergence souvisí se záměnou limitních přechodů. Tážeme-li se například, zda limita f konvergentní posloupnosti $\{f_n\}$ spojitých funkcí f_n je spojitá funkce, jde vlastně o to zjistit, zda platí

$$\lim_{x\to y} f(x) = \lim_{x\to y}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{x\to y} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} f_n(y) \ .$$

S touto situací jsme se již jednou setkali při zkoumání úplnosti prostoru $\mathcal{C}([a,b])$ v Lemmatu 13.3.6. Díky tomu, že konvergence v $\mathcal{C}([a,b])$ je vlastně stejnoměrnou konvergencí, byla záměna limitních procesů možná.

Historická poznámka 15.1.6. Jako ukázku si uveďme výklad o stejnoměrné konvergenci řady z učebnice [10] Eduarda Weyra (1852 – 1903) z r. 1902, str. 68.

Dána-li reálná nekonečná řada

{*weyr26*}

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots \ , \tag{15.2}$$

jejíž členy jsou závislé na proměnné x, a konverguje-li tato řada pro všechna x hovící požadavku $a \le x \le b$ čili v intervallu $(a \dots b)$, tu pravíme, že *konverguje v tomto intervallu stejnoměrně* (uniformément, gleichmässig), *možno-li, po vytknutí libovolného kladného čísla ε, udati číslo p takové, aby zbytek řady R_n byl číselně menší než ε, jakmile $n > p$, nechť jest x kterákoli hodnota v daném intervallu* [1].

[1] *Seidel*, Abh. d. Münch. Acad., II. Cl. V., 2. A., p. 380; *Stolz*, Allgem. Arithmetik I., p. 343.

Při stejnoměrné konvergenci možno tedy udati určitý počet členů, jichž součet vystihuje hodnotu řady s libovolnou přesností, nechať jest x jakékoli v daném intervallu.

Jest patrno, že stejnoměrnou konvergenci řady (15.2) možno také definovati faktem, že ku každé kladné hodnotě ε existuje číslo p takové, že pro $n > p$ a pro každé x intervallu platí

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+\nu}| < \varepsilon$$

nechť jest ν jakékoli.

Z definice přímo patrno, že je-li řada (15.2) stejnoměrně konvergentní ve dvou intervallech $(a \dots b)$, $(b \dots c)$, k sobě přiléhajících, jest také stejnoměrně konvergentní v intervallu $(a \dots c)$.

Abychom ukázali, že existují řady konvergující pro každé x daného intervallu, avšak nikoli stejnoměrně, vezměme v úvahu řadu

$$\frac{x}{1 \cdot (x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \cdots + \\ + \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} + \dots;$$

při $x = 0$ vymizí všecky členy a součet řady jest 0; při $x > 0$ pišme, vzhledem k totožnosti

$$\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} = \frac{x}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1} \ ,$$

řadu ve tvaru

$$\Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{x+1}\Big) + \Big(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\Big) + \cdots + \\ + \Big(\frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}\Big) + \dots,$$

z něhož patrno, že součet prvních n členů jest

$$s_n = 1 - \frac{1}{nx+1} \ ,$$

a tedy součet řady $s = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Konverguje tedy řada pro všecky hodnoty x intervallu $(0 \dots b)$, $b > 0$, majíc pro $x = 0$ součet 0 a pro všecky ostatní hodnoty x součet 1.

Při $x > 0$ jest zbytek

$$R_n = s - s_n = \frac{1}{nx+1} \ ,$$

a nelze jej volbou dosti velkého n učiniti $< \varepsilon$ pro každé x intervallu; neboť nechť jest n jakkoli velké, stačí vzíti $x = \frac{1}{n}$, aby $R_n = \frac{1}{2}$ nekleslo pod libovolně malé ε. Řada tedy v intervallu $(0 \dots b)$ konverguje, avšak nikoli stejnoměrně.

Jinak se má věc, vytkneme-li intervall $(a \dots b)$, omezený dvěma čísly $a > 0$, $b > a$; požadavek $R_n < \varepsilon$ vymáhá, aby

$$n > \frac{1-\varepsilon}{x\varepsilon} \ ,$$

a nerovnost ta jest vyplněna pro každé x intervallu $(a \dots b)$, volíme-li $n > (1-\varepsilon)/a\varepsilon$. Jest tedy řada v intervallu $(a \dots b)$ stejnoměrně konvergentní. (Konec ukázky.)

$\{rupr\}$

Příklady 15.1.7. Všechny bezprostředně následující příklady mají jednu věc společnou. Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ vždy konverguje *bodově* na nějakém intervalu v $\mathbb{R}$ k funkci f a určitá vlastnost, jakou je např. spojitost nebo integrovatelnost apod., kterou každá z funkcí f_n má, se na limitní funkci f nepřenese. Příčinou tohoto efektu je fakt, že bodovou konvergencí se „příjemné vlastnosti" funkcí f_n nemusí na limitní funkci f přenést. Doporučujeme čtenáři, aby si studiu následujících příkladů vždy načrtl obrázek, v tomto případě to často může pomoci objasnit podstatu věci.

1. Jestliže definujeme posloupnost funkcí vztahem $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $x \in \mathbb{R}$, pak snadno nahlédneme, že platí

$$f_n(x) \to (\pi/2) \operatorname{sgn} x \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Tato konvergence však není stejnoměrná, neboť

$$\sup \{ |\, (\pi/2) \operatorname{sgn} x - \operatorname{arctg} nx|; \ x \in \mathbb{R}, \ n \geq k\} = \pi/2 \ ,$$

ať zvolíme $k \in \mathbb{N}$ jakkoli. Všimněte si, že však platí

$$f_n'(x) = \frac{n}{1 + n^2 x^2} \to \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \right)'$$

všude v $\mathbb{R}$. Skutečně, pro $x = 0$ je tato limita rovna $+\infty$, v ostatních případech je rovna 0. Později uvidíme, že ani za předpokladu $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu I nemusí obecně platit $f_n' \to f'$ na I.

2. Položme $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$. Potom se lehce ukáže, že platí $f_n(x) \to 0$, $x \in [0, 1]$; stačí vyšetřit (bodovou) konvergenci řady $\sum f_n(x)$. Výpočtem snadno spočteme

$$\int_0^1 x(1 - x^2)^n \, \mathrm{d}x \ = \frac{1}{2n + 2} \ , \quad \text{a tedy} \quad \int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x \ = \frac{n^2}{2n + 2} \to +\infty \ .$$

Za povšimnutí stojí jiný zápis stejné věci:

$$\int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x \ = 0 \neq +\infty = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

3. Zaměníme-li v předchozím příkladu koeficient n^2 ve vyjádření funkcí f_n za n, bude limita integrálů konečná a bude rovna $(1/2)$; závada tedy není „v nekonečnosti". Názornější a tak i zapamatovatelnější příklad sestrojíme takto: nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce f_n definovány tak, že $f_n(t) = 0$ pro $t \in [0, 1] \setminus (1/(n + 1), 1/n)$. V půlícím bodě intervalu $[\,1/(n + 1), 1/n\,]$ definujeme hodnotu f_n např. $2n(n + 1)$ a pak spojitě dodefinujme f_n lineárně na obou zbývajících intervalech. Snadno nahlédneme, že $(\mathcal{R})\!\int_0^1 f_n = 1$ (tak, jak se v „trojúhelníčcích" zkracuje základna, roste zároveň výška a jejich obsah zůstává konstantní) a $f_n \to 0$; nulová funkce má i nulový integrál a je

$$\int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x \ = 0 \neq 1 = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

4. Situace s derivováním je delikátnější, další příklady budou následovat. Definujeme-li

$$f_n(x) = (1/n)\operatorname{arctg} x^n \ , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

pak zřejmě platí nejen $f_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, ale i $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Přesto však

$$f_n'(1) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2} \ ,$$

tedy f_n' nekonvergují k derivaci „limitní nulové funkce" v bodě 1. V bodě -1 nastává jiný efekt, neboť $\lim_{n\to\infty} f_n'(-1)$ dokonce neexistuje. Bližší pohled na derivace f_n' ukazuje, že $f_n'(x) \to 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; na intervalu $(-1, 1)$ platí odhad $|f_n'(x)| \le |x|^{n-1} \to 0$, zatímco pro $|x| > 1$ je $|f_n'(x)| \le (1/|x|)^{n+1} \to 0$. Rozhodně však *neplatí* $f_n' \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.

Poznámka 15.1.8. Již dříve jsme ve Větě 10.1.15 dokázali, že je-li funkce f na intervalu (a, b) derivací (pro jistotu zdůrazněme, že f nabývá pouze hodnot z $\mathbb{R}$), má Darbouxovu vlastnost. Má však ještě i další vlastnost, která ukazuje, že i bodová konvergence spojitých funkcí je důležitá. Označíme-li F pevně zvolenou primitivní funkci k f a definujeme

$$f_n(x) = \begin{cases} n(F(x+1/n) - F(x)) \, , & \text{pro } x \in (a, b-2/n) \, , \\ n(F(b-1/n) - F(b-2/n) \, , & \text{pro } x \in [b-2/n, b) \, , \end{cases}$$

kde v případě $b = +\infty$ užijeme pouze definiční rovnosti z prvního řádku, jsou f_n spojité funkce na (a, b) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \to f$ na (a, b). Je tedy derivace bodovou limitou spojitých funkcí. Protože je f na (a, b) limitou spojitých funkcí, říkáme, že je funkcí z *první Baireovy třídy* na (a, b). Bairovy třídy se definují induktivně: funkce g je z *n-té Baireovy třídy* B_n, je-li bodovou limitou funkcí $g_n \in B_{n-1}$, kde $B_0 = \mathcal{C}$ je tvořena všemi spojitými funkcemi (za označením třídy uvádíme eventuálně interval, na kterém se vše odehrává). Tuto klasifikaci zavedl v práci z r. 1899 René Louis Baire (1874 – 1932).

