matalýza IIa

Pozor! Tyhle “skripta”, resp. spíš zápisky obsahují určitě spoustu chyb! Pokud ňákou najdete, zamejlujte mi jí.

Jinak doufám, že někomu budou k užitku. Další blably viz web, z kteýho jste je stáhli ...

Ondra Pacovský :-)

0.1. zkousky

0.1.1. pozadavky.

pisemka.

(1) ODR - separace, linearni (Bermoulli), hlavne **system** s const. koef
(2) Lebesgue - konvergence, vyjadreni radou (casto oboji)
(3) $\int$ s parametrem (spocitat, zderivovat)

ustni.

(1) nejde o to umet **detailne** vsechny dukazy - smysluplna myslenka, naznak
(2) definice, vety, klicovy pojmy
(3) okruh otazek - pokec

hodnoceni. pisemka staci 1 napsat (ale dobre); nevyhodi se jenom za pisemku

time. K1 9:00-12:00

pisemky: (mail nebo karlin)

Po 21.1
Ct 24.1
Po 28.1
Ct 31.1
Po 4.2
Po 11.2

ustni. den pote; K2 - ∞

0.1.2. leden. 2.1. se prednasi (!)
9.1. tez
cviceni navic:
Po 7.1. 19:00-20:30
Ut 8.1. 7:20-8:50 (T6?)

0.1.3. d.

0.1.4. zkratky**:** MP - metricky prostor
L$[Z, N, K]$ - linearni (ne)zavislost, kombinace

0.1.5. plan: MP2
DIFER. ROVNICE (normalni - parcialni jinde)
LEBESGUEUV $\int$

0.2. ze cviceni

nezapominat: overovat podminky (zpojitost, nezapornot) - vsechno tam psat
invervaly, singularity, trivialni reseni
lepeni

0.2.1. intergracni faktor. - vynasobeni nezapornouu **spojitou** funkci $(\psi(x))$

$$\begin{aligned} y\prime + fy &= g \\ y\prime\psi + fy\psi &= g\psi \end{aligned}$$

pokud $(y\psi)\prime = g\psi$, mame

$$\begin{aligned} y\prime\psi + fy\psi &= y\prime\psi + y\psi\prime \\ fy\psi &= y\psi\prime \end{aligned}$$

bud $y \equiv 0$ a nebo:
$f\psi = \psi\prime \Rightarrow \psi = e^{\int f} C, c > 0$
$(y\psi)\prime = g\psi \Rightarrow y\psi = \int (g\psi) \Rightarrow y = \frac{\int (g\psi)}{\psi} = \frac{\int\left(ge^{\int f} C\right)+k}{e^{\int f} C} = \frac{\int\left(ge^{\int f}\right)+K}{e^{\int f}}$

0.2.2. homogenni rovnice. $f(x,y)$ homogenni $\Leftrightarrow f(cx,cy) = f(x,y)\,\forall c \in \mathbf{R}$
lze prevest na rov. se sep. promennymi
$x \neq 0 \Rightarrow c = \frac{1}{x}, f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$
subst $y = zx$
$y\prime = z\prime x + z$
$z\prime x + z = f(1,z) = g(z)$
$z\prime = \frac{g(z)-z}{x}$
prevoditelne. rovnice tvaru $\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}$ je prevoditelna substituci $X = x - A, Y = y - B$ na homogenni rovnici (posunou se pouze pocatecni podminky)
$\frac{a(x-A)+b(y-B)+c}{d(x-A)+e(y-B)+f} = \frac{(ax+by)+(c-aA-bB)}{(dx+ey)+(f-dA-bB)}$
je homogenni $\Leftrightarrow c = aA + bB \,\&\, f = dA + eB$

0.2.3. linearni ODR se specialni pravou stranou. kdyz

$$Ly = e^{ax}\left(P(x)\sin bx + Q(x)\cos bx\right) \tag{0.2.1}$$

Je-li $\lambda = a + bi$ je vl. cislo prislusne homogenni rovnice, polozime k =mocnostλ jinak $k = 0$.

Pak $\exists$polynomy R, S stupne $n = \deg R, S \leq \max(\deg P, \deg Q)$ takove, ze funkce

$$x^k e^{ax}\left(R(x)\sin bx + S(x)\cos bx\right) \tag{0.2.2}$$

je resenim rovnice 0.2.1

koeficienty polynomu R, S dostaneme tak, ze dosadime 0.2.2 do puvodni rovnice, vydelime $e^{\alpha x}$, porovname koeficianty a dostaneme soustavu linearnich algebraickych rovnic

/* POZOR - postup je velmi pekny a primocary, ale je treba spravne urcit k a n !!!
*/
/*dukaz vyuzit LN sin a cos, n-krat zderivovat, dostat koeficienty*/
(skip 10 chapters)

0.2.4. soustavy (TODO: revise, maybe use matrices).

obecna soustava ODR.

$$\begin{aligned} y_1^{(m_1)} &= f_1\left(x, y_1, y_1\prime, \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, \ldots, y_n, y_n\prime, \ldots y_n^{(m_n-1)}\right) \\ &\vdots \\ y_n^{(m_1)} &= f_n\left(x, y_1, y_1\prime, \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, \ldots, y_n, y_n\prime, \ldots y_n^{(m_n-1)}\right) \end{aligned}$$

pRRevedeme substitucemi na soustavu rovnic 1. radu (podobne jako u 1 rovnice 1. radu)

$y_1 = y_1, y_1' = y_{11}, \ldots, y_n' = y_{n1}$

$y_{12}' = y_{13}$

$y_{1(m_1-1)}' = f_1\left(x, y_1, y_{11}, y_{12,\ldots\ldots, y_{n(m_n-1)}}\right)$

0.2.4.1. *soustava linearnich rovnic 1. radu.* $y\prime = Ay + f$, kde A je matice funkci $a_{ij}(x)$, $y\prime, y, f$ jsou vektory funkci

Reseni musi byt ve tvaru $y_i = c_1 y_i^1 + \ldots + c_n y_i^n$, kde $\forall j : y_i^j$ je reseni homogenni soustavy a $\forall j : y_i^j$ jsou LN

0.2.4.2. *konstantni koeficienty (homogenni).* $y_i = k_i e^{\lambda x}$

$k_i \lambda e^{\lambda x} = a_{i1} k_1 e^{\lambda x} + \ldots + a_{in} k_n e^x$

$k_i \lambda = a_{i1} k_1 + \ldots + a_{in} k_n$ - vyresim soustavu, dosadim λ, vyresim k

0.2.4.3. *n vl.č. ale komplexni.* $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$

Pro tyto λ_1, λ_2 spocitam (komplexni) k-cka

$k_j^1 = l_j^1 + i j_j^2$

$k_j^2 = l_j^1 - i j_j^2$

$y_j^1 = e^{\alpha x}\left(l_j^1 \cos(\beta x) - l_j^2 \sin(\beta x)\right)$

$y_j^2 = e^{\alpha x}\left(l_j^1 \cos(\beta x) + l_j^2 \sin(\beta x)\right)$

0.2.4.4. *nasobny.* λ_i je r_i-nasobny

$y_i = P_{ij}(x) e^{\lambda_i x}$ kde $\deg P_{ij} \leq r_i - 1$ (-> musi vyjit 2-parametricky - 2D (spis n-param, ne ??))

TODO: takle je to dost prasacky napsany - jde pouzit jordan a tak..

P_{ij} se da hledat ve tvaru $wx + v$

kde

0.2.4.5. *nasobny & C.* $y_i = e^{\alpha x}\left(P_{ij}(x) \cos(\beta x) + Q_{ij}(x) \sin(\beta x)\right)$

0.2.4.6. *nehomogenni.* variace konstant ...

$y_j = c_1(x) y_j^1 + \ldots + c_n(x) y_j^n$ - zdrerivuju

$c_1\prime(x) y_j^1 + \ldots + c_n\prime(x) y_j^n = f_j(x)$ - vyresim, zintegruju

0.3. kuchařky

0.3.1. integrovani. vzorce

$\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

$\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\cos x = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 x}}$

0.3.2. tabulkove integraly.

$f(x)$	$\int -c$	$x \in$		
$n^n, n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x \in \mathbf{R}$ pokud $n \geq 0$,$x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ pokud $n < 0$		
x^{-1}	$\log\lvert x\rvert$	$x \neq 0$		
e^x	e^x	$\mathbf{R}$		
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbf{R}$		
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbf{R}$		
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbf{Z}$		
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-cotg\,(x)$	$(0; \pi) + k\pi, k \in \mathbf{Z}$		
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbf{R}$		
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x = -\arccos x$	$(-1, 1)$		
$\tan x$	$\log\cos x$	...		

substituce.

na co	substituce	diferencial	vy
$R(\sin x, \cos x)$	$t = \tan\frac{x}{2}$	$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	cos
$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$	$y = \tan x$	$dx = \frac{1}{1+y^2}dy$	$\cos x$
$R\left(x, \left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right)^{\frac{1}{q}}\right), q \in N, q > 1$	$y = \left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right)^{\frac{1}{q}}$	$dx = qy^{q-1}\frac{DA-CB}{(A-Cy^q)^2}dy$	$x =$
$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), a > 0,$ ired.	$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + y$ (Eu)		

rozklad na parcialni zlomky. $Q(x) = a_n (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{\beta_1} \dots \left(x^2 + p_l x + q_l\right)^{\beta_l} \forall$

R

tak, ze $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}^1}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{A_1^k}{x-x_k} + \ldots + \frac{A_{\alpha_k}^k}{(x-x_k)^{\alpha_k}}$
$+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{B_{\beta_1}^1 + C_{\beta_1}^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \ldots + \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2+p_lx+q_l} + \ldots + \frac{B_{\beta_l}^l + C_{\beta_l}^l}{(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l}}$

0.3.3. diferencialni kucharka. insert 2.2.1. (i lepenio)

0.3.4. lebesgueova. $T_{\infty}^{f,a}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$
insert thai polynom, bodove radove aproximace

thaiske rady.

funkce	rada $\sum_{k=0}^{\infty}$	platnost (kdyz neni $\mathbf{R}$), x
$T_{\infty}^{f,a}(x)$	$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$	
e^x	$\frac{x^k}{k!}$	
e^{-x}	$(-1)^k \frac{x^k}{k!}$	
$\sin x$	$(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	
$\cos x$	$(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	
ne-thai		
$\log(x+1)$	$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$	

binom. rada. $(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$

0.3.4.1. *konvergence* $\int$.

srovnavaci skaly.

dx	konerguje $\Leftrightarrow$
$\int_0^K x^\alpha$	$\alpha > -1 \forall K \in (0,\infty)$
$\int_\delta^\infty x^\alpha$	$\alpha < -1 \forall \delta \in (0,\infty)$
$\int_0^K x^\alpha \|\log x\|^\beta$	bud $\alpha > -1$ nebo $\alpha = -1 \& \beta < -1$
$\int_\delta^\infty x^\alpha \|\log x\|^\beta$	bud $\alpha < -1$ nebo $\alpha = -1 \& \beta < -1$
$\int_0^\infty x^\alpha$	nikdy!
$\int_0^\infty x^\alpha \|\log x\|^\beta$	$\alpha = -1 \& \beta < -1$

0.3.4.2. $\lim \int = \int \lim$. kdy plati $\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\, dx = \int_M f(x)\, dx$?
lewi. nezaporna
$f \geq 0, f_n \nearrow f$ s.v. na M
lebesg. majoranta
$f_n \to f$ s.v. na M, $\exists g \in L(M), |f_n(x)| \leq g(x) \forall n \in \mathbf{N}$, s.v. na M

0.3.4.3. $\int \sum = \sum \int$. plati: $\int_M \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M f_n(x)\, dx$, jestlize je splnena aspon 1 z nasl. podminek:
(i) $f_n \geq 0$ (Levi)
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_M |f(x)|\, dx < \infty$ (hruby Lebesgue)
(iii) $f_n(x) = (-1)^n g_n(x), g_1 \geq g_2 \geq \ldots > 0, g_n \searrow 0 \& g_1 \in L(M)$ (alternujici Lebesgue)
(iv) $g \in L(M) : |\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq g(x)$
zima 2001

KAPITOLA 1

Metricke prostory II

1.1. Uplne metricke prostory

EXAMPLE 1.1.1. v $\mathbf{R}$ $\{x_n\}$ je kvg $\Leftrightarrow$ splnuje BC-podminku:
$\forall\varepsilon > 0\exists n_o\forall m, n \geq n_0 : |x_n - x_m| < \varepsilon$

DEFINITION 1.1.2. Necht (P, ρ) je MP a $\{x_n\} \subset P$
Rekneme, ze $\{x_n\}$ je **cauchyovska**, jeslize plati $\forall\varepsilon \in \mathbf{R}\exists n_0\forall m, n \in \mathbf{N}, m, n \geq n_0 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$
/*kdyz neni, jako by tam ta metrika chybela

NOTE 1.1.3. (pozorovani)
Jestlize $\{x_n\}$ je konvergentni v (P, ρ), pak je cauchyovska.

DŮKAZ. $\lim \rho(x_n, x) = 0$
Vezmeme $\varepsilon > 0$. K nemu $\exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall m \geq n_0 : \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$
Pro $m, n \geq n_0 : \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \varepsilon$ □

DEFINITION 1.1.4. Rekneme, ze MP (P, ρ) je **uplny**, jestlize kazda cauchyovska posloupnost v (P, ρ) je konvergentni v (P, ρ)

EXAMPLE 1.1.5. (i)$\mathbf{R}$ je
(ii) $P = (0, 1)$, obvykla metrika - neni
$x_n = \frac{1}{n}$ je cauchyovska, ale ne konvergentni v (P, ρ)
(iii) $\mathbf{R^n}$, ρ_1,... - uplne
(iv) $(C([a, b]), \rho_s)$ je uplny
$\rho_s(f, g) = \sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$
(dukaz: vezmeme cauchyovskou posloupnost, vezmu x, posloupnost $\{f_n(x)\}$ je cauchyovska, ukazat, ze ta posloupnost konverguje stejnomerne k f v ρ_s)
(v) (P, ρ_{diskr}) je
(vi) $(\mathbf{Q}$, obvykla) neni

THEOREM. *1.*
Necht (P, ρ) je kompaktni. Pak (P, ρ) je uplny.

DŮKAZ. Necht $\{x_n\}$ je cauchyovska posloupnost prvku P. Potom muzeme vybrat $\{x_{n_k}\}$ konvergentni.
$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in P$
Vezmeme $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n_k \geq n_0 : \rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$
$\forall m, n \geq n_0 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$
Pak pro $n \geq n_0 : \rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < 2\varepsilon$ (volime $n_k \geq n_0$) □

DEFINITION 1.1.6. Necht (P, ρ) je MP a necht $A \neq 0 \subset P$.
Potom (A, ρ) je opet MP se **zdedenou** (**indukovanou**) metrikou ρ

NOTE 1.1.7. jestlize G je v P otevrena, pak $G \cap A$ je otevrena v A
Tedy napr. pro $P = (-2, 2)$, $A = [-1, 1]$, potom $[-1, 0)$ je otevrena mnozina v A (i kdyz neni otevrena v P)

THEOREM. *2.*
Necht (P, ρ) je MP, $M \subset P$.
Pak plati: $(M, \rho\,|_{M \times M})$ je uplny $\Leftrightarrow$ M je uzavrena v (P, ρ).

DŮKAZ. "$\Rightarrow$"
(pouzijeme konvergentni charakterizaci uzavrenych mnozin)
Vezmeme $\{x_n\} \subset M, x_n \to x$
$?x \in M$
$\{x_n\}$ je cauchyovska v $(P, \rho) \Rightarrow$ je cauchyovska v $(M, \rho\,|_{M \times M})$ (to same protoze $\{x_n\} \subset M$)

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{uplnost } (M, \rho|_{M \times M})} \quad \begin{matrix} \lim x_n = y \in M \\ \lim x_n = x \end{matrix} \quad \Rightarrow x = y \in M$$

"$\Leftarrow$"
$\{x_n\}$ je cauchyovska v $(M, \rho\,|_{M \times M})$
$?\{x_n\}$ je konvergentni
$\{x_n\}$ je cauchyovska v $(M, \rho\,|_{M \times M}) \Rightarrow \{x_n\}$ je cauchyovska v (P, ρ)

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{z uplnosti}} \quad x_n \to x \in P$$

M je uzavrena $\Rightarrow x \in M \Rightarrow \{x_n\}$ je konvergentni v $(M, \rho\,|_{M \times M})$ □

NOTE 1.1.8. hodi se k vysetrovani uplnosti
diamA

DEFINITION 1.1.9. Necht (P, ρ) je MP, $A \subset P, A \neq \emptyset$
Diametrem mnoziny A rozumime

$$diamA = \sup\{\rho(x, y), x \in A, y \in A\}$$

EXAMPLE 1.1.10. $A = [-1, 1]^2 \subset \mathbf{R}^2$
eukleid. metrika: $diamA = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$
ρ_∞: $diamA = 2$

THEOREM. *3. (Cantor)*
Necht (P, ρ) je MP. Pak je ekvivalentni:
(i) (P, ρ) je uplny
(ii) pro kazdou posloupnost uzavrenych (v (P, ρ)) neprazdnych mnozin $\{A_n\}$, ktera spluje $\lim diamA_n = 0, A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n$ *plati, ze $\bigcap_n A_n$ je jednoprvkova mnozina*

DŮKAZ. (ze cviceni)
"$\Rightarrow$"
(i) Necht $x \neq y \in \bigcap A_n$
$\rho(x, y) = d \neq 0$, ale $diamA_n \to 0$
(ii) (neprazdnost pruniku):
$\forall A_n \exists x_n \in A_n$ (z predpodladu **neprazdnosti** A_n)

cauchyovskost: $\forall n > m, x_m \in A_m, x_n \in A_n : \rho(x_m, x_n) < diamA_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Zvolme $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists m_0$ takove, ze $\forall m \geq n_0 : diamA_m < \varepsilon$
$x_m \to x$
plati $x \in A_n$??
$\{x_m\} \overset{m>n}{\subset} A_n \& A_n \text{uzavrena} \& x_m \to x \Rightarrow \exists x \in A_n \forall n$
TODO
"$\Leftarrow$"
$\{x_n\}$ cauch, chceme $\{x_n\} \to x$
def $A_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}$

