Programování somezujícími podmínkami

7

Roman Barták, KTIML

bartak@ktiml.mff.cuni.cz
http://ktiml.mff.cuni.cz/~bartak

Co bylo minule

Konzistence po cestě (PC)
- skládání podmínek maticovými operacemi
- algoritmus PC-1
- algoritmus PC-2
  - re-reviduje pouze cesty ovlivněné změnou domény

Směrová konzistence po cestě (DPC)
- algoritmus DPC-1

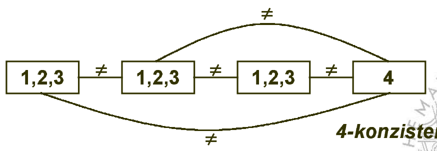
Omezení PC
- paměť, výkon, sémantika, síla

Omezená konzistence po cestě (RPC)
- spouští PC pouze když zbývá poslední podpora

k-konzistence

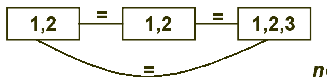
Mají AC a PC něco společného?
- AC: rozšiřujeme jednu hodnotu do druhé proměnné
- PC: rozšiřujeme dvojici hodnot do třetí proměnné
- … můžeme pokračovat

Definice: CSP je k-konzistentní, právě když libovolné konzistentní ohodnocení (k-1) různých proměnných můžeme rozšířit do libovolné k-té proměnné.



4-konzistentní graf

Silná k-konzistence



3-konzistentní graf

není 2-konzistentní graf!

Definice: CSP je silně k-konzistentní, právě když je j-konzistentní pro každé j≤k.

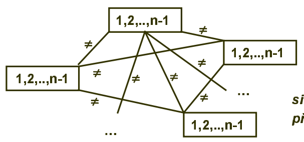
Zřejmě: silná k-konzistence ⇒ k-konzistence
Dokonce: silná k-konzistence ⇒ j-konzistence ∀j≤k
Obecně neplatí: k-konzistence ⇒ silná k-konzistence

NC = silná 1-konzistence = 1-konzistence
AC = (silná) 2-konzistence
PC = (silná) 3-konzistence
- někdy se říká *silná konzistence po cestě*, pokud NC+AC+PC

Jak velké *k* potřebujeme?

Máme-li graf s *n* vrcholy, jak silnou konzistenci potřebujeme abychom našli řešení?

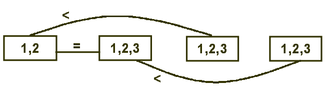
Silnou n-konzistenci pro graf s *n* vrcholy!
- n-konzistence nestačí - viz předchozí příklad
- silná k-konzistence pro k<n také nestačí



graf s n vrcholy domény 1..(n-1)

silně k-konzistentní pro každé k<n přesto nemá řešení

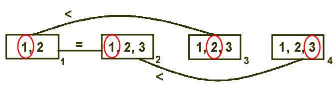
A co tento graf?



Stačí nám pouze (D)AC! Protože se jedná o strom.

Řešení bez navracení

Definice: CSP problém vyřešíme bez navracení, pokud při nějakém uspořádání proměnných můžeme pro každou proměnnou vždy najít hodnotu kompatibilní s již ohodnocenými proměnnými.

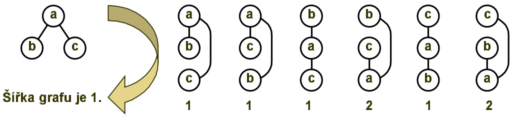


Jak zjistit úroveň konzistence potřebnou pro daný graf?

Pozorování:
- proměnná musí být kompatibilní z již ohodnocenými proměnnými
  - tj. s tolika proměnnými, kolik má „zpětných" hran
- pro *k* zpětných hran potřebujeme (*k*+1)-konzistenci
- je-li *m* maximum počtu zpětných hran pro všechny vrcholy, stačí nám silná (*m*+1)-konzistence
- při různém uspořádání vrcholů je počet zpětných hran různý
- samozřejmě hledáme uspořádání s nejmenším *m*

Šířka grafu

Uspořádaný graf je graf s lineárním uspořádáním vrcholů.
Šířka vrcholu v uspořádaném grafu je počet hran vedoucích z tohoto vrcholu do předchozích vrcholů.
Šířka uspořádaného grafu je maximum z šířek jeho vrcholů.
Šířka grafu je minimum z šířek všech jeho uspořádaných grafů.




```
procedure MinWidthOrdering((V,E))
    Q ← {}
    while V not empty do
        N ← select and delete node with the smallest #edges from (V,E)
        enqueue N to Q
    return Q
end MinWidthOrdering
```

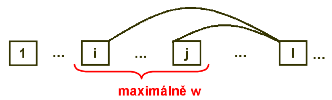

Šířka grafu a stupeň konzistence

Tvrzení: Pokud je graf podmínek silně k-konzistentní a k>w, kde w je šířka grafu podmínek, potom existuje uspořádání proměnných pro vyřešení CSP bez navracení.

Důkaz:

graf má šířku w, tj. existuje uspořádaný graf s touto šířkou
speciálně, počet zpětných hran pro každou proměnnou je max. w
proměnné ohodnocujeme v pořadí uspořádání grafu
nyní, pokud ohodnocujeme proměnnou:

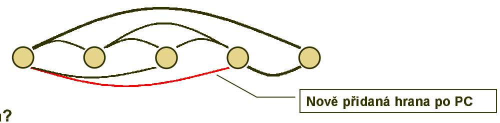
- musíme najít hodnotu kompatibilní se všemi již ohodnocenými proměnnými, které jsou s proměnnou spojené podmínkou (hranou)
- nechť takových proměnných je m, potom m ≤ w
- graf je (m+1)-konzistentní, tedy taková hodnota musí existovat



Obecná směrová konzistence

AC (silná 2-konzistence) stačí na stromové grafy (šířka 1).
Jak je to s PC a vyššími typy konzistence?