Obě popsané vlastnosti jsou základními vlastnostmi každé derivace. Proto pro každou derivaci f na (a, b) platí $f \in DB_1(a, b)$, což vyjadřuje, že f má současně Darbouxovu vlastnost a je z $B_1(a, b)$. Je např. známo, že funkce z $DB_1(a, b)$ musí mít v intervalu (a, b) hustou množinu bodů spojitosti; viz např. [3], str. 115. Zároveň je vhodné si uvědomit, co toto tvrzení vypovídá o existenci primitivní funkce: nutnou podmínkou existence primitivní funkce k funkci f na (a, b) je $f \in DB_1(a, b)$.

Není obtížné ukázat, že Riemannova funkce z Příkladu 4.2.9 je z $B_1(0, 1)$, avšak Dirichletova funkce z Příkladu 4.2.8 není prvkem této třídy, neboť je nespojitá *všude* v intervalu $(0, 1)$. Platí však pro ni

$$\delta(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^n, \quad x \in (0, 1) \ ,$$

takže je $\delta \in B_2(0, 1)$; viz např. [3], str. 78.

Definice 15.1.9. Nechť $\sum f_n$ je řada funkcí, které jsou vesměs definovány na množině A. Říkáme, že *řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na A k funkci s*, jestliže částečné součty $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$ konvergují stejnoměrně k s na A.

Označení 15.1.10. Pro stejnoměrnou konvergenci řad užíváme opět symbol $\rightrightarrows$ a popis množiny, k níž se limitní přechod vztahuje. Píšeme tedy např.

$$\sum f_n \rightrightarrows s \text{ na } \mathbb{R} \ ,$$

apod. Při použití symbolu pro stejnoměrnou konvergenci lze limitní funkci vynechat a psát

$$\sum f_n \rightrightarrows \text{ na } \mathbb{R} \text{ jako u } f_n \rightrightarrows \text{ na } [0,1] \ , \text{ apod.} \ ,$$

existuje-li funkce, k níž řada stejnoměrně konverguje.

Příklady 15.1.11. 1. Snadno nahlédneme, že při $n \to \infty$ platí $x^n \to 0$ pro $x \in [0,1)$ a $x^n \to 1$ pro $x = 1$. Proto nemůže platit $x^n \rightrightarrows$ na $[\,0,1\,]$, neboť limitované funkce jsou vesměs spojité a limitní funkce *není spojitá*. Pro všechna q, $0 < q < 1$, platí na $[\,0,q\,]$ odhad $x^n \leq q^n \to 0$, a tedy $x^n \rightrightarrows 0$ na $[\,0,q\,]$; viz Lemma 13.3.6, nebo Věta 15.3.1.

2. Řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, kde

$$f_k(x) = (1-x)x^n, \quad x \in [\,0,1\,] \ ,$$

nekonverguje stejnoměrně na $[\,0,1\,]$ k funkci $f(x) = x$. Platí sice

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(1-x)x^k = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{(1-x)x}{1-x} \ ,$$

a je proto $\sum_{k=1}^{n} f_k \to x$, avšak

$$\Big| x - \sum_{k=1}^{n}(1-x)x^k \Big| = \Big| x - x\frac{(1-x)(1-x^n)}{1-x} \Big| = x^{n+1}$$

a, jak jsme ukázali v předchozím příkladě, $x^{n+1} \not\rightrightarrows 0$ na $[\,0,1\,]$.

3. Stejně snadno dokážeme, že pro řadu o členech $f_k(x) = x^k/k - x^{k+1}/(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, platí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows x$ na $[\,0,1\,]$, neboť na tomto intervalu platí

$$\Big| x - \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big)\Big| = \Big| x - \Big(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big)\Big| =$$

$$= \Big|\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \ .$$

4. Definujme pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} \ , \quad g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \ , \quad h_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \ .$$

Snadno ověříme, že f_n, g_n a h_n jsou vesměs spojité funkce na $\mathbb{R}$. Dále je $f_n(x) \to 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f_n(0) \to +\infty$, tedy $\{f_n\}$ nekonverguje ani bodově na $\mathbb{R}$.

Podobně snadno dostaneme $g_n(x) \to 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tedy $\{g_n\}$ konverguje bodově k 0 na $\mathbb{R}$. Avšak

$$|g_n(1/n) - 0| = \frac{n/n}{1 + (n^2/n^2)} = \frac{1}{2} \ ,$$

a proto je $\sup\{|g_n(x) - 0|; x \in \mathbb{R}\} \geq (1/2) \not\to 0$. Proto *neplatí* $g_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.

Pro třetí posloupnost $\{h_n\}$ lichých funkcí h_n rovněž snadno dostaneme $h_n \to 0$ na $\mathbb{R}$. Dále je $h_n(0) = \lim_{x\to\infty} h_n(x) = 0$ a

$$h_n'(x) = \frac{1 + n^2x^2 - 2xn^2x}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{1 - x^2n^2}{(1 + n^2x^2)^2} \ .$$

Platí $h_n'(1/n) = 0$ a $1/n$ je jediný nulový bod h_n' na $(0, +\infty)$, z čehož vyplývá

$$\sup\{|h_n(x) - 0|;\ x \in \mathbb{R}\} = \sup\{|h_n(x)|;\ x \in [\,0, \infty\,]\} = h_n(1/n) = (1/2n) \to 0 \ .$$

Odtud dostáváme stejnoměrný odhad vzhledem k x, a tedy platí $h_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Všimněte si, že však neplatí ani $h_n' \to 0$, neboť je $h_n'(0) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

15.2 Kritéria stejnoměrné konvergence

Již jsme viděli, jak lze rozhodnout o stejnoměrné konvergenci posloupnosti nebo řady funkcí podle definice. Předcházející příklady ukazují cestu k odvození dalších kritérií stejnoměrné konvergence. Je přitom lhostejné, na jaké množině A pracujeme. Volíme zpravidla tuto strategii: snažíme se nalézt maxima, resp. suprémа $|f_n - f|$ na A a dokázat, že tvoří posloupnost konvergující k 0. Nelze-li je určit, snažíme se je aspoň odhadnout pomocí α_n a ukázat, že $\alpha_n \to 0$. Někdy je vhodné užít *Bolzano-Cauchyovu podmínku pro stejnoměrnou konvergenci.*

{*bcprofu*}

Věta 15.2.1 (Cauchy 1853, Weierstrass 1861). *Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na množině A, právě když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq k)(\forall x \in A)(|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon) \ . \qquad (15.3)$$ {*stejcauc*}

Důkaz. Z (15.3) plyne existence $f(x) := \lim f_n(x)$ pro všechna $x \in A$, tedy „bodově“. Avšak pak v (15.3) přejdeme k limitě vzhledem k $m \to \infty$, z čehož plyne $f_n \rightrightarrows f$ na A. Avšak z $f_n \rightrightarrows f$ na A plyne $|f_n - f| \rightrightarrows 0$ na A. Konečně z nerovnosti

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)|$$

plyne zbytek tvrzení. □

Následující tvrzení pro řady je zajímavější; v literatuře bývá označováno často jako *Weierstrassův M-test* nebo *majorantní kritérium*. Jak snadno nahlédneme, jde o *postačující podmínku* pro stejnoměrnou konvergenci řady funkcí.

{mtest}

Věta 15.2.2 (o majorantní řadě). *Nechť $\sum f_n$ je řada funkcí definovaných na množině A a nechť pro $M_n = \sup\{|f_n(t)|;\, t \in A\}$ platí $\sum M_n < \infty$. Potom řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na A.*

Důkaz. Pro částečné součty s_n řady $\sum f_n$ platí při $m > n$ odhad

$$\sup\{|s_m(t) - s_n(t)|; t \in A\} \le M_{n+1} + \cdots + M_m$$

a při konvergenci $\sum M_n$ je tedy posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ „stejnoměrně cauchyovská“. $\square$

Poznámka 15.2.3. Poznamenejme, že v tomto případě platí $M_n = \|f_n\|$, kde norma je stejná jako generická suprémová norma na $\mathcal{C}([a,b])$. Věta se docela dobře pamatuje, neboť de facto říká, že řada funkcí konverguje stejnoměrně, pokud „konverguje v normě“. Rozmyslete si, že v normovaném lineárním prostoru je definováno sčítání a konvergence, tedy vše, co pro práci s řadami potřebujeme. Tudy vede cesta k práci s řadami v obecnějším kontextu.

{riempr}

Příklad 15.2.4. Položíme-li

{bdf}
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{15.4}$$

je zřejmě g spojitá na $\mathbb{R}$, neboť pro n-tý částečný součet g_n platí

$$|g(x) - g_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big|\frac{\sin(k^2 x)}{k^2}\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0\,,$$

kde limitní přechod je proveden vzhledem k $n \to \infty$.