LEMMA. *$diamA = diam\overline{A}$ - cviceni*

potom $diamA_n \to 0$ protoze:
pro $\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$
$n \geq n_0 \Rightarrow diam\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} < \varepsilon$
$x \in \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \Rightarrow \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \overset{n\to\infty}{\to} x$
$n \geq n_0 : \rho(x_n, x) < \varepsilon$ □

NOTE 1.1.11. podminka $diamA_n \to 0$
$(\mathbf{R}, \rho), A_n = [n, \infty) \Rightarrow \cap A_n = \emptyset$

1.2. Bamachova veta o kontrakci (pevnem bodu)

DEFINITION 1.2.1. Necht (P, ρ) je MP a $T : P \to P$.
Rekneme, ze T je **kontrakce**, jestlize $\exists \gamma \in [0, 1)$ takove, ze $\forall x, y \in P$: $\rho(T(x), Y(y)) \leq \gamma\rho(x, y)$

THEOREM. *4. (Banach)*
Necht (P, ρ) je uplny neprazdny MP a $T : P \to P$ je kontrakce.
Potom $\exists! x \in P : T(x) = x$
(Existuje prave jeden pevny bod)

DŮKAZ. myslenka: (2.pic) - posloupnosti k x
Zvolime $x_1 \in P$ Definujeme: $x_n = Tx_{n-1}$
Tvrdime: $\{x_n\}$ je Cauchyovska:

$$\begin{aligned} \rho(x_2, x_3) = \rho(Tx_1, Tx_2) &\leq \gamma\rho(Tx_1, Tx_2) \\ &\vdots \\ \rho(x_n, x_{n+1}) &\leq \gamma^{n-1}\rho(x_1, x_2), n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

m, n BUNO $n > m$
$\rho(x_m, x_n) \overset{\triangle}{\leq} \rho(x_m, x_{m+1}) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) \leq \gamma^{m-1}\rho(x_1, x_2) + \gamma^m\rho(x_1, x_2) + \ldots + \gamma^{n-2}\rho(x_1, x_2) =$
$= (\gamma^{m-1} + \gamma^m + \ldots + \gamma^{n-2})\rho(x_1, x_2) \leq \frac{y^{m-1}}{1-\gamma}\rho(x_1, x_2) \overset{m\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \{x_n\}$ je Cauchyovska
(P, ρ) uplny $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x \in P$
Tvrdim $Tx = x$

$\underbrace{x_{n+1}}_{\to x} = \underbrace{Tx_n}_{\to Tx}$ (nebot $\rho(Tx_n, Tx) \leq \gamma\rho(x_n, x) \to 0$)
limita je jednoznacna $\Rightarrow Tx = x$
(nebo take $\rho(x, Tx) \leq \underbrace{\rho(x, x_{n+1})}_{\to 0} + \underbrace{\rho(x_{n+1}, Tx_n)}_{=0} + \underbrace{\rho(Tx_n, Tx)}_{\to 0}$
zbyva jednoznacnost - sporem
Necht $\exists y \in P : Ty = y$
Pal $\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leq \gamma\rho(x, y) \overset{\gamma \geq 1}{\Rightarrow} \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ □

NOTE 1.2.2. Parametr $\gamma \in [0, 1)$ je dulezity - jestlize T splnuje pouze $\forall x, y : \rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$, pak nemusi byt kontrakce - takove zobrazeni nazyvame neezpanzivni

THEOREM. *5. (o neexpanzivnim zobrazeni)*
Necht (P, ρ) je kompaktni MP a $T : P \to P$ je neexpanzivni na P.
Potom $\exists! x \in P : T(x) = x$

DŮKAZ. navod: studujte vlastnosti funkce $f : x \to \rho(x, Tx)$
$f : P \to \mathbf{R}$
f je spojita - T, ρ, Id je spojite, $f = \rho(Id, T)$
$\exists x_0$ minimum f na P
$f(x_0) = 0 = \rho(x_0, Tx_0)$
$f(x_0) > 0 \Rightarrow f(Tx_0) = \rho(Tx_0, T(Tx_0)) < \rho(x_0, Tx_0) = f(x_0)$ spor s minimem
jednoznacnost:
$Ty = y$
$\rho(x_0, y) = \rho(Tx_0, Ty) \overset{=0}{< \rho(x_0, y)} = -\text{NE} \Rightarrow x_0 = y$
$|f(x) - f(y)| =$ □

EXAMPLE 1.2.3. Dokazte, ze $\exists!$ funkce $f \in C^1[0, 1] : f\prime(x) = af(x) + b, f(0) = c, x \in (0, 1)$
kde $a, b, c \in \mathbf{R}, |a| < 1$
Integraci zjistime, ze takova funkce musi splnovat:

$$\begin{aligned} \int_0^x f\prime(t)\,dt &= a\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x b\,dt \\ f(x) - f(0) &= a\int_0^x f(t)\,dt + bx \\ f(x) &= a\int_0^x f(t)\,dt + bx + c \end{aligned}$$

Definuji zobrazeni (operator) $T : C_0[0, 1] \to C_0[0, 1]$, kde $C_0 = \{f \in C[0, 1], f(0) = c\}$
$(Tf)(x) = a\int_0^x f(t)\,dt + bx + c$
nyni tvrdim: (i) $C_0[0, 1]$ je uplny vzhledem k $\rho(f, g) = \sup_{[0,1]} |f(x) - g(x)|$ - cviceni (V2)
(ii) T je na $C_0[0, 1]$ kontrakce
$\rho(Tf, Tg) \leq \gamma\rho(f, g)$ pro nejake $g \in [0, 1)$ a $\forall f, g \in C_0[0, 1]$
$\rho(Tf, Tg) = \sup_{x\in[0,1]} |Tf(x) - Tg(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|a\int_0^x f(t)\,dt + bx + c - \left(a\int_0^x g(t)\,dt + bx + c\right)\right|$

$= \sup_{x\in[0,1]} \left|a \int_0^x (f(t) - g(t))\ dt\right| \leq |a| \sup_{x\in[0,1]} a \int_0^x |f(t) - g(t)|\ dt = |a| \int_0^1 |f(t) - g(t)|$
$\leq |a| \int_0^1 \sup_{s\in[0,1]} |f(s) - g(s)|\ dt = |a| \sup_{s\in[0,1]} |f(s) - g(s)| \int_0^1 dt = |a|\, \rho(f, g)$
$|a| < 1 \Rightarrow T$ je kontrakce $\overset{V4}{\Rightarrow} \exists! f \in C_0[0,1] : Tf = f$ - f je hledane reseni

Note 1.2.4. (i) $f \in \mathbf{C}^1$ nebot $f \in \mathbf{C}_0[0,1] \& f\prime = af + b \Rightarrow f\prime \in \mathbf{C}[0,1] \Rightarrow f \in \mathbf{C}^1[0,1]$
(ii) rozmyslete, za jakych podminek na konstanty a, b, c, d by T byla kontrakce, kdybychom zmenili $[0,1]$ na $[0,d]$

Theorem. *6. (o pevnem bodu mocniny)*
Necht (P,ρ) je uplny MP a necht
$T : P \to P, \exists n \in \mathbf{N} : T^n$ je kontrakce
Potom T ma v P prave 1 pevny bod

Důkaz. **existence:**
V4$\Rightarrow \exists! x_0 : T^n x_0 = x_0$
Potom $T^n(Tx_0) = T(T^n x_0) = Tx_0$ tedy Tx_0 je pevny bod
Z jednoznacnosti $Tx_0 = x_0$
jednoznacnost:
$Ty = y \Rightarrow T^2 y = Ty = y \Rightarrow \ldots T^n y = y$
$\Rightarrow$ z jednoznacnosti pro $T^n : y = x_0$ □

1.3. souvisle metricke prostory

Definition 1.3.1. MP (P,ρ) nazveme **nesouvislym**, jestlize existuji dve neprazdne otevrene a disjunktni mnoziny $G_1, G_2 : P = G_1 \cup G_2$
V opacnem pripade je (P,ρ) **souvisly**.
Neprazdna podmnozina $A \subset P$ ze nazyva nesouvisla, jestlize je MP (A,ρ) nesouvisly

.

Definition 1.3.2. Mnozina $H \subset P$ se nazyva **obojetna**, jestlize $H \neq 0 \neq P$, otevrena a uzavrena

Example 1.3.3. (i) $\mathbf{R}$ nema zadne obojetne podmnoziny
(ii) $(0,1) \cup [2,3]$ ma prave 2 obojetne podmnoziny
(iii) v (P, ρ_{diskr}) je kazda $0 \neq A \subset\neq P$ obojetna

Theorem. *7. (charakterizace nesouvislych prostoru)*
Pro MP (P,ρ) je ekvivalentni:
(i) P je nesouvisly
(ii) $\exists$ obojetna mnozina $H \subset P$
(iii) $\exists f \in C : P \overset{na}{\to} \{0,1\}$
(iv) $\exists A, B \neq 0, A \cap B = \emptyset$, uzavrene, tak, ze $P = A \cup B$

Důkaz. (i)$\Leftrightarrow$(iv) cviceni
(i)$\Rightarrow$(ii)
P nesouvisly $\Rightarrow P = G_1 \cup G_2$, staci volit $H = G_1$, pak H je obojetna
H je zrejme neprazdna, otevrena, uzavrena ($P \setminus G_1 = g_2$ je otevrena)
$H \neq P$, protoze $G_2 \neq \emptyset$

(ii)⇒(i) $\exists H$ obojetna $\Rightarrow P = H \cup (P, H)$ (otevrene,neprazdne,disjunktni)

(i)⇒(iii) $f(x) = \begin{matrix} 0\, x \in G_1 \\ 1\, x \in G_2 \end{matrix}$

$G_i \neq 0 \Rightarrow f$ je na.

spojitost $f \Leftrightarrow f^{-1}$ (otevrena) = otevrena:

$f^{-1}(\{1\}) = G_2, f^{-1}(\{0\}) = G_1, \ldots$ otevrena

(iii)⇒(i)

mame f spojite, $f : P \overset{na}{\to} \{0, 1\}$

def $G_1 = f^{-1}(\{0\}), G_2 = f^{-1}(\{1\})$

$G_{1,2}$ otevrene, jsou otevrene v $\{0, 1\}$, neprazdne (f je na), zrejme disjunktni □

THEOREM. *8. (vlastnosti souvislych prostoru)*

(i) spojity obraz souvisle mnoziny je souvisla mnozina

$f : (P, \rho) \to (Q, \sigma)$, *spoj.*, $A \subset P$ *souv.* $\Rightarrow f(A)$ *je souvisla v* Q

(ii) Necht A *je souvisla mnozina v* (P, ρ). *Necht* $A \subset B \subset \overline{A}$. *Potom* B *je souvisla (spec.* $\overline{A}$ *souvisla).*

(iii) Necht mnoziny $\{A_\alpha\}_\alpha$ *jsou souvisle v* (P, ρ) *a necht* $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$

Potom $\bigcup_\alpha A\alpha$ *je souvisla*

(iv) Necht $A \subset \mathbf{R}$. *Potom* A *je souvisla* $\Leftrightarrow A$ *interval (tez* $\{x\}$ *nebo* $\emptyset$*)*

DŮKAZ. (i) neprimo - Necht $f(A) = G_1 \cup G_2, G_i$ neprazdne, otevrene, disjunktni

Potom $A = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$, $f^{-1}(G_i)$ zrejme otevrene, disjunktni, neprazdne

(ii) sporem - Necht $B = G_1 \cup G_2$, G_i neprazdne, otevrene, disjunktni

potom $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$

$(A \cap G_i)$ otevrene v (A, ρ), disjunktni, $\Rightarrow$ jedna z $A \cap G_i$ musi byt prazdna.

BUNO $(A \cap G_i) = \emptyset \Rightarrow A \subset G_1$

$G_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in G_2$, G_2 otevrena $\Rightarrow \exists r : B^r(x) \subset G_2$

$G_2 \cap G_1 = \emptyset \Rightarrow \operatorname{dist}(x, G_1) \geq r > 0$

$G_1 \supset A \Rightarrow (x, A) \geq r > 0$

$x \in G_2 \subset B \subset \overline{A} \Rightarrow (x, A) = 0$ **spor**.

(iii) $\bigcup_\alpha A_\alpha = G_1 \cup G_2$, G_i disj., ot. (chci: jedna je prazdna)

$\forall \alpha : A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$ ot. v A_α, disj. $\Rightarrow$ aspon 1 je prazdna (BUNO $A_\alpha \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow A_\alpha \subset G_1$)

Zatim vime: $\forall \alpha$ budto $A_\alpha \subset G_1$ nebo $A_\alpha \subset G_2$. Protoze ale $\bigcap A_\alpha \neq 0$, musi byt $\forall \alpha : A_\alpha \subset G_1 \Rightarrow G_2 \neq \emptyset$

(iv) "⇒"

Necht $A \subset \mathbf{R}, A$ neni interval. Potom $\exists x < y < z : x, z \in A, y \notin A$. Zvolim $A = (A \cap (-\infty, y)) \cup (A \cap (y, \infty))$ ot. v A, neprazdne, disjunktni mnoziny $\Rightarrow A$ neni souvisla

"⇐" sporem

Vezmeme $I = [a, b]$, necht $\exists G_1, G_2$ ot,nepr,disj,$I = G_1 \cup G_2$

BUNO necht $b \in G_2$. S nim cele okoli (G_2 otevrena): $\exists \delta > 0 : (b - \delta) \subset G_2$

Zvol $\xi = \sup G_1$. Vime $\xi \neq b, \xi \neq a$ ($\{a\}$ neni otevrena). Kam padne ξ? Do sporu.

Kdyby $\xi \in G_1$, G_1 ot. ⇒okoli $\xi \subset G_1$ spor s $\xi = \sup G_1$

Kdyby $\xi \in G_2$, G_2 ot. ⇒okoli $\xi \subset G_2$ spor s $\xi = \sup G_1$

Tedy uzavreny interval je souvisla mnozina.

$[a, b) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[a, b - \frac{1}{n}\right]$ (sjednoceni souvislych mnozin s neprazdnym prunikem(1 BUNO))

(iii)$\Rightarrow$ $[a, b)$ souvisly

pro (a, b) analogicky □

DEFINITION 1.3.4. Mnozina $I \subset (P, \rho)$ se nazyva **oblouk**, jestlize je to spojity obraz uzavreneho intervalu. (tj. $\exists f : [0, 1] \to P$ spoj., $f([0, 1]) = I$). (nekdy take krivka)

Mnozina $A \subset (P, \rho)$ se nazyva **obloukove souvisla**, jestlize lze kazde dva jeji body spojit obloukem. (tj. $\forall x, y \in A \exists f : [0, 1] \to A$ spoj.,$f(0) = x, f(1) = y$)

THEOREM. *9. (o sovislosti souvislosti s obloukovou souvislosti) Kazda obloukove souvisla mnozina je souvisla.*

DŮKAZ. Necht A je obloukove souvisla a neni souvisla. Potom $A = G_1 \cup G_2$ ot,nepr,disj.

$x \in G_1, y \in G_2 \Rightarrow \exists f : [0, 1] \to A : f(0) = x, f(1) = y$

Potom $f([0, 1]) = (f([0, 1]) \cap G_1) \cup (f([0, 1]) \cap G_2)$ - sjednoceni neprazdnych,disj,otevrenych v $(f([0, 1]), \rho)$

$\Rightarrow f([0, 1])$ je nesouvisla. - spor, protoze $[0, 1]$ souvisly(V8(iv) a spojity obraz souvisle mnoziny (V8(i)) □

NOTE 1.3.5. (i) ne kazda souvisla mnozina je o.s. $G =$ graf fce $\sin \frac{1}{x}, A = G \cup (-\infty, 0]$ neni kompakt

(ii) spojitym obrazem o.s. mnoziny je o.s.

(iii) uzaver obloukove souvisle mnoizny nemusi byt o.s. - G+usecka - jinak

(iv) $G \in \mathbf{R^n}$ otevrena a souvisla (**oblast**) je o.s.

(v) A_α jsou o.s., $\cap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \cup_\alpha A_\alpha$ je o.s.

1.3.1. dodelavka. $f(x) = \rho(x, Tx)$ spojita

T neexp.

$|f(x) - f(y)| = |\rho(x, Tx) - \rho(y, Ty)|$ BUNO $\rho(x, Tx) \geq \rho(y, Ty)$

$\leq \rho(x, y) + \rho(y, Ty) + \rho(Ty, Tx) - \rho(y, Ty)$

$\leq 2\rho(x, y)$

$\Rightarrow f$ spojita

KAPITOLA 2

Obycejne diferencialni rovnice

hlavne na cvicenich, nektere typy rovnic jenom na cviceni

2.1. zakladni pojmy, peanova a picardova veta

2.1.1. pokec. diferencialni rovnice - rovnice pro neznamou **funkci**, v niz se vyskytuje:

(1) funkce y
(2) derivace funkce y
(3) promenne funkce y

parcialni - kdyz je y funkce vice promennych

DEFINITION 2.1.1. Necht $\Phi :\subset \mathbf{R^{n+2}} \to \mathbf{R}$ je funkce, ktera neni konst. vzhledem k posledni promenne. Potom vztah
(1) $\Phi\left(x, y, y\prime, y\prime\prime, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$
nazveme **obycejnou diferencialni rovnici** n-teho radu. (ODR)

.

DEFINITION 2.1.2. **Reseni** ODR (1) je funkce y definovana na intervalu I
(i) y ma na I vlastni derivace az do radu n vcetne
(ii) $\forall x \in I : \Phi\left(x, y\left(x\right), y\prime\left(x\right), y\prime\prime\left(x\right), \ldots, y^{(n)}\left(x\right)\right) = 0$

NOTE 2.1.3. Reseni je dvojice (y, I)

DEFINITION 2.1.4. Rekneme, ze $\left(\overline{y}, \overline{I}\right)$ je **rozsirenim** reseni (y, I), jestlize
(i) $\overline{y}$ resi (1) na $\overline{I}$
(ii) $I \subset \overline{I}$ (ne roven)
(iii) $\overline{y} = y$ na I
analogicky **zuzeni**

.