PC mění strukturu grafu - přidává nové hrany!
Tedy, pokud vezmeme graf šířky 2 a provedeme PC, můžeme zvětšit šířku grafu!



Co s tím?

Pozorování 1:

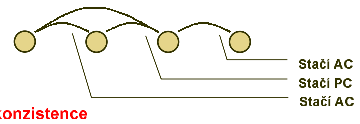
• na stromy nám stačí DAC (děláme ve směru ke kořenu)

Definice: CSP je směrově k-konzistentní při nějakém uspořádání proměnných, právě když libovolné konzistentní ohodnocení (k-1) různých proměnných můžeme rozšířit do libovolné k-té proměnné, která je v uspořádání za touto (k-1)-ticí.

Adaptivní konzistence

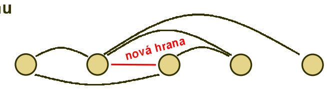
Pozorování 2:

– v celém grafu nepotřebujeme všude stejnou konzistenci



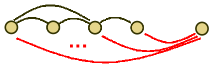
Adaptivní konzistence

- zajišťuje směrovou i-konzistenci, kde i se mění podle šířky zpracovávaného vrcholu
- vrcholy jsou zpracovávány ve směru proti uspořádání grafu
- nové hrany přibývají pouze v dosud nezpracované části
- výslednou topologii (šířku) grafu lze zjistit před spuštěním algoritmu

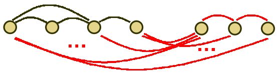


(i,j)-konzistence

Při k-konzistenci rozšiřujeme (k-1) proměnných o další proměnnou, tj. vyřazujeme (k-1)-tice, které nelze rozšířit na další proměnnou.



Můžeme ještě zesílit!



Definice: CSP je (i,j)-konzistentní, právě když libovolné konzistentní ohodnocení *i* různých proměnných můžeme rozšířit do libovolné množiny *j* nebo méně než *j* dalších proměnných.

CSP je silně (i,j)-konzistentní, právě když je (k,j)-konzistentní pro každé k≤j.

k-konzistence	= (k-1,1)-konzistence
AC	= (1,1)-konzistence
PC	= (2,1)-konzistence

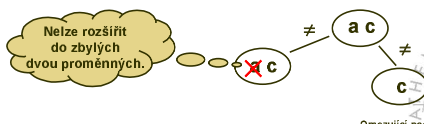
Inverzní konzistence

Je-li v (i,j)-konzistenci *i* větší než 1, musíme pracovat s *i*-ticemi, což znamená velké paměťové nároky (viz PC).
Co to zkusit naopak, tj. *i* necháme 1 a zvětšujeme *j*?
První náznak jsme již měli:
RPC je (1,1)-konzistence a občas (1,2)-konzistence

Definice: (1,k)-konzistenci nazýváme inverzní konzistencí.

Pro danou hodnotu hledáme podporu v dalších *k* proměnných.
Pokud taková podpora chybí, vyřadíme hodnotu z domény.

hranová inverzní konzistence = hranová konzistence
inverzní konzistence po cestě (PIC) = (1,2)-konzistence



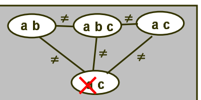
NIC (Neighbourhood Inverse Consistency)

Pozorování: Zjišťování inverzní konzistence má smysl, pokud je alespoň jedna testovací proměnná svázaná s danou proměnnou.

Můžeme zjišťovat konzistenci právě jen v okolí každé proměnné.

Definice: CSP je inverzně konzistentní pro okolí (NIC), právě když pro libovolnou hodnotu *h* libovolné proměnné *X* existuje řešení problému vzniklého z okolí *X*, které [řešení] je konzistentní s *h*.

```
procedure NIC((V,E))
  Q ← V
  while Q not empty do
    V ← select and delete a variable from Q
    deleted ← false
    for each H in D_V do
      if no solution for Neighbourhood(X) compatible with H then
        remove H from D_V
        deleted ← true
        if D_V empty then return fail
    if deleted then Q ← Q ∪ Neighbourhood(X)
  return true
end NIC
```



Bodová (singleton) konzistence

Můžeme libovolnou lokální konzistenční techniku dále posílit?

ANO! Zkusíme zda pro každou hodnotu je zbylý problém konzistentní.

Definice: CSP je bodově A-konzistentní (singleton A-consistency), kde A je libovolná konzistenční technika, právě když pro libovolnou hodnotu *h* libovolné proměnné *X* je problém omezený na X=h A-konzistentní.

Vlastnosti:

+ podobně jako NIC a RPC odstraňuje jen hodnoty z domény proměnných
+ snadná implementace
- může být časově náročnější (používat opatrně)

1) bodová A-konzistence ≥ A-konzistence
2) A-konzistence ≥ B-konzistence ⇒ bodová A-konzistence ≥ bodová A-konzistence
3) bodová (i,j)-konzistence > (i,j+1)-konzistence (SAC>PIC)
4) silná (i+1,j)-konzistence > bodová (i,j)-konzistence (PC>SAC)

Přehled konzistenčních technik

NC = 1-konzistence

AC = 2-konzistence = (1,1)-konzistence

PC = 3-konzistence = (2,1)-konzistence

PIC = (1,2)-konzistence