Příklad 15.2.5. Zvolme za A interval $[0,1]$; nechť f_k je definována (načrtněte si obrázek) tak, že $f_k(t) = 0$ pro $t \in [0,1] \setminus (1/(k+1), 1/k)$, $k \in \mathbb{N}$. V půlícím bodě intervalu $[1/(k+1), 1/k]$ definujeme hodnotu f_k např. $1/k$ a pak spojitě dodefinujme f_k lineárně na obou zbývajících intervalech. Snadno nahlédneme, jaký je součet s řady $\sum f_k$, neboť v každém bodě $x \in [0,1]$ je nenulová nejvýše jedna funkce f_k. Zřejmě $\sum M_k = \sum k^{-1} = +\infty$, avšak

$$\sup\Big\{\Big|s(t) - \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\Big|,\, t \in [0,1]\Big\} \le \frac{1}{n+1} \to 0\,.$$

Proto platí dokonce $\sum f_n \rightrightarrows$ na $[0,1]$, i když Weierstrassův M-test nám tuto informaci nepřinesl.

Poznámka 15.2.6. Na tomto principu lze konstruovat zajímavé příklady. Pracujme s intervalem $(0,1)$ (kreslete si opět obrázek). Zvolíme-li např. hodnotu f_n z předchozího příkladu v půlícím bodě intervalu rovnu n místo $1/n$, pak $\sum M_n$ diverguje a dokonce i $M_n \to +\infty$, avšak součet $\sum f_n$ na intervalu $(0,1)$ je spojitá funkce. Analogická metoda s přiléhavým názvem „metoda klouzavého hrbu“ má v matematice četné aplikace.

15.3 Důležitá tvrzení

Ilustrovali jsme jistou nedostatečnost bodové konvergence pro přenášení některých vlastností na limitní funkci. Schopnost přenášet příjemné vlastnosti má však stejnoměrná konvergence. Jedno z tvrzení, které matematicky dokumentuje toto nematematické vyjádření, jsme dokázali v Kapitole 13 o metrických prostorech v Lemmatu 13.3.6; to si nyní včetně důkazu připomeneme.

Z hlediska metrických prostorů je stejnoměrná konvergence jen jedním typem konvergence, ten je však mimořádně důležitý, což ukazují následující věty.

{*unispoj*}

Věta 15.3.1 (Cauchy 1853). *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí spojitých na intervalu I. Nechť platí $f_n \rightrightarrows f$ na I. Potom f je spojitá na intervalu I.*

Důkaz. Budeme již postupovat rychleji: zvolme $x \in I$ a dokazujme spojitost f (ev. zprava či zleva) v bodě x. Zvolme $\varepsilon > 0$ a nalezněme takové $n \in \mathbb{N}$, aby platilo $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3$ pro všechna $t \in I$. Pak zvolme $\delta = \delta(n) > 0$ tak, aby $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$ pro všechna $y \in I$ taková, že $|x - y| < \delta$. Nyní platí pro všechna $y \in I$, pro něž je $|x - y| < \delta$, odhad

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \le \\ &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \\ &< \varepsilon/3 \ + \ \varepsilon/3 \ + \ \varepsilon/3 \ = \ \varepsilon \ , \end{aligned}$$

a tedy f je spojitá v bodě x (ev. zprava či zleva). □

Věta 15.3.2. *Nechť funkce f_n mají Riemannův integrál na intervalu $[a,b]$, nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Potom i funkce f má Riemannův integrál na $[a,b]$ a platí*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{R})\int_a^b f_n = (\mathcal{R})\int_a^b f \ . \tag{15.5}$$ {*n8e3*}

Důkaz. V následujícím důkazu pracujeme pouze s $(\mathcal{R})$-integrály. Z $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ plyne, že

$$a_n := \sup\bigl\{|f(x) - f_n(x)|; x \in [a,b]\bigr\} \to 0 \ .$$

K $\varepsilon > 0$ existuje tedy $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \ge k$ je $a_n < \varepsilon$. Zvolme takové $n \in \mathbb{N}$; pak platí

$$f_n - \varepsilon \le f \le f_n + \varepsilon \ ,$$

a tedy pro libovolné dělení $D \in \mathcal{D}([a, b])$ je

$$s(f_n; D) - \varepsilon(b-a) \le s(f; D) \le S(f; D) \le S(f_n; D) + \varepsilon(b-a) \ ,$$

z čehož dostaneme snadnou úpravou

$$S(f; D) - s(f; D) \le (S(f_n; D) - s(f_n; D)) + 2\varepsilon(b-a) \ .$$

Oba členy na pravé straně odhadu lze volbou ε a dělení D udělat „malé“; odtud vyplývá podle Věty 10.2.12, že i limitní funkce f má Riemannův integrál.

Dále platí

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| \le \int_a^b |f_n - f| \le \|f_n - f\|_\infty \cdot (b-a) \ ,$$

z čehož plyne vztah (15.5). Obtížnější částí důkazu bylo odůvodnění integrovatelnosti f. □

Jádro důkazů vět o stejnoměrné konvergenci je patrně nejvíce zřejmé z obecnější věty, kterou si nyní dokážeme v kontextu MP. Připomeňme, že se záměnou limit jsme se setkali již např. při vyšetřování součinu řad. Vzniklou dvojnou řadu (sčítanci závisely na dvou indexech) by bylo možno sčítat nejprve „po řádcích“ nebo „po sloupcích“ a pak sečíst řadu nalezených součtů.

$\{moos\}$

Věta 15.3.3 (Moore 1900, Osgood 1897). *Nechť (P, ϱ) je MP, $x_0 \in P$, a nechť $\{f_n\}$ je posloupnost (komplexních) funkcí na P. Nechť dále*

(1) $f_n \rightrightarrows f$ *na* P ,

(2) $f_n(x) \to a_n$ *pro* $x \to x_0$.

Potom též existují vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny.*

Důkaz. K $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \ge k$, $m, n \in \mathbb{N}$, platí

$$x \in P \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ ,$$

a tedy, po limitním přechodu $x \to x_0$, rovněž i $|a_m - a_n| \le \varepsilon$. Odtud vyplývá konvergence $\{a_n\}$. Položme $\lim a_n = a$. Dále platí

$$|f(x) - a| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a| \ .$$

Nyní lze volbou $n \in \mathbb{N}$ dosáhnout toho, že první a třetí člen na pravé straně nerovnosti je odhadnut pro všechna $x \in P$ pomocí $\varepsilon/3$. Potom zvolíme $\delta > 0$ tak, že pro prstencové okolí bodu x_0 v P platí

$$x \in \mathcal{P}_\delta) \Rightarrow |f_n(x) - a_n| < \varepsilon/3 \ ,$$

z čehož už dostáváme lehce dokazované tvrzení. □

Důsledek 15.3.4. *Nechť existuje* $\delta > 0$ *tak, že*

(1) $f_n \rightrightarrows f$ *na* $(c, c+\delta)$,

(2) $f_n(x) \to a_n$ *pro* $x \to c_+$.

Potom též existují vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to c_+} f(x)$ *a jsou si rovny.*

Poznámka 15.3.5. Obdobná podmínka „funguje" i pro případ $x \to c_-$ a obecně s libovolným okolím $\mathcal{U}(c)$, na němž je $f_n \rightrightarrows f$. To je důležité pro lokální vlastnosti (spojitost, diferencovatelnost apod.), neboť někdy stačí ověřovat stejnoměrnou konvergenci pouze *lokálně*.

Poznámka 15.3.6. Promyslete si důkaz Věty 15.3.1, založený na právě dokázané Moore-Osgoodově větě. Uvědomte si zároveň, že tvrzení by bylo možno dokázat v daleko obecnějším kontextu.

Definice 15.3.7. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na intervalu (a,b) a nechť ke každému $c \in (a,b)$ existuje okolí $\mathcal{U}(c) \subset (a,b)$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{U}(c)$. Potom říkáme, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje *lokálně stejnoměrně na* (a,b) *k funkci* f.

Označení 15.3.8. K označení právě zavedeného pojmu lokálně stejnoměrné konvergence budeme používat symbol $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f$ na (a,b). Chceme-li zapsat definici pomocí kvantifikátorů, je to již trochu složitější:

$$(\forall c \in (a,b))(\exists \mathcal{U}(c) \subset (a,b))(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})$$
$$(\forall n \geq k, n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{U}(c))(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \ .$$

{*uniconl*}

Lemma 15.3.9. *Platí* $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f$ *na* (a,b), *právě když pro každý* uzavřený *interval* $[c,d] \subset (a,b)$ *platí*

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{na} \quad [c,d] \ . \tag{15.6}$$

{*n8e1*}

Důkaz. Zvolme $x_0 \in (a,b)$ a pak s ohledem na podmínku (15.6) body c, d tak, aby platilo

$$a < c < x_0 < d < b \quad \text{a zároveň} \quad f_n \rightrightarrows \quad \text{na} \quad [c,d] \ .$$

Nyní stačí volit $\mathcal{U}(x_0) = (c,d)$. Druhou implikaci obdržíme z Borelovy pokrývací věty (viz Věta 10.1.14). K danému intervalu $[c,d]$ zvolme pokrytí systémem okolí $\{\mathcal{U}(x);\, x \in [c,d]\}$ intervalu $[c,d]$ s $\mathcal{U}(x) \subset (a,b)$, pro něž je

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{na} \quad \mathcal{U}(x)$$

pro všechna $x \in [a,b]$. Z tohoto pokrytí vybereme konečné podpokrytí. Nyní nalezneme pro toto konečné pokrytí $\{\mathcal{U}(x_1), \ldots, \mathcal{U}(x_m)\}$ intervalu $[c,d]$ k $\varepsilon > 0$ čísla $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall x \in \mathcal{U}(x_l))(\forall n \geq k_l)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \ , \qquad l \in \{1, \ldots, m\} \ ,$$

a zvolíme $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Pak pro všechna $x \in [\,c, d\,] \subset \bigcup_1^m \mathcal{U}(x_l)$ je při $n \geq k$ splněna nerovnost $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. □

{*locuder*}

Věta 15.3.10 (Weierstrass 1861). *Nechť funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, mají vesměs vlastní derivaci všude v intervalu (a, b), a nechť*

(1) *existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje,*

(2) *pro derivace f_n' platí $f_n' \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na (a, b).*

Potom též $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na (a, b) a označíme-li $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in (a, b)$, má f na (a, b) derivaci f' a platí

$$f_n' \rightrightarrows_{\text{loc}} f' \quad \textit{na} \quad (a, b)\ .$$

Důkaz. Není patrně příliš překvapivé, že budeme pracovat s uzavřeným intervalem $[\,c, d\,] \subset (a, b)$. Důkaz je založen na Moore-Osgoodově větě (Věta 15.3.3) a je složitější pouze formálně.