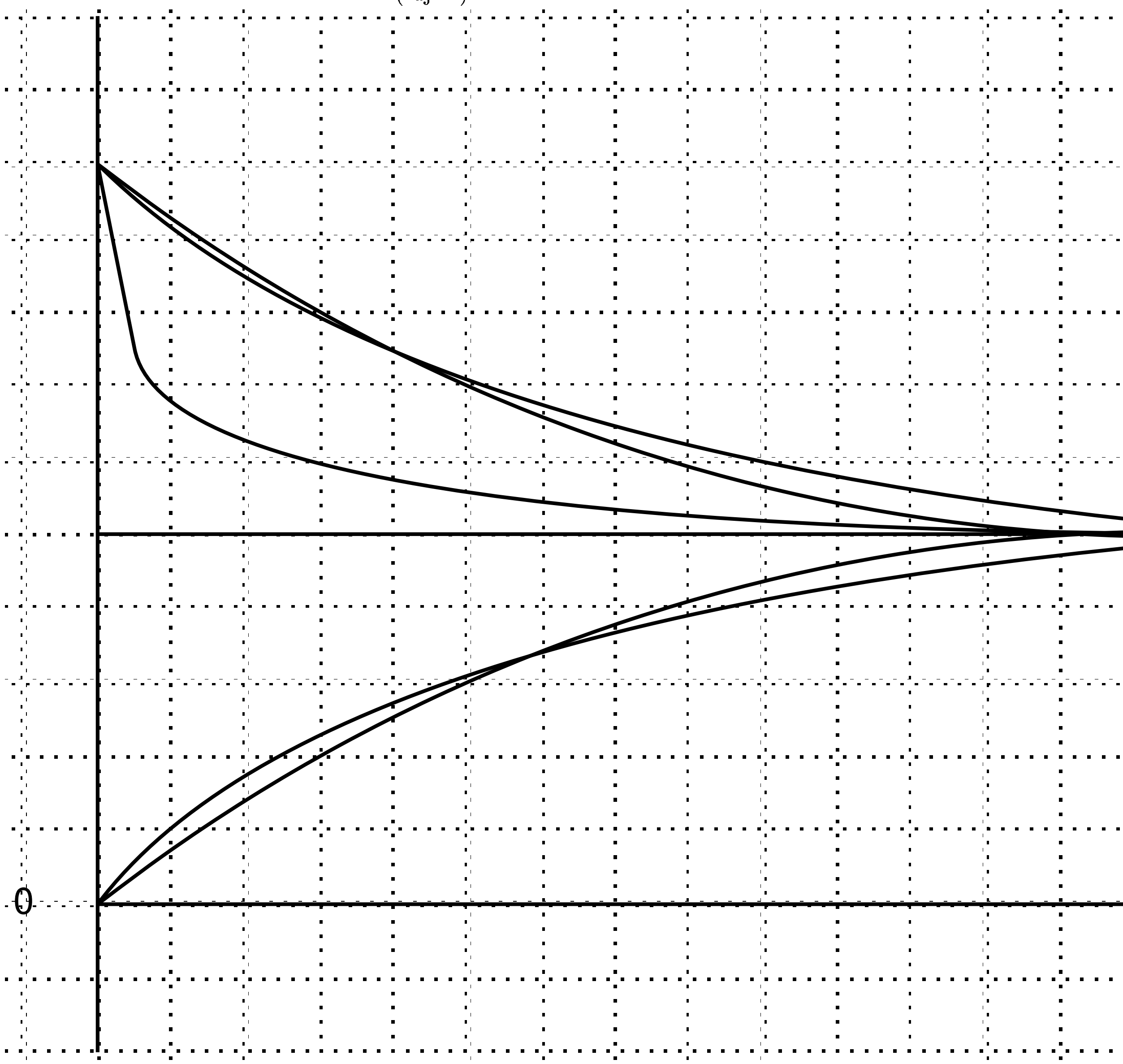
DEFINITION 2.1.5. (y, I) je **maximalni** (uplne) **reseni** ODR (1), jestlize
(i) y resi (1) na I
(ii) neexistuje zadne rozsireni (y, I)

EXAMPLE 2.1.6. (i) $y\prime = 1$ reseni $\forall y : y\left(x\right) = x + C, C \in \mathbf{R}$
omezujici podminka: $y\left(0\right) = 3 \Rightarrow C = 3$
(ii) $y\prime\prime = 2$
$y\prime = 2x + C$
$y = x^2 + Cx + D$
omezujici podminky: $y\left(0\right) = 2, y\prime\left(0\right) = 4$

2.1.2. cile studia. (i) sestavit rovnici
(ii) zjistit, zda $\exists$ reseni a kolik jich je
(iii) pokud mozno najit **vsechna maximalni** reseni
(iv) provest diskusi kvality reseni

EXAMPLE 2.1.7. (volny pad$\times$pad s padakem)
volny pad:
$v(t) = \frac{ds}{dt}, a(t) = \frac{dv}{dt}$
t cas
$y(t)$ vyska nad zemi (v case t)
$g = -y''(t)$ (gravitacni zrychleni) $\Rightarrow y(t) - \frac{gt^2}{2} + k_1 t + k_2$
$k_2 = y(0), k_1 = y'(0)$ (poc. vyska, rychlost)
s padakem:
$G = mg$ (gravitacni sila)
$\Phi = kv^2$ (sila zpusobena padakem)
v rychlost smerem dolu
$G - \Phi = F = mv'$
$mv' = mg - kv^2$ - dif. rovnice pro vyvoj rychlost v zavislosti na t
trivialni reseni: $v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}$
jinak: $v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{1+k_1 e^{-k_2 t}}{1-k_1 e^{-k_2 t}}$ (k_1, k_2 - zavisi na m, g, h)
$t \to \infty$: $v(t) \to \sqrt{\frac{mg}{k}}$
roli hraje: m, k

(fuj ...)



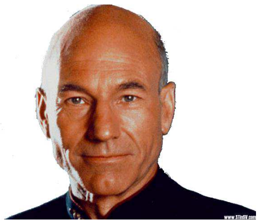
THEOREM. *1. (Peano)*
Necht $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *otevrena,* $f \in C(\Omega)$
Necht $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \Omega$
Potom $\exists \mathcal{U}(x_0)$ *a funkce y, definovana aspon na* $\mathcal{U}(x_0)$ *tak, ze*
(2) $y^{(n)}(x_0) = f\left(x_0, y(x_0), y\prime(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)\right)$
a $y^{(i)}(x_0) = y_i \forall i = 0, \ldots, n-1$

DEFINITION 2.1.8. Rovnici tvaru (2) nazyvame **rozresenou vzhledem k nejvyssi derivaci**

NOTE 2.1.9. (i) Veta ma lokalni charakter (dava lok. existenci reseni)
(ii) obecne muze byt def. obor funkce velmi maly
(iii) veta nerika nic o jednoznacnosti

DEFINITION 2.1.10. $f : \Omega \subseteq \mathbf{R^{n+1}} \to \mathbf{R}$ splnuje **lokalni lipschitzovskou podminku vzhledem k poslednim n promennym**, jestlize:
$\forall \mathcal{U} \subset \Omega$ omezene$\exists K (= K_n) \forall (x, y_0, \ldots, y_{n-1}), (x, \overline{y_0}, \ldots, \overline{y_{n-1}}) \in \mathcal{U}$:
$|f(x, y_0, \ldots, y_{n-1}) - f(x, \overline{y_0}, \ldots, \overline{y_{n-1}})| \leq K \sum_{i=0}^{n-1} |y_i - \overline{y_i}|$

THEOREM. *2. (Picard)*



THEOREM. *stejne predpoklady jako ve V1 a navic:*
f lokalne lipschitzoske vzhledem k poslednim n promennym, potom:
kazda dve reseni splyvaji na pruniku svych def. oboru
(spec.: $\exists$-li max. reseni, pak je jedine)

NOTE 2.1.11. lok. lipsch. neni pro V2 nezbytna, da se oslabit (ne ovsem pro informaticke palice)

DŮKAZ. V1 - velmi tezko s tim, co zname
V2 - pro rad $n = 1$ v pristim oddile □

2.2. ODR 1. radu

zasadne pouze typu $y\prime = f(x, y)$

THEOREM. *1ı. (Peano)*
Necht $\Omega \subset \mathbf{R}^2$otevrena, $f \in C(\Omega)$
Necht $(x_0, y_0) \in \Omega$
Potom $\exists (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \exists y$ definovana aspon na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, ze
(2) $y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y(x_0))$
a $y(x_0) = y_0$

.

THEOREM. *2ı. (Picard)*
stejne predpoklady jako ve V1ı a navic:
$\forall \mathcal{U} \exists K : |f(x, y) - f(x, \overline{y})| \leq K |y - \overline{y}|, (x, y), (x, \overline{y}) \in \mathcal{U}$
Potom reseni je lokalne jednoznacne

DŮKAZ. V2
(lemmatko + MP na okoli + definice zobrazeni + dokazani kontrakce - y je jeji pevnej bod)
Pouze pro $\Omega = (a, b) \times (c, d)$
Zvolim $\delta > 0$ takove, aby $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$

LEMMA. *Necht I je interval a $f, y \in C(I)$. Potom*

$$y(x_0) = y_0 \& y\prime(x) = f(x, y(x)), x, x_0 \in I \Leftrightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, x \in I$$

DůKAZ. "$\Rightarrow$"
f, y spoj. $\Rightarrow y\prime$ spoj. $\Rightarrow y\prime \in \mathcal{R}[x_0, x]\,\forall x \in I \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \underbrace{y\prime(t)}_{=y(x)-y(x_0)=y(x)-y_0} dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$

"$\Leftarrow$" z vety o derivaci $R\int$ podle horni meze & spoj. $y, f \Rightarrow y\prime(x) = f(x, y(x))$ □

def $P = \{y \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta], y(x_0) = y_0\}$ je uplny (uzavrena podmnozina) MP vzhledem k $\rho(y, z) = \sup_{x \in [x_o - \delta, x_0 + \delta]} |y(x) - z(x)|$

def $T : y \to (Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, t : P \to P$

$y, z \in P : \rho(Ty, Tz) = \sup_{x \in [x_o - \delta, x_0 + \delta]} \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y(t)) - f(t, z(t))) \right| \leq \sup_{x \in [x_o - \delta, x_0 + \delta]} \int_{x_0}^{x} |(f(t, y(t)) -$

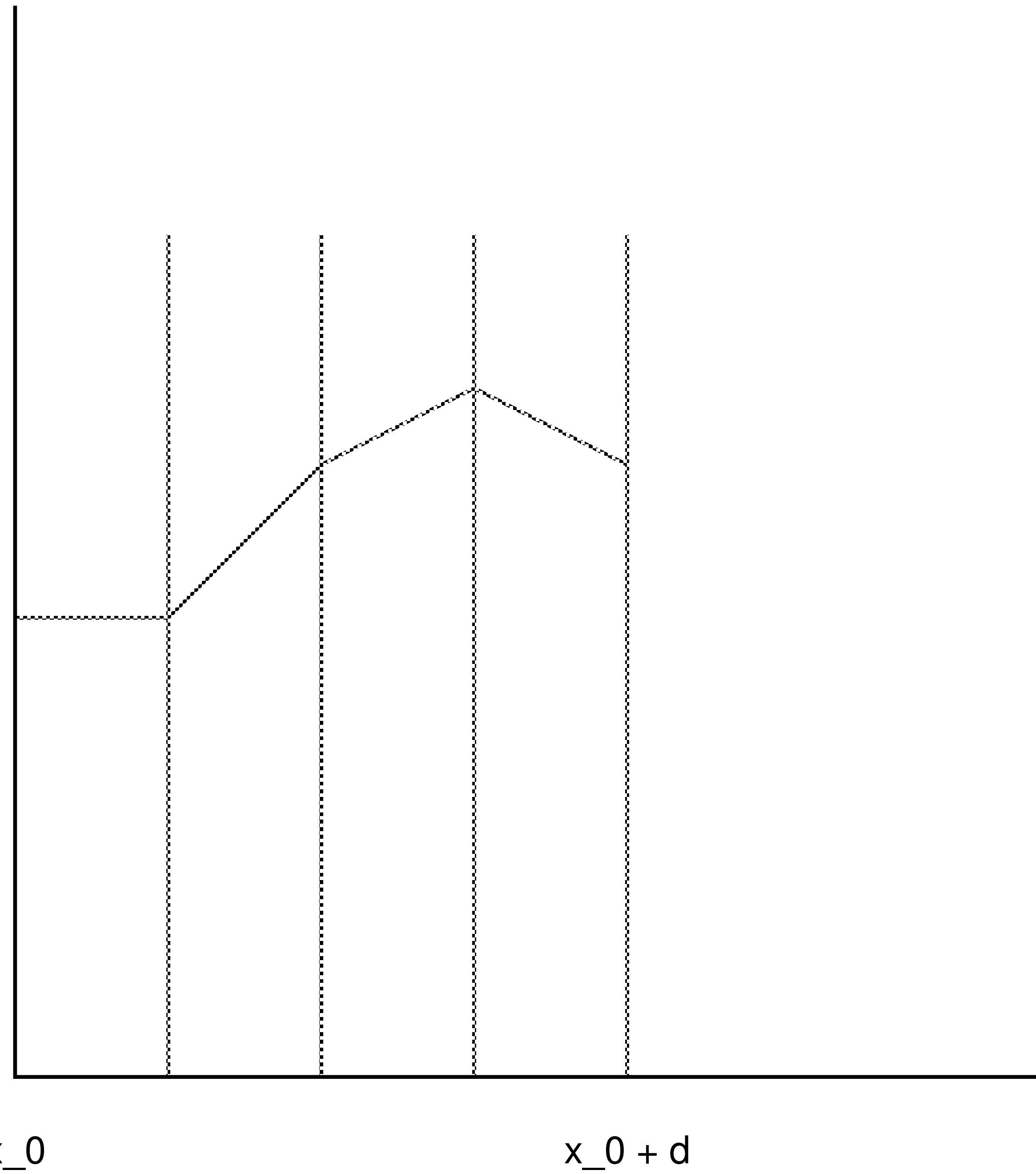
$\leq \delta \sup_{t \in [x_o - \delta, x_0 + \delta]} |(f(t, y(t)) - f(t, z(t)))|$

$\overset{(Lipsch.)}{\leq} \delta K \sup_{t \in [x_o - \delta, x_0 + \delta]} |y(t) - z(t)| = \delta K \rho(y, z) \Rightarrow$ pro $\delta < \frac{1}{K}$ je to kontrakce

$\overset{\text{Banach}}{\Rightarrow} \exists! y \in P, Ty = y$, kdy y je resenim ODR. □

.

DůKAZ. naznak V1$\prime$:
Eulerova metoda lomenych car
Zvolim vhodne male δ
rozsekam interval $[x_0, x_0 + \delta]$ na k dilu
$y\prime(x_1) = f(x_1, y_1)$
vetsi k $\Rightarrow$ vetsi sit
$\{y_k\}$
dk˙,
(i) ze za jistych predpokladu na δ ze z $\{y_k\}$ da vybrat $\{y_{k_j}\}$
(2) $\{y_{k_j}\} \to y$



zahustujeme funkci, ktera v k bodech nema derivaci, ale dokonvergujeme k fci, ktera je ma derivace vsude $\square$

2.2.1. specialni typy rovnic.

2.2.1.1. $y' = f(x)$. $y = F(x) + C, F' = f$ ($F\exists$ nebot f je spojita)
pokud navic $y(x_0) = y_0$, dostaneme prave jednu $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\, dt$

EXAMPLE 2.2.1. $y\prime = \frac{\sin x}{x}$ nejde vyjadrit elementarnima funkcema

2.2.1.2. $y\prime = g(y)$.
odstrasujici priklad:

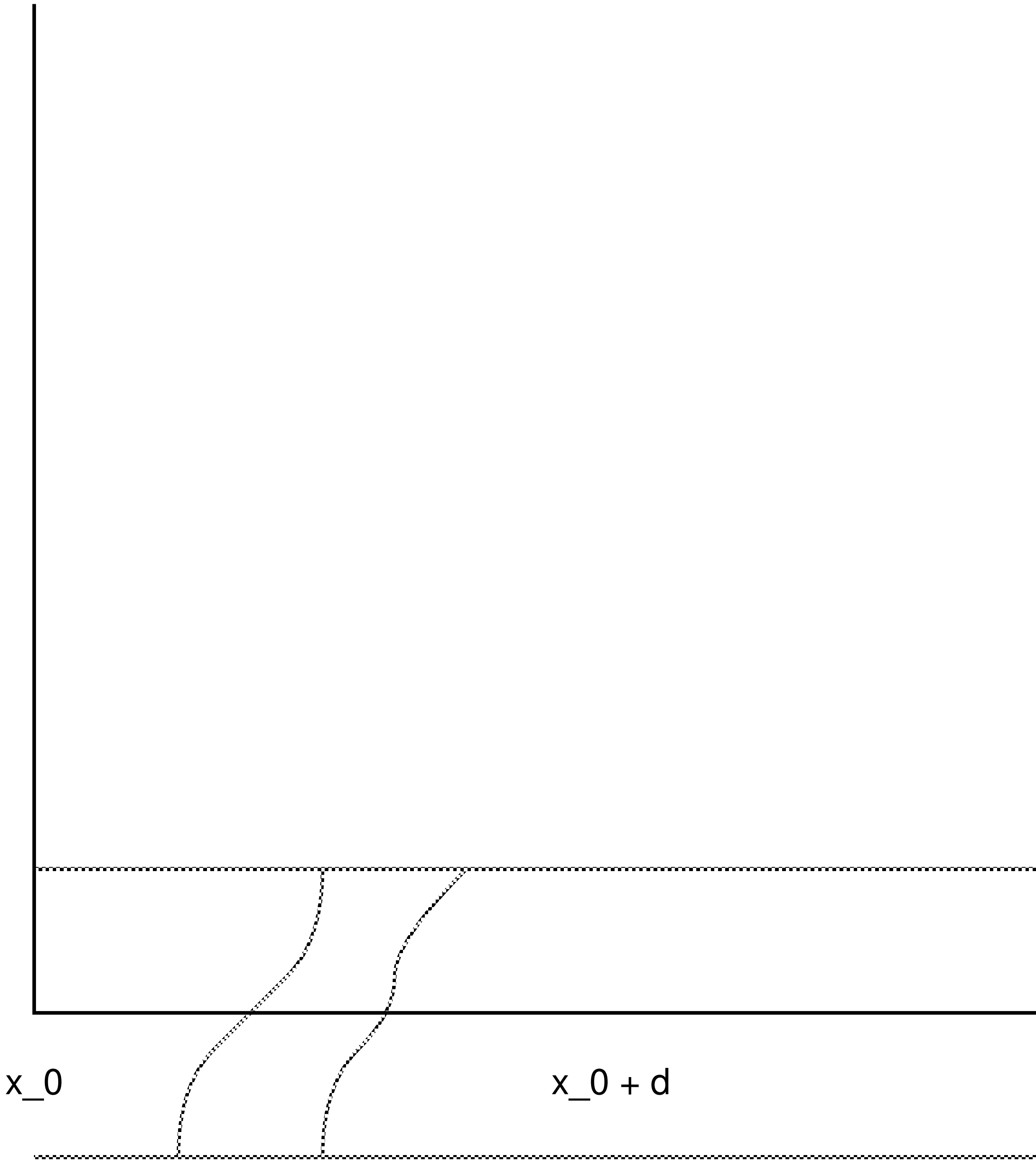
$$\begin{aligned} y\prime &= \sqrt{1-y^2} \\ \frac{y\prime}{\sqrt{1-y^2}} &= 1 \\ \arcsin y &= x + C \\ y &= \sin(x+C) \end{aligned}$$

EXAMPLE 2.2.2. $(-1) = (-1)^3 = (-1)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(-1)^6} = \sqrt{1} = 1$

spravne: $y = \pm 1$ singularni reseni
necht $y \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} y\prime &= \sqrt{1-y^2} \\ \frac{y\prime}{\sqrt{1-y^2}} &= 1 \\ \arcsin y &= x + C \\ !!y &= \sin(x+C) \end{aligned}$$

$y_c(x) = \sin(x+C), x \in I_c = \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right)$
!! - jenom nekde - musi $\exists y^{-1}$



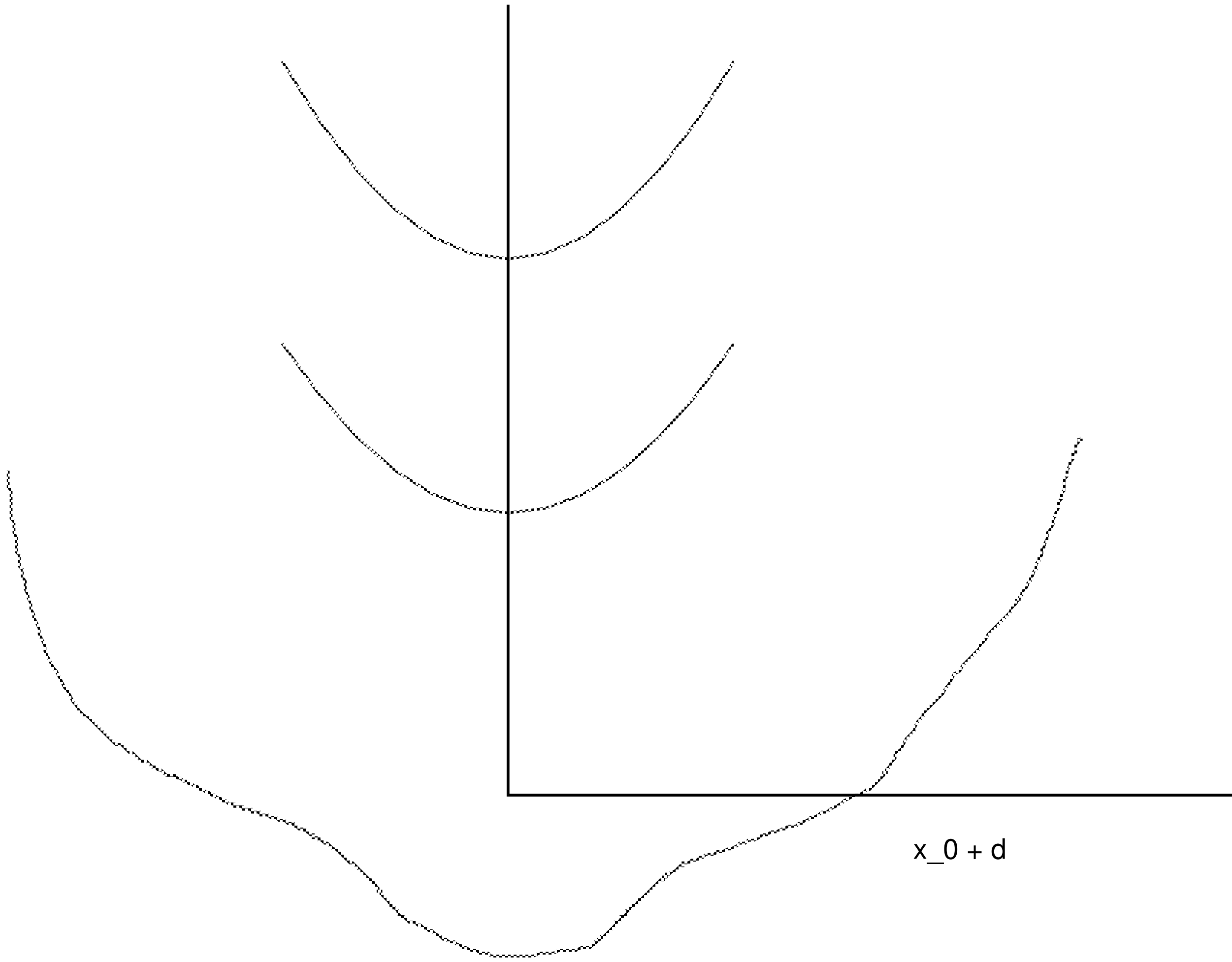
(maj to bejt posunuty ARC siny ...)
pozor. jednoznacnost, lepeni

LEMMA. *(lepeni)*

Necht $f(x,y) \in \mathcal{C}(\Omega)$,
Necht $c \in (a,b)$
Necht y_l *je reseni* $y\prime = f(x,y)$ *na* (a,c)
Necht y_r *je reseni* $y\prime = f(x,y)$ *na* (c,b)
Necht $\lim_{x\to c-} y_l(x) = \lim_{x\to c+} y_r(x) = A \in \mathbf{R}$
Potom funkce $y = \begin{array}{l} y_l(x)\ x \in (a,c) \\ A\, x = c \\ y_r(x)\ x \in (c,b) \end{array}$ *je resenim* $y\prime = f(x,y)$ *na* (a,b)

Důkaz. staci dokazat:
(i) $\exists y\prime(c)$
(ii) $y\prime(c) = f(x, y(c)) = f(c, A)$
Vim: (y_r je spojita zprava v c)
$y\prime_+(c) \overset{V\text{o limite derivaci}}{=} \lim_{x\to c+} y\prime(x) = \lim_{x\to c+} y\prime_r(x) \overset{\text{predp.}}{=} \lim_{x\to c+} f(x, y_r(x)) \overset{\text{spoj } f, y_r}{=} f($
analogicky pro $y\prime_-(c) = f(c, A)$
$\Rightarrow \exists y\prime(c) = y\prime_-(c) = y\prime_+(c) = f(c, y(c))$ □

Example 2.2.3. $y\prime = xy^{\frac{2}{3}}, \Omega = \mathbf{R}^2$
$\int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = \int x\, dx$
$3y^{\frac{1}{3}= \frac{x^2}{2}+C}$
$y(x) = \left(\frac{x^2+C}{6}\right)^3$



NOTE 2.2.4. reseni je hladke
nejsou jednoznacna
"odpovida" V2$\prime$
$f(x,y)$ neni lipsch. v y
(DIRTY) $\left|y_0^{\frac{2}{3}}\right|$

2.2.1.3. $y\prime = f(x)\, g(y)$ *(rovnice se separovanymi promennymi).* (i) nulove body $g : g(\alpha) = 0 \Rightarrow y == \alpha$ je singularni reseni
(ii) necht $g \neq 0$ pak $\int \frac{dx}{g(y)} = \int f(x)\, dx$
(iii) integrace: $G(y) = F(x) + C, F\prime = f, G\prime = \frac{1}{g}$
(iv) diskuse: (inv. funkce, $y_c = G^{-1}(F(x) + C)$ na I_c)

THEOREM. *3. (o $\exists$reseni ODR se sep. promennymi)*
Necht $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ spoj. , $g : (c,d) \to \mathbf{R}$ spoj. a nenulova
$x_0 \in (a,b), y_0 \in (c,d)$, pak bodem (x_0, y_0) prochazi prave jedno maximalni reseni y rovnice $y\prime = f(x)\, g(y), y(x_0) = y_0$

DŮKAZ. (na 1 brdo)
$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ maximalni takovy, aby $f(\alpha,\beta)\subset g(c,d)$ □

Potom reseni dostaneme:
$y(x)=G^{-1}(F(x)), x\in(\alpha,\beta)$
kde $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt$, $G(y)=\int_{y_0}^{y}\frac{1}{g(t)}\,dt$
overeni: $y\prime(x)=\left[G^{-1}(F(x))\right]'=\left(G^{-1}\right)\prime(F(x))F\prime(x)=\frac{1}{G\prime(G^{-1}(F(x)))}f(x)=g\left(G^{-1}(F(x))\right)f(x)=g(y)f(x)$
maximalnost: plyne z maximalnosti (a,b) - sporem ...
jednoznacnost: vypocet - jiny reseni to musi splnovat
2.2.1.4. $y\prime=ay+b;a,b:I\to\mathbf{R},\in\mathcal{C}(I)$ *(linearni ODR 1. radu),* (v promenne x nemusi byt linearni)
(silnejsi vety budou dale)
a,b se nazyvaji konstanty
metody: nasobeni rovnice integracnim faktorem (lze i pro nektere nelinearni) - CVICENI, variace konstant(lze pro system ODR a pro vyssi rad) (totez)
variace konstant. $y\prime=ay+b, x\in I$
(1) nejprve resime **homogenni rovnici** - $b\equiv0$
$y\prime=a(y)$ (sep. prom.)
$y(x)=Ke^{A(x)}$, kde A je nejaka primitivni funkce k a, $A\prime(x)=a(x), K\in\mathbf{R}$
(2) variace konstant
- rekneme, ze K je funkce x $K=K(x)$
$\Rightarrow y(x)=K(x)e^{A(x)}$
$y\prime(x)=K\prime(x)e^{A(x)}+K(x)e^{A(x)}a(x)$
dosadim do rovnice $y\prime=ay+b$
$K\prime(x)e^{A(x)}+K(x)e^{A(x)}a(x)=a(x)K(x)e^{A(x)}+b(x)$ /*pozn. viz dalsi radka*/
$\Rightarrow K\prime(x)=e^{-A(x)}b(x)$ /*->rovnou tohle, netreba to derivovat*/
$\Rightarrow K(x)=\int e^{-A(x)}b(x)\,dx+C$ ($\exists$ze spojitosti)
$\Rightarrow y(x)=\left(\int e^{-A(x)}b(x)\,dx+C\right)e^{A(x)}$
je-li zadana podminka, dopocitame $C\ldots$
integracni faktor.
2.2.1.5. $y\prime=ay+by^{\alpha}, a\neq0, \alpha\neq1$ *(bernoulliova).* substituce - zavedeme z
$y=z^{\frac{1}{1-\alpha}}, z=y^{1-\alpha}$
$y\prime=\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{1}{1-\alpha}-1}z\prime=\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}z\prime$ /* plati pro $\alpha\neq-2$*/
dosadme:
$\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}z\prime=az^{\frac{1}{1-\alpha}}+z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ $/:\frac{z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha}$
$\Rightarrow z\prime=(1-\alpha)az^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}}+b(1-\alpha)$
$\Rightarrow z\prime(x)=(1-\alpha)\left[a(x)z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}}+b(x)\right]$ (t.j.j lin. ODR pro funkci z)
vypocitame, dostanem z a desubstituujeme

EXAMPLE 2.2.5. $y\prime+\frac{y}{x}-x^2y^3=0$
$(\alpha=3\Rightarrow y=z^{-\frac{1}{2}})\Rightarrow z\prime x-2z=2x^3$ (vyreste si to)

2.3. Linearni rovnice vyssiho radu a systemy lin'ODR vyssiho radu

DEFINITION 2.3.1. $I\subset\mathbf{R}, a_i:I\to\mathbf{R}\,(i=0,\ldots,n-1), b:I\to\mathbf{R}$, vsechny funkce spojite rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b \tag{2.3.1}$$

nazveme **linearni ODR radu** n (linerani vzhledem k zavisle promenne - y)

NOTE 2.3.2. pro danny bod $x_0 \in I, (y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbf{R^n}$
$\exists!$reseni rovnice ^ takove, ze

$$y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

plyne z $V2\prime$, lokalni Lipsch:
$[a,b] \subset I : \left|\left(a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y - b\right) - \left(a_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + a_0 z - b\right)\right| \leq$
$K \|y - z\|_{\mathbf{R^n}}$, kde $K = \max_i \left\{\sup_{x\in(\alpha,\beta)} a_i(x)\right\}$

DEFINITION 2.3.3. **system n linearnich ODR rovnic 1. radu**

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1 \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n \end{aligned}$$

$y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbf{R}$ nezname funkce
$(a_{ji})_{j,i=1}^n : I \to \mathbf{R}$ spojite
$b_i : I \to \mathbf{R}; i = 1, \ldots, n$ spojite

NOTE 2.3.4. $y_i(x_0) = \left(y^0\right)_i$??? y_0

zkraceny maticovy zapis. $y\prime = Ay + b$
y, b vektorove funkce $I \to \mathbf{R^n}$
$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
A - maticova funkce $I \to \mathbf{R^{n^2}}$
$A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}, a_{ij} : I \to \mathbf{R}$

NOTE 2.3.5. reseni 1 rovnice radu n lze prevest na reseni systemu n rovnic radu 1 (obecne - i pro nelinearni)

dano:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y\prime, \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{2.3.2}$$

definujeme: $u_1 = y, u_2 = y\prime, \ldots u_n = y^{(n-1)}$
system

$$u_1\prime = u_2 \tag{2.3.3}$$

$$\vdots \tag{2.3.4}$$

$$u_{n-1}\prime = u_n \tag{2.3.5}$$

$$u_n\prime = f(x, u_1, \ldots, u_n) \tag{2.3.6}$$

potom: y je reseni 2.3.2 s pocatecnimi podminkami $y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$
$\Leftrightarrow \left(y, y\prime, \ldots, y^{(n-1)}\right)$ je resenim 2.3.6 s podminkami $u_1(x_0) = y_0, \ldots, u_n(x_0) = y_{n-1}$

.

NOTE 2.3.6. Ne kazdy system lze prevest na rovnici vyssiho radu:
$y\prime = y$
$z\prime = z$
- nesouvisi, nelze prevest

2.3.1. normovana metrika. (P, ρ) metricky prostor
necht navic P je vektorovy prostor a navic normovany:
$\|.\| : P \to \mathbf{R}^+$ a plati
(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$
(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (pozitivni homogenita)
potom: $\|x - y\|$ je metrika (normovana)

2.3.2. norma v R^{n^2}- $\|A\|$. A - matice funkce, $A : I \to \mathbf{R^{n^2}}$
$\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} \sup_{x \in I} |a_{ij}(x)|$
$[\alpha, \beta] \subset I$
$C([a, b], \mathbf{R^n})$ prostor spoj. funkci $y = [\alpha, \beta] \to \mathbf{R^n}$ s normou $\|y\|_{C([\alpha,\beta],\mathbf{R^n})} = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [\alpha,\beta]} |y_i(x)|$
oznacime $P = C([\alpha, \beta], \mathbf{R^n})$, pak je P uplny normovany vektorovy prostor (banachuv prostor)

THEOREM. *4. (globalni $\exists$ a $\exists!$ reseni systemu lin. ODR 1 .radu)*
$I \subset \mathbf{R}, a_{ij}, b_i : I \to \mathbf{R}$ spojite, $i, j = 1, \ldots, n, x_0 =\in I, y^0 \in \mathbf{R^n}$
Potom $\exists!$ reseni y systemu $y\prime = Ay + b$ (maticove-vektorovy zapis)
jehoz def. obor je I (!), splujici $y(x_0) = y^0$ (vektorove)
t.j. $y_i\prime(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_i(x) + b_i(x) \forall x \in I \forall i = 1, \ldots, n$
$\& y_i(x_0) = (y_0)_i, i = 1, \ldots, n$

DůKAZ. def $T : P \to P$ (zafixovali jsme $[\alpha, \beta] \subset I$)
$x \in [\alpha, \beta] : (Ty)(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} [A(t) y(t) + b(t)] \, dt$
dokazeme ze $\exists j \in \mathbf{N} : T^j$ je kontrakce na P.
Odsud plyne, ze T ma v P jeden pevny bod $y = Ty = y$.
Podle (vektorove verze) Lemmatu vime, ze toto y je resenim systemu $y\prime = Ay + b$.
Z jednoznacnosti pevneho bodu plyne, ze y je jednoznacne na kazdem $[\alpha, \beta] \subset I$ a tedy je jednoznacne na I.
Zbyva: T^j je kontrakce pro vhodne j.
Zvolme pevne $[\alpha, \beta] \subset I, x_0 \in [\alpha, \beta], x \in [\alpha, \beta], y, z \in P$
$|Ty(x) - Tz(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} A(t) [y(t) - z(t)] \, dt \right|$
$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \|A\| \, \|y - z\|_\rho \, dt \right| = \|A\| \, \|y - z\|_\rho \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| = \|A\| \, \|y - z\|_\rho |x - x_0|$
$\left| T^2 y(x) - T^2 z(x) \right| \leq \ldots = \left\| A^2 \right\| \|y - z\|_\rho \frac{|x - x_0|^2}{2}$
obecne $\left| T^j y(x) - T^j z(x) \right| \leq \ldots = \left\| A^j \right\| \|y - z\|_\rho \frac{|x - x_0|^j}{j!}$
tedy: $\left\| T_y^j - T_z^j \right\|_\rho \leq \sup_{x \in [\alpha,\beta]} \|A\|^j \|y - z\|_\rho \frac{|x - x_0|^j}{j!}$
$\leq \frac{\|A\|^j |\beta - \alpha|^j}{j} \Rightarrow \exists j$ dost velke, aby $\frac{\|A\|^j |\beta - \alpha|^j}{j} < 1 \Rightarrow T^j$ je kontrakce na P □