Postupně dokážeme, že z předpokladů plyne

$$f_n \rightrightarrows \text{ na } [\,c, d\,] \quad \text{a pro} \quad f := \lim_{n\to\infty} f_n \quad \text{též} \quad f_n' \rightrightarrows f' \text{ na } (a, b)\ .$$

Začneme s vyšetřováním rozdílu $f_m - f_n$. Pro $x, t \in [\,c, d\,]$, $x \neq t$, platí podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.15)

{*odhad*}
$$\frac{(f_m(t) - f_n(t)) - (f_m(x) - f_n(x))}{t - x} = (f_m'(\xi) - f_n'(\xi))\ , \tag{15.7}$$

kde ξ leží mezi body t a x, tj. v (c, d). Je tedy

{*odha*}
$$|(f_m(t) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_n(x))| \leq |t - x||f_m'(\xi) - f_n'(\xi)|\ . \tag{15.8}$$

Předpokládejme nyní, že platí $x_0 \in [\,c, d\,]$. Z odhadu (15.8) plyne splnění Bolzano-Cauchyovy podmínky pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ na $[\,c, d\,]$, neboť platí

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|\ ,$$

a proto je

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq (d - c)|f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|\ .$$

Tedy z $f_n' \rightrightarrows$ na $[\,c, d\,]$ a konvergence $f_n(x_0)$ dostáváme $f_n \rightrightarrows$ na $[\,c, d\,]$, a proto $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na (a, b). Zvolme nyní pevně $x \in [\,c, d\,]$ a definujme

$$\Phi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}\ , \quad \Phi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

pro $t \in [c,d] \setminus \{x\}$. Použijeme opět odhad (15.7) a upravíme ho do tvaru

$$\left|\frac{(f_m(t) - f_m(x))}{t-x} - \frac{(f_n(t) - f_n(x))}{t-x}\right| \leq (|f'_m(\xi) - f'_n(\xi)|) ,$$

Z této nerovnosti plyne platnost Bolzano-Cauchyovy podmínky pro $\{\Phi_n\}$, takže platí

$$\Phi_n(t) \rightrightarrows \text{ na } [c,d] \setminus \{x\} .$$

Nyní se využije Věty 15.3.3 na okolí bodu $\{x\}$. Zřejmě $\Phi_n(t) \rightrightarrows \Phi(t)$ na $[c,d]\setminus\{x\}$ a pro $t \to x$ dostaneme

$$\lim_{t\to x} \Phi_n(t) = f'_n(x) , \quad f'(x) = \lim_{t\to x} \Phi(t) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) .$$

Tím je důkaz dokončen. □

Příklad 15.3.11. Předcházející věta ukazuje, že situace při derivování posloupnosti funkcí „člen po členu“ není jednoduchá. Položme

$$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n} , \qquad g_n(x) = \sin\frac{x}{n^2} , \qquad x \in \mathbb{R} .$$

Potom platí $f_n \to 0$ a také $g_n \to 0$ na $\mathbb{R}$. Je však $|f_n(x) - 0| \leq 1/n \to 0$, a proto $f_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$, ale zároveň je $|g_n(n^2\pi/2) - 0| = 1$, a tedy *neplatí* $g_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$. Všimněte si, že všechny funkce jsou dokonce z $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Pro derivace f'_n a g'_n dostáváme

$$f'_n(x) = n\cos(n^2 x) , \quad g'_n(x) = \frac{1}{n^2}\cos\frac{x}{n^2} ,$$

a tedy neplatí $f'_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, avšak platí $g'_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.

Příklad 15.3.12. Nežli budeme dokazovat následující větu, uvedeme další ilustrativní příklad pro Newtonův integrál. Definujme

$$f(x) := (1 - |x|)^+ = \max(1 - |x|, 0) .$$

Pomocí f definujeme posloupnost funkcí $\{g_n\}$

$$g_n(x) := (1/n) f(x/n) , \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} .$$

Zřejmě existují Newtonovy integrály z g_n přes $\mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jsou vesměs rovny 1. I když platí $g_n \rightrightarrows 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x \; = 1 \neq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lim_{n\to\infty} g_n(x))\,\mathrm{d}x \; .$$

Příklad ukazuje důležitost předpokladu omezenosti intervalu v následující větě.

Věta 15.3.13. *Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na* omezeném *intervalu (a,b) a nechť $f_n \in \mathcal{N}(a,b)$, tj. f_n, $n \in \mathbb{N}$, mají Newtonův integrál na (a,b). Potom existuje i $(\mathcal{N})$-integrál z f přes (a,b) a platí*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{N})\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad . \tag{15.9}$$ {n8e2}

Důkaz. Označme F_n primitivní funkce k f_n, přičemž je volme tak, aby pro pevně zvolený bod $x_0 \in (a,b)$ platilo $F_n(x_0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Zopakujeme úvahu z důkazu předchozí věty; platí

$$\begin{aligned} |F_m(x) - F_n(x)| &= |(F_m(x) - F_n(x)) - (F_m(x_0) - F_n(x_0))| \le \\ &\le |f_m(\xi) - f_n(\xi)| \cdot (b-a) \ , \end{aligned}$$

kde jsme odhadli rozdíl pomocí Lagrangeovy věty (Věta 5.2.15). Bod ξ leží mezi x a x_0, tedy v (a,b) a rozdíl $|x - x_0|$ jsme odhadli délkou (omezeného dle předpokladů!) intervalu (a,b). Použijeme ještě předchozí větu na funkce F_n a obdržíme pro $F := \lim_{n\to\infty} F_n$ rovnost $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$. Na koncové body a, b uvažovaného intervalu aplikujeme Větu 15.3.3, čímž dostaneme pro $x \to a_+$, resp. $x \to b_-$, vztahy

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a+) = \lim_{x\to a+} F(x) = F(a+) \ , \quad \lim_{n\to\infty} F_n(b-) = \lim_{x\to b-} F(x) = F(b-) \ .$$

Odtud snadno dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{n\to\infty} (F_n(b_-) - F_n(a_+)) = F(b_-) - F(a_+) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \ ,$$

což je žádaná rovnost (15.9). □

Poznámka 15.3.14. Předcházející věty jsme vyslovili pro posloupnosti. Uvážíme-li vztah mezi posloupnostmi částečných součtů řady $\sum f_n$ a touto řadou, tedy

$$\sum f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} \text{ na } (a,b) \quad \Longleftrightarrow \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} \text{ na } (a,b)$$

apod., dostaneme odtud lehce tvrzení pro řady funkcí. Toto tvrzení již dokazovat nebudeme, jde totiž prakticky jen o formální úpravu.

Věta 15.3.15. *Nechť $\sum f_k$ je řada funkcí majících vesměs vlastní derivaci na (a,b) a nechť existuje bod $x_0 \in (a,b)$ tak, že $\sum f_k(x_0)$ konverguje. Jestliže platí $\sum f_k' \rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ na (a,b), je rovněž $\sum f_k \rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ na (a,b) a pro $s := \sum f_k$ platí*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k'(x) \ , \quad x \in (a,b) \ .$$

Zkráceně, i když ne zcela přesně, říkáme, že „řadu $\sum f_n$ lze derivovat člen po členu“. Podobná věta platí pro integrál, avšak i v případě $(\mathcal{N})$-integrálu musíme pracovat s *omezeným* intervalem (a, b). Vyslovíme ji pro Newtonův integrál.

Věta 15.3.16. *Nechť $\sum f_k$ je řada funkcí newtonovsky integrovatelných vzhledem k* omezenému *intervalu o koncových bodech a, b, a $\sum f_k \rightrightarrows$ na (a, b). Označíme-li $f := \sum f_k$, je rovněž f newtonovsky integrovatelná a platí*

$$(\mathcal{N})\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{N})\int_a^b f_k \ .$$

Poznámka 15.3.17. Analogická věta platí i pro Riemannův integrál.

Na závěr uveďme ještě jedno elegantní kritérium stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n\}$, které vyvozuje tuto konvergenci z monotonie posloupnosti $\{f_n\}$ a speciálních vlastností funkcí f_n. Pro procvičení ho vyslovíme ve znění pro kompaktní metrický prostor (P, ϱ); čtenář si může představit na místě (P, ϱ) např. interval $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}$.

$\{dini\}$

Věta 15.3.18 (Dini 1878). *Nechť $\{f_n\}$ je monotónní posloupnost spojitých funkcí konvergentní na kompaktním metrickém prostoru (P, ϱ) ke spojité funkci f. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na P.*

Důkaz. Uvědomme si nejprve, že stačí větu dokázat pro speciální případ posloupnosti nezáporných funkcí g_n konvergující monotónně k 0 a výsledek aplikovat na funkce $g_n = f_n - f$, resp. $g_n = f - f_n$. Je-li $\varepsilon > 0$, lze nalézt pro každé $x \in P$ takové $n = n_x$, že platí $g_{n_x}(x) < \varepsilon/2$. Všechny funkce g_{n_x} jsou spojité v P; posloupnost $\{g_n\}$ je neklesající. Zvolme ke každému x okolí $\mathcal{U}(x)$ tak, aby platilo $|g_{n_x}(y) - g_{n_x}(x)| < \varepsilon/2$ pro všechna $y \in \mathcal{U}(x)$. Platí tedy $g_{n_x}(y) < \varepsilon$ na $\mathcal{U}(x)$. Systém okolí $\{\mathcal{U}(x);\, x \in P\}$ tvoří pokrytí kompaktního prostoru P. Existuje proto $K \subset P$ konečná, pro kterou *konečný* systém $\{\mathcal{U}(x);\, x \in K\}$ rovněž pokrývá P. Je tedy

$$P \subset \bigcup \{\mathcal{U}(x);\, x \in K\}$$

a ke každému $x \in K$ přísluší ta funkce, pomocí níž bylo okolí definováno, kterou budeme značit g_x. Nyní položme $k = \max\{n_x;\, x \in K\}$. Pro každé $y \in P$ existuje $x \in K$ tak, že $y \in \mathcal{U}(x)$. Pak platí pro všechna $n \geq k$

$$g_n(y) \leq g_k(y) < g_x(x) + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ ,$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Je přirozené, že čtenáře může napadnout otázka, jak souvisí absolutní a stejnoměrná konvergence. Ještě naléhavěji by se jevila při dalším studiu mocninných řad v následující kapitole, proto ji zodpovíme již nyní.

Příklad 15.3.19 (Pringsheim 1899). Vyšetřeme funkci f definovanou součtem řady

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)^n \ .$$

Zřejmě pro všechna $x \neq 0$ platí rovnost $f(x) = (1+x^2)^{-1}$, což po vytknutí prvého zlomku dostaneme snadno sečtením geometrické řady. Dosazením též snadno ověříme $f(0) = 0$. Protože jde o řadu s nezápornými členy, konverguje *absolutně* všude v $\mathbb{R}$. Jelikož jde o řadu spojitých funkcí, jejíž součet je evidentně funkce nespojitá v bodě 0, řada *nekonverguje stejnoměrně* na $\mathbb{R}$, ani např. na intervalu $[0,1]$. Konvergence je však lokálně stejnoměrná na $(0,1]$.

Příklad 15.3.20. Vyšetřeme podrobněji řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^2+n}{n^2} \ .$$

Protože platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{x^2+n}{n^2} = \Big|(-1)^{n+1}\frac{x^2+n}{n^2}\Big| \ ,$$

řada nekonverguje absolutně *v žádném bodě* $x \in \mathbb{R}$. Bodová konvergence řady je však zřejmá z Leibnizova kritéria (viz Věta 3.3.1) a naprosto analogicky jako tam dostáváme pro $m > n$ obecně odhad

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leq |a_{n+1}(x)| \ .$$

Vidíme, že pro (lokálně) stejnoměrnou konvergenci řady se střídavými znaménky $\sum(-1)^{n+1}a_n(x)$ stačí (lokálně) $a_n \rightrightarrows 0$. V našem konkrétním případě platí

$$\Big|(-1)^{n+1}\frac{x^2+n}{n^2}\Big| \leq \frac{M^2}{n^2} + \frac{1}{n} \leq \frac{M^2+1}{n}, \quad \text{pro všechna } x,\ |x| \leq M \ ,$$

takže řada *konverguje lokálně stejnoměrně* na $\mathbb{R}$.

Předcházející dvojice příkladů dostatečně přesvědčivě ukazuje, že spolu stejnoměrná a absolutní konvergence v obecném případě příliš nesouvisí. To ostatně ilustrují i neabsolutně konvergentní číselné řady; zároveň ukazují další směr postupu.

15.4 Další kritéria

$\{abedi\}$

Věta 15.4.1 (Abel, Dirichlet). *Nechť $\sum a_n$ je řada reálných nebo komplexních funkcí definovaných na množině M a nechť $\{b_n\}$ je posloupnost nezáporných funkcí na množině M taková, že platí $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \cdots \geq 0$.*

Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek

(1) $\sum a_n \rightrightarrows$ *na* M *a* b_1 *je omezená funkce na* M, *nebo*

(2) $\sum a_n$ *má omezenou posloupnost částečných součtů a* $b_n \rightrightarrows 0$ *na* M.

Potom řada $\sum a_n b_n$ *konverguje stejnoměrně na* M.

Důkaz. Podáme pouze hrubý náznak důkazu. Ten je založen na užití Bolzano-Cauchyovy podmínky, nyní však pro stejnoměrnou konvergenci *funkcí*. Po technické stránce se provede zcela analogicky jako důkaz Věty 11.2.5; práce s řadou funkcí není o nic složitější než v případě číselné řady. Viz např. [6], Věta 55, kde čtenář nalezne i přístupný důkaz. □

{*takagi*}

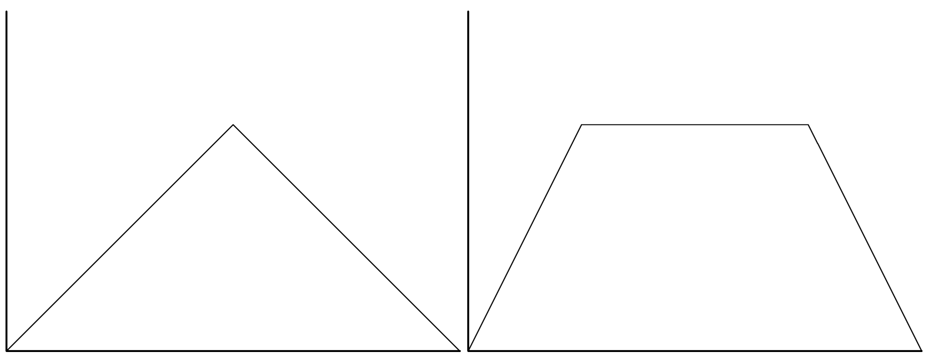
Příklad 15.4.2. V příkladu 10.5.1 jsme sestrojili „pilovitou funkci“ f, která je lineární na každém intervalu $[\,k-1, k\,]$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Funkce f je 2-periodická a spojitá na $\mathbb{R}$, přičemž platí $0 \le f \le 1$. Pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ je $f'(x) = \pm 1$. Položme $f_k(x) = f(2^k x)/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, a definujme

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}\ .$$

Každá z funkcí f_k je spojitá a řada $\sum f_k$ konverguje stejnoměrně podle Věty 15.2.2, neboť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

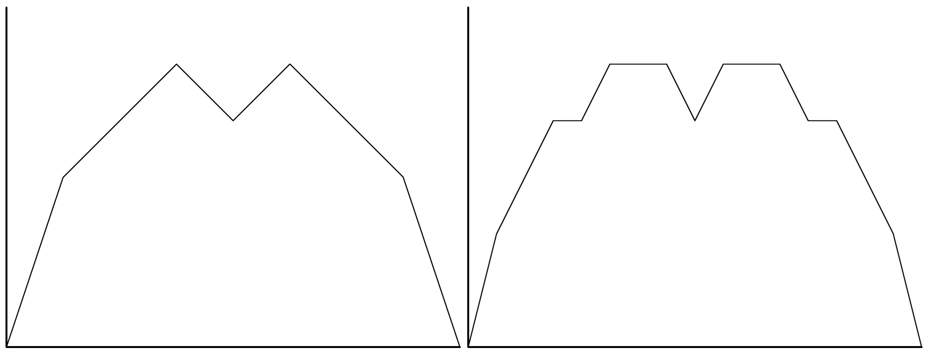
$$|f_k(x)| \le 2^{-k} \quad \text{a platí} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty\ .$$

Obrázky zachycují prvních sedm částečných součtů řady na intervalu $[\,0, 2\,]$; g je zřejmě 2-periodická funkce, obrázky proto dobře zachycují chování řady na $\mathbb{R}^1$.