THEOREM. *5. (o prostoru reseni systemu lin. ODR 1. radu)*

Necht je dan system $y\prime = Ay + b$ s obvyklymi podminkami na a_{ij}, b_i, I
Oznacime $Ly = y\prime - Ay, H = \ker L = \{y; Ly = o\}$
(i) potom L je linearni zobrazeni, H je linearni prostor dimenze n
(ii) oznacime $M = \{y, Ly = b\}$
potom $\exists y_0$ takove, ze $M = y_0 + H = \{y_0 + h, h \in H\}$ & $Ly_0 = b$

DŮKAZ. (i) linearita L je zrejma
"vektorovost" prostoru H je zrejma
dimenze:
zvol $x_0 \in I$, def $T : H \to \mathbf{R^n}.T : y \to y(x_0)$
Podle V4 $\forall y^0 \in \mathbf{R^n} \exists ! y \in H$ takove, ze $y(x_0) = y^0$
existence $\Rightarrow T$ je **na** $\mathbf{R^n}$
jednoznacnost $\Rightarrow T$ je proste, navim zrejme T je linearni$\Rightarrow T$ je lin. izomorfismus H na $\mathbf{R^n} \Rightarrow \dim H = n$
(ii) tvrzeni: $M = y_0 + H$
V4$\Rightarrow \exists y_0 = Ly_0 = b$
"$\supseteq$"
$h \in H$, pak musime dokazat, ze $y_0 + h \in M$ t.j. $L(y_0 + h) = b$
mame: $L(y_0 + h) = Ly_0 + Lh = b + o = b$
"$\subseteq$"
necht y_1 je jine reseni $Ly = b$, tedy $y_1 \in M$, potom $y_1 = y_0 + (y_1 - y_0)$ a navic $L(y_1, y_0) = Ly_1 - Ly_0 = b - b = o \Rightarrow (y_1 - y_0) \in H$ □

NOTE 2.3.7. zrejme $y \equiv 0$ je resenim homogenniho systemu

Vime $H = \{\text{reseni } y' = Ay\}$ je vektorovy prostor $\dim n$ $\Rightarrow$bazi tvori n funkci $[y^1, \ldots, y^n]$

DEFINITION 2.3.8. **Fundamentalni system reseni** (FSS) homogenniho systemu $y\prime = A\prime$ nazyvame libovolnou bazi H

NOTE 2.3.9. Necht mame prostor reseni (H)˙Potom funkce y^i chapeme jako sloupcove vektory¸ktere lze poskladat do tzv. **fundamentalni matice** homogenniho systemu $Y = \left(y_j^i\right)_{i,j=1}^n$

DEFINITION 2.3.10. Necht $f_1, \ldots, f_n$ jsou vektorove funkce na I $(f^i : I \to \mathbf{R^n})$
pak **Wronskianem** (Wronskeho deterrminantem) funkci $f^1, \ldots, f^n$ nazyvame funci: $W(x) = W_{(f^1,\ldots,f^n)}(x), W : I \to \mathbf{R}$ definovanou predpisem $W_{(f^1,\ldots,f^n)}(x) =$
$$\det \begin{pmatrix} f_1^1(x) & \cdots & f_1^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^1(x) & \cdots & f_n^n(x) \end{pmatrix}$$

NOTE 2.3.11. $W \equiv 0$¸kdyz jsou funkce LZ v $C(I)$

obecne to ale neplati obracene: $f^1(x) = \begin{matrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} & x \in [-1, 0) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & x \in [0, 1] \end{matrix} \quad f^2(x) = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & x \in [-1, 0) \\ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} & x \in [0, 1] \end{matrix}$

- jsou LN, ale $W \equiv 0$

Jestlize ale $f^1, \ldots, f^n$ jsou resenim homogenniho systemu se spojitou matici, plati $\Leftrightarrow$

THEOREM. *5. (o Wronskianu a LN reseni)*
Necht $y^1, \ldots, y^n$ jsou reseni systemu $y\prime = Ay$, kde A je spojita matice.
Potom plati:
(i) Jestlize $W(x_0) = 0$ pro nejake $x_0 \in I$, pak je $W(x) \equiv 0 \forall x \in I$ a $y^1, \ldots, y^n$ jsou LZ
(ii) Jestlize $W(x_0) \neq 0$ pro nejake $x_0 \in I$, pak je $W(x) \neq 0 \forall x \in I$ a $y^1, \ldots, y^n$ jsou LN

DŮKAZ. (i) $W(x_0) = 0$ Tedy $\exists c_1, \ldots, c_n$ tak, ze $c_i \neq 0 \forall i$ a $\sum_{i=1}^n c_i y^i(x_0) = 0$
Polozme $y(x) = \sum_{i=1}^n c_i y^i(x_0)$ na I. To je reseni $y\prime = Ay$ (protoze je to LK reseni homogenni soustavy)
Navic ale $y(x_0) = 0$. Z globalni 1znacnosti reseni (V4) plyne $y \equiv 0$ na I
Tedy $\sum_{i=1}^n c_i y^i(x) = 0$ na I
$y^1, \ldots, y^n$ jsou tedy LZ a (podle poznamky) $W \equiv 0$
(ii) plyne z (i) a poznamky □

Dusledek: Necht $y^1, \ldots, y^n$ jsou reseni systemu $y\prime = Ay$
Pak bud $W \equiv 0$ a $\left[y^1, \ldots, y^n\right]$ jsou LZ
Pak nebo $W \neq 0 \forall x$ a $\left[y^1, \ldots, y^n\right]$ jsou LN

THEOREM. *7. (varice konstant pro systemy)*
Necht A, b spojite, $\left[y^1, \ldots, y^n\right]$ je FSS homogenniho systemu $y\prime = Ay$
Potom $\exists c_1, \ldots, c_n : I \to \mathbf{R}, c_i \in C^1(I)$ takove, ze $y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i(x)$ je resenim nehomogenni soustavy $y\prime = Ay + b$

NOTE 2.3.12. $y = Yc, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, Y je FM

DŮKAZ. ("dukaz")
Kdy je funkce tvaru $y = \sum c_i y^i$ resenim $y\prime = Ay + b$?
Mame $y\prime = \sum c_i\prime y^i + \sum c_i \left(y^i\right)\prime$
Dale $Ay + b = A \sum c_i y^i + b = \sum c_i A y^i + b \overset{(Ay^i = (y^i)\prime)}{=} \sum c_i \left(y^i\right)\prime + b$
y je resenim $y\prime = Ay + b \Leftrightarrow \sum c_i\prime y^i = b \Leftrightarrow Yc\prime = b$ $(\det Y \neq 0)$
Z V6: y^i jsou LN$\Rightarrow \exists!$ reseni teto $(c_i\prime y^i = b)$ soustavy. To je $(c_1\prime, \ldots, c_n\prime)$
Protoze Y je regularni, dostavame $c\prime = Y^{-1}b$ a tedy $c(x) = \int_{x_0}^x Y^{-1}(t)\, b(t)\ dt + K$ $(K \in R^n)$
Pak $y(x) = Y(x)\left[K + \int_{x_0}^x Y^{-1}(t)\, b(t)\ dt\right] \forall x \in I$ - reseni $y\prime = Ay + b$
Chceme-li $y(x_0) = y^0$, bereme $K = Y^{-1}(x_0)\, y^0$ □

NOTE 2.3.13. (variace const pro jednu rovnici radu n)

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y\prime(x) + a_0 y(x) = b(x) \tag{2.3.7}$$

Necht $\left[y^1, \ldots, y^n\right]$ je FSS homogenni rovnice $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y\prime + a_0 y = 0$

Pak $\exists c_i : I \to \mathbf{R}$ takove¸ze

$$\begin{aligned} \sum c_i\prime y^i &= 0 \\ \sum c_i\prime \left(y^i\right)\prime &= 0 \\ &\vdots \\ \sum c_i\prime \left(y^i\right)^{(n-2)} &= 0 \\ \sum c_i\prime \left(y^i\right)^{(n-1)} &= b \end{aligned}$$

FIXME: je to spravne?

Potom $y = \sum c_i y^i$ je reseni 2.3.7

2.4. Systemy linearnich ODR s konstantnimi koeficienty

$y\prime = Ay + b$ $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, a_{ij} \in \mathbf{R}$

Jak najit FSS ?

motivace: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y\prime + a_0 y = 0$ (homogenni rovnice n-teho radu)

Pak vezmeme char. polynom matice

$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0$

Potom fce tvaru $e^{\lambda x}$, kde $P(\lambda) = 0, x \in I$ jsou reseni

THEOREM. *8. (o FSS linearni rovnice s konst. koeficienty)*

Necht rovnice $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y\prime + a_0 y = 0, a_i \in \mathbf{R}$ ma koreny char. polynomu $P(\lambda)$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$

s nasobnosti $s_1, \ldots, s_k$

Potom FSS teto rovnice je $\left[e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{s_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \ldots, \ldots, \ldots, e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{s_k - 1} e^{\lambda_k x}\right]$

DŮKAZ. reseni - zderivovat, dosadit

n - zakladni veta algebry

LN - Wronskian □

NOTE 2.4.1. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{C}$

$\lambda = \alpha + i\beta$

Pro $\mathbf{R}$ FSS bereme: $[e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)]$

(zduvodneni 2 korenu: $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$)

$y\prime = Ay + b$, A konst.

Kdy je $y(x) = e^{\lambda x} v$ resenim homogenniho systemu $y\prime = Ay$, kde $v \in \mathbf{R^n}$?

$y\prime = \lambda e^{\lambda x} v, y\prime = Ay \Rightarrow \lambda e^{\lambda x} v = A\left(e^{\lambda x} v\right) = e^{\lambda x} Av$ /*wow - skalar, matice, vektor, vsechno navic funkce*/

$ev = Av$

CONCLUSION 2.4.2. funkce $y = e^{\lambda x} v$ je resenim homogenniho systemu $y\prime = Ay \Leftrightarrow Av = ev$¸tedy $\Leftrightarrow \lambda$ je vlastni cislo A a v je vlastni vektor prislusny k λ

λ vlastni cislo A: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I), P(\lambda) = 0$

najit vlastni cisla, k nim vlastni vektory $\Rightarrow$ mnozina reseni

Ale nemusi jich bejt dost (u nasobnych reseni nemusi byt vlastni vektory LN)

NOTE 2.4.3. Poznamky z algebry 1:

(i) ctvercova matice supne n ma v $\mathbf{C}$ $1, \ldots, n$ vlastnich cisel, soucet nasobnosti= n

je ekvivalentni:
A je podobna diagonalni matici $\Leftrightarrow$dim N_λ = nasobnostλ, kde $N_\lambda = \ker(A - \lambda I)$
$\Leftrightarrow$v $\mathbf{R^n}$ (v $\mathbf{C^n}$) $\exists$baze slozena z vlastnich vektoru A
(A podobna diagonalni matici $\Lambda \Leftrightarrow \exists$regularni$Q : Q^{-1}AQ = \Lambda$), pak

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

THEOREM. *9. (o reseni systemu ODR - pripad $A \sim \Lambda$)*
Necht A je podobne diag. matici, necht $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlast. cisla A (kazde tolikrat, kolik je jeho nasobost)
$v^1, \ldots, v^n$ jsou prislusne vlastni vektory.
Potom matice $\left(v^1 e^{\lambda_1 x}, \ldots, \ldots, v^n e^{\lambda_n x}\right)$ tvori FSR hom. systemu $y\prime = Ay$

DŮKAZ. (okecano predem)
(i) funkce tvaru $v^j e^{\lambda_j x}$ jsou reseni
(ii) je jich n
(iii) tyto funkce jsou LN (algebra) □

NOTE 2.4.4. Poznamky z algebry 2:
obecne nemame dostatek vlastnich vektoru
obecne: vzdy $\exists$regularni matice Q takova, ze $Q^{-1}AQ = J_A$, kde J_A je Jordanuv kanonicky tvar matice A
v tomto pripade jsou sloupce Q tvoreny **retezci pridruzenych vektoru matice** A

DEFINITION 2.4.5. System nenulovych vektoru $v^1, \ldots, v^k$ nazvu **retezcem odpovidajicim vlastnimu cislu λ matice** A, jestlize:
(v^1 je vlastni vektor vlastniho cisla λ)

$$(A - \lambda I)\, v^1 = 0 \tag{2.4.1}$$
$$(A - \lambda I)\, v^2 = 1!!!!v^1 \tag{2.4.2}$$
$$\vdots \tag{2.4.3}$$
$$(A - \lambda I)\, v^k = v^{k-1} \tag{2.4.4}$$

(TODO: ta jednicka by mela bejt v^1)
ke kazdemu Jordanovu bloku delky k existuje retezec delky k

NOTE 2.4.6. Poznamky z algebry 3
(i) prvky retezcu jsou vzajemne LN
(ii) pokud dim $N_\lambda <$ nasobnost λ, pak $\exists k_0 \leq$ nasobnostλ:
$\dim\ker(A - \lambda I) < \dim\ker(A - \lambda I)^2 < \ldots < \dim\ker(A - \lambda I)^{k_0}$ = nasobnost λ

THEOREM. *10.*
Necht $v^1, \ldots, v^k$ je retezec pridruzenych vektoru prislusnych k vl. c. λ
Potom funkce $\left(v^1 e^{\lambda x}, \left(v^1 x + v^2\right) e^{\lambda x}, \left(v^1 \frac{x^2}{2} + v^2 x + v^3\right) e^{\lambda x}, \ldots, \left(v^1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + v^k\right) e^{\lambda x}\right)$

DŮKAZ. Zderivovani a nebo algoritmus dale -> dukaz obloukem □

DEFINITION 2.4.7. Necht A je matice $(n \times n)$.

Potom $\exp A$ (nebo e^A) Oznacujeme ctvercovou matici $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ (kde $A^k = \underbrace{AA\dots A}_{k}$)

Specialne, definujeme maticovou funkci $e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k x^k}{k!}$

THEOREM. *11.*
(i) A, B typu $(n\times n)$, potom $e^{A+B} = e^A e^B$
(ii) $\frac{d}{dx}\left(e^{Ax}\right) = Ae^{Ax}$

DŮKAZ. cviceni.
$y = e^{Ax}v$ (protoze vime $y\prime = ay \Rightarrow y = e^{ax}c$)
(dle V11) $y\prime = Ae^{Ax}v = Ay \Rightarrow$kazda funkce $y = e^{Ax}v, v\in\mathbf{R^n}$ je resenim □

THEOREM. *12. (o FSR systemu s konstantnimi koeficienty)*
Necht A je matice typu $(n\times n)$, $H = \{y; y\prime = Ay\}$
Potom $H = \left\{y; y = e^{Ax}v, v\in\mathbf{R^n}\right\}$ a $\exists FSR$ H ve tvaru $(y_1,\dots,y_n)$, kde $y^j = e^{\lambda_j x}\begin{pmatrix}P_1^j(x)\\ \vdots\\ P_n^j(x)\end{pmatrix}$, kde λ_j je vl. c. A, $\forall i: P_i^j$ - polynomy stupne $\leq$nasobnost λ_j

DŮKAZ. pozorovani:
$y = e^{Ax}v = e^{(\lambda I + A - \lambda I)x}v \overset{V11}{=} e^{\lambda I x}e^{(A-\lambda I)x}v$

$$e^{\lambda E x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda x}\end{pmatrix}$$

$= e^{\lambda x}e^{(A-\lambda I)x}v = e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}(A-\lambda I)^k v$
Snazime se, aby skoro vsechny cleny rady vypadly

ALGORITHM 2.4.8. *Najdu vsechny LN v takove, aby $(A-\lambda I)v = 0$ (to jsou prislusne vladstni vektory).*

Neni-li jich dostatek, najdu vsechny w tak, aby $(A-\lambda I)^2 w = 0$ ($(A-\lambda I)w = v$)

... analogicky
Dle poznamek z algebry dostaneme po konecnem poctu kroku FSR:
1.krok $v: (A-\lambda I)v = 0 \Rightarrow y = e^{\lambda x}v$
2.krok $(A-\lambda I)w = v \Rightarrow y = e^{\lambda x}(vx + w)$
atd.

□

KAPITOLA 3

Lebesgueuv integral (s lidskou tvari)

Copyright: P.J.Daniell,H.Lebesgue
"poprve objektivne tezky"

3.1. uvod

Chceme vybudovat rozumnou a dostatecne bohatou teorii (urciteho) integralu
Riemann: $[a, b]$, deleni D, omezena f. $\rightarrow$ horni, dolni soucet$\rightarrow$ $\inf, \sup = S, s \rightarrow S = s?(R) \int f : nic$
Zavedeme tridu $\mathcal{R}([a, b])$.
Postacujici podminky: spojitost, monotonie
Newton: $(a, b), f \in N(a, b) \Rightarrow \exists F\prime.\ f \in \mathcal{R} \cap \mathcal{N} \Rightarrow (\mathcal{N}) \int f = (\mathcal{R}) \int f$
Abstraktni integral. zakladni prostor funkci $\overset{\int}{\rightarrow}$ $\mathbf{R}, f \rightarrow \int f$ (funkcional)
Chceme rozumne vlastnosti - napr.:
$f + g \rightarrow \int (f + g) = \int f + \int g$
nebo $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$
nebo $\exists \int_a^b f, (c, d) \subset (a, b) \Rightarrow \exists \int_c^d f, f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f > \int_c^d f$

3.1.1. duvody.

(1) sirsi tridu nez $\mathcal{R}$
(2) integrovat v $\mathbf{R^n}$
(3) metody pro zamenu promennych v $\mathbf{R^n}$ (substituce) - napr. polarni souradnice
(4) uzavrenost na lim. prechody
(5) aby integral komutoval s limitou, radou, derivaci

3.1.2. princip. L. - vodorovne
urovnova mnozina - $\{x; f(x) > \alpha\}$
Pak integruju sloupcove

3.2. Vnejsi mira, mira, meritelne mnoziny a meritelne funkce

DEFINITION 3.2.1. **Interval v $\mathbf{R^n}$** je jakakoliv mnozina tvaru $I = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n b_n)$
(otevreny interval)
(Jordan-Peassuv) objem intervalu I

$$(I) = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$$

NOTE 3.2.2. (i) Je-li I neomezeny, pak $(I) = \infty$
(ii) system intervalu v $\mathbf{R^n}$ je nedostatecny (neni napr. uzavreny na sjednoceni)

DEFINITION 3.2.3. pro libovolnou $A \subset \mathbf{R^n}$ definujeme **vnejsi miru** $\lambda^*(A)$ predpisem

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (I_j), A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, I_j \text{ je interval} \right\}$$

(infimum se bere pres vsechna spocetna pokryti mnoziny A)

THEOREM. *1. (vlastnosti vnejsi miry)*
(i) μ^* *je definovana na celem* $\exp(R^n)$ $(\exp(R^n) = \{A, A \subset \mathbf{R^n}\} = \mathcal{P}(\mathbf{R^n}))$
(ii) $\mu^*(A) \geq 0 \forall A \in \exp(R^n)$
(iii) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(iv) monotonie

$$A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

(v) spocetna sub-aditivita

$$\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

umluva. je-li treba specifikovat dimenzi, znacime μ_n^*

EXAMPLE 3.2.4. $\mu_1^*([a,b]) = \mu_1^*((a,b)) = b - a$ nebot $[a,b] \supset (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \to b - a + 2\varepsilon$
$\Rightarrow \mu_1^*([a,b]) = \inf_{\varepsilon>0}(b - a + 2\varepsilon) = b - a$

NOTE 3.2.5. chteli bychom jeste $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$, ale to **neplati** :-) (muze byt $\mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B)$)

3.2.1. Banach - Türského paradox. Jednotkovou kouli v $\mathbf{R^n}$ lze rozrezat na konecne mnoho mnozin a z nich lze poskladat jednotkovou krychli

DEFINITION 3.2.6. rekneme, mnozina A je **(Lebesgueovsky) meritelna**, jestlize $\forall$interval I plati
$\mu^*(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I \setminus A)$
Lebesgueovou mirou mniziny A je $\mu(A) = \mu^*(A)$

/*objem intervalu -> vnejsi mira -> mira*/

DEFINITION 3.2.7. Necht X je mnozina, $\exp X$ system $\forall$ jejich podmnozin
Necht $A \subset \exp X$. Rekneme, ze A je **algebra**, jestlize
1) $X \in \mathcal{A}$
2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in A$
3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow (X \setminus A) \in \mathcal{A}$
/*$\mathcal{A}$ dvojicove uzavrena na $\cup$ a navic 3)*/
Rekneme, ze $\mathcal{A}$ je σ-algebra, jestlize je algebra a navic $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

THEOREM. *2. (vlastnosti meritelnych mnozin)*
Oznacme $\mathcal{M} \subset \exp(\mathbf{R^n})$ *system meritelnych mnozin v* $\mathbf{R^n}$.
potom
(i) $\mathcal{M}$ *je algebra*
(ii) G *je otevrena* $\Rightarrow G \in \mathcal{M}$
F *uzavrena* $\Rightarrow F \in \mathcal{M}$
(iii) $\mathcal{M}$ *je nejvetsi* σ*-algebra takova, ze:*
- obsahuje intervaly
- μ^* *je na ni* σ*-aditivni*
(iv) $\exists$*nemeritelne mnoziny v* $\mathbf{R^n}$

.

THEOREM. *(vlastnosti Lebesgueovy miry)*
(i) μ *def na* $\mathcal{M}, \mu(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{M}, \mu(\emptyset) = 0$
(ii) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
(iii) (σ-aditivita miry) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \forall A_j$ *meritelne a disjunktni*
(iv) μ *je translacne a rotacne invariantni*
(v) μ *je **uplna**:* $\forall A : \mu(A) = 0, \forall B \subset A : B \subset \mathcal{M}, \mu(B) = 0$

NOTE 3.2.8. (i) mnoziny $N \subset \mathbf{R^n}$, pro ktere je $\mu(N) = 0$ nazyvame nulove - napr. $\mu(\{x\}) = 0$
(ii) A spocetna $\Rightarrow \mu(A) = 0$
$A = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$
zvol $\varepsilon > 0$ a intervaly $I_k : x_k \in I_k$
$\mu(I_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, potom $\mu(A) < \sum \mu(I_k) < \varepsilon \sum \frac{1}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2}$
$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$
napr. $A = \mathbf{Q}$
(iii) $\exists$ nespocetne mnoziny miry 0 - napr. Cantorovo diskontinuum: (TODO)
1. krok - vyhodim $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] = G_1$, $\mu(G_1) = \frac{1}{3}$
2. krok - vyhodim $\left[-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right] = G_2$, $\mu(G_1) = \frac{2}{3}$
k-ty krok - vyhodim $\ldots = G_k$, $\mu(G_k) = \frac{2^{k-1}}{3^k}$
Zbyde $C = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$
$\mu(\bigcup G_k) = \sum \mu(G_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1$
C =mnozina cisel z $[0,1]$, jejichz tuadicky rozvoj neobsahuje 1
tuadicky rozvoj: $(0, 120102102)$
0 pri vyhazovani jde doleva
1 doprostred (bude vyhozen)
2 doprava
$\Rightarrow C$ je nespocetna
napr: $\frac{1}{4} \in C$ $\frac{1}{4} = 0,020202\ldots$
(iv) A omezena a meritelna $\Rightarrow \mu(A) < \infty$
(v) "$\dim A < n$" $\Rightarrow \mu(A) = 0$ (intuitivne: usecka v rovine, ctverec v prostoru, ...) (to taky muzou bejt ty nespocetny)

DEFINITION 3.2.9. Rekneme, ze vyrok $V(x)$ plati **skoro vsude na** A (pro skoro vsechna $x \in A$), jestlize $\exists N \subset \mathbf{R^n}$ takova, ze $\mu(N) = 0$ a V plati $\forall x \in A \setminus N$.
Zkracene s.v.

EXAMPLE 3.2.10. (i) $|x|$ je diferentovatelna skoro vsude na $\mathbf{R}$

(ii) x je spojita skoro vsude na $\mathbf{R}$
(iii) s.v. realna cisla jsou racionalni (TODO: je to tak i naopak ?? :-))
(iv) $D(x)$ je s.v. nulova

DEFINITION 3.2.11. $f : A \to \mathbf{R}$ rekneme, ze f je **meritelna funkce na** A, jestlize
(i) f je definivana aspon s.v. na A
(ii) $\forall \alpha > 0$ je $\{x \in A, f(x) > \alpha\}$ meritelna

-

DEFINITION 3.2.12. $E \subset \mathbf{R^n}$, definujeme charakteristickou funkci mnoziny E
$\mu_E(x) = \begin{cases} 1\, x \in E \\ 0\, x \notin E \end{cases}$ (TODO: znacka μ?)
pr.: $D(x) = \mu_{\mathbf{Q}}$, $1 - D(x) = \mu_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}$

NOTE 3.2.13. μ_A meritelna $\Leftrightarrow$ A meritelna (mnozina)

DEFINITION 3.2.14. $f : M \to \mathbf{R}$ def
$f^+ = \max\{f, 0\}, f^- \{-f, 0\}$

NOTE 3.2.15. (i) $f^+, f^- \geq 0$
(ii) $f = f^+ - f^-$
(iii) $|f| = f^+ + f^-$

poznamka: v nasledujici vete mohou funkce nabyvat hodnot $\mathbf{R}^*$.

THEOREM. *4. (vlastnosti meritelnych funkci)*
$f, g, \{f_n\}$ meritelne funkce na $M \in \mathcal{M}, \alpha \in \mathbf{R}$
Potom plati:
(i) $P \subset M, P \in \mathcal{M} \Rightarrow f$ meritelna na P
(ii) f je meritelna na $M_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbf{N}$, potom f je meritelna na $\bigcup M_i$
(iii) $f + g, \alpha f, fg, \frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ jsou meritelne tam, kde vyrazy maji smysl
(iv) $f^+, f^-, |f|$ meritelne na M, $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ jsou meritelne
(v) $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_n f_n, \liminf_n f_n, \sum f_n$ jsou meritelne tam, kde to ma smysl
(vi) $F \in C(M), M \in \mathcal{M} \Rightarrow F$ meritelne
(vii) $F : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ spojita, $f_1, \ldots, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ meritelne, pak $F(f_1, \ldots, f_n) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je meritelna

NOTE 3.2.16. Skladani $f \bullet g$?
Slozeni dvou meritelnych funkci **nemusi** byt funkce meritelna. Dokonce plati, ze kazda realna funkce se da napsat jako slozeni dvou meritelnych funkci

.

NOTE 3.2.17. Meritelne funkce jsou napr.: spojite, lisici se od nich na mnozine miry 0, operace nad nimi krome skladani, atd.
Nemeritelne funkce a mnoziny lze konstruovat pouze z axiomu vyberu /*??*/ $\Rightarrow$ umluva: Vsechno bude meritelne

3.3. Lebesgueův integral a jeho zakladni vlastnosti

napady: $\int f = \inf_{g \in C; g \geq f} \int g$
problem $\int_0^1 D(X) = 1$
$\int_0^1 (1 - D(X)) = 1$ a takze neni linearni

DEFINITION 3.3.1. Funkce s na mnozine M se nazyva **jednoducha**, jestlize
(i) je definovana s.v. na M
(ii) nabyva jen konecne mnoha, a to konecnych hodnot
/*schody, po castech konstantni*/

NOTE 3.3.2. (i) s - simple, schodovita
(ii) s je jednoducha $\Rightarrow s = \sum c_j \chi_{A_j}$, kde $c_j \in \mathbf{R}, A_j$ jsou disjunktni mnoziny
(iii) s je meritelna $\Leftrightarrow \forall A_j$ jsou meritelne mnoziny

DEFINITION 3.3.3. Necht $s = \sum_{i=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$ (TODO: znacka χ) je meritelna, nezaporna jednoducha funkce.

Pak **lebesgueovym integralem** funkce s nazveme cislo

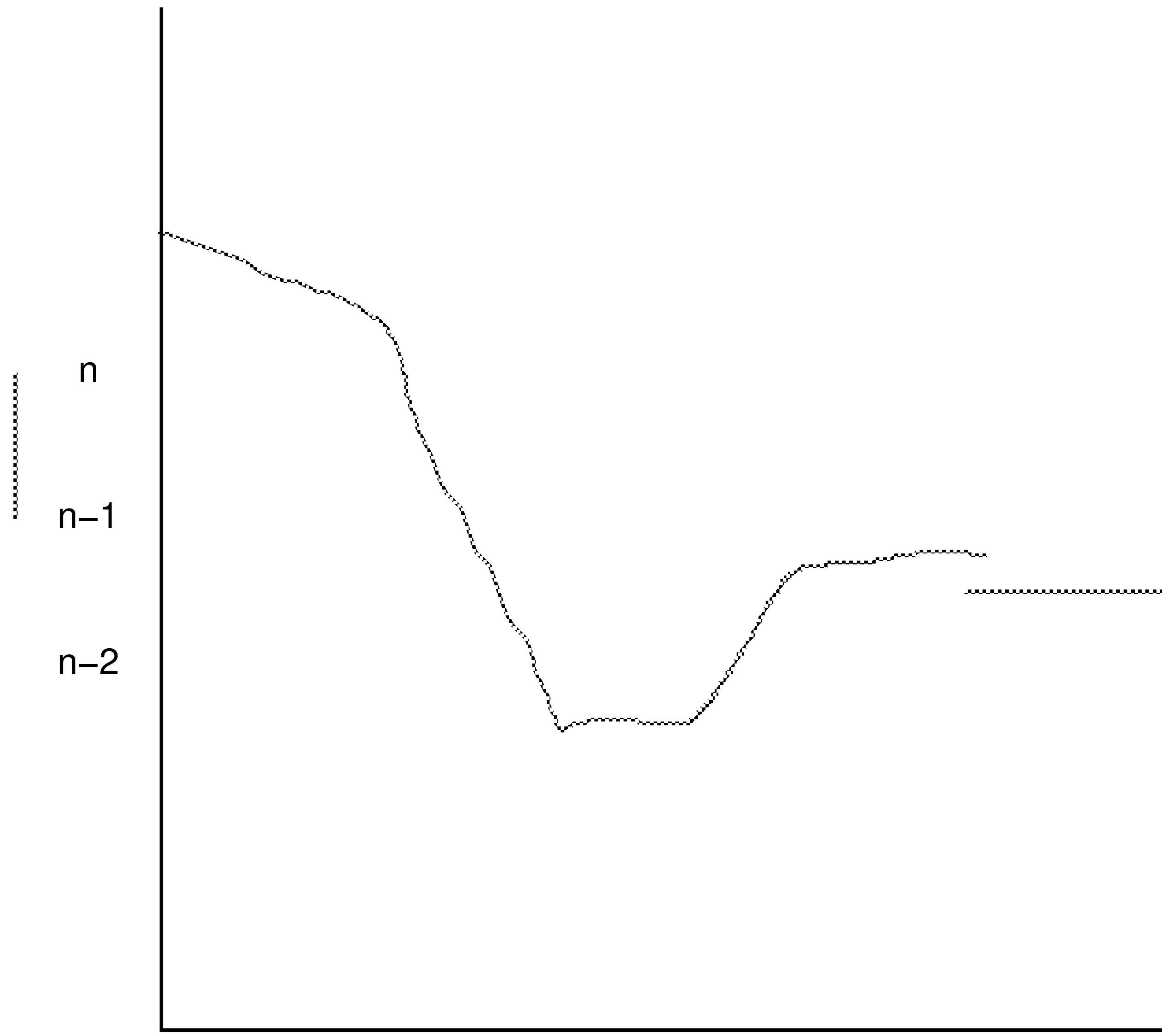
$$(L) \int_M s(x)\ dx = \sum_{i=1}^{N} c_j \mu(A_j)$$

THEOREM. *5. (o aproximaci jednoduchymi funkcemi)*
Necht f je realna funkce definovana s.v. na mnozine $M \subset \mathbf{R^n}$.
Potom $\exists$posloupnost jednoduchych funkci $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ takova, ze $s_n \to f$ vsude na $M \cap \mathcal{D}(f)$ (bodove)
Navic: (i) Je-li f nezaporna, pak s_n lze volit ≥ 0 a tak, aby $s_n \nearrow f$
(ii) je-li f omezena, pak s_n lze volit om. a tak, aby $s_n \overset{\to}{\to} f$
(iii) je-li f meritelna, pak s_n lze volit meritelne

DŮKAZ. (naznak dukazu)
BUNO $f \geq 0$ $(f = f^+ - f^-, s_n^+ \nearrow f^+, s_n^- \nearrow f^-$, potom $(s_n^+ - s_n^-) \to f)$
Dale dodefinuji $f(x) = 0$ pro $x \notin \mathcal{D}(\{)$
def pro $n \in \mathbf{N}$

$$s_n(x) = \begin{cases} n\, x : f(x) > n \\ \frac{j-1}{2^n}\, x : \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}, j = 1, \ldots, n2^n \\ 0\, x \notin M \end{cases}$$

□



DŮKAZ. Potom: s_n je jednoducha
$s_n \to f$
$s_n \nearrow f$ - zjemneni
Pozadovane vlastnosti:
plynou z konstrukce □

DEFINITION 3.3.4. Necht $f \geq 0$ je meritelna funkce. Pak definujeme
(L) $\int_M f(x)\ dx = \sup_{0 \leq s \leq f} (L) \int_M s(x)\ dx$
Necht f je libovolna (nikoli nutne nezaporna) meritelna funkce.
Pak definujeme $\int_M f(x)\ dx = \int_M f^+(x)\ dx - \int_M f^-(x)\ dx$, ma-li tento rozdil smysl

NOTE 3.3.5. (i) Umluva: budeme vynechavat “(L)”

(ii) Umluva: dx znaci "integraci dle Leb. miry"
$dx = d\mu = d_{\mu_n(x)}, \dots$
(iii) Konvence: "$0\infty = 0$" (integral z libovolne meritelne funkce pres mnozinu miry $0 = 0$)
(iv) Rikame, ze $\int f(x)\ dx$ **existuje**, jestlize je definovan, tedy jestlize ten rozdil ma smysl ($\Leftrightarrow$ aspon jedno z cisel $\int f^+, \int f^+$ je konecne)
!! Rikame, ze $\int f(x)\ dx$ konverguje, jestlize existuje a je konecny ($\Leftrightarrow$ obe cisla $\int f^+, \int f^+$ jsou konecna)
(vi) (!) $\int f$ konverguje $\Leftrightarrow \int |f|$ konverguje (neplati pro Newtonuv)
(vii) Z uvedeneho plyne, ze kazda meritelna **nezaporna** funkce ma Leb. integral, ovsem ne kazda meritelna funkce ma Leb. integral

Znaceni. $f \in L(M)$, jestlize $\int_m f$ konverguje
$f \in L^*(M)$, jestlize $\int_m f$ existuje

EXAMPLE 3.3.6. (i) x
$\int_{-1}^{1} x = \int_{-1}^{1} {}^{+} - \int_{-1}^{1} {}^{-} = 0$
$\int_{-1}^{\infty} x = \infty$
$\int_{-\infty}^{\infty} x$ neexistuje
(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} D(x)\ dx = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} (1 - D(x))\ dx = 1$
(iii) $\int_0^{\infty} \sin x\, dx$ neexistuje
$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx = \infty - \infty$ neexistuje (avsak $\exists$ jako Newtonuv!)

THEOREM. *6. (o existenci a konvergenci Leb. integralu)*
(i) $f \le g$ s.v. na M,
$\exists \int_M g < \infty \Rightarrow \exists \int_M f < \infty$
$\exists \int_M f > -\infty \Rightarrow \exists \int_M g > -\infty$
(ii) (policajti) $g \le f \le h$ s.v. na M, $g, h \in L(M)$, pak
$f \in L(M)\ \&\ \int_M g \le \int_M f \le \int_M h$
(iii) (konstantni policajti)
$c_1 \le f \le c_2$ *s.v. na* $M, \mu(M) < \infty$
$\Rightarrow c_1\mu(M) \le \int_M f \le c_2\mu(M)$
(iv) (integrabilni majoranita?) !
$|f| \le g$ *s.v. na* M, $g \in L(M)$
$\Rightarrow f \in L(M), \int_m |f| \le \int_M g$

.