Funkce g je tedy spojitá na $\mathbb{R}$ podle Věty 15.3.1. Pro $k \in \mathbb{N}$ je funkce f_k lineární na intervalech $[\,(s-1)/2^k, s/2^k\,]$ pro každé $s \in \mathbb{Z}$ a uvnitř těchto intervalů, kterým budeme říkat intervaly řádu k, platí $f_k'(x) = \pm 1$; zároveň je funkce f_k periodická s periodou 2^{1-k}. Zvolme libovolně $x \in \mathbb{R}$. Dokážeme, že $g'(x)$ není vlastní, tj. že neexistuje vlastní limita

$$\lim_{y \to x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \ .$$



Protože x leží vždy alespoň v jednom z intervalů I_n řádu n, lze zvolit posloupnost do sebe zařazených intervalů $I_{n+1} \subset I_n$, $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in I_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. V každém z intervalů I_n o délce 2^{-n} existuje bod x_n tak, že $|x_n - x| = 2^{-(n+1)}$. Zřejmě platí $x_n \to x$ a

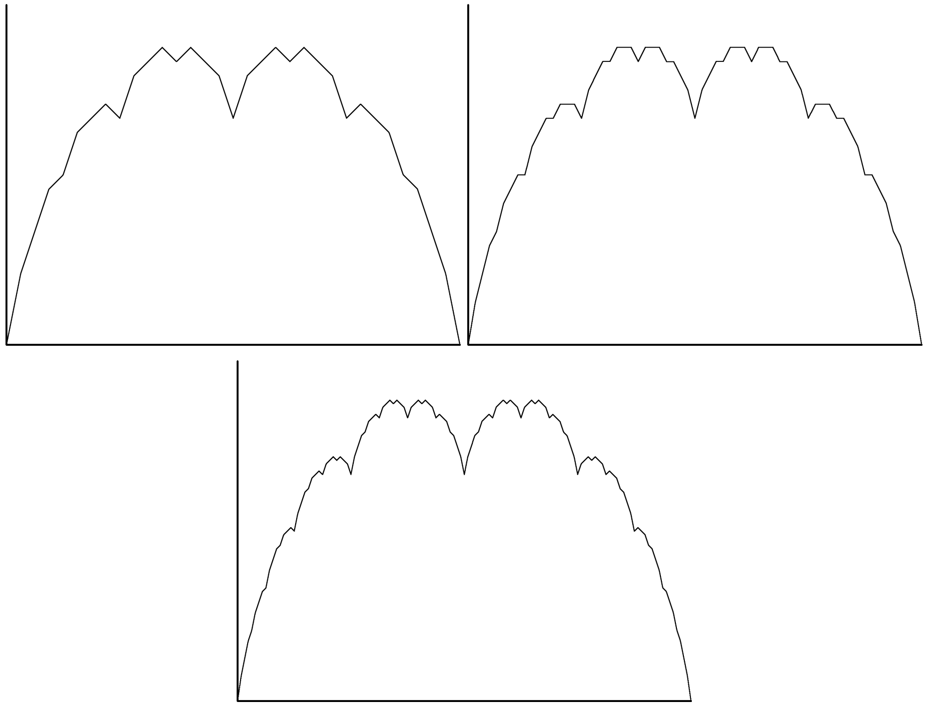
$$\frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_k - x} = 0$$

pro všechna $k > n + 1$. Proto je

$$\frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \sum_{k=1}^{n+1} (\pm 1) \ ,$$

kde sčítáme $(n+1)$ nenulových hodnot, z nichž každá je rovna $+1$ nebo -1. Hodnota posledního součtu je tedy liché číslo pro n sudé a sudé číslo pro n liché, zruší se vždy jen sudý počet sčítanců. Proto posloupnost čísel $(g(x_n) - g(x))/(x_n - x)$ obsahuje pouze celá čísla a *není cauchyovská*, nemůže tedy pro $n \to \infty$ konvergovat.

Vzhledem k volbě x jsme tak sestrojili funkci $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, která nemá vlastní derivaci v žádném bodě z $\mathbb{R}$. Popsaný důkaz je modifikací postupu, který se v literatuře označuje jako *Waerdenův příklad spojité funkce bez derivace*. Funkci tohoto typu vyšetřoval již r. 1903 TEIJI TAKAGI (1875 – 1960); viz též [9], str. 174. Ač se Waerdenův příklad liší od Takagiho jen nepodstatně, metoda důkazu je založena na triku, který v případě vyšetřované funkce nelze použít.



Sčítáním vhodně volených funkcí lze sestrojit zajímavé příklady; vyložený aparát umožňuje užívat i nekonečné součty (řady) funkcí a tak „kumulovat“ body zvláštního charakteru.

Příklad 15.4.3. Označme $\{r_n\}$ *prostou* posloupnost *všech* racionálních čísel z intervalu $(0,1)$ a položme $h_n(x) = \operatorname{sgn}(x - r_n)$, $x \in (0,1)$. Pak je funkce

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, h_n(x)\ , \quad x \in (0,1)\ ,$$

součtem neklesajících funkcí a je tedy rovněž neklesající. Řada je podle Weierstrassova M-testu stejnoměrně konvergentní. Proto pro všechna $y \in (0,1)$ platí

$$\lim_{x\to y+} h(x) = \lim_{x\to y+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, h_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to y+} \frac{1}{2^n}\, h_n(x)$$

a podobně i pro $\lim_{x\to y-} h(x)$. Je zřejmé, že funkce h je spojitá v každém iracionálním bodě $y \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$, neboť každá funkce h_n má v těchto bodech stejné jednostranné limity. V každém bodě $y \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ je nespojitá, neboť v součtu existuje *právě jedna* funkce h_l, pro kterou je $\lim_{x\to y-} h_l < \lim_{x\to y+} h_l$. Protože mezi každými dvěma body $u, v \in (0,1)$, $u < v$, existuje alespoň jedno racionální číslo, je h rostoucí funkce na $(0,1)$, která je nespojitá ve všech bodech množiny $(0,1) \cap \mathbb{Q}$.

Příklad 15.4.4. Je-li $\{r_n\}$ opět prostá posloupnost všech racionálních čísel z intervalu $(0,1)$, $g_n(x) = |x - r_n|$, $x \in (0,1)$, pak je funkce

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(x) \ , \quad x \in (0,1) \ ,$$

konvexní, avšak v každém bodě r_n, $n \in \mathbb{N}$, je $g'(r_n-) < g'(r_n+)$, a tedy $g''(x)$ neexistuje pro žádné $x \in (0,1)$. Snadno zjistíme, že g je součtem stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí a je tedy spojitá. Je konvexní, neboť je součtem konvexních funkcí a má v každém bodě jednostranné derivace. Platí

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{g_n(x) - g_n(y)}{x - y}$$

a řada vpravo opět konverguje stejnoměrně, lze tedy jednostranné derivace funkce g spočítat jako součty jednostranných derivací funkcí g_n. Označíme-li

$$h_n^r(y) := \lim_{x \to y+} |x - r_n| \ , \quad h_n^l(y) := \lim_{x \to y-} |x - r_n| \ , \quad y \in (0,1) \ ,$$

pak platí

$$g'_+(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n^r(x) \ , \quad g'_-(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n^l(x) \ , \quad x \in (0,1) \ .$$

a je $g'_-(x) < g'_+(x)$ pro všechna $x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$; v ostatních bodech $g'(x)$ existuje.

$\{lerchpr\}$

Příklad 15.4.5 (Lerch 1888). Je-li $\{r_n\}$ opět prostá posloupnost všech racionálních čísel z intervalu $(0,1)$,

$$f_n(x) := (x - r_n)^2 \sin \frac{1}{x - r_n} \ , \quad f_n(r_n) = 0 \ , \quad x \in (0,1) \ ,$$

pak funkce

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

je jakožto součet stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí (používáme Weierstrassův M-test) spojitá na intervalu $[0,1]$. Pro derivace platí

$$f'_n(x) = 2(x - r_n) \sin \frac{1}{x - r_n} - \cos \frac{1}{x - r_n} \ , \quad f'_n(r_n) = 0 \ , \quad x \in (0,1) \ ,$$

tedy sčítanci mají všude na intervalu $(0,1)$ vlastní derivaci, tyto derivace jsou omezené a proto rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n' \rightrightarrows$ na $(0,1)$; použili jsme opět M-test, z něhož stejnoměrná konvergence vyplývá. V každém bodě $x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ jsou vesměs všechny f_n' spojité a tedy i f' je spojitá v x. Stejnou úvahu lze aplikovat na $f' - f_n'$ v bodě r_n, avšak f_n' *není spojitá* v bodě r_n. Tak jsme získali spojitou funkci f s *velmi nespojitou* derivací f'.

Příkladů podobného typu je možno nalézt pochopitelně mnohem více, uvedli jsme některé pro pochopení principu.

15.5 Stejnoměrná aproximace polynomy

Je-li $n \in \mathbb{N}$ a funkce f má v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace až do řádu $(n+1)$ včetně, pak Taylorův polynom T_n pro funkci f v bodě x_0 aproximuje relativně přesně funkci f. O této *lokální* aproximaci je Věta 7.4.8. Proto může být překvapující, že pomocí polynomů lze *stejnoměrně* aproximovat *libovolnou* funkci $f \in \mathcal{C}([a,b])$ s jakoukoliv přesností, tj. že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje polynom P tak, že

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad x \in [\,a,b\,] \,.$$

Nežli přikročíme k důkazu tvrzení, které je ekvivalentní s tím, které jsme právě vyslovili, uvědomíme si několik jednoduchých fakt.

Poznámky 15.5.1. 1. Je-li f komplexní funkce na intervalu $[\,a,b\,]$, $f = f_1 + if_2$, kde

$$f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)\ , \quad f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)\ , \quad x \in [a,b]\ ,$$

a g_1, g_2 jsou reálné funkce na $[\,a,b\,]$ takové, že pro $k = 1,2$ je $|f_k - g_k| < \varepsilon$, pak

$$|(f_1 + if_2) - (g_1 + ig_2)| \le \sqrt{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2} \le \sqrt{2} \cdot \varepsilon < 2\varepsilon \ .$$

Funkce $g := g_1 + ig_2$ je komplexní funkce, přičemž $|f - g| < 2\varepsilon$.

2. Jsou-li g_1, g_2 polynomy s reálnými koeficienty, je $g_1 + ig_2$ polynom, obecně s komplexními koeficienty.

3. Je-li $f \in \mathcal{C}([a,b])$, je

$$g(t) := f(t(b-a) + a)\ , \quad t \in [\,0,1\,]\ ,$$

spojitá funkce na intervalu $[\,0,1\,]$. Jestliže je P takový polynom, že pro něj platí $|g(t) - P(t)| < \varepsilon$ pro všechna $t \in [\,0,1\,]$, pak platí $f(x) = g((x-a)/(b-a))$, $x \in [\,a,b\,]$, přičemž

$$|f(x) - P((x-a)/(b-a))| < \varepsilon$$

pro všechna $x \in [\,a,b\,]$. Přitom $P((x-a)/(b-a))$ je opět polynom v x.

4. Je-li l lineární funkce a P polynom, pak $|(f-l)-P| = |f-(P+l)|$ a $P+l$ je opět polynom.

Tyto jednoduché poznatky nám umožňují dokazovat pouze speciální případ následující velmi důležité věty:

{*weiervt*}

Věta 15.5.2 (Weierstrass 1895). *Nechť $f \in \mathcal{C}([a,b])$ je komplexní funkce. Potom existují polynomy P_n takové, že*

$$P_n(x) \rightrightarrows f \quad \textit{na} \quad [\,a,b\,] \ .$$

Je-li $f : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}$, lze nalézt P_n s koeficienty z $\mathbb{R}$, tj. $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Důkaz. Na základě předchozích poznámek stačí tvrzení dokázat pouze pro reálnou funkci f, pro kterou platí

$$f \in \mathcal{C}([\,0,1\,]) \ , \quad f(0) = f(1) = 0 \ .$$

Se zachováním označení symbolem f rozšíříme f na $\mathbb{R}$ hodnotou 0 mimo $[\,0,1\,]$, takže f je *stejnoměrně* spojitá na $\mathbb{R}$.

Definujeme polynomy $Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, přičemž koeficienty $c_n \in \mathbb{R}$ volíme tak, aby platilo

{*w1*}
$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x \ = 1 \ , \quad n \in \mathbb{N} \ . \tag{15.10}$$

Odhadneme velikost c_n pomocí výpočtu

$$\begin{aligned}(c_n)^{-1} = &\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \ = 2\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \ \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \ \geq \\ \geq &2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)\,\mathrm{d}x \ = 2\Big[x - \frac{nx^3}{3}\Big]_{x=0}^{1/\sqrt{n}} = \frac{4}{3\sqrt{n}} > (\sqrt{n})^{-1} \ ,\end{aligned}$$

z něhož vyplývá

{*w2*}
$$c_n < \sqrt{n} \ . \tag{15.11}$$

K odhadu integrované funkce jsme použili Bernoulliovu nerovnost dokázanou v Příkladu 1.3.23. Pro libovolné δ, $0 < \delta < 1$, a $x \in [\,-1,\delta\,] \cup [\,\delta,1\,]$ platí

{*w3*}
$$0 \leq Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n =: a_n \ . \tag{15.12}$$

Protože $a_{n+1}/a_n \to (1-\delta^2) < 1$, řada $\sum a_n$ konverguje, z čehož plyne $a_n \to 0$, a je tedy

$$Q_n(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{na} \quad \{x \in \mathbb{R}; \delta \leq |x| \leq 1\} \ .$$

Pomocí substituce $u = x+t$ a vlastností funkce f dostaneme postupně pro funkce $P_n(x)$, $x \in [0,1]$,

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \\ = \int_0^1 f(u)Q_n(u-x)\,\mathrm{d}u \ .$$

Z tvaru posledního integrálu vidíme, že P_n je polynom v proměnné x, přičemž je to reálný polynom, neboť f je reálná funkce. Ze stejnoměrné spojitosti f plyne, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta > 0$ tak, že pro $|x-y| < \delta$ platí

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \ .$$

Označme $M := \max\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\}$. Protože Q_n jsou sudé a nezáporné na intervalu $[-1,1]$, dostaneme s použitím (15.10) – (15.12) postupně

$$|f(x) - P_n(x)| = \Big|\int_{-1}^{1} (f(x) - f(x+t))Q_n(t)\,\mathrm{d}t\Big| \le \\ \le \int_{-1}^{1} \Big|f(x) - f(x+t)\Big| Q_n(t)\,\mathrm{d}t \le \\ \le 4M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) \le 4Ma_n + \varepsilon/2 \ ;$$

poslední výraz je menší než ε pro všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$. Tím jsme nalezli P_n tak, že je

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad \text{na} \quad [0,1] \ ,$$

z čehož plyne dokazované tvrzení. □

Poznámka 15.5.3. Větu 15.5.2 lze v několika směrech značně zobecnit. Pro tato zobecnění, z nichž Věta 15.5.2 při šikovném postupu vyplyne, potřebujeme z „klasické analýzy“ stejnoměrnou aproximovatelnost polynomy pro funkci $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$, ukazuje se však, že tím se důkaz již *podstatně* nezjednoduší; viz např. [9]. Pro zajímavost uveďme ještě jiný explicitní vzorec pro aproximující (Bernsteinovy) [2] polynomy: je-li $f \in \mathcal{C}([0,1])$, definujeme

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \ , \quad x \in [0,1] \ . \tag{15.13}$$ $\{bernpo\}$

Potom platí $B_n(f,x) \rightrightarrows f$ na $[0,1]$.

[2] Užíváme obvyklé transkripce; jde však o ruského, resp. sovětského matematika, takže patrně správnější by bylo užít jména ve formě *Bernštejn*.

Historické poznámky 15.5.4. Pojem stejnoměrné konvergence byl obtížně zvládnutelný i pro špičkové matematiky minulého století. Tak např. LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789 – 1857) „dokázal“, že součet konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá funkce (protipříklad podal Abel v r. 1826). Někteří historikové interpretují Cauchyovy důkazy jako použití metod nestandardní analýzy a tak dokazují, že Cauchyho ze záměny bodové a stejnoměrné konvergence nelze vinit. Odhlédneme-li od práce z r. 1841 o funkcích komplexní proměnné, kterou napsal CARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815 – 1897) (otištěna 1894) ještě jako gymnaziální profesor, publikovali r. 1848 nezávisle poměrně cenné, ne však zcela jasné, příspěvky k problému spojitosti součtu řady spojitých funkcí PHILIPP L. SEIDEL (1821 – 1896) a GEORGE GABRIEL STOKES (1819 – 1903). Cauchy později svou práci z r. 1821 opravil a současně r. 1857 definoval stejnoměrnou konvergenci. Weierstrass pak r. 1861 dokázal tentýž výsledek o spojitosti limity posloupnosti spojitých funkcí spolu s Větou 15.3.10 o derivování (za vcelku nepodstatně silnějších předpokladů).

Jak již bylo jednou zmíněno, vyvíjely se představy o derivaci relativně pomalu; při jejich studiu je nutné vždy pečlivě zkoumat i soudobé představy o jiných pojmech (např. o funkci, její spojitosti apod.). Je známo, že BERNHARD RIEMANN (1826 – 1866) již v roce 1854 uváděl na přednáškách jako příklad funkci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{nx\}}{n^2}$$

(zde $\{\ldots\}$ značí funkci „lomená část“, tj. $\{x\} = x - [x]$; příklad byl publikován v roce 1867). Tato funkce je *nespojitá* na husté podmnožině $\mathbb{R}$, má však Riemannův integrál např. přes interval $[0,1]$. Nejpozději kolem roku 1861 rovněž na přednáškách uváděl příklad funkce

{bdf1} $$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}\ , \tag{15.14}$$

která neměla mít v žádném bodě vlastní derivaci (všimněte si, že přitom sčítáme funkce třídy $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$).

Weierstrass ještě v roce 1872 napsal, že i přední matematici jako např. CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855), Cauchy i PIERRE GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805 – 1859) patrně plně akceptovali soudobou představu, že derivace spojité funkce nemusí existovat (nebo být nevlastní) jen na izolované množině bodů. Když se Weierstrass snažil dokázat, že Riemannem definovaná funkce g z (15.14), resp. (15.4), nemá nikde derivaci, ztroskotal. Posléze však přesto dokázal sestrojit jinou *spojitou funkci h na $\mathbb{R}^1$, která nemá v žádném bodě vlastní derivaci.* Definoval ji podobným způsobem jako Riemann, jako součet řady

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)\ ,$$

kde b je liché číslo, $b > 1$ a $0 < a < 1$; přitom předpokládal, že platí $ab > 1 + (3/2)\pi$. [3)]

[3)] Později v r. 1916 dokázal GOTFRIED HAROLD HARDY (1877 – 1947), že stačí předpokládat $0 < a < 1$ a $ab \geq 1$.