THEOREM. *7 (limitni srovnavaci kriterium)*
$f, g \ge 0$, spojite na $[a, b)$, $-\infty < a < b \le \infty$
Necht $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$
(i) (!) Je-li $A \in (0, \infty)$, pak $\int_a^b f$ konverguje $\Leftrightarrow \int_a^b g$ konverguje
(ii) Je-li $A = 0$, pak $\int_a^b g$ konverguje $\Rightarrow \int_a^b f$ konverguje
(iii) Je-li $A = \infty$, pak $\int_a^b g$ diverguje $\Rightarrow \int_a^b f$ diveguje
analogicky pro $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}, f, g \ge 0$, *spoj na* $(a, b]$

DŮKAZ. technicky □

potrebujeme srovnavaci funkce, ale pro to potrebujeme:

THEOREM. *8. (porovnani Newtona a Lebesguea)*
$f \geq 0, f$ spojita na $(a,b), -\infty \leq a < b \leq \infty$
Potom $(L)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx$ (tj. oba existuji a rovnaji se; pripoustime $\int = \infty$)

DŮKAZ. (naznak) /*∃ ze spojitosti a monotonnost F, = pro $\forall[\alpha,\beta]$ z riemanovskosti a dopiplat limity*/
(i) $f \geq 0$, spoj $\Rightarrow$ meritelna $\Rightarrow f \in L^*(a,b)$
(ii) zvol $C \in (a,b)$, definuj: $F(x) = (R)\int_c^x f(t)\,dt, x \in (a,b)$
Muzeme, nebot $f \in C(c,x)$
Potom $F\prime = f$ na (a,b), F je neklesajici
tedy $\exists F(b-), F(a+)$ /*$F(c) = 0$*/
?$\underbrace{F(b-)}_{\geq 0} - \underbrace{F(a+)}_{\leq 0} \in [0,\infty] \Rightarrow f \in \mathcal{N}(a,b)$ (integral nemusi konvergovat)
(iii) $(N)\int = (L)\int$
Zvolim $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Potom:
$(N)\int_\alpha^\beta \overset{(2.semestr)}{=} (R)\int_\alpha^\beta \overset{*}{=} (L)\int_\alpha^\beta$ (*: z definic integralu - riemannovske dolni soucty = aproximace jednoduchymi funkcemi)
Vime, ze $\underbrace{\lim_{x\to b-}(N)\int_\alpha^x f(t)\,dt}_{=\lim_{x\to b-}(L)\int_\alpha^x} = (N)\int_\alpha^b f(t)\,dt$
??-zbyva $\lim_{x\to b-}(L)\int_\alpha^x f(t)\,dt \overset{??}{=} (L)\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ (pozdeji - Lewiho veta)
analogicky pro $\int_a^\beta \ldots$ □

NOTE 3.3.7. veta neni zformulovana nadoraz - predpoklady lze oslabit

THEOREM. *9. (srovnavaci skaly)*
(i) $\int_0^K x^\alpha\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > -1 \forall K \in (0,\infty)$
(ii) $\int_\delta^\infty x^\alpha\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha < -1 \forall \delta \in (0,\infty)$
Analogicky pro $\int_a^K (x-a)^\alpha, \int_\delta^b (b-x)^\alpha$
(iii) $\int_0^K x^\alpha |\log x|^\beta\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$bud $\alpha > -1$ nebo $\alpha = -1 \& \beta < -1$
(iv) $\int_\delta^\infty x^\alpha |\log x|^\beta\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$bud $\alpha < -1$ nebo $\alpha = -1 \& \beta < -1$

DŮKAZ. Spocitej Newtona a pouzij V8 □

NOTE 3.3.8. (i) $\int_0^\infty x^\alpha\,dx$ nekonverguje nikdy
(ii) $\int_0^\infty x^\alpha |\log x|^\beta\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha = -1 \& \beta < -1$

3.3.1. shrnuti vlastnosti Lebesgueova integralu.

THEOREM. *10. (vlastnosti Lebesgueova integralu)*

3.3.1.1. *monotonie.*

(1) $f, g \in L^*(M), f \leq g$ s.v. na $M \Rightarrow \int_M f \leq \int_M g$
(2) $f, g \in L^*(M), f = g$ s.v. na $M \Rightarrow \int_M f = \int_M g$ (dokonce v teorii L.I. se pracuje s tridami funkci rovnymi skoro vsude)

NOTE 3.3.9. Implikace se nedaji obratit

3.3.1.2. *absolutni konvergence.*

(1) $f \in L(M) \Leftrightarrow |f| \in L(M)$, navic $\left|\int_M f\right| \leq \int_M |f|$
(2) $f \in L^*(M) \Rightarrow |f| \in L^*(M)$, navic $\left|\int_M f\right| \leq \int_M |f|$

NOTE 3.3.10. neda se obratit - $f(x) = x$ na $(-\infty, \infty)$

3.3.1.3. *zavislost na intergracnim oboru.*

(1) $\int_M f$ konverguje $\Rightarrow$ f ma s.v. na M konecne hodnoty
(2) $f \geq 0, P \subset M \Rightarrow \int_P f \leq \int_M f$

NOTE 3.3.11. neplati bez predpokladu nezapornosti

(1) $A_m \subset A_{m+1}, A = \cup A_m,\ f \in L^*(A) \Rightarrow \lim m \int_{A_m} f = \int_A f$ (to se pouziva pro zobecneny L$\int$)
(2) $A_m \supset A_{m+1}, A = \cap A_m,\ f \in L(A_1) \Rightarrow \lim m \int_{A_m} f = \int_A f$

NOTE 3.3.12. bez $f \in L(A_1)$ to neplati - napr. $f \equiv 1, A_n = [n, \infty)$

(1) $f \in L^*(M) \cap L^*(P)$, potom $f \in L^*(M \cup P) \Leftrightarrow \int_M f + \int_P f$ ma smysl
(2) $f \in L(M) \cap L(P) \Rightarrow f \in L(M \cup P)$

3.3.1.4. *nulovost funkce (s.v.)*

(1) $f \geq 0$ s.v. na M, $\int_M f = 0 \Rightarrow f = 0$ s.v. na M (hodi se v teorii miry ..)
(2) $\int_A f = 0 \forall A \subset M$ mer. $\Rightarrow f = 0$ s.v. na M

3.3.1.5. *linearita.*

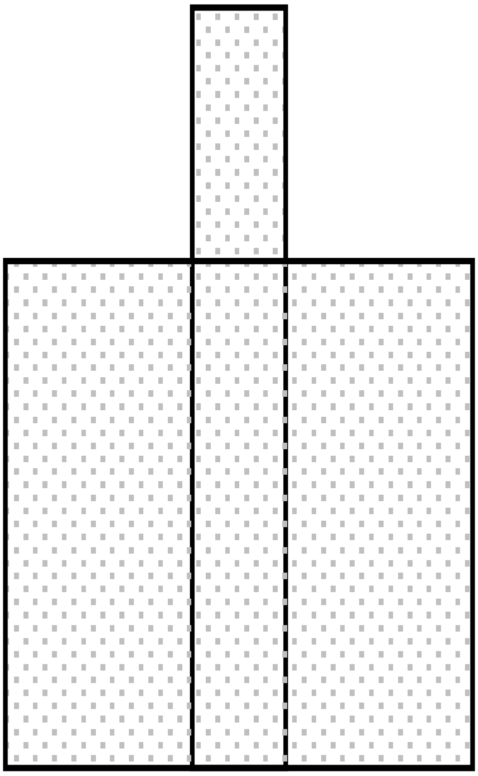
(1) $\int_M (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_M f + \beta \int_M g$, ma-li prava strana smysl

DŮKAZ. bez dukazu () $\square$

3.4. limitni prechody pro lebesgueuv integral

chceme: $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx$
proc? Neumime $\int_a^b f(x)\ dx$ je-li taylor $= \int_a^b a_n x^n\ dx = \sum_{i=1}^{\infty} a_n \int_a^b x^n\ dx$
Nejprve $\int_a^b \lim f_n(x)\ dx \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx$
kdy a proc nejde.

(1) rostouci komin $f_n(x) = \frac{n}{2} \chi_{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)}(x)$



$\lim_{n\to\infty}\int f_n = 1 \forall n, f_n \to 0, \int \lim f_n(x) = 0$
(2) prejeta zizala $z_n(x) = \frac{2}{n}\chi_{(-n,n)}(x)$
$\lim_{n\to\infty}\int z_n(x)\ dx = 1,\ z_n \rightrightarrows 0,\ \int_{-\infty}^{\infty}\lim = 0$
(3) uprk hmoty na vychod
____/____, ________/____, ...
$\lim\int f_n = 1, \int \lim f_n = 0$
(3) vysledna funkce $\notin L^*$ $f_n(x) = (x)\chi_{(-n,n)}$

Theorem. *11. (Leviho o mon. konvergenci pro limity, typ I)*
Necht $f \geq 0, f_n \nearrow f$ *s.v. na* M
Potom $\lim_{n\to\infty}\int_M f_n(x)\ dx = \int_M f(x)\ dx$
(tj. $f \in L^*(M)$ *a plati rovnost)*

Důkaz. (naznak)
$f \geq 0, f = $ limmeritelnych funkci $\Rightarrow f$ je meritelna $\Rightarrow f \in L^*(M)$
$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ pro $\forall n$ a s.v. $x\ /\int_M$
$$\Rightarrow \underbrace{\int_M f_n(x)\ dx}_{\gamma_n} \leq \underbrace{\int_M f_{n+1}(x)\ dx}_{\gamma_{n+1}} \leq \underbrace{\int_M f(x)\ dx}_{A}$$
γ_n - neklesajici posloupnost $\Rightarrow \exists\gamma = \lim\gamma_n, \gamma \leq A$
Zbyva dokazat: $\gamma \geq \int_M f(x)\ dx$ (tezsi)
Lze dokazat (technicke)
$\forall s$ jedn., $0 \leq s \leq f$ s.v., $\forall c \in (0,1)$ plati

$\gamma \geq c \int_M s(x)\ dx\ /\lim_{c\to 1-}$
$\Rightarrow \gamma \geq \int_M s(x)\ dx\ /\sup_{0\leq s\leq f}$
$\Rightarrow \gamma \geq \int_M f(x)\ dx$ □

THEOREM. *11. (Levi pro limity, typ II)*
$f_n \geq 0, f_n \nearrow f$, *s.v. na M*
$\lim_{n\to\infty} \int_M^\infty f_n(x)\ dx = \int_M f(x)\ dx$

DŮKAZ. ss □

THEOREM. *12. (Levi pro rady, typ I)*
$f_n \geq 0, f_n \nearrow f$, *s.v. na M*
$\int_M \sum_{i=1}^\infty f_n(x)\ dx = \sum_{i=1}^\infty \int_M f_n(x)\ dx$

DŮKAZ. dusledek V11 - posloupnost castecnych souctu je neklesajici □

NOTE 3.4.1. V12 neplati, jeslize nahradime $\nearrow$ konvergencí $\searrow$
$f_n(x) \equiv \frac{1}{n}$ na $(-\infty,\infty)$, pak $f_n \to f \equiv 0$
ale $\forall n \int_{-\infty}^\infty = \infty, \int_{-\infty}^\infty = 0$
Nejde to proto, ze ve V12 ma identicky nulova funkce funkci hlidace zdola.

EXAMPLE 3.4.2. $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\, dx$
konverguje? v ∞ prebije, u 0 je to prevracena zakladni limita
geom. rada: $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^\infty x^k, x \in (-1,1)$
$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\, dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}x}{1-e^{-x}}\, dx = \int_0^\infty e^{-x}x \sum_{k=0}^\infty \left(e^{-x}\right)^k\ dx$
$= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \underbrace{e^{-x(k+1)}x}_{\geq 0}\ dx \Rightarrow$ lze lewi
$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty e^{-x(k+1)}x\, dx$

$$\text{(per partes)} = \sum_{k=0}^\infty \left(\overbrace{\left[-\frac{e^{-x(k+1)}}{k+1}x\right]_0^\infty}^{0} + \overbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-x(k+1)}}{k+1}}^{\frac{1}{(k+1)^2}} \right)$$

$= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$ TODO–> kucharka

THEOREM. *13. (Levi pro rady, typ II)*
$f_n \nearrow f$ *s.v. na M*
$f_1 \geq g$ *s.v. na M*, $\int_M g > -\infty$ *(g je nyni "hlidac zdola")*
Potom $\int_M \sum_{n=1}^\infty f_n(x)\ dx = \sum_{n=1}^\infty \int_M f_n(x)\ dx$ *(tj V11 pro* $s_n = f_1 + \ldots + f_n$*)*

DŮKAZ. $\widetilde{f_n} = f_n - g$ + Levi I pro $\widetilde{f_n}$ □

NOTE 3.4.3. plati analogicke tvrzeni pro $f_n \searrow f, f_1 \leq g, \int g < \infty$ (g -> "hlidac shora")

Ukazuje se, ze lze prehodit lim a $\int$m je-li konvergence ne (nutne) monotonni, ale je treba najit hlidace:

THEOREM. *14. (Lebesgue o (konvergentni) majorante)*
$f_n \to f$ *s.v. na M*
$\exists g \in L(M), |f_n(x)| \leq g(x)\, \forall n \in \mathbf{N}$, *s.v. na M*
Potom $\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\ dx = \int_M f(x)\ dx$

DŮKAZ. Fatouovo lemma

LEMMA. *(Fatuo)*
(i) $f_n \in L^*M, \exists g : \int g > -\infty, g \leq f_n$
Potom $\int_M \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\ dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\ dx$
(ii) $f_n \in L^*M, \exists g : \int g < \infty, g \geq f_n$
Potom $\int_M \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\ dx \geq \limsup_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\ dx$

$\int_M \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx = \int_M \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\ dx$ dle F1 $\leq \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\ dx$
$\leq \limsup_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\ dx$ dle F2 $\leq \int_M \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\ dx = \int_M \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx$
$\Rightarrow$vsude jsou rovnosti $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_M f_n = \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n = \limsup_{n\to\infty} \int_M f_n =$
$\int_M \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx$ □

THEOREM. *15. (Lebesgue pro rady)*
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ *s.v. na* M & $\exists g \in L(M) : \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq g(x)\, \forall n$ *s.v.* x
Potom $\int_M \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\ dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M f_i(x)\ dx$

DŮKAZ. V14 pro $s_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$ □

3.4.1. dusledek (shrnuti). plati: $\int_M \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M f_n(x)\ dx$, jestlize je splnena aspon 1 z nasl. podminek:
(i) $f_n \geq 0$ (Levi)
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_M |f(x)|\ dx < \infty$ (hruby Lebesgue)
(iii) $f_n(x) = (-1)^n g_n(x), g_1 \geq g_2 \geq \ldots > 0, g_n \searrow 0 \& g_1 \in L(M)$ (alternujici Lebesgue)
(iv) $g \in L(M) : \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq g(x)$

EXAMPLE 3.4.4. (zradne plus)
$I = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x+1}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx = \int_0^{\infty} \left(-e^{-x}\right)^k\ dx = \int_0^{\infty} xe^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-e^{-x}\right)^k\ dx =$
$\int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-x(k+1)} x\, dx$ - nejsou $\geq 0 \Rightarrow$ no Levi
Hledame vhodne g, napr. podle (ii):
$\left|\sum f_k(x)\right| \leq \sum |f_k(x)| = g(x)$
$g(x) = \sum e^{-x(k+1)} x = e^{-x} x \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-x}\right)^k = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x-1} \in L(M)$
$\Rightarrow I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\infty} e^{-x(k+1)} x\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$

DCV:.
(1) $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos\left(\sqrt{x}\right)\ dx$ $\left(\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k\right.$ - vsimnete si, ze lze pouzit (2), ne vsak (3)
(2) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^k}\, dx$, vsimnete si, ze lze uzit (3), ale ne (2)

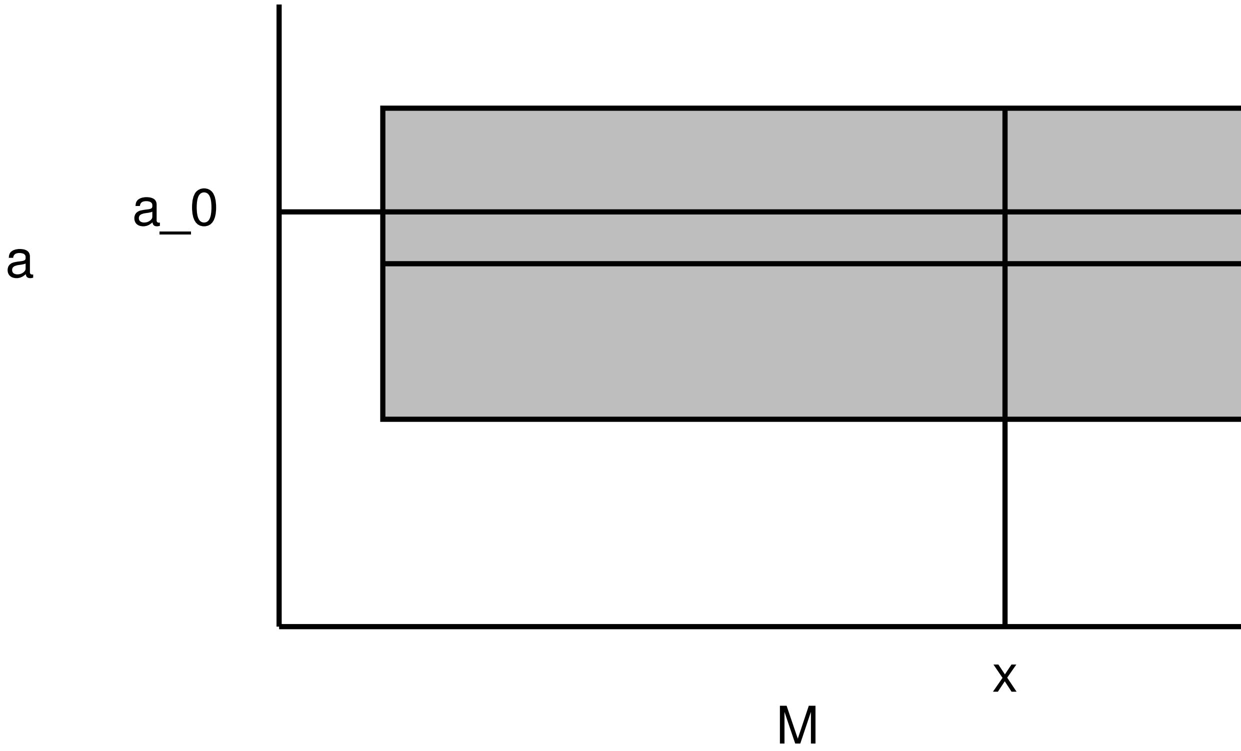
3.5. integraly s parametrem

umime prehazovat $\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\ dx = \int_M \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx$ (x, n) - diskretni
zobecneni: chceme pracovat s funkcemi $f(x, \alpha)$ $x \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathbf{R}^m$
definicni obor: $M \times A \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{m+n}$
$f : M \times A \to \mathbf{R}$
Definujeme $F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha)\ dx$

EXAMPLE. Gamma funkce $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}$, $s \in (0, \infty)$
Beta funkce $\mathcal{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\ dx$, $p, q > 0$

takze udelame vety na limity, derivace a podobne legrace.

THEOREM. *16. (o limite)*
$f : M \times A \to \mathbf{R}$, α_0 *hromadny bod mnoziny A*
Necht
(i) $\forall\alpha \in \mathcal{P}(\alpha_0)$ *je funkce* $f(x,\alpha)$ *meritelna (nekdy taky* $f(.,\alpha)$*) /*vodorovny rezy*/*
(ii) pro s.v. $x \in M$ $\exists$*vlastni* $\lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha) = \varphi(x)$ */*svisly rez*/*
(iii) (!!) $\exists g \in L(M)$ *tak, ze* $|f(x,\alpha)| \le g(x) \forall\alpha \in \mathcal{P}(\alpha_0)$ *s.v.* $x \in M$ *(integrabilni majoranta)*
Potom $\lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha) = \int_M \varphi(x)\,dx$ *(tj. prehozeni limity a integralu)*



DŮKAZ. (i)$|f(x,\alpha)| \le g(x) \Rightarrow f(x,\alpha) \in L(M)\,\forall\alpha \in \mathcal{P}(\alpha_0)$
(ii) $|\varphi(x)| = \lim_{\alpha\to\alpha_0} |f(x,\alpha)| \le g(x) \in L(M) \Rightarrow \varphi \in L(M)$
/*zkombinujeme 2xheineho a lebesgueovu vetu*/
Heine pro F: $\lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha) = y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = y \forall \{a_n\}$ $(\alpha_n \to \alpha_0, \alpha_n \ne \alpha_0 \forall n)$
Vezmeme nejakou takovou posloupnost $\{\alpha_n\}$.
Potom $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \int_M f(x,\alpha_n)\,dx =^{(\text{Lebesgue})} \int_M \lim_{n\to\infty} f(x,\alpha_n)\,dx$
$=^{(\text{Heine pro } f)} \int_M \varphi(x)\,dx$
$\Rightarrow^{(\text{Heine pro } F)} \lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha) = \int_M \varphi(x)\,dx$ □

THEOREM. *17. (o spojitosti)*
$f : M \times A \to \mathbf{R}, F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,dx$ *a necht*

(i) $\forall\alpha \in A$ *je* $f(x,\alpha)$ *meritelna na* M $(f(.,\alpha))$
(ii) s.v. $x \in M$ *je* $f(x,\alpha)$ *spojita na* A $(f(x,.))$
(iii) (!!) $\exists g \in L(M) : |f(x,\alpha)| \le g(x)\,\forall\alpha \in A$ *s.v.* $x \in M$

DŮKAZ. plyne z V16 az na hromadny bod:
Jestlize je a_0 izolovany bod (neni hromadny), potom F je v α_0 automaticky spojita. □

THEOREM. *18. (o derivaci) (!)*
*/*prehazovani integralu a derivace*/*
$A =$ *otevreny interval v* $\mathbf{R}$
$F : M \times A \to \mathbf{R}, F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,dx$ *a Necht:*
(i) $\forall\alpha \in A$ *je* $f(x,\alpha)$ *meritelna na* M $(f(.,\alpha))$
(ii) $\exists$*vlastni* $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,\forall\alpha \in A$*, pro s.v.* $x \in M$ *(!! podle* α*)*
(iii) $\exists g \in L(M) : \left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\right| \le g(x)\,\forall\alpha \in A$*, pro s.v.* $x \in M$
(iv) $\exists\alpha_0 \in A : f(x,\alpha_0) \in L(M)$ *(zde* $f(x,\alpha_0) = f(.,\alpha_0)$ *je funkce promenne* x*)*
Potom
$\forall\alpha \in A : f(x,\alpha) \in L(M)$ *a* $F'(\alpha) = \int_M \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx$

DŮKAZ. **konvergence**:
$|f(x,\alpha)| = |f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0) + f(x,\alpha_0)| =$
(protoze funkce ma vlastni derivaci podle α $(\frac{\partial f}{\partial\alpha})$ a tedy je na A spojita a tedy muzu pouzit Lagrangeovu vetu o stredni hodnote na $[\alpha_0,\alpha]$)
$= \left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\xi)(\alpha-\alpha_0) + f(x,\alpha_0)\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\xi)(\alpha-\alpha_0)\right| + |f(x,\alpha_0)|$
/*ξ nezajima protoze (iii) $\forall\alpha$*/
$\le |\alpha-\alpha_0|\,g(x) + |f(x,\alpha_0)| \in^{(\text{podle iii\&iv})} L(M)$
derivovani:
(Heine, Lebesgue, Lagrange)
$F'(\alpha) = \lim_{t\to 0}\frac{F(\alpha+t)-F(\alpha)}{t}$
Necht $t_n \to 0, t_n \ne 0\forall n$. Potom $\lim_{n\to\infty}\frac{F(\alpha+t_n)-F(\alpha)}{t_n} =^{(\text{linearita } \int)} \lim_{n\to\infty}\int_M \frac{f(x,\alpha+t_n)-f(x,\alpha)}{t_n}\,dx$
(muzeme-li prehodit, tak:)
$= \int_M \lim_{n\to\infty}\frac{f(x,\alpha+t_n)-f(x,\alpha)}{t_n}\,dx =^{(\text{Heine pro } f)} = \int_M \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx$
proc to muzeme prehodit?
$\left|\frac{f(x,\alpha+t_n)-f(x,\alpha)}{t_n}\right| =^{(\text{Lagrange})} \left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\xi_{\alpha,n})\right| \le^{(\text{iii})} g(x) \in L(M) \Rightarrow$ mohli jsme pouzit Lebesgueovu vetu
$\Rightarrow^{\text{Heine}} F'(\alpha) = \lim_{t\to 0}\frac{F(\alpha+t)-F(\alpha)}{t} = \int_M \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx$ □

EXAMPLE. (pisemkova obtiznost)
Rozhodnete, pro ktera $\alpha \in \mathbf{R}$ konverguje integral
$F(\alpha) = \int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(\alpha\tan x)}{\tan x}\,dx$
a spoctete jeho hodnotu
reseni
(1) **konvergence**
$x \to 0+ : \lim_{x\to 0+} f(x,\alpha) = \alpha$
$x \to \frac{\pi}{2}- : \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x,\alpha) = 0$
$\Rightarrow$ integral konverguje $\forall\alpha \in \mathbf{R}$
(2) Chceme spocitat $F'(\alpha) \Rightarrow$ **overime predpoklady** V18

(i) $\forall\alpha$ je $f(x,\alpha)$ spojita $\Rightarrow$ meritelna
(ii) $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)=\frac{1}{\tan x}\frac{1}{1+(\alpha\tan x)^2}\tan x=\frac{1}{1+(\alpha\tan x)^2}$
(iii) hledam g
zkusime $g(x)=\sup_{\alpha\in\mathbf{R}}\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\right|=\sup_{\alpha\in\mathbf{R}}\left|\frac{1}{1+(\alpha\tan x)^2}\right|=1\in L\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
(iv) $F(0)=0, f(x,0)\equiv 0\Rightarrow f(x,0)\in L\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
(3) **derivovani** (vypocet $F'(\alpha)$) pro $\alpha\in(0,\infty)$
$F'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\alpha^2(\tan x)^2}=^{\text{subst } t=\tan x}\int_0^\infty\frac{dt}{(1+\alpha^2t^2)(1+t^2)}=\frac{1}{1-\alpha^2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}+$
$-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+\alpha^2t^2}$(snad)
$=-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}[\arctan(\alpha t)]_0^\infty+\frac{1}{1-\alpha^2}[\arctan(t)]_0^\infty=\frac{\pi}{2}\frac{1-\alpha}{1-\alpha^2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1-\alpha}$
(4) **vypocet** F (integrovani podle α)
$F'(\alpha)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1-\alpha}\Rightarrow F(\alpha)=\frac{\pi}{2}\log(1+\alpha)+C$
$F(0)=0\Rightarrow C=0$
$\Rightarrow F(\alpha)=\frac{\pi}{2}\log(1+\alpha),\alpha\in(0,\infty)$
F je licha $\Rightarrow F(-\alpha)=-\frac{\pi}{2}\log(1+\alpha)$
tedy $\forall\alpha F(\alpha)=\alpha\frac{\pi}{2}\log(1+|\alpha|)$

3.5.1. navod na pocitani majorant. $F(\alpha)=\int_M f(x,\alpha)\,dx$
ke spojitosti potrebuju integrabilni majorantu $g(x)\geq|f(x,\alpha)|\,\forall\alpha, g\in L(M)$
k derivaci F' potrebuji $g(x)\geq\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\right|\forall\alpha, g\in L(M)$
3.5.1.1. $g(x)=\sup_{\alpha\in A}|f(x,\alpha)|$. - vzdy majoranta, ale ne vzdy integrovatelna neni-li $g\in L(M)$: (pro $A=(a,b)\subset\mathbf{R}$). (vycerpavani otevreneho intervalu zevnitr)
zvolime $[p,q]\subset(a,b)$ a budeme doufat, ze nova funkce $\overline{g}=\sup_{\alpha\in[p,q]}\in L(M)$
(pro derivaci analogicky)
$\Rightarrow$ podle Vosp(derivaci) $F(\alpha)$ sp. ($F'(\alpha)$) na $\alpha\in[p,q]$
$\Rightarrow F(\alpha)$ je spojita (F') $\forall[p,q]\subset(a,b)$ nebot p,q byly libovolne $\Rightarrow F(\alpha)$ je spojita (F')

POZOR! na pripady (polo)uzavreneho intervalu - tady musime krajni body vysetrit zvlast (napr. z vety o spojitosti, atd.)

3.6. aplikace a priklady

3.6.1. Gamma funkce. $\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$
vysetrime prubeh:
definicni obor (tj. konvergence). "∞" konvergentni $\forall s\in\mathbf{R}$ (srovnat s ...)
"0" $x>0$ podle srovnavaci skaly
$\mathcal{D}(\Gamma)=(0,\infty)$
spojitost. z V o spojitosti
$f(x,s)=x^{s-1}e^{-x}$ mer. v x (spoj.), spoj. v s
zvolime $[p,q]\subset(0,\infty)$ lib. - potom
$|f(x,s)|\leq\begin{matrix}x^{p-1}e^{-x}\ x\in(0,1)\\ x^{q-1}e^{-x}\ x>1\end{matrix}$
$g(x)=e^{-x}\left(x^{p-1}\chi_{\{(0,1)\}}(x)+x^{q-1}\chi_{\{(1,\infty)\}}(x)\right)\in L(0,\infty)$
$\Rightarrow$ Vo spoj. $\Gamma(s)$ je spojita pro $s\in[p,q]$
p,q lib $\Rightarrow\Gamma(x)$ je spojita na $(0,\infty)$
derivace. (i) meritelnost
(ii) $\exists\frac{\partial f}{\partial s}(x)=x^{s-1}e^{x}\log x\ \exists$ vlastni $\forall s\in(0,\infty)\,\forall x\in(0,\infty)$

(iii) majoranta - zvolime $[p, q] \subset (0, \infty)$, potom $\left|\frac{\partial f}{\partial s}(x)\right| \leq \begin{array}{c} x^{p-1} e^{-x} \log x \; x \in (0,1) \\ x^{q-1} e^{-x} \log x \; x > 1 \end{array} \in L(0, \infty)$

(iv) konvergence aspon pro 1 s: $\forall s$

$\Rightarrow$V o derivaci $\Gamma'(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \log x e^{-x}\, dx$

analogicky dalsi derivace $\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} (\log x)^k e^{-x}\, dx$

$\Rightarrow \Gamma \in C^\infty(0, \infty)$

dalsi vlastnosti. $\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x}\, dx \overset{PP}{=} [-x^s e^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty s x^{s-1} e^{-x}\, dx$

$\Rightarrow \Gamma(s+1) = s\Gamma(s), s \in (0, \infty)$

$\Gamma(1) = 1, \ldots \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)! \forall n \in \mathbf{N}$

prubeh. $\Gamma''(s) = \int_0^\infty x^{s-1} (\log x)^2 e^{-x}\, dx > 0 \Rightarrow \Gamma$ konvexni na $(0, \infty)$

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$

V(Rolle)$\Rightarrow \exists \xi \in (1, 2) : \Gamma'(\xi) = 0, \Gamma'$ rostouci $\Rightarrow \Gamma' < 0$ na $(0, \xi)$, > 0 na (ξ, ∞)

$\Rightarrow \Gamma$ je klesajici na $(0, \xi)$, roustouci na (ξ, ∞)

$\Rightarrow$ v bode ξ je globalni minimum (je to bliz k 1 nez k 2)

$\lim_{x\to\infty} \Gamma(x) = \infty$ (je to rostouci a $\Gamma(n) \nearrow \infty$)

$\lim_{x\to 0+} \Gamma(x) = \infty$: $1 = \Gamma(1) = \lim_{s\to 1+}(s) = \lim_{s\to 0+} \Gamma(s+1) = \lim_{s\to 0+} s\Gamma(s) = 1 \Rightarrow \lim_{s\to 1+}(s) = \infty$

3.6.2. primitivni funkce nevyjadritelnych funkci. $G(t) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ty}(\cos t + y \sin t)}{1+y^2}\, dy$

tvrzeni: $G'(t) = \frac{\sin t}{t}$

$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-(-y)e^{-ty}(\cos t + y \sin t) - e^{-ty}(-\sin t + y \cos t)}{1+y^2} = \frac{e^{-ty} \sin t (y^2+1)}{1+y^2} = e^{-ty} \sin t$

majoranta ($\forall t$)

(k 0 nemuzem - identicka 1 neni $\in L$)

zvolim $p > 0$, pak $\forall t \in [(p, \infty)]$

$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\right| \leq e^{-py} |\sin t| \leq e^{-py} \in L(0, \infty)$

$\Rightarrow G'(t) = \int_0^\infty e^{-ty} \sin t\, dy = \sin t \int_0^\infty e^{-ty}\, dy = \frac{\sin t}{t} \forall t \in [(p, \infty)]$

p lib $\Rightarrow G'(t) = \frac{\sin t}{t} \forall t \in (0, \infty)$

Dale: $G(0) = 0 \Rightarrow G(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{t}\, dt$

mozne zkusit (mozna to taky pude s $\frac{1}{t}$ najit prim. funkce k $\frac{t}{t}, e^{-t^2}, \frac{1}{\log t}$)

3.6.3. Wallisova formule. def $I_n = \int_0^\pi \sin^n x\, dx$

$I_n \searrow 0$ je videt

jak rychle? - zhruba $I_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{2\pi}$

DŮKAZ. $I_{n+1} = \int_0^\pi \sin^n x \sin x\, dx = [\sin^n x \cos x]_0^\infty + \int_0^\pi n \sin^{n-1}(x) \cos(x) \cos(x)\, dx$

$= n \int_0^\pi \sin^{n-1}(x) \left(1 - \sin^2(x)\right)\, dx = n(I_{n-1} - I_n)$

$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$ (formule ponizeni)

$I_0 = \pi, I_1 = 2, I_2 = \frac{\pi}{2}, \ldots$

$I_2 = \frac{1}{2} I_0, I_3 = \frac{2}{3} I_1, I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{2}\frac{3}{4} I_0$

nezerou se ...

zkusme $I_2 I_3 = \frac{2}{3}\frac{1}{2} I_1 I_0$

$I_3 I_4 = \frac{3}{4}\frac{2}{3} I_2 I_1 = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} I_1 I_0$

$I_n I_{n+1} = \frac{I_1 I_0}{n+1} = \frac{2\pi}{n+1}$

$\frac{2\pi}{n+1} \leq I_n I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$
$\Rightarrow \frac{n}{n+1} 2\pi \leq n I_n^2 \leq 2\pi$
policajti $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n I_n^2 = 2\pi \Rightarrow$Wallis (odmocneni) □

3.6.4. Laplaceuv integral (naznaceni). $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (gaussuv klobouk) s fubiniho vetou je to na radek. Diky Wallisovi to de elementarne

Důkaz. $e^x \geq 1 + x \forall x \in \mathbf{R}$
$\Rightarrow e^{\frac{x}{n}} \geq 1 + \frac{x}{n} \Rightarrow e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \forall x \in \mathbf{R}$
$\Rightarrow e^{-x^2} \geq \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$
z druhy strany:
$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$
$\Rightarrow \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n$
naznak laplacova intouchu (DoDo):
$\Rightarrow \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq \int_0^\infty e^{-x^2} \leq \int_0^\infty \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \, all\, dx$
leva strana: $\int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \geq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \overset{x = \sqrt{n}\cos t}{=} \frac{\sqrt{n}}{2} I_{2n+1}$
prava strana: $\int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \overset{x = \sqrt{n}t}{=} I_{2n-2}$
$\Rightarrow$ Wallis $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}}{2\sqrt{2}} I_{2n} = \frac{\sqrt{2n\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ □

3.6.5. dukaz $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$**.** $\int_0^\infty \frac{2\arctan x}{1+x^2} = \left[\arctan^2 x\right]_0^\infty = \frac{\pi^2}{4}$
$F(t) = \int_0^\infty \frac{2\arctan(tx)}{1+x^2}\,dx, t \in [0,1]$
$F(1) = \frac{\pi^2}{4}, F(0) = 0$
Overime predpoklady (DoDo)
$f'(t) = \int_0^\infty \frac{2x}{(1+x^2)(1+t^2x^2)} = \ldots\ldots\ldots = -2\log(t)\,\frac{1}{1-t^2}$
$F(t) = \int_o^t F'(s)\; ds$
$F(1) = \int_o^1 F'(s)\; ds = \int_o^1 -2\log(s)\,\frac{1}{1-s^2}\,ds$
$\overset{Lewi}{=} -2\sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty t^{2k}\log t\,dt = 2\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}$
$\Rightarrow \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
$S = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S$
$\Rightarrow S = \frac{\pi^2}{6}$

Literatura

[1] *Jiří Kopáček*, Matematika pro fyziky
[2] *Vojtěch Jarník*
[3] Milota