Jádro věty o spojitosti a dalších vět o záměně limit popsal William Fogg Osgood (1864 – 1943) v práci z r. 1897. Tím patrně završil cestu k chápání pojmu stejnoměrné konvergence a jejího významu pro věty, které v sobě skrývají „záměnnost". U nás je užíván obvykle název *Moore-Osgoodova věta.*

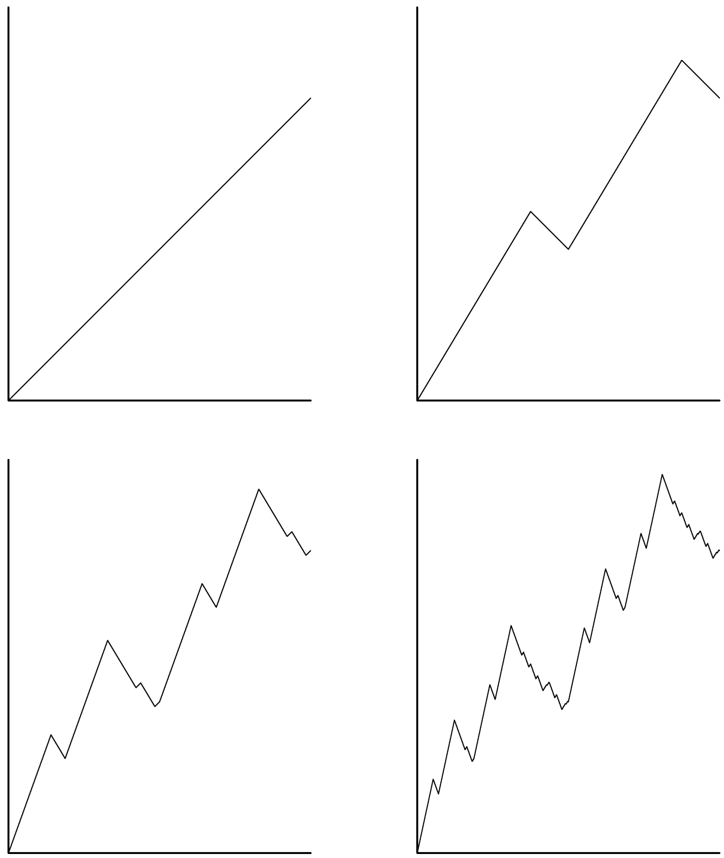
Weierstrassův příklad funkce h publikoval v r. 1875 Paul David du Bois Reymond (1831 – 1889). Weierstrass o příkladu referoval již 18. 7. 1872, ale publikoval ho až r. 1880. Je poučné se u této problematiky ještě zastavit. Teprve v r. 1918 se podařilo Hardymu dokázat, že Riemannem definovaná funkce g z (15.14), *nemá* derivaci ve všech iracionálních násobcích čísla π a taktéž i v *některých* racionálních násobcích π. Avšak v r. 1970 (!) ukázal J. Gerver, že existují body, v nichž g *má* vlastní derivaci (!) a o rok později podal jejich úplnou charakteristiku; viz [5].

Weierstrassův příklad byl přijímán s rozpaky. Je znám například výrok, jehož autorem je Charles Hermite (1822 – 1901), který v dopise Thomasovi Janu Stieltjesovi (1856 – 1894) r. 1905 napsal o spojitých funkcích, které nemají nikde derivaci: *Ale tyto vývody, jakkoli jsou elegantní, jsou postiženy klatbou* (...)*. Se zděšením a hrůzou se odvracím od té politováníhodné rány, kterou nám zasadily tyto spojité funkce* (...). K funkcím podobných vlastností dospěli Charles Cellérier (1818 – 1889) kolem r. 1860 a ne později než r. 1834 Bernard Bolzano (1781 – 1848). Bolzanova konstrukce je geometrické povahy, Cellérier pracoval s řadou funkcí. Je vcelku pochopitelné, že přesný důkaz nediferencovatelnosti *všude* pro tyto funkce byl podán exaktně až později. Objev Bolzanovy funkce byl značně stimulující pro české matematiky; učinil ho středoškolský profesor Martin Jašek (1879 – 1945), který ve třicátých letech vytvořil fotodokumentaci těch Bolzanových rukopisů, které byly uloženy ve vídeňském archívu; srovnej [7].

Již jsme se zmínili o konstrukci složitých funkcí pomocí řad a o prioritě Bernarda Bolzana, který si nejen jako první uvědomil, že spojité funkce mohou mít mnoho bodů, ve kterých derivace neexistuje, ale funkci tohoto typu i jako první popsal. Metodami teorie metrických prostorů lze existenci „spojitých funkcí bez derivace" poměrně snadno dokázat, příklady konkrétních funkcí této vlastnosti jsou však vždy nutně netriviální. Patrně nejjednodušší příklad, který je v současné době znám, je spojován se jménem Bartel Leendert van der Waerden (1903 – 1996), i když Waerden pouze reprodukoval řešení úlohy o nediferencovatelných funkcích, které podali Heyting a Buzeman. Již před jeho objevením na konci 30. let tohoto století existovaly „tovární" postupy na konstrukci funkcí tohoto typu, bylo jich více a byly považovány za vcelku standardní. Příklad 15.4.2 je modifikovaným příkladem Waerdenovým, náleží však zřejmě Takagimu; viz např. [9], str. 174. Protože platí tvrzení, že *monotónní funkce na intervalu* $(0,1)$ *má v tomto intervalu derivaci všude až na množinu Lebesgueovy míry 0*, je každý příklad spojité funkce bez derivace na intervalu $(0,1)$ i příkladem funkce, která není monotónní v žádném intervalu $(a,b) \subset (0,1)$.

Další příklady ilustrují metodu, které se někdy říká *metoda kondenzace singularit.* Pochází od Hermana Hankela (1839 – 1873), avšak k dokonalosti ji dovedl teprve Ulisse Dini (1845 – 1918). Příklad 15.4.5 pochází od Matyáše Lercha (1860 – 1922) z r. 1888; viz [8]. Za zmínku stojí i fakt, že i před Jaškovým objevem byla tato problematika u nás populární. Jeden z prvních přehledných článků s touto problematikou je [4].

Dá se dokázat, že spojitých funkcí, které nemají v žádném bodě vlastní derivaci je v jistém smyslu v prostoru $\mathcal{C}([a,b])$ většina: ty, které mají alespoň v jednom bodě vlastní derivaci, tvoří množinu 1. kategorie v Baireově smyslu (viz Kapitola 13). Důkaz existence spojité nikde nediferencovatelné funkce metodou kategorií pochází od Stefana Banacha (1892 – 1945) z r. 1931; viz [1].



Postupné aproximace Bolzanovy funkce

I když se zdá, že jde o jakousi okrajovou záležitost, není to zcela pravda; jedním z nejsložitějších pojmů je „intuitivně zřejmý“ pojem křivky. Chápe-li se křivka jako spojité zobrazení intervalu $[a, b]$ do $\mathbb{R}^2$ nebo do $\mathbb{R}^m$, šokuje zpravidla studenty matematiky zjištění, že existuje spojité zobrazení $[0, 1]$ na interval $[0, 1] \times [0, 1] \in \mathbb{R}^2$; konstrukci takového zobrazení podal r. 1890 Giuseppe Peano (1858 – 1932). Složky takového zobrazení jsou funkce podobného typu jako spojité funkce bez derivace. Viz [3], str. 106; stejnoměrná konvergence může při konstrukci takových zobrazení významně pomoci.

R. 1827 pozoroval Robert Brown (1773 – 1858) částečky pylu ve vodě a popsal tzv. *Brownův pohyb*. Ten hraje důležitou roli ve fyzice. Jeho matematický popis je podstatně mladší, zde se však opět spojité funkce bez derivace uplatňují při popisu trajektorií Brownovských částic. Je patrné, že *monstra* lze použít k popisu jevů, která mají pro fyziku značnou důležitost.

Elegantní větu o monotonnii a stejnoměrné konvergenci (Věta 15.3.18) dokázal již r. 1878 Dini. Jednou z nejdůležitějších vět v této kapitole byla věta Weierstrassova o polynomiální aproximaci (Věta 15.5.2). Ve stejném roce jako Weierstrass (1885) ji nezávisle dokázal Carle David Tolmé Runge (1856 – 1927). Další zjednodušující důkazy podali např. Henri León Lebesgue (1875 – 1941) r. 1898 a mj. též r. 1892 a 1893 Matyáš Lerch (1860 – 1922). Důkaz, který jsme použili, pochází od Edmunda Georga Hermanna Landaua (1877 – 1938). Jiný velmi známý a používaný důkaz Weierstrassovy věty publikoval r. 1911, resp. 1912 Sergej Natanovič Bernstein (1880 – 1968). Tento důkaz je založen na explicitním vzorci (15.13) pro aproximující polynomy, který neobsahuje integrál.

Další relevantní výsledek publikoval Pavel Petrovič Korovkin (1913 – 1985). Existuje totiž elegantní důkaz Weierstrassovy věty, který je založen na tzv. *Korovkinově větě o třech funkcích* a který využívá Bernsteinových polynomů. Lze ho nalézt např. v článku [2].

Literatura :

{*bib:Ba-15*}

[1] Banach, S.: *Über die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math., **(3)**, 1931, str. 174 – 179.

{*bib:Bau-15*}

[2] Bauer, H.: *Aproximace a abstraktní hranice*, Pokroky MFA, **(26)**, 1981, str. 305 – 326.

{*bib:Boa-15*}

[3] Boas, R. P. jr.: *A primer of real functions*, The Mathematical Association of America, 1981. (3. vydání.)

{*bib:Ču-15*}

[4] Čupr, K.: *O funkcích anorthoidních*, Druhá výroční zpráva II. české stát. reálky v Brně, 1912, str. 27 str.

{*bib:Ger-15*}

[5] Gerver, J.: *More on the differentiability of the Riemann function*, Amer. J. Math., **(93)**, 1971, str. 33 – 41.

{*bib:JaDII-15*}

[6] Jarník, V.: *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1977.

{*bib:Jab-15*}

[7] Jarník, V.: *Bolzano a základy matematické analýzy*, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1981.

{*bib:Le-15*}

[8] Lerch, M.: *Über die Nicht-differenzierbarkeit gewisser Funktionen*, Crelle Journ. für Math., **(103)**, 1888, str. 126 – 138.

{*bib:St-15*}

[9] Stromberg, K. R.: *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

{*bib:We-15*}

[10] Weyr, E.: *Počet differenciálný*, Jednota českých matematiků, Praha, 1